

II. ECOULEMENT UNIFORME DANS UNE CONDUITE DE FORME CIRCULAIRE

II.1. Introduction

L'écoulement uniforme en conduite circulaire se rencontre souvent dans de nombreux cas pratiques. La conduite circulaire est utilisée pour l'évacuation des eaux dans les domaines de l'assainissement et de l'aménagement. La figure 2.1 schématise l'écoulement uniforme de profondeur normale y_n dans une conduite circulaire de diamètre interne D .

Afin de définir la géométrie de l'écoulement dans une conduite circulaire partiellement occupée, il a été introduit le paramètre $\eta = y_n / D$, appelé paramètre de forme de la section mouillée. A titre d'exemple, la valeur $\eta = 0,5$ indique que l'écoulement occupe la moitié de l'aire de la conduite, tandis que la valeur $\eta = 1$ signifie que la conduite est entièrement remplie par l'écoulement. Le paramètre de forme η est souvent désigné sous le terme de taux de remplissage de la conduite.

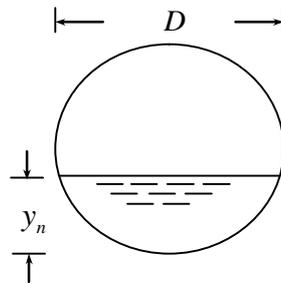


Figure 2.1 : Schéma de définition de l'écoulement uniforme en conduite circulaire

L'écoulement uniforme à surface libre dans les conduites et canaux artificiels est régi par cinq paramètres :

- Le débit volume Q .
- La dimension linéaire caractérisant la géométrie du canal. Dans le cas de la conduite circulaire qui intéresse notre étude, qu'elle soit partiellement occupée par l'écoulement ou en charge, cette dimension correspond au diamètre D .
- La pente longitudinale i du canal.
- La rugosité absolue ε caractérisant l'état de la paroi interne du canal.
- La viscosité cinématique ν du liquide en écoulement.

La bibliographie montre que l'écoulement uniforme est souvent abordé en ayant recours aux formules usuelles telles que celle de *Chézy* ou de *Manning-Strickler*. Celles-ci expriment le débit volume Q et s'écrivent respectivement :

$$Q = CA\sqrt{R_h} i \quad (2.1)$$

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (2.2)$$

Dans les relations (2.1) et (2.2), les paramètres C , n , A et R_h désignent respectivement le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy*, le coefficient de résistance à l'écoulement de *Manning*, l'aire de la section mouillée de l'écoulement et le rayon hydraulique.

Les valeurs des coefficients de résistance à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning* sont, en règle générale, des constantes évaluées par expérience, selon le cas étudié et la nature de la paroi du canal ou de la conduite. Ce sont des valeurs tabulées que l'on peut consulter dans de nombreux ouvrages spécialisés.

Au regard de la forme des relations (2.1) et (2.2), il est bien utile de constater que l'effet de la viscosité cinématique ν n'est pas considéré, ce qui laisse supposer que ces relations ne sont applicables que pour le cas de l'écoulement uniforme en régime turbulent rugueux. Les relations (2.1) et (2.2) doivent donc être utilisées avec précaution lorsque l'écoulement se situe dans les domaines de transition, lisse ou pratiquement lisse.

II.2. Caractéristiques hydrauliques et géométriques

Les caractéristiques de la conduite circulaire partiellement occupée par l'écoulement sont, en particulier :

i. L'aire de la section mouillée A , telle que :

$$A = \frac{D^2}{4} \left[\cos^{-1}(1-2\eta) - 2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)} \right] \quad (2.3)$$

Il apparaît ainsi que l'aire de la section mouillée A est fonction du diamètre D de la conduite et du paramètre de forme η .

La relation (2.3) peut s'écrire :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta)\varphi(\eta) \quad (2.4)$$

où :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1-2\eta) \quad (2.5)$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} \quad (2.6)$$

Pour une conduite circulaire entièrement remplie, correspondant à $\eta = 1$, nous pouvons déduire des relations (2.5) et (2.6) respectivement que $\sigma(\eta=1) = \pi$ et $\varphi(\eta=1) = 1$.

ii. Le périmètre mouillé P , tel que :

$$P = D \cos^{-1}(1-2\eta) \quad (2.7)$$

Ou bien :

$$P = D \sigma(\eta) \quad (2.8)$$

Le périmètre mouillé P est donc aussi fonction du diamètre D de la conduite et du paramètre de forme η .

iii. Le rayon hydraulique $R_h = A/P$, qui s'exprime, en ayant recours aux relations (2.4) et (2.8), par :

$$R_h = \frac{D}{4} \varphi(\eta) \quad (2.9)$$

II.3. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT A COEFFICIENT DE RESISTANCE CONSTANT

II.3.1. Formule de Chézy

Considérons la formule (2.1) de Chézy. En nous aidant des relations (2.3) et (2.5). Le débit volume s'exprime alors par :

$$Q = \frac{1}{8} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \sqrt{C^2 i D^5} \quad (2.10)$$

En introduisant la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^3 i}} \quad (2.11)$$

la relation (2.10) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$Q^* = \frac{1}{8} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.12)$$

La conductivité relative Q^* n'est donc fonction que du paramètre de forme η . Pour le cas de la conduite circulaire entièrement remplie, correspondant à $\eta = 1$, la relation (2.12) mène à écrire que :

$$Q_p^* = \frac{\pi}{8} \cong 0,3927 = \text{constante} \quad (2.13)$$

où l'indice " p " désigne l'état plein de la conduite.

Pour un même diamètre D , une même pente longitudinale i et pour $C = \text{constante}$, le rapport des relations (2.12) et (2.13) donne :

$$\frac{Q}{Q_p} = \pi^{-1} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.14)$$

L'un des problèmes rencontrés en pratique est la détermination de la profondeur normale y_n , à partir des valeurs connues des paramètres C , Q , D et i . Ce problème peut trouver sa solution dans la résolution de l'équation (2.12), puisque le débit relatif Q^* est une donnée dont la valeur est tirée de la relation (2.11). L'objectif est donc de déterminer la valeur du paramètre de forme η qui permettrait alors de déduire celle de la profondeur normale $y_n = \eta D$. Cependant, au regard de la forme de la relation (2.12), il apparaît clairement que le paramètre de forme η est implicite vis-à-vis de Q^* et que sa détermination nécessiterait un procédé itératif ou graphique.

L'un des objectifs de notre étude est de proposer une solution explicite à la relation (2.12), permettant de calculer, avec une précision suffisante, le paramètre de forme η et par conséquent la profondeur normale y_n . Cette démarche pourrait éventuellement suggérer de présenter une relation, également explicite, au calcul de la profondeur critique y_c .

Le dimensionnement de la conduite, c'est-à-dire le calcul de son diamètre D , est également l'un des objectifs principaux de notre étude. Le calcul du diamètre D nécessite la connaissance des quatre autres paramètres régissant l'écoulement, c'est-à-dire le coefficient C de *Chézy*, le débit volume Q , la pente longitudinale i de la conduite et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Comme le montre la relation (2.12), le calcul du diamètre D n'est pas aisé. Cette relation nécessite quelques transformations et réarrangements pour permettre de répondre à notre objectif.

Toutes les considérations que nous venons d'exposer se rapportent à la relation (2.12) et reposent sur le fait que le coefficient de résistance C de *Chézy* demeure constant, quelle que soit la valeur du paramètre de forme η . En d'autres termes, le remplissage de la conduite, provoqué par l'augmentation du débit volume Q , s'effectue à valeur constante du coefficient C . Ceci mérite d'être discuté et commenté du fait que la résistance à l'écoulement devrait en principe être affectée par les variations de la profondeur de l'écoulement. La relation (2.12) doit donc faire l'objet d'une étude particulière. Il serait ainsi intéressant d'examiner la courbe de remplissage de la conduite $\eta(Q/Q_p)$ pour $C = \text{constante}$, ainsi que celle de $\eta(Q/Q_p)$ pour C variable.

L'étude des courbes de remplissage de la conduite pour $C = \text{constante}$ et C variable devrait conduire aux relations du débit maximal Q_{\max} , correspondant à la capacité d'évacuation de la conduite. Cette étude devra mettre en évidence l'influence de la viscosité cinématique ainsi que celle de la résistance à l'écoulement sur la valeur du paramètre de forme η , notamment au passage du débit maximal.

L'étude de l'écoulement uniforme en conduite circulaire que nous envisageons de mener devra être ponctuée par des applications pratiques. Celles-ci permettront au lecteur de mieux appréhender les relations proposées et d'apprécier le degré de leur validité et de leur efficacité.

II.3.1.1. Courbe de remplissage de la conduite pour $C = \text{constante}$

La courbe de remplissage de la conduite, pour une valeur constante du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy, se traduit par la variation du paramètre de forme $\eta(Q/Q_p)$ défini par la relation (2.14). En donnant des valeurs à η , arbitrairement choisies entre 0 et 1, la relation (2.14) a permis de dresser le tableau 2.1.

Tableau 2.1 : Valeurs de $\eta(Q/Q_p)$ pour $C = \text{constante}$, calculées selon la relation (2.14).

$\eta = y_n / D$	Q / Q_p
0,10	0,02623352
0,15	0,05733124
0,20	0,09888547
0,25	0,1497216
0,30	0,20863996
0,35	0,27441175
0,40	0,34577372
0,45	0,42142142
0,50	0,5
0,55	0,58009178
0,60	0,66019853
0,65	0,73871546
0,70	0,81389076
0,75	0,88375891
0,80	0,9460203
0,85	0,99779656
0,85245	1
0,90	1,03503019
0,95	1,05041386
0,96	1,04951605
0,97	1,04661445
0,98	1,04098028
0,99	1,03087227
1	1

Il ressort du tableau 2.1 que :

- i. le rapport Q/Q_p augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage η et atteint la valeur maximale $Q_{\text{max.}}/Q_p = 1,05041386$, indiquée en gras dans le tableau 2.1, pour un taux de remplissage $\eta \cong 0,95$. La capacité d'évacuation de la conduite correspond donc au débit maximal égal à environ 1,05 fois le débit de remplissage Q_p . Au-delà de sa valeur maximale, le rapport Q/Q_p diminue avec l'accroissement du taux de remplissage η et atteint la valeur $Q/Q_p = 1$ pour le taux de remplissage $\eta = 1$. Notons également la valeur

particulière $\eta = 0,85245$, indiquée en gras dans le tableau 2.1, à laquelle correspond, sans aucune justification physique, le rapport $Q / Q_p = 1$.

ii. Pour le taux de remplissage $\eta = 0,5$, indiqué en gras dans le tableau 2.1, le débit Q vaut la moitié du débit de remplissage Q_p .

Les observations ci-dessus indiquées sont traduites graphiquement dans le système d'axes de coordonnées à divisions cartésiennes de la figure 2.2.

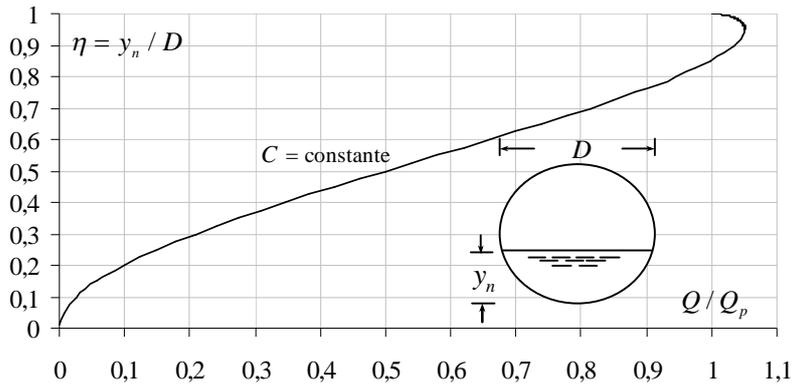


Figure 2.2 : Représentation graphique de $\eta(Q/Q_p)$ pour le coefficient de Chézy $C = \text{constante}$, selon les valeurs du tableau 2.1 calculées par la relation (2.14).

Dans la large gamme pratique $0.15 \leq \pi \leq 0.85$, correspondant à $0,0573 \leq Q / Q_p \leq 0,9977$, nos calculs ont montré que le taux de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ de la conduite pouvait s'exprimer de manière explicite par la relation :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,938\left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,52} \quad (2.15)$$

Les écarts relatifs occasionnés par l'application de la relation approchée (2.15) sont consignés dans le tableau 2.2. Nous pouvons observer d'une part que l'erreur relative maximale reste dans tous les cas inférieure à 0,4% et que les plus grands écarts sont obtenus pour les valeurs extrêmes de la gamme choisie de η d'autre part, valeurs indiquées en gras dans le tableau 2.2.

Tableau 2.2 : Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.15) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ de la conduite.

$\eta = y_n / D$	Q / Q_p	$(\eta = y_n / D)$ approché	Ecart relatifs (%)
0,15	0,05733124	0,14967554	0,22
0,20	0,09888547	0,19992175	0,04
0,25	0,1497216	0,24996879	0,01
0,30	0,20863996	0,29985817	0,05
0,35	0,27441175	0,34965773	0,10
0,40	0,34577372	0,39944695	0,14
0,45	0,42142142	0,44930952	0,15
0,50	0,5	0,49932761	0,13
0,55	0,58009178	0,54957477	0,08
0,60	0,66019853	0,60010366	0,02
0,65	0,73871546	0,65092159	0,14
0,70	0,81389076	0,70193865	0,28
0,75	0,88375891	0,75285076	0,38

II.3.1.2. Relation approchée au calcul de la profondeur normale

Cette partie de l'étude se propose d'établir une relation approchée susceptible de mener à un calcul explicite de la profondeur normale y_n , pour les valeurs connues des paramètres C , Q , D et i , et par conséquent de celle de la conductivité relative Q^* . La relation sera établie dans la large gamme pratique $0,15 \leq \eta \leq 0,85$ et devra être appliquée lorsque le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est une constante, indépendante de la variation du taux de remplissage η de la conduite. Avant d'établir cette relation, il est utile de noter que :

$$\frac{Q^*}{Q_{\max}^*} = \frac{Q}{Q_{\max}} \quad (2.16)$$

La conductivité relative Q^* est fonction du taux de remplissage η conformément à la relation (2.12). En faisant varier le taux de remplissage η dans la gamme $0 < \eta \leq 1$, la relation (2.12) a permis de dresser le tableau 2.3.

Il ressort du tableau 2.3 que la conductivité relative Q^* augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η jusqu'à la valeur maximale $Q_{\max}^* \cong 0,4125$, indiquée en gras dans le tableau, correspondant à $\eta = 0,95$. Au-delà de sa valeur maximale, Q^* diminue avec l'augmentation du taux de remplissage η . A l'état de remplissage, correspondant à $\eta = 1$, la conductivité relative prend la valeur $Q^* \cong 0,3927$.

Tableau 2.3 : Valeurs de $\eta(Q^*)$ calculées selon la relation (2.12).

$\eta = y_n / D$	Q^*	$Q^* / Q_{\max}^* = Q / Q_{\max}$
0,15	0,02251392	0,05457967
0,20	0,03883223	0,09413954
0,25	0,05879554	0,14253582
0,30	0,08193272	0,19862644
0,35	0,10776124	0,26124155
0,40	0,13578502	0,32917856
0,45	0,1654918	0,4011956
0,50	0,19634954	0,47600286
0,55	0,22780151	0,55225069
0,60	0,25925936	0,62851277
0,65	0,29009288	0,70326133
0,70	0,31961415	0,77482865
0,75	0,34705131	0,84134353
0,80	0,3715013	0,90061673
0,85	0,39183379	0,94990802
0,90	0,40645541	0,98535465
0,95	0,41249656	1
0,975	0,4100595	0,99409193
1	0,39269908	0,95200571

Les valeurs consignées dans le tableau 2.3 ont permis de tracer, sur la figure 2.3, la variation $\eta(Q^*)$. Dans le tableau 2.3, ont été aussi consignées les valeurs de Q^* / Q_{\max}^* qui correspondent également aux valeurs du rapport Q / Q_{\max} , conformément à la relation (2.15).

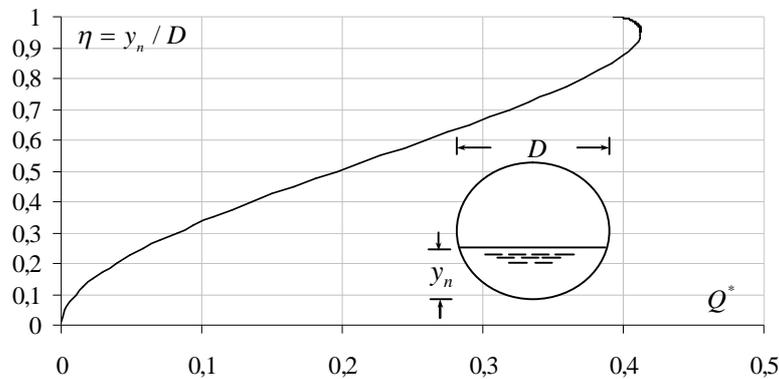


Figure 2.3 : Représentation graphique de $\eta(Q^*)$, selon la relation (2.12).

Dans la gamme pratique $0,15 \leq \eta \leq 0,85$, correspondant à $0,0225 \leq Q^* \leq 0,392$, les calculs ont montré que le taux de remplissage $\eta(Q^*)$ de la conduite pouvait s'exprimer, avec une erreur relative maximale inférieure à 0,4% seulement (Tableau 2.4), par la relation :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 1,525 Q^{*0,52} \quad (2.17)$$

Tableau 2.4 : Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.17) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q^*)$ de la conduite.

$\eta = y_n / D$	Q^*	$(\eta = y_n / D)$ approché	Ecart relatifs (%)
0,15	0,02251392	0,14966789	0,22
0,20	0,03883223	0,19991141	0,04
0,25	0,05879554	0,24995564	0,02
0,30	0,08193272	0,29984209	0,05
0,35	0,10776124	0,34963851	0,10
0,40	0,13578502	0,39942434	0,14
0,45	0,1654918	0,44928319	0,16
0,50	0,19634954	0,49929713	0,14
0,55	0,22780151	0,54953958	0,08
0,60	0,25925936	0,60006298	0,01
0,65	0,29009288	0,65087439	0,13
0,70	0,31961415	0,70188349	0,27
0,75	0,34705131	0,7527856	0,37
0,775	0,35971333	0,7779804	0,38
0,8	0,3715013	0,80278095	0,35
0,825	0,3822664	0,82689481	0,23
0,85	0,39183379	0,84985538	0,02

De même, dans la gamme pratique $0,15 \leq \eta \leq 0,85$, correspondant à $0,0546 \leq Q / Q_{\max.} \leq 0,95$, les calculs ont montré que le taux de remplissage $\eta(Q / Q_{\max.})$ de la conduite pouvait s'exprimer, avec une erreur relative maximale inférieure à 0,35% seulement (Tableau 2.5), par la relation :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,962\left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,52} \quad (2.18)$$

Tableau 2.5 : Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.18) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q / Q_{\max.})$ de la conduite.

$\eta = y_n / D$	$Q / Q_{\max.}$	$(\eta = y_n / D)$ approché	Ecart relatifs en (%)
0,15	0,05457967	0,14962823	0,25
0,20	0,09413954	0,19985778	0,07
0,25	0,14253582	0,2498875	0,04
0,30	0,19862644	0,29975869	0,08
0,35	0,26124155	0,34953885	0,13
0,40	0,32917856	0,39930712	0,17
0,45	0,4011956	0,4491467	0,19
0,50	0,47600286	0,49913912	0,17
0,55	0,55225069	0,5493571	0,12
0,60	0,62851277	0,59985209	0,02
0,65	0,70326133	0,6506297	0,10
0,70	0,77482865	0,70159754	0,23
0,75	0,84134353	0,75244791	0,33
0,80	0,90061673	0,80237682	0,30
0,825	0,92671415	0,82645058	0,18
0,85	0,94990802	0,8493662	0,07

II.3.1.3. Transformation de la relation $\eta(Q^*)$

La relation (2.12), traduisant la variation $\eta(Q^*)$, peut être transformée en introduisant la conductivité relative rapportée à la profondeur normale y_n :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 i y_n^5}} \quad (2.19)$$

Notons que :

$$Q^* = \eta^{5/2} Q_y^* \quad (2.20)$$

En ayant recours à la relation (2.20), la relation (2.12) s'écrit alors :

$$Q_y^* = \frac{1}{8} \eta^{-5/2} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.21)$$

La conductivité relation Q_y^* ne dépend donc que du taux de remplissage η de la conduite et la variation $\eta(Q_y^*)$ est représentée graphiquement, en trait discontinu, sur la figure 2.4. Celle-ci montre que la conductivité relative Q_y^* augmente lorsque le taux de remplissage η diminue. La relation (2.21) est intéressante dans la mesure où elle permettrait la détermination du taux de remplissage η , et donc celle du diamètre D de la conduite, pour les valeurs imposées des paramètres C , i , Q et y_n . Ceci revient donc à rechercher le diamètre D pour la valeur imposée de la conductivité relative Q_y^* . Pour l'état plein de la conduite, correspondant à $\eta = 1$ ou à $\sigma(\eta=1) = \pi$ et $\varphi(\eta=1) = 1$, la relation (2.21) conduit à écrire que $Q_y^* = \pi / 8 \cong 0,3927$. Ainsi, pour le taux de remplissage $\eta < 1$, la conductivité relative Q_y^* doit être telle que $Q_y^* > 0,3927$.

Cependant, la relation (2.21) montre clairement que le taux de remplissage η est implicite vis-à-vis de la conductivité relative Q_y^* . Une relation approchée de $\eta(Q_y^*)$ a été recherchée et nos calculs ont montré que :

$$\eta = \left[\frac{\sqrt{1,461(1 + 0,543 Q_y^{*2})} - 0,454 Q_y^*}{1 + 0,402 Q_y^{*2}} \right]^2 \quad (2.22)$$

La relation approchée (2.22) est applicable dans la gamme $0,01 \leq \eta \leq 0,90$, et occasion une erreur relative maximale inférieure à 0,4%.

La relation (2.22) a été également représentée sur la figure 2.4 en motifs plein et les écarts relatifs qu'elle occasionne dans la large gamme $0,01 \leq \eta \leq 0,90$ sont consignés dans le tableau 2.6. Nous pouvons ainsi observer que les écarts relatifs sont extrêmement faibles dans la gamme choisie de η , permettant alors de conclure à la fiabilité de la relation approchée (2.22). Notons que les plus grands écarts relatifs sont obtenus pour les valeurs extrêmes de la gamme de η , indiquées en gras dans le tableau 2.6.

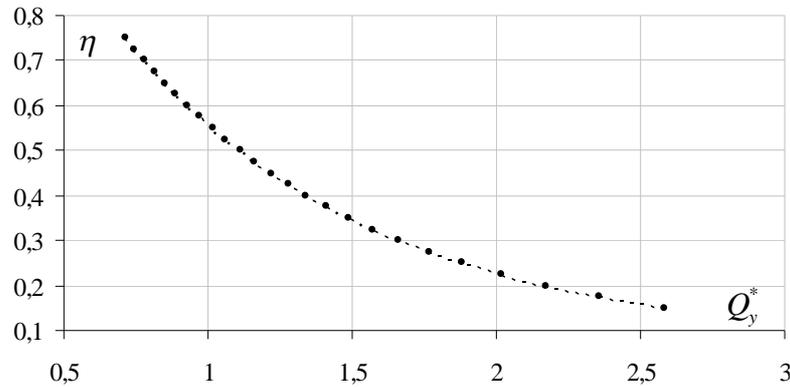


Figure 2.4 : Variation du taux de remplissage η en fonction de la conductivité relative Q_y^* .
 (- - -) : Relation (2.21), (●) : Relation approchée (2.22).

Tableau 2.6 : Ecarts relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.22) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q_y^*)$ de la conduite.

$\eta = y_n / D$	Q_y^*	$(\eta = y_n / D)$ approché	Ecarts relatifs en (%)
0,10	3,257739971	0,099871325	0,129
0,15	2,583586832	0,149960061	0,027
0,20	2,170787922	0,200088369	0,044
0,25	1,881457147	0,250216026	0,086
0,30	1,662088901	0,300308806	0,103
0,35	1,486936669	0,350339218	0,097
0,40	1,341843577	0,400287461	0,072
0,45	1,218274647	0,450142699	0,032
0,50	1,110720735	0,499904857	0,019
0,55	1,015429721	0,549587206	0,075
0,60	0,929728862	0,599220254	0,13
0,65	0,851635349	0,648857828	0,176
0,70	0,779616288	0,698587112	0,202
0,75	0,712427264	0,748546281	0,194
0,80	0,648986068	0,798958313	0,13
0,85	0,588240026	0,850204213	0,024
0,90	0,528940267	0,903014511	0,335

II.3.1.4. Exemple d'application 1

On souhaite déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans une conduite circulaire de diamètre $D = 2\text{ m}$, écoulant un débit volume $Q = 0,98\text{ m}^3/\text{s}$ sous une pente longitudinale $i = 10^{-4}$. Le coefficient de résistance à l'écoulement de Chézy est $C = 88\text{ m}^{0,5}/\text{s}$.

Solution

- i. Vérifions que la conductivité relative de la conduite Q^* est bien inférieure à la conductivité relative maximale $Q_{\max}^* = 0,41249656$:

Selon la relation (2.11), la conductivité relative de la conduite est par définition :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} = \frac{0,98}{\sqrt{88^2 \times 2^5 \times 10^{-4}}} = 0,19686496 < Q_{\max}^*$$

- ii. L'application de la relation approchée (2.17) permet de déduire que le taux de remplissage de la conduite est :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left(1,525 Q^{*0,52} \right)$$

Soit :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left(1,525 \times 0,19686496^{0,52} \right) = 0,50012363 \cong 0,50$$

La conduite considérée est donc à moitié remplie.

- iii. Par suite, la profondeur normale de l'écoulement est :

$$y_n = \eta D = 0,50012363 \times 2 = 1,00024726\text{ m} \cong 1\text{ m}$$

- iv. Au cours de cette étape, vérifions nos calculs en déterminant le débit volume Q par la formule de Chézy. Selon Chézy, le débit volume est donné par la relation (2.1), soit :

$$Q = CA\sqrt{R_h i}$$

- Selon les relations (2.5) et (2.6), les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,50012363) = 1,571043587$$

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} \\ &= 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,50012363) \times \sqrt{0,50012363 \times (1 - 0,50012363)}}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,50012363)} = 1,000157386 \cong 1 \end{aligned}$$

- L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (2.4) :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{2^2}{4} \times 1,571043587 \times 1,000157386 = 1,57129085 \text{ m}^2$$

- Le rayon hydraulique R_h est donné par la relation (2.9), soit :

$$R_h = \frac{D}{4} \varphi(\eta) = \frac{2}{4} \times 1,000157386 = 0,50007869 \text{ m} \cong 0,5 \text{ m}$$

- Le débit volume Q serait donc, selon Chézy :

$$Q = CA\sqrt{R_h} i = 88 \times 1,57129085 \times \sqrt{0,50007869 \times 10^{-4}} = 0,9778189 \text{ m}^3 / \text{s}$$

L'écart relatif entre le débit volume que nous venons de calculer et celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,23% seulement. Ceci permet de conclure à la validité des calculs que nous avons effectués.

- v. La vérification des calculs aurait pu être effectuée en déterminant le taux de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ par application de la relation (2.15), soit :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,938 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,52}$$

ou bien :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left[0,938 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,52} \right]$$

Dans cette dernière relation, le rapport Q/Q_p est $Q/Q_p = Q^*/Q_p^*$, où $Q_p^* = \pi/8$ conformément à la relation (2.13). Ainsi :

$$Q / Q_p = 0,19686496 / (\pi / 8) = 0,50131249$$

Par suite :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left[0,938 \times 0,50131249^{0,52} \right] = 0,50015418 \cong 0,50$$

Il s'agit bien de la valeur du taux de remplissage η calculée à l'étape (ii).

vi. La relation (2.18) peut également servir à la vérification des calculs, soit :

$$\sin \left(\frac{5\pi}{11} \eta \right) = 0,962 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,52}$$

ou bien :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left[0,962 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,52} \right]$$

Dans cette relation, le rapport $Q / Q_{\max.}$ est tel que $Q / Q_{\max.} = Q^* / Q_{\max.}^*$, où $Q_{\max.}^* = 0,41249656$ conformément au tableau 2.3. Ainsi :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left[0,962 \times \left(\frac{0,19686496}{0,41249656} \right)^{0,52} \right] = 0,49996525 \cong 0,50$$

Il s'agit, bien encore une fois, de la même valeur du taux de remplissage η calculée à l'étape (ii).

vii. Utilisant la relation approchée (2.22) pour évaluer le taux de remplissage $\eta(Q_y^*)$. La conductivité relative Q_y^* est, selon la relation (2.19) :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 i y_n^5}} = \frac{0,98}{\sqrt{88^2 \times 10^{-4} \times 1,00024726^5}} = 1,11294826$$

Ainsi, le taux de remplissage correspondant à cette conductivité relative est, conformément à la relation (2.22) :

$$\eta = \left[\frac{\sqrt{1,461(1 + 0,543Q_y^{*2})} - 0,454Q_y^*}{1 + 0,402Q_y^{*2}} \right]^2$$

$$= \left[\frac{\sqrt{1,461 \times (1 + 0,543 \times 1,11294826^2)} - 0,454 \times 1,11294826}{1 + 0,402 \times 1,11294826^2} \right]^2 = 0,49880872 \cong 0,50$$

Nous retrouvons bien, avec un écart relatif de 0,25% seulement, la valeur de η calculée à l'étape (ii).

II.3.1.5. Exemple d'application 2

On souhaite déterminer le diamètre D d'une conduite circulaire dans laquelle l'écoulement est maintenu à la profondeur normale $y_n = 1,08 m$. La conduite écoule un débit volume $Q = 1,89 m^3 / s$ sous une pente longitudinale $i = 5.10^{-4}$. Le coefficient de résistance à l'écoulement de Chézy est $C = 75 m^{0.5} / s$.

Solution

i. Calculons la conductivité relative Q_y^* de la conduite selon la relation (2.19), soit :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 y^{5i}}} = \frac{1,89}{\sqrt{75^2 \times 5.10^{-4} \times 1,08^5}} = 0,92972851 \cong 0,93$$

ii. La relation approchée (2.22) permet alors de déterminer le taux de remplissage $\eta(Q_y^*)$, soit :

$$\eta = \left[\frac{\sqrt{1,461(1 + 0,543Q_y^{*2})} - 0,454Q_y^*}{1 + 0,402Q_y^{*2}} \right]^2$$

Ou bien :

$$\eta = \left[\frac{\sqrt{1,461 \times (1 + 0,543 \times 0,92972851^2)} - 0,454 \times 0,92972851}{1 + 0,402 \times 0,92972851^2} \right]^2 = 0,59922047 \cong 0,60$$

iii. Le diamètre recherché est par suite :

$$D = \frac{y_n}{\eta} = \frac{1,08}{0,6} = 1,8 m$$

- iv. Vérifions, pour le diamètre D ainsi calculé, que la conductivité relative Q^* est bien inférieure à la conductivité relative maximale $Q_{\max}^* = 0,41249656$:

Selon la relation (2.11), Q^* est :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} = \frac{1,89}{\sqrt{75^2 \times 1,8^5 \times 5 \cdot 10^{-4}}} = 0,25925926 \cong 0,26 < Q_{\max}^*$$

- v. Vérifions nos calculs au cours de cette étape. L'application de la relation approchée (2.17) permet de déduire que le taux de remplissage de la conduite est :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left(1,525 Q^{*0,52} \right)$$

Soit :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left(1,525 \times 0,25925926^{0,52} \right) = 0,60006282 \cong 0,60$$

Il s'agit bien de la valeur du taux de remplissage η calculé à l'étape (ii).

- vi. La vérification des calculs aurait pu être effectuée en calculant le taux de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ par application de la relation (2.15), soit :

$$\sin \left(\frac{5\pi}{11} \eta \right) = 0,938 \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^{0,52}$$

ou bien :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left[0,938 \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^{0,52} \right]$$

Dans cette dernière relation, le rapport Q/Q_p est $Q/Q_p = Q^*/Q_p^*$, où $Q_p^* = \pi/8$ conformément à la relation (2.13). Ainsi :

$$Q/Q_p = 0,25925926 / (\pi/8) = 0,66019828$$

Par suite :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left[0,938 \times 0,66019828^{0,52} \right] = 0,6001035 \cong 0,60$$

Il s'agit bien de la valeur du taux de remplissage η calculée à l'étape (ii).

vii. La relation (2.18) peut également servir à la vérification des calculs, soit :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,962\left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,52}$$

ou bien :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1}\left[0,962\left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,52}\right]$$

Dans cette relation, le rapport $Q/Q_{\max.}$ est $Q/Q_{\max.} = Q^*/Q_{\max.}^*$, où $Q_{\max.}^* = 0,41249656$ conformément au tableau 2.3. Ainsi :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1}\left[0,962 \times \left(\frac{0,25925926}{0,41249656}\right)^{0,52}\right] = 0,59985193 \cong 0,60$$

Il s'agit bien encore une fois de la même valeur du taux de remplissage η calculée à l'étape (ii).

viii. Vérifions une dernière fois nos calculs en déterminant le débit volume Q par la formule de Chézy. Selon Chézy, le débit volume Q est donné par la relation (2.1), soit :

$$Q = CA\sqrt{R_h i}$$

- Selon les relations (2.5) et (2.6), les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,6) = 1,77215425$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1-2 \times 0,6) \times \sqrt{0,6 \times (1-0,6)}}{\cos^{-1}(1-2 \times 0,6)} = 1,11057682$$

- L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (2.4) :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{1,8^2}{4} \times 1,77215425 \times 1,11057682 = 1,59417188 m^2$$

- Le rayon hydraulique R_h est donné par la relation (2.9), soit :

$$R_h = \frac{D}{4} \varphi(\eta) = \frac{1,8}{4} \times 1,11057682 = 0,49975957 \text{ m} \cong 0,5 \text{ m}$$

- Le débit volume Q serait donc, selon *Chézy* :

$$Q = CA\sqrt{R_h i} = 75 \times 1,59417188 \times \sqrt{0,5 \times 5 \cdot 10^{-4}} = 1,89045529 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 1,890 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Il s'agit bien du débit volume Q donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

II.3.2. Formule de *Manning-Strickler*

II.3.2.1. Conductivité relative

En ayant recours aux relations (2.4) et (2.9), la relation (2.2) de *Manning-Strickler* permet d'écrire que :

$$Q = \frac{1}{n} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3} \frac{D^{8/3}}{4^{5/3}} \sqrt{i} \quad (2.23)$$

En introduisant le débit relatif, ou plus précisément la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3} \sqrt{i}} \quad (2.24)$$

la relation (2.23) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$Q^* = 4^{-5/3} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3} \quad (2.25)$$

La relation (2.25) traduit ainsi la variation de la conductivité relative Q^* de la conduite en fonction du taux de remplissage η . Pour le cas particulier de la conduite à l'état plein, correspondant à la valeur $\eta = 1$ et à $Q^* = Q_p^*$, la relation (2.25) permet de déduire que :

$$Q_p^* = \frac{\pi}{4^{5/3}} \cong 0,3117 = \text{constante} \quad (2.26)$$

Comparée à la valeur de Q_p^* obtenue par application de la relation de *Chézy* (relation 2.13), celle donnée par la relation de *Manning-Strickler* est donc plus faible. L'écart relatif entre les deux valeurs est de l'ordre de 20,5%. Les valeurs de $\eta(Q^*)$ calculées selon la relation (2.25) sont consignées dans le tableau 2.7 et elles ont permis le tracé de la figure 2.5. En outre, nous avons également porté dans le tableau 2.7 les valeurs de $Q/Q_{\max.}$ qui correspondent à celles de $Q^*/Q_{\max.}^*$, conformément à la relation (2.16).

Les valeurs du tableau 2.7 ainsi que la figure 2.5 suggèrent les observations suivantes :

- i. La conductivité relative Q^* de la conduite augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage η et atteint la valeur maximale $Q_{\max.}^* \cong 0,3353$, indiquée

en gras dans le tableau 2.7, pour le taux de remplissage $\eta = 0,94$. La conductivité maximale de la conduite n'est donc pas atteinte à l'état plein, mais seulement à 94% de cet état.

ii. Au-delà de sa valeur maximale, la conductivité relative Q^* de la conduite diminue avec l'accroissement du taux de remplissage η et atteint la valeur $Q^* \cong 0,3117$ pour le taux de remplissage $\eta = 1$.

iii. Lorsque la conduite est à moitié remplie, correspondant au taux de remplissage $\eta = 0,5$ indiqué en gras dans le tableau 2.7, la conductivité relative est $Q^* \cong 0,156$.

Tableau 2.7 : Valeur de $\eta(Q^*)$ calculées selon la relation (2.25).

$\eta = y_n / D$	Q^*	$Q^* / Q^*_{\max.} = Q / Q_{\max.}$
0,10	0,006507312	0,01940896
0,15	0,015150827	0,04518944
0,20	0,027294706	0,08141023
0,25	0,042695238	0,12734445
0,30	0,061037735	0,18205348
0,35	0,081954527	0,24444071
0,40	0,10503419	0,31327899
0,45	0,129826223	0,38722465
0,50	0,155842734	0,46482249
0,55	0,182557584	0,54450323
0,60	0,209402827	0,62457287
0,65	0,235761513	0,7031913
0,70	0,260954811	0,77833379
0,75	0,284219023	0,84772252
0,80	0,304662223	0,90869719
0,85	0,321173306	0,95794377
0,90	0,332193544	0,99081316
0,94	0,33527365	1
0,95	0,334910569	0,99891706
0,975	0,330927791	0,98703787
1	0,311685468	0,92964499

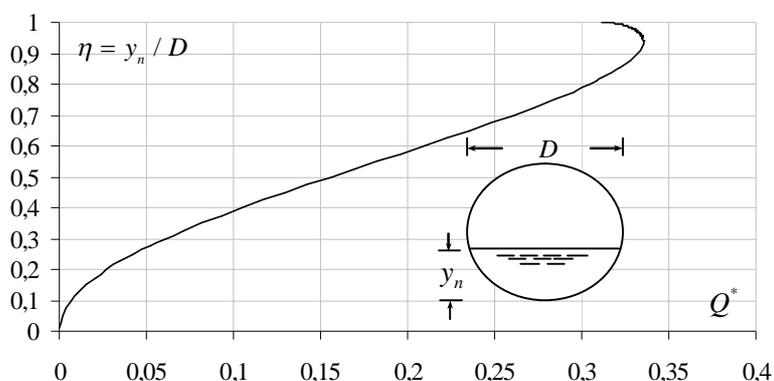


Figure 2.5 : Courbe de variation du taux de remplissage η de la conduite circulaire en fonction de la conductivité relative Q^* , selon les valeurs du tableau 2.7 calculées par la relation (2.25).

II.3.2.2. Relation approchée au calcul de la profondeur normale

La détermination de la profondeur normale y_n de l'écoulement passe par l'estimation du taux de remplissage η de la conduite, pour les paramètres connus n, Q, D et i , et par conséquent de la conductivité relative Q^* . Cependant, la relation (2.25) montre que η est implicite vis-à-vis de Q^* et sa détermination nécessite un procédé itératif ou graphique.

Cette partie de l'étude vise à établir une relation approchée explicite au calcul du taux de remplissage η de la conduite, impliquant ainsi celui de la profondeur normale y_n de l'écoulement. L'une des approches que nous avons adoptée a consisté à rechercher la meilleure courbe de tendance de la variation $\eta(Q^*)$. Le calcul a montré que la relation (2.25) pouvait être remplacée, avec une excellente approximation, par la relation explicite suivante :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 1,614 Q^{*0,485} \quad (2.27)$$

La relation (2.27) a été établie dans la large gamme pratique $0,15 \leq \eta \leq 0,75$, correspondant à $0,0152 \leq Q^* \leq 0,284$. Le tableau 2.8 montre les écarts relatifs occasionnés par la relation (2.27) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q^*)$ de la conduite. Au regard des écarts relatifs réduits ainsi obtenus, nous pouvons conclure que la relation (2.27) est une excellente relation approchée explicite. Notons que les plus grands écarts relatifs correspondent aux valeurs extrêmes de la gamme considérée de η , indiquées en gras dans le tableau 2.8.

Tableau 2.8 : Ecarts relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.27) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q^*)$ de la conduite.

$\eta = y_n / D$	Q^*	$(\eta = y_n / D)$ approché	Ecarts relatifs en (%)
0,15	0,015150827	0,14927321	0,48
0,20	0,027294706	0,19979393	0,10
0,25	0,042695238	0,25014131	0,06
0,30	0,061037735	0,30032168	0,11
0,35	0,081954527	0,35037462	0,11
0,40	0,10503419	0,40035261	0,09
0,45	0,129826223	0,45030941	0,07
0,50	0,155842734	0,50029013	0,06
0,55	0,182557584	0,55031856	0,06
0,60	0,209402827	0,60037638	0,06
0,65	0,235761513	0,65036461	0,06
0,70	0,260954811	0,70002711	0,00
0,75	0,284219023	0,74879058	0,16

Une seconde approche a été adoptée pour établir une relation explicite au calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement. Cette approche consiste à rechercher la meilleure courbe de tendance de la variation du taux de remplissage $\eta(Q/Q_{\max.})$ dans la gamme pratique $0,15 \leq \eta \leq 0,75$, correspondant à $0,0452 \leq Q/Q_{\max.} \leq 0,8477$ (Tableau 2.7).

Le rapport entre les valeurs de Q^* données par la relation (2.25) et la valeur $Q_{\max.}^* \cong 0,3353$ donnée par le tableau 2.7, permet de déduire que :

$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = \frac{\sigma(\eta)[\varphi(\eta)]^{5/3}}{3,379} \quad (2.28)$$

Les calculs ont montré que le taux de remplissage $\eta(Q/Q_{\max.})$ de la conduite pouvait s'exprimer, avec une erreur relative maximale inférieure à 0,5% seulement (Tableau 2.9), par la relation :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,95\left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,485} \quad (2.29)$$

Le tableau 2.9 regroupe les valeurs de $\eta = y_n / D$ calculées selon la relation (2.28) ainsi que celles de $(\eta = y_n / D)_{\text{approché}}$ déterminées par application de la relation approchée (2.29). Les écarts relatifs entre ces valeurs, pour la gamme choisie $0,15 \leq \eta \leq 0,75$, ont été également consignés dans le tableau 2.9. Au regard de ces écarts réduits, nous pouvons conclure à la fiabilité de la relation approchée (2.29). Notons (Tableau 2.9) que les plus grands écarts relatifs occasionnés par la relation approchée (2.29) s'obtiennent pour les valeurs extrêmes de la gamme choisie de η , indiquées en gras dans le tableau.

Tableau 2.9 : Ecarts relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.29) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q/Q_{\max.})$ de la conduite.

$\eta = y_n / D$	$Q / Q_{\max.}$	$(\eta = y_n / D)_{\text{approché}}$	Ecarts relatifs en (%)
0,15	0,04518944	0,14927368	0,48
0,20	0,08141023	0,19979458	0,10
0,25	0,12734445	0,25014213	0,06
0,30	0,18205348	0,30032268	0,11
0,35	0,24444071	0,35037582	0,11
0,40	0,31327899	0,40035402	0,09
0,45	0,38722465	0,45031105	0,07
0,50	0,46482249	0,50029202	0,06
0,55	0,54450323	0,55032074	0,06
0,60	0,62457287	0,60037891	0,06
0,65	0,7031913	0,65036754	0,06
0,70	0,77833379	0,70003051	0,00
0,75	0,84772252	0,74745245	0,34

II.3.2.3. Courbe de remplissage de la conduite pour $n = \text{constante}$

La courbe de remplissage de la conduite, pour une valeur constante du coefficient de résistance à l'écoulement n de *Manning*, se traduit par la variation du paramètre de forme $\eta(Q/Q_p)$. Celui-ci peut être défini par le rapport des relations (2.25) et (2.26) qui mène à écrire que, pour un même diamètre D , la même pente longitudinale i de la conduite et la même valeur du coefficient de résistance à l'écoulement n :

$$\frac{Q}{Q_p} = \pi^{-1} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3} \quad (2.30)$$

En donnant des valeurs à η , arbitrairement choisies entre 0 et 1, la relation (2.30) a permis de dresser le tableau 2.10 ainsi que le tracé de la figure 2.6.

Il ressort du tableau 2.10 que :

- i.* le rapport Q/Q_p augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage η et atteint la valeur maximale $Q_{\max.}/Q_p = 1,07567944$, indiquée en gras dans le tableau 2.10, pour un taux de remplissage $\eta \cong 0,94$. La capacité d'évacuation de la conduite correspond donc au débit maximal égal à environ 1,076 fois le débit de remplissage Q_p . Au-delà de sa valeur maximale, le rapport Q/Q_p diminue avec l'accroissement du taux de remplissage η et atteint la valeur $Q/Q_p = 1$ pour le taux de remplissage $\eta = 1$. Notons également la valeur particulière $\eta = 0,85245$, indiquée en gras dans le tableau 2.10, à laquelle correspond, sans aucune justification physique, le rapport $Q/Q_p = 1$.
- ii.* pour le taux de remplissage $\eta = 0,5$, indiqué en gras dans le tableau 2.10, le débit volume Q vaut la moitié du débit volume de remplissage Q_p .

Tableau 2.10 : Valeurs de $\eta(Q/Q_p)$ pour $n = \text{constante}$, calculées selon la relation (2.30).

$\eta = y_n / D$	Q / Q_p
0,10	0,02087782
0,15	0,04860935
0,20	0,08757132
0,25	0,1369818
0,30	0,19583119
0,35	0,26293984
0,40	0,33698777
0,45	0,4165296
0,50	0,5
0,55	0,58571093
0,60	0,6718402
0,65	0,75640842
0,70	0,83723766
0,75	0,91187769
0,80	0,97746688
0,81962945	1
0,85	1,03044042
0,90	1,06579734
0,94	1,07567944
0,95	1,07451455
0,96	1,07137353
0,97	1,06574504
0,98	1,05669403
0,99	1,04196158
1	1

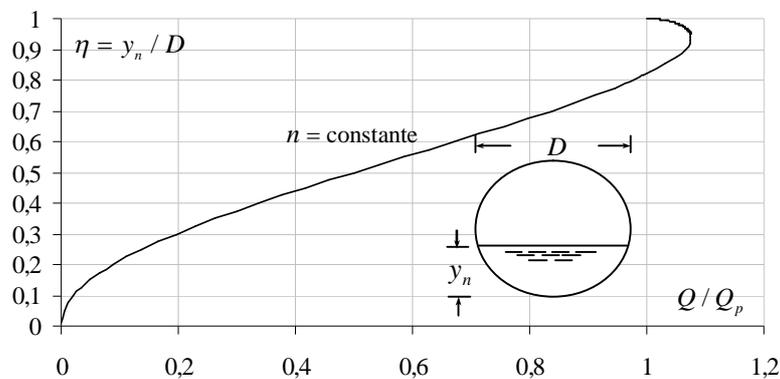


Figure 2.6 : Représentation graphique de $\eta(Q/Q_p)$ pour le coefficient de Manning $n = \text{constante}$, selon les valeurs du tableau 2.10 calculées par la relation (2.30).

Dans la large gamme pratique $0,15 \leq \eta \leq 0,75$, correspondant à $0,0486 \leq Q/Q_p \leq 0,912$, nos calculs ont montré que la meilleure courbe de tendance de $\eta(Q/Q_p)$ se traduit par la relation :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,917\left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,485} \quad (2.31)$$

L'erreur relative maximale occasionnée par la relation approchée (2.31) est, dans tous les cas, inférieure à 0,5% (Tableau 2.11). Les plus grands écarts relatifs sont observés pour les valeurs extrêmes de la gamme choisie de η , indiquées en gras dans le tableau 2.11. Au regard des écarts relatifs réduits indiqués dans le tableau 2.11, nous pouvons aisément conclure à la fiabilité de la relation approchée (2.31).

Tableau 2.11 : Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.31) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ de la conduite.

$\eta = y_n / D$	Q / Q_p	$(\eta = y_n / D)$ approché	Ecart relatifs (%)
0,15	0,04860935	0,14927784	0,48
0,20	0,08757132	0,19980021	0,10
0,25	0,1369818	0,2501493	0,06
0,30	0,19583119	0,30033147	0,11
0,35	0,26293984	0,35038633	0,11
0,40	0,33698777	0,40036638	0,09
0,45	0,4165296	0,45032545	0,07
0,50	0,5	0,50030869	0,06
0,55	0,58571093	0,55033998	0,06
0,60	0,6718402	0,60040112	0,07
0,65	0,75640842	0,65039324	0,06
0,70	0,83723766	0,70006042	0,01
0,75	0,91187769	0,74882963	0,16

II.3.2.4. Transformation de la relation $\eta(Q^*)$

La relation (2.25) traduisant la variation $\eta(Q^*)$ peut être transformée en introduisant la conductivité relative rapportée à la profondeur normale y_n :

$$Q_y^* = \frac{nQ}{y_n^{8/3} \sqrt{i}} \quad (2.32)$$

Notons que, compte tenu de la relation (2.24) :

$$Q^* = \eta^{8/3} Q_y^* \quad (2.33)$$

En ayant recours à la relation (2.33), la relation (2.25) s'écrit alors :

$$Q_y^* = 4^{-5/3} \eta^{-8/3} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3} \quad (2.34)$$

La conductivité relation Q_y^* ne dépend donc que du taux de remplissage η de la conduite et la variation $\eta(Q_y^*)$ est représentée graphiquement, en trait discontinu, sur la figure 2.7. Celle-ci montre

que la conductivité relative Q_y^* augmente lorsque le taux de remplissage η diminue.

La relation (2.34) est intéressante dans la mesure où elle peut permettre la détermination du taux de remplissage η , et donc celle du diamètre D de la conduite, pour les valeurs imposées des paramètres n, i, Q et y_n . Le problème revient donc à rechercher le diamètre D pour la valeur imposée de la conductivité relative Q_y^* . Cependant, la relation (2.34) montre que le taux de remplissage η est implicite vis-à-vis de la conductivité relative Q_y^* et une relation approchée a été recherchée. Nos calculs ont montré que la relation $\eta(Q_y^*)$ admet pour relation approchée :

$$\eta = \left[\frac{\sqrt{1,456(1+0,468Q_y^{*2})} - 0,609Q_y^*}{1+0,213Q_y^{*2}} \right]^2 \quad (2.35)$$

La relation (2.35) a été également représentée sur la figure 2.7 en motifs plein et les écarts relatifs qu'elle occasionne dans la large gamme pratique $0,01 \leq \eta \leq 0,75$, correspondant à $0,612 \leq Q_y^* \leq 10,113$, sont consignés dans le tableau 2.12. Nous pouvons ainsi observer que les écarts relatifs sont extrêmement faibles dans la gamme choisie de η , permettant alors de conclure à la fiabilité de la relation approchée (2.35). Notons que le plus grand écart relatif est obtenu pour la plus faible valeur de la gamme de η , indiquée en gras dans le tableau 2.12.

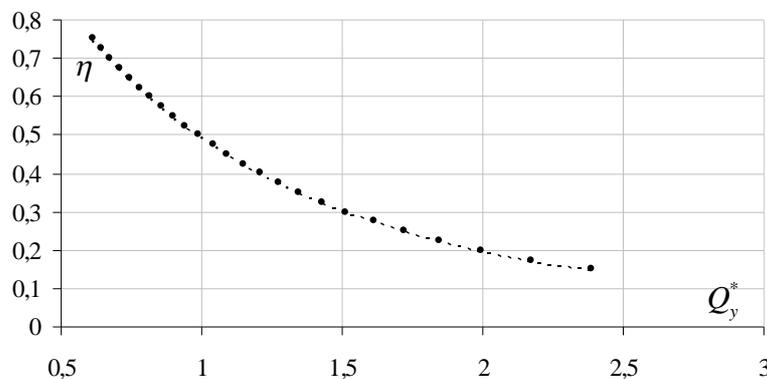


Figure 2.7 : Variation du taux de remplissage η en fonction de la conductivité relative Q_y^* .
 (- - -) : Relation (2.30), (●) : Relation approchée (2.35).

Tableau 2.12 : Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.35) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q_y^*)$ de la conduite.

$\eta = y_n / D$	Q_y^*	$(\eta = y_n / D)$ approché	Ecart relatifs en (%)
0,01	10,113037	0,00997844	0,22
0,15	2,38520838	0,15001391	0,01
0,20	1,99525514	0,20009625	0,05
0,25	1,72136411	0,25016883	0,07
0,30	1,5133582	0,30021018	0,07
0,35	1,34707414	0,35020571	0,06
0,40	1,20921645	0,40014878	0,04
0,45	1,09176471	0,45004206	0,01
0,50	0,98953968	0,49989937	0,02
0,55	0,89901314	0,54974841	0,05
0,60	0,81767215	0,59963484	0,06
0,65	0,7436535	0,64962885	0,06
0,70	0,67551843	0,69983606	0,02
0,75	0,61210102	0,75041686	0,06

II.3.2.5. Exemple d'application 3

On souhaite déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans une conduite circulaire de diamètre $D = 1,8\text{ m}$, écoulant un débit volume $Q = 1,89\text{ m}^3 / \text{s}$ sous une pente longitudinale $i = 5.10^{-4}$. Le coefficient de résistance à l'écoulement de Manning est $n = 0,0148\text{ m}^{-1/3}\text{ s}$.

Solution

- i. Vérifions que la conductivité relative de la conduite Q^* est bien inférieure à la conductivité relative maximale $Q_{\max}^* \cong 0,3353$:

Selon la relation (2.24), la conductivité relative de la conduite est par définition :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3}\sqrt{i}} = \frac{0,0148 \times 1,89}{1,8^{8/3} \times \sqrt{5.10^{-4}}} = 0,26092268 \cong 0,261 < Q_{\max}^*$$

- ii. L'application de la relation approchée (2.27) permet de déduire que le taux de remplissage de la conduite est :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left(1,614 Q^{*0,485} \right)$$

Soit :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left(1,614 \times 0,26092268^{0,485} \right) = 0,69996204 \cong 0,70$$

iii. Par suite, la profondeur normale de l'écoulement est :

$$y_n = \eta D = 0,69996204 \times 1,8 = 1,25993167 \text{ m} \cong 1,26 \text{ m}$$

iv. Au cours de cette étape, vérifions nos calculs en déterminant le débit volume Q par la formule de *Manning-Strickler*. Selon *Manning-Strickler*, le débit volume est donné par la relation (2.2) :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i}$$

- Selon les relations (2.5) et (2.6), les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,7) = 1,98231317$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,7) \times \sqrt{0,6 \times (1 - 0,7)}}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,7)} = 1,18493852$$

- L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (2.4) :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{1,8^2}{4} \times 1,98231317 \times 1,18493852 = 1,90262458 \text{ m}^2$$

- Le rayon hydraulique R_h est donné par la relation (2.9), soit :

$$R_h = \frac{D}{4} \varphi(\eta) = \frac{1,8}{4} \times 1,18493852 = 0,53322233 \text{ m}$$

- Le débit volume Q serait donc, selon *Manning* :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} = \frac{1}{0,0148} \times 1,90262458 \times 0,53322233^{2/3} \times \sqrt{5 \cdot 10^{-4}} = 1,89023271 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 1,89 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Le débit volume que nous venons de calculer correspond bien à celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré. Ceci permet de conclure à la validité des calculs que nous avons effectués.

v. La vérification des calculs aurait pu être effectuée en déterminant le taux de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ par application de la relation (2.31), soit :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,917 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,485}$$

ou bien :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left[0,917 \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^{0,485} \right]$$

Dans cette dernière relation, $Q / Q_p = Q^* / Q_p^*$, où $Q_p^* = \frac{\pi}{4^{5/3}} \cong 0,3117$ conformément à la relation

(2.26). Ainsi :

$$Q / Q_p = 0,26092268 \times 4^{5/3} / \pi = 0,83713458$$

Par suite :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left[0,917 \times 0,83713458^{0,485} \right] = 0,69999535 \cong 0,70$$

Il s'agit bien de la valeur du taux de remplissage η calculée à l'étape (ii).

vi. La relation (2.29) peut également servir à la vérification des calculs, soit :

$$\sin \left(\frac{5\pi}{11} \eta \right) = 0,95 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,485}$$

ou bien :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left[0,95 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,485} \right]$$

Dans cette relation, $Q / Q_{\max.} = Q^* / Q_{\max.}^*$, où $Q_{\max.}^* = 0,33527365$ conformément au tableau 2.7.

Ainsi :

$$\eta = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left[0,95 \times \left(\frac{0,26092268}{0,33527365} \right)^{0,485} \right] = 0,69996544 \cong 0,70$$

Il s'agit bien encore une fois de la même valeur du taux de remplissage η calculée à l'étape (ii).

vii. Utilisant la relation approchée (2.35) pour évaluer le taux de remplissage $\eta(Q_y^*)$. La conductivité relative Q_y^* est, selon la relation (2.32) :

$$Q_y^* = \frac{nQ}{y_n^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0,0148 \times 1,89}{1,25993167^{8/3} \times \sqrt{5 \cdot 10^{-4}}} = 0,67553294$$

Ainsi, le taux de remplissage correspondant à cette conductivité relative est, conformément à la relation (2.35) :

$$\eta = \left[\frac{\sqrt{1,456(1 + 0,468Q_y^{*2})} - 0,609Q_y^*}{1 + 0,213Q_y^{*2}} \right]^2$$

$$= \left[\frac{\sqrt{1,456 \times (1 + 0,468 \times 0,67553294^2)} - 0,609 \times 0,67553294}{1 + 0,213 \times 0,67553294^2} \right]^2 = 0,69982492 \cong 0,70$$

Nous retrouvons bien la valeur de η calculée à l'étape (ii).

II.4. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT A COEFFICIENT DE RESISTANCE VARIABLE

Il est tout à fait justifié d'admettre que, pour une même conduite, le coefficient de résistance à l'écoulement varie en fonction du taux de remplissage η . Ceci serait valable aussi bien pour le coefficient de résistance C de *Chézy* que pour le coefficient n de *Manning*. En pratique, lorsqu'il s'agit de dimensionner une conduite circulaire à écoulement libre, les paramètres connus sont le débit volume Q , la pente longitudinale i de la conduite, la rugosité absolue ε caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite, le taux de remplissage η et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Notons que ni le coefficient de résistance de *Chézy*, ni celui de *Manning* ne constitue une donnée du problème. Lorsque l'une ou l'autre des formules de *Chézy* et de *Manning* doit être utilisée pour dimensionner la conduite, il sera alors nécessaire de déterminer la valeur de C ou celle de n . Ceci constitue l'un des objectifs principaux de cette partie de l'étude.

II.4.1. Relation générale du coefficient de résistance de *Chézy*

Pour mettre en évidence la variation du coefficient C de *Chézy* en fonction de tous les paramètres régissant l'écoulement, la formule de *Achour* et *Bedjaoui* (2006) est d'une grande utilité. Cette relation, applicable à tous les profils géométriques, a été établie dans le domaine entier de l'écoulement turbulent englobant ainsi les régimes d'écoulement turbulent lisse, de transition et turbulent rugueux. Selon *Achour* et *Bedjaoui* (2006), le débit volume Q s'exprime par :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.36)$$

où ε est la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite et R est un nombre de *Reynolds* que l'on peut exprimer par la relation :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} \quad (2.37)$$

Pour une conduite circulaire en charge de diamètre D et dont le rayon hydraulique est $R_h = D/4$, la relation (2.37) devient alors :

$$R_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (2.38)$$

où l'indice « p » désigne l'état plein de la conduite.

En comparant les relations (2.1) et (2.36), il apparaît clairement que le coefficient C de *Chézy* est tel que :

$$C = -4\sqrt{2g} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.39)$$

ou bien, en termes adimensionnels :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.40)$$

Tenant compte de la relation (2.9), la relation (2.39) montre bien que le coefficient de résistance C de Chézy dépend à la fois de la rugosité relative ε / D , du taux de remplissage η et d'un nombre de Reynolds R , lui-même fonction de la pente i , du diamètre D de la conduite, de η et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Nous pouvons donc écrire la relation fonctionnelle suivante :

$$C(D, \eta, i, \varepsilon, \nu) = 0 \quad (2.41)$$

Tenant compte de la relation (2.9), la relation (2.37) s'écrit :

$$R = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.42)$$

ou bien :

$$R = R_p [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.43)$$

En ayant recours aux relations (2.9) et (2.43), la relation (2.40) s'écrit :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log\left(\frac{\varepsilon / D}{3,7\varphi(\eta)} + \frac{10,04}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}}\right) \quad (2.44)$$

Il apparaît ainsi que le coefficient de résistance C de Chézy dépend de la rugosité relative ε / D , du taux de remplissage η de la conduite et du nombre de Reynolds R_p . Lorsque ces paramètres sont donnés, la relation (2.44) permet la détermination explicite du coefficient C . Cependant, lorsqu'il s'agit de dimensionner la conduite, le diamètre D n'est plus une donnée du problème et seuls les paramètres $Q, \eta, i, \varepsilon, \nu$ sont connus. Dans ce cas, la relation (2.44) ne permet plus de déterminer de manière explicite le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy.

Pour le cas de la conduite circulaire pleine, correspondant à $\eta = 1$ ou à $\varphi(\eta) = 1$, la relation (2.44) mène à écrire que :

$$\frac{C_p}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{R_p}\right) \quad (2.45)$$

ou bien :

$$C_p = -4\sqrt{2g} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{10,04}{R_p}\right) \quad (2.46)$$

Pour les valeurs données de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p , la relation (2.46) permet d'évaluer la valeur du coefficient de résistance C_p de Chézy, pour le cas de l'écoulement en conduite circulaire pleine.

II.4.1.1. Calcul du coefficient de résistance de Chézy par la Méthode du modèle rugueux (MMR)

Lorsque le diamètre D de la conduite n'est plus une donnée du problème, la relation (2.44) ne peut être utilisée pour le calcul du coefficient C de Chézy. Les paramètres connus sont le débit volume Q , le taux de remplissage η de la conduite, la pente longitudinale i , la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Pour déterminer le coefficient C de Chézy, sous ces conditions du problème, la méthode du modèle rugueux (MMR) peut être d'une grande utilité.

Rappelons que le modèle rugueux de référence (Achour, 2007) est caractérisé par un coefficient de frottement $\bar{f} = 1/16$, ce qui se traduit par un coefficient de résistance de Chézy :

$$\bar{C} = \sqrt{8g/\bar{f}} = 8\sqrt{2g} = \text{constante} \quad (2.47)$$

Le modèle rugueux est caractérisé par un diamètre \bar{D} , écoulant un débit volume \bar{Q} d'un liquide de viscosité cinématique $\bar{\nu}$ correspondant à un taux de remplissage $\bar{\eta}$, sous une pente longitudinale \bar{i} . Pour déterminer le coefficient de résistance C de Chézy, caractérisant l'écoulement dans la conduite considérée, admettons les conditions suivantes :

- i. $\bar{D} \neq D$
- ii. $\bar{Q} = Q$
- iii. $\bar{i} = i$

iv. $\bar{\eta} = \eta$

v. $\bar{\nu} = \nu$

Selon la relation (2.11), la conductivité relative du modèle rugueux de référence est alors :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (2.48)$$

Ou bien, en tenant compte de la relation (2.47) :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128 g D^5 i}} \quad (2.49)$$

Par suite, la relation (2.12) s'écrit, pour le modèle rugueux de référence :

$$\frac{Q}{\sqrt{128 g i D^5}} = \frac{1}{8} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.50)$$

Soit :

$$\bar{D} = [\sqrt{2} \sigma(\eta)]^{-0.4} [\varphi(\eta)]^{-0.6} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0.4} \quad (2.51)$$

Ainsi, avec les paramètres connus Q , η et i , les relations (2.5), (2.6) et (2.51) permettent le calcul explicite du diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence.

Le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, en vertu de la relation (2.42) :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.52)$$

Soit :

$$\bar{R} = \bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.53)$$

où :

$$\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} \quad (2.54)$$

Selon la MMR, le coefficient C de Chézy est tel que :

$$C = \frac{\bar{C}}{\psi^{5/2}} \quad (2.55)$$

où ψ est un paramètre adimensionnel défini par la relation :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.56)$$

En tenant compte des relations (2.47) et (2.56), la relation (2.55) devient :

$$C = -5,343 \sqrt{g} \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.57)$$

ou bien, en termes adimensionnels :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -5,343 \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.58)$$

Ainsi, avec les valeurs connues des paramètres ε , \bar{D} , η et \bar{R} , la relation (2.57) permet le calcul direct du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy, sans que le diamètre D de la conduite ne soit une donnée du problème. L'exemple d'application suivant illustre la démarche à suivre pour le calcul de C .

II.4.1.2. Exemple d'application 4

Une conduite circulaire de diamètre D , siège d'un écoulement uniforme, écoule un débit volume $Q = 0,987 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$, sous une pente longitudinale $i = 3.10^{-4}$. La paroi interne de la conduite est caractérisée par une rugosité absolue $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$ et le taux de remplissage est $\eta = 0,6$.

- i. Calculer la valeur du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy.
- ii. Déduire la valeur du diamètre D .

Solution

- i. En application des relations (2.5) et (2.6), les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1-2\eta) = \cos^{-1}(1-2 \times 0,6) = 1,77215425$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1-2 \times 0,6) \times \sqrt{0,6 \times (1-0,6)}}{\cos^{-1}(1-2 \times 0,6)} = 1,110576819$$

Le diamètre du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.51) :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \left[\sqrt{2} \sigma(\eta) \right]^{-0,4} \left[\varphi(\eta) \right]^{-0,6} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} \\ &= \left[\sqrt{2} \times 1,77215425 \right]^{-0,4} \times 1,110576819^{-0,6} \times \left(\frac{0,987}{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4}}} \right)^{0,4} = 2,075071373 \text{ m} \end{aligned}$$

Ceci permet de déduire que :

$$\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 2,075071373^3}}{10^{-6}} = 917317,5$$

Ainsi, selon la relation (2.57), le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est :

$$\begin{aligned} C &= -5,343 \sqrt{g} \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \\ &= -5,343 \times \sqrt{9,81} \times \log \left(\frac{10^{-4} / 2,304526164}{4,75 \times 1,110576819} + \frac{8,5}{917317,5 \times 1,110576819^{3/2}} \right) = 79,79486326 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \\ &\cong 79,8 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \end{aligned}$$

- ii. La relation (2.10) permet de déduire que le diamètre D de la conduite est :

$$\begin{aligned} D &= \left[0,125 \sigma(\eta) \right]^{-0,4} \left[\varphi(\eta) \right]^{-0,6} \left(\frac{Q}{C \sqrt{i}} \right)^{0,4} \\ &= \left[0,125 \times 1,77215425 \right]^{-0,4} \times 1,110576819^{-0,6} \times \left(\frac{0,987}{79,79486326 \times \sqrt{3.10^{-4}}} \right)^{0,4} = 1,5 \text{ m} \end{aligned}$$

Remarquons que les relations (2.10) et (2.51) permettent de déduire que le diamètre D de la conduite peut s'écrire :

$$D = 2,639 \bar{D} \left(\frac{\sqrt{g}}{C} \right)^{0,4}$$

Soit :

$$D = \bar{D} \left(\frac{8\sqrt{2g}}{C} \right)^{0,4} = 2,075071373 \times \left(\frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{79,79486326} \right)^{0,4} = 1,49974997 \text{ m} \cong 1,5 \text{ m}$$

iii. Cette étape vise à vérifier les calculs en déterminant, pour le diamètre D ainsi calculé, le débit volume Q par la formule générale (2.36). Pour cela, évaluons :

- L'aire de la section mouillée A par la relation (2.4), soit :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{1,5^2}{4} \times 1,77215425 \times 1,110576819 = 1,107063803 \text{ m}^2$$

- Le rayon hydraulique R_h par la relation (2.9), soit :

$$R_h = \frac{1}{4} D \varphi(\eta) = \frac{1}{4} \times 1,5 \times 1,110576819 = 0,41646631 \text{ m}$$

- Le nombre de Reynolds R par la relation (2.37), soit :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g} i R_h^3}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4} \times 0,41646631^3}}{10^{-6}} = 659826,745$$

Ainsi, selon la relation générale (2.36), le débit volume Q serait égal à :

$$\begin{aligned} Q &= -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 1,107063803 \times \sqrt{0,41646631} \times 3 \cdot 10^{-4} \times \log \left(\frac{10^{-4}}{14,8 \times 0,41646631} + \frac{10,04}{659826,745} \right) \end{aligned}$$

Soit :

$Q = 0,98716 \text{ m}^3 / \text{s}$ bien, avec un écart relatif de moins 0,017% seulement, au débit bien, avec un écart relatif de moins 0,017% seulement, au débit volume Q donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

II.4.1.3. Coefficient de résistance maximal de Chézy

Selon la relation (2.44), le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est fonction de trois variables adimensionnelles qui sont la rugosité relative ε / D , le taux de remplissage η de la conduite et le nombre de Reynolds R_p . Sa représentation graphique n'est donc pas aisée, mais l'on peut montrer, à titre indicatif, sa variation pour une valeur fixée de la rugosité relative ε / D . Cette démarche a été exécutée pour différentes valeurs de ε / D et pour des nombres de Reynolds R_p variant entre 10^4 et 10^7 . Parmi tous les graphiques ainsi obtenus, ceux des figures 2.8a et 2.8b en sont représentatifs. La figure 2.8a traduit la variation de C / \sqrt{g} en fonction du taux de remplissage η et du nombre de Reynolds R_p , pour la valeur $\varepsilon / D = 0$ correspondant à un état lisse de la paroi interne de la conduite. La figure 2.8b représente par contre la variation de C / \sqrt{g} en fonction du taux de remplissage η et du nombre de Reynolds R_p , pour la valeur $\varepsilon / D = 0,05$ correspondant à un état rugueux de la paroi interne de la conduite. Ces valeurs choisies de ε / D correspondent en fait aux courbes enveloppes du domaine turbulent du diagramme de *Moody*.

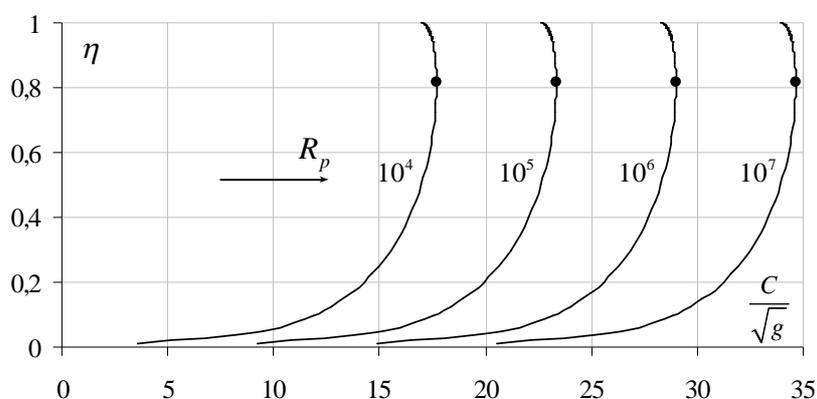


Figure 2.8a : Variation de C / \sqrt{g} en fonction de η et de R_p selon la relation (2.44), pour $\varepsilon / D = 0$.

(●) Valeurs maximales $C_{\max.} / \sqrt{g}$ obtenues pour $\eta \cong 0,8128$.

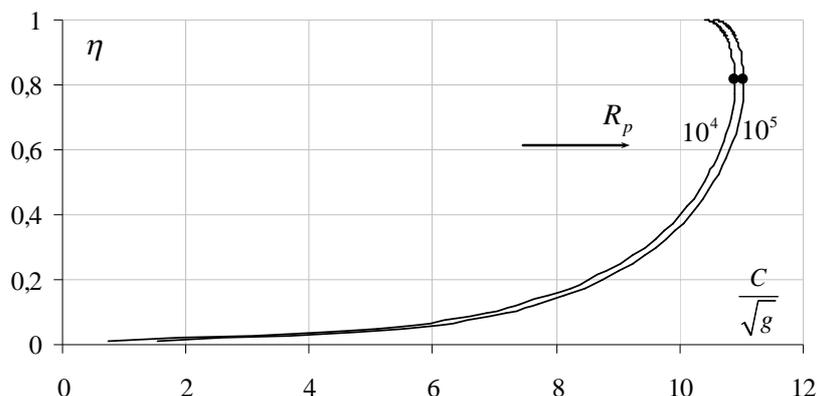


Figure 2.8b : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η et de R_p selon la relation (2.42), pour $\varepsilon/D = 0,05$. (●) Valeurs maximales $C_{\max.}/\sqrt{g}$ obtenues pour $\eta \cong 0,8128$.

La figure 2.8a montre clairement que, pour une valeur donnée du nombre de *Reynolds* R_p , C/\sqrt{g} augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η jusqu'à une valeur maximale représentée par le symbole plein sur la figure. Au-delà de celle-ci, C/\sqrt{g} diminue avec l'augmentation de η et cette diminution se poursuit jusqu'à l'état plein de la conduite correspondant à $\eta = 1$. Il est à noter également que, quelle que soit la valeur de R_p , la variation de C/\sqrt{g} en fonction η s'effectue de manière rapide dans un premier temps, puis de manière lente dans un second temps. La variation rapide de C/\sqrt{g} s'observe pour une gamme réduite de η que l'on pourrait définir par $0 < \eta \leq 0,2$. Au-delà de la valeur $\eta = 0,2$, C/\sqrt{g} subit une très lente variation dans une large gamme de η indépendamment de la valeur du nombre de *Reynolds* R_p . Cet état de variation de C/\sqrt{g} peut être également observé sur la figure 2.8b. Celle-ci indique, en outre, que pour la forte valeur de la rugosité choisie ($\varepsilon/D = 0,05$), les courbes de variation de C/\sqrt{g} en fonction de η sont très proches les unes des autres et se confondent pour les valeurs de $R_p > 10^5$. Cela met en évidence le caractère turbulent rugueux de l'écoulement, pour lequel C/\sqrt{g} est quasi indépendant du nombre de *Reynolds* R_p et ne dépend que de la valeur du taux de remplissage η de la conduite.

Le résultat le plus significatif, obtenu lors du tracé de la variation de C/\sqrt{g} en fonction du taux de remplissage η et du nombre de *Reynolds* R_p , est que la valeur maximale $C_{\max.}/\sqrt{g}$ est atteinte pour le taux de remplissage $\eta \cong 0,8128$, quelle que soit la valeur de la rugosité relative ε/D et de celle du nombre de *Reynolds* R_p . En d'autres termes, la valeur maximale $C_{\max.}/\sqrt{g}$, et donc $C_{\max.}$, s'obtient à la profondeur normale $y_n \cong 0,813D$. Pour la valeur $\eta = 0,8128$, la fonction $\varphi(\eta)$ définie par la relation (2.6) prend la valeur :

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,8128) \times \sqrt{0,8128 \times (1 - 0,8128)}}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,8128)} = 1,217233628 \cong 1,21723$$

En substituant cette valeur de $\varphi(\eta)$ dans la relation (2.44), celle-ci devient :

$$\frac{C_{\max.}}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{4,504} + \frac{7,476}{R_p} \right) \quad (2.59)$$

ou bien :

$$C_{\max.} = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{4,504} + \frac{7,476}{R_p} \right) \quad (2.60)$$

Rappelons que dans les relations (2.59) et (2.60), le nombre de *Reynolds* R_p est donné par la relation (2.38).

Pour les valeurs données de la rugosité relative ε / D et du nombre de *Reynolds* R_p , la relation (2.61) permet d'évaluer la valeur maximale du coefficient de résistance C de *Chézy*, pour le cas de l'écoulement uniforme en conduite circulaire.

Lorsque le diamètre D de la conduite n'est pas une donnée du problème, la détermination du coefficient de résistance maximal $C_{\max.}$ de *Chézy* est possible en ayant recours à la relation (2.57). Dans cette relation, le taux de remplissage prend la valeur $\eta = 0,8128$, correspondant à $\varphi(\eta) = 1,217233628$. Ainsi :

$$C_{\max.} = -5,343\sqrt{g} \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{5,782} + \frac{6,329}{R_p} \right) \quad (2.61)$$

Selon les relations (2.61), le coefficient de résistance $C_{\max.}$ se rapporte aux caractéristiques connues du modèle rugueux de référence, ce qui permet de le calculer de manière aisée même si le diamètre D de la conduite n'est pas donné. L'exemple d'application suivant montre les étapes à suivre pour le calcul du coefficient de résistance maximal $C_{\max.}$ de *Chézy*.

II.4.1.4. Exemple d'application 5

Une conduite circulaire de diamètre D est le siège d'un écoulement uniforme. Elle écoule un débit volume $Q = 0,942 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$, sous une pente longitudinale $i = 4.10^{-4}$. La paroi interne de la conduite est caractérisée par une rugosité absolue $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$ et le taux de remplissage est $\eta = 0,65$.

Calculer la valeur du coefficient de résistance maximal $C_{\max.}$ de *Chézy*.

Solution

- i. En application des relations (2.5) et (2.6), les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1-2\eta) = \cos^{-1}(1-2 \times 0,65) = 1,87548898$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1-2 \times 0,65) \times \sqrt{0,65 \times (1-0,65)}}{\cos^{-1}(1-2 \times 0,65)} = 1,15259048$$

Le diamètre du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.51) :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= [\sqrt{2} \sigma(\eta)]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} \\ &= [\sqrt{2} \times 1,87548898]^{-0,4} \times 1,15259048^{-0,6} \times \left(\frac{0,942}{\sqrt{9,81 \times 4.10^{-4}}} \right)^{0,4} = 1,838305722 \text{ m} \end{aligned}$$

- ii. Selon la relation (2.54), le nombre de Reynolds \bar{R}_p est :

$$\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 4.10^{-4} \times 1,838305722^3}}{10^{-6}} = 883214,31$$

- iii. Par suite, le coefficient de résistance C_{\max} de Chézy est, en vertu de la relation (2.61) :

$$\begin{aligned} C_{\max} &= -5,343\sqrt{g} \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{5,782} + \frac{6,329}{\bar{R}_p} \right) \\ &= -5,343 \times \sqrt{9,81} \times \log \left(\frac{10^{-4} / 1,838305722}{5,782} + \frac{6,329}{883214,31} \right) = 80 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \end{aligned}$$

II.4.2. Expression du débit volume maximal Q_{\max} .

Pour déterminer l'expression du débit volume maximal Q_{\max} , nous pouvons faire appel à la relation (2.36). Celle-ci peut s'écrire, en tenant compte des relations (2.4), (2.9) et (2.43):

$$Q = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{g i D^5} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,7 \varphi(\eta)} + \frac{10,04}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.62)$$

Rappelons que le nombre de *Reynolds* R_p est donné par la relation (2.38), tandis que la fonction $\varphi(\eta)$ est définie par la relation (2.6).

Définissons la conductivité relative Q^* telle que :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{g i D^5}} \quad (2.63)$$

La relation (2.62) peut alors s'écrire, en termes adimensionnels :

$$Q^* = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{3,7 \varphi(\eta)} + \frac{10,04}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.64)$$

La conductivité relative Q^* est donc une fonction de la rugosité relative ε / D , du nombre de *Reynolds* R_p à l'état plein et du taux de remplissage η . L'étude détaillée de la relation (2.64) a été effectuée pour diverses valeurs de la rugosité relative ε / D et du nombre de *Reynolds* R_p . La figure 2.9 (a et b) montre la variation du taux de remplissage η en fonction de Q^* pour les valeurs extrêmes de la rugosité relative, soit respectivement pour $\varepsilon / D = 0$ et $\varepsilon / D = 0,05$.

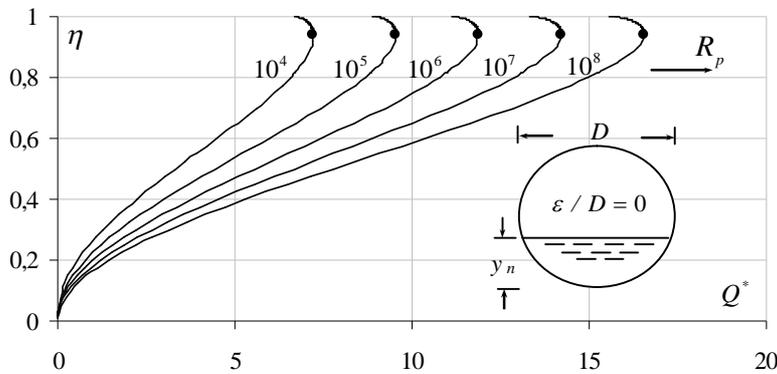


Figure 2.9a : Variation de $\eta(Q^*)$ pour diverses valeurs du nombre de *Reynolds* R_p , à $\varepsilon / D = 0$, conformément à la relation (2.64). (●) Valeurs maximales de Q^* correspondant à $0,9355 \leq \eta \leq 0,9431$.

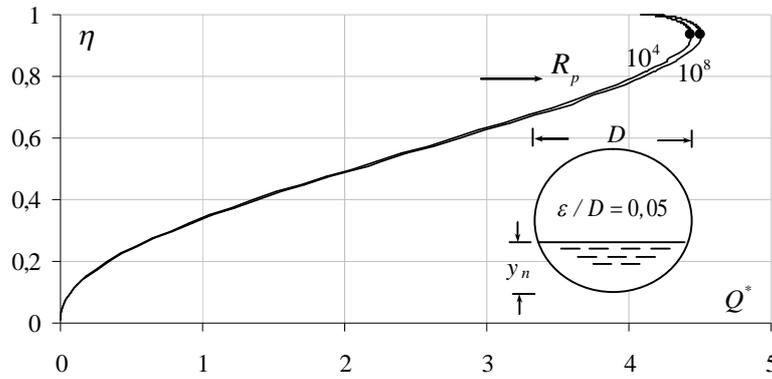


Figure 2.9b : Variation de $\eta(Q^*)$ pour diverses valeurs du nombre de Reynolds R_p à $\varepsilon/D = 0,05$, conformément à la relation (2.64). (●) Valeurs maximales de Q^* correspondant à $0,9340 \leq \eta \leq 0,9346$.

La figure 2.9a montre bien que la valeur maximale du débit relatif Q^* n'est pas unique pour les faibles valeurs de la rugosité relative ε/D . Par contre, la figure 2.9b indique que pour les fortes rugosités relatives, la valeur maximale de Q^* demeure quasiment invariable quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds R_p .

Pour l'ensemble des domaines considérés des rugosités relatives ε/D et du nombre de Reynolds R_p , tels que $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$ et $10^4 \leq R_p \leq 10^8$, les valeurs du taux de remplissage η correspondant à $Q = Q_{\max}$ sont regroupées dans le tableau 2.8.

Tableau 2.8 : Valeurs du taux de remplissage η pour $Q = Q_{\max}$, calculées selon la relation (2.62) pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p .

$\varepsilon/D \rightarrow$		0	10^{-5}	5.10^{-5}	10^{-4}	5.10^{-4}	10^{-3}	5.10^{-3}	10^{-2}	0,02	0,05
R_p	10^4	0,93546 3	0,93547	0,93549 8	0,93553 2	0,93541 5	0,93598 5	0,93651 8	0,93636 9	0,935 7	0,934 0
	5.10^4	0,937862	0,93789 6	0,93802 1	0,93815 7	0,93876 6	0,93901 6	0,93860 1	0,93783 2	0,936 7	0,934 5
	10^5	0,938664	0,93872 9	0,93895 2	0,93916 6	0,93982 3	0,93990 6	0,93896 8	0,93805 5	0,936 8	0,934 6
	5.10^5	0,940164	0,94043 4	0,94101 8	0,94129 7	0,94129 3	0,94092 0	0,93928 9	0,93824 1	0,936 9	0,934 6
	10^6	0,940692	0,94115 2	0,94180 5	0,94196 2	0,94155 9	0,94107 7	0,93933 2	0,93826 5	0,936 9	0,934 6
	5.10^6	0,941771 8	0,94277 7	0,94293 6	0,94273 5	0,94179 3	0,94120 9	0,93936 6	0,93828 4	0,936 9	0,934 6
	10^7	0,942092	0,94330 6	0,94314 4	0,94285 6	0,94182 3	0,94122 6	0,93937 0	0,93828 7	0,936 9	0,934 6
	5.10^7	0,942838	0,94392 9	0,94332 7	0,94295 7	0,94184 8	0,94123 9	0,93937 3	0,93828 9	0,936 9	0,934 6
	10^8	0,9431	0,9440	0,9434	0,9430	0,9418	0,9412	0,9394	0,9383	0,936 9	0,934 6

Il ressort du tableau 2.8 que :

- 1) Pour une valeur fixée de la rugosité relative, $\eta(Q = Q_{\max.})$ augmente avec l'accroissement du nombre de *Reynolds* R_p et tend à devenir constant.
- 2) Pour une valeur fixée du nombre de *Reynolds* R_p , le taux de remplissage $\eta(Q = Q_{\max.})$ augmente dans un premier temps puis diminue dans un second temps en passant par un maximum.
- 3) Pour les valeurs pratiques de la rugosité relative ε / D et du nombre de *Reynolds* R_p , indiquées dans l'espace grisâtre du tableau 2.8, la valeur moyenne $\eta(Q = Q_{\max.}) = 0,9407 \cong 0,941$ semble être la mieux appropriée.

Pour la valeur $\eta(Q = Q_{\max.}) \cong 0,941$ et selon les relations (2.5) et (2.6), les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,941) = 2,65088585$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,941) \times \sqrt{0,941 \times (1 - 0,941)}}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,941)} = 1,15679361$$

Tenant compte de ces valeurs, la relation (2.62) permet d'écrire que :

$$Q_{\max.} = -2,332 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{4,28} + \frac{8,07}{R_p} \right) \quad (2.65)$$

La relation (2.65) permet d'évaluer le débit maximal que peut évacuer une conduite circulaire à écoulement uniforme, lorsque la rugosité absolue ε , le diamètre D , la pente longitudinale i et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement sont connus. L'exemple d'application suivant indique les étapes à suivre pour la détermination du débit maximal $Q_{\max.}$.

II.4.2.1. Exemple d'application 6

Déterminer la capacité d'évacuation d'une conduite circulaire de diamètre $D = 1,5 \text{ m}$, de pente longitudinale $i = 5.10^{-4}$ et dont la paroi interne est caractérisée par la rugosité absolue $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$. La viscosité cinématique du liquide en écoulement est $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$.

Solution

Pour les données imposées, nous pouvons évaluer :

- i. La rugosité relative ε / D , soit :

$$\varepsilon / D = 10^{-3} / 1,5 = 6,6667.10^{-4}$$

ii. Le nombre de *Reynolds* R_p , en vertu de la relation (2.38), soit :

$$R_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 1,5^3}}{10^{-6}} = 727832,398$$

iii. Ainsi, le débit maximal $Q_{\max.}$ serait, selon la relation (2.65) :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -2,332 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{4,28} + \frac{8,07}{R_p} \right) \\ &= -2,332 \times \sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 1,5^5} \times \log \left(\frac{6,6667.10^{-4}}{4,28} + \frac{8,07}{727832,398} \right) = 1,70 m^3 / s \end{aligned}$$

II.4.3. Relation approchée de la profondeur normale

Cette partie de l'étude vise à établir une relation approchée susceptible d'évaluer la profondeur normale y_n de l'écoulement uniforme à coefficient de résistance variable. Pour établir cette relation, il a été nécessaire d'avoir recours aux relations (2.62) et (2.65). La démarche adoptée est identique à celle ayant servi à la détermination des relations (2.18) et (2.29).

Cette démarche a donc consisté à déterminer la loi de variation du taux de remplissage η en fonction de $Q / Q_{\max.}$. Pour cela, il a été nécessaire d'étudier la variation de $\eta(Q / Q_{\max.})$ pour diverses valeurs de la rugosité relative ε / D et du nombre de *Reynolds* R_p , en s'appuyant sur les relations (2.62) et (2.65).

Nos calculs ont pu montrer que, dans la large gamme pratique $0,15 \leq \eta \leq 0,80$, le taux de remplissage $\eta(Q / Q_{\max.})$ de la conduite pouvait s'exprimer par la relation :

$$\sin \left(\frac{5\pi}{11} \eta \right) = 0,953 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,495} \quad (2.66)$$

La profondeur normale y_n s'exprime alors par :

$$y_n = \frac{11}{5\pi} D \sin^{-1} \left[0,953 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,495} \right] \quad (2.67)$$

La relation (2.66) a été soumise à des vérifications intenses en l'appliquant à plus de 600 exemples numériques. Il a été alors constaté que la relation (2.66) entraîne une erreur maximale de 0,5%

seulement sur le calcul du taux de remplissage η . L'exemple d'application suivant montre les étapes à suivre pour la détermination de la profondeur normale y_n par application de la relation (2.66) ou (2.67).

II.4.3.1. Exemple d'application 7

Déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement uniforme dans une conduite circulaire écoulant le débit volume $Q = 1,3 \text{ m}^3 / \text{s}$ et dont le taux de remplissage est $\eta = 0,7$. La conduite est caractérisée par une pente longitudinale $i = 5 \cdot 10^{-4}$ et une rugosité absolue $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$. La viscosité cinématique du liquide en écoulement est $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$.

Solution

i. Pour les données du problème et selon les relations (2.5) et (2.6), les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,7) = 1,98231317$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,7) \times \sqrt{0,7 \times (1 - 0,7)}}{1,98231317} = 1,18493852$$

ii. Le diamètre du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.51) :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= [\sqrt{2} \sigma(\eta)]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} \\ &= [\sqrt{2} \times 1,98231317]^{-0,4} \times 1,18493852^{-0,6} \times \left(\frac{1,3}{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{0,4} = 1,923787694 \text{ m} \end{aligned}$$

Ceci permet de déduire que, selon la relation (2.54) :

$$\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,923787694^3}}{10^{-6}} = 1057134,407$$

Ainsi, selon la relation (2.57), le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est :

$$C = -5,343 \sqrt{g} \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right)$$

$$= -5,343 \times \sqrt{9,81} \times \log \left(\frac{10^{-3} / 1,923787694}{4,75 \times 1,18493852} + \frac{8,5}{1057134,407 \times 1,18493852^{3/2}} \right) = 67,04248101 m^{0,5} / s$$

iii. La relation (2.10) permet de déduire que le diamètre D de la conduite est :

$$D = [0,125 \sigma(\eta)]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left(\frac{Q}{C\sqrt{i}} \right)^{0,4}$$

$$= [0,125 \times 1,98231317]^{-0,4} \times 1,18493852^{-0,6} \times \left(\frac{1,3}{67,04248101 \times \sqrt{5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{0,4} \cong 1,49 m$$

iv. Adoptons le diamètre $D = 1,5 m$.

Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds* R_p est, en vertu de la relation (2.38) :

$$R_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,5^3}}{10^{-6}} = 727832,398$$

v. La rugosité relative est :

$$\varepsilon / D = 10^{-3} / 1,5 = 6,6667 \cdot 10^{-4}$$

vi. Ainsi, le débit maximal Q_{\max} serait, selon la relation (2.65) :

$$Q_{\max} = -2,332 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{4,28} + \frac{8,07}{R_p} \right)$$

$$= -2,332 \times \sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,5^5} \times \log \left(\frac{6,6667 \cdot 10^{-4}}{4,28} + \frac{8,07}{727832,398} \right) = 1,70 m^3 / s$$

vii. Par suite, selon la relation (2.66), le taux de remplissage η de la conduite est :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left[0,953 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,495} \right] = \frac{11}{5 \times \pi} \times \sin^{-1} \left[0,953 \times \left(\frac{1,3}{1,7} \right)^{0,495} \right] = 0,691326435$$

viii. La profondeur normale y_n recherchée est donc :

$$y_n = \eta D = 0,691326435 \times 1,5 = 1,037 m \cong 1,04 m$$

ix. Cette étape vise à vérifier les calculs en déterminant, pour le diamètre D ainsi adopté, le débit volume Q par la formule générale (2.36). Pour cela, évaluons :

- Les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ par les relations (2.5) et (2.6) respectivement, pour la nouvelle valeur calculée de η :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,691326435) = 1,963462328$$

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} \\ &= 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,691326435) \times \sqrt{0,691326435 \times (1 - 0,691326435)}}{1,963462328} = 1,180054383 \end{aligned}$$

- L'aire de la section mouillée A par la relation (2.4), soit :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{1,5^2}{4} \times 1,963462328 \times 1,180054383 = 1,303308183 \text{ m}^2$$

- Le rayon hydraulique R_h par la relation (2.9), soit :

$$R_h = \frac{1}{4} D \varphi(\eta) = \frac{1}{4} \times 1,5 \times 1,180054383 = 0,442520394 \text{ m}$$

- Le nombre de Reynolds R par la relation (2.37), soit :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 0,442520394^3}}{10^{-6}} = 933005,9581$$

Ainsi, le débit volume Q serait égal, selon la formule générale (2.36), à :

$$\begin{aligned} Q &= -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 1,303308183 \times \sqrt{0,442520394 \times 5 \cdot 10^{-4}} \times \log\left(\frac{10^{-3}}{14,8 \times 0,442520394} + \frac{10,04}{933005,9581}\right) \end{aligned}$$

Soit : $Q = 1,300648 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 1,3 \text{ m}^3 / \text{s}$

Ce débit volume, calculé en application de la formule générale (2.36), correspond bien à celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

II.4.4. Expression générale du diamètre

L'exemple d'application 4 a montré les étapes à suivre pour déterminer la valeur du diamètre D de la conduite. Le calcul de D a nécessité la détermination des valeurs des fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$, celle du diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence et enfin l'estimation du coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*. La démarche ainsi adoptée peut être simplifiée en tenant compte des relations (2.51) et (2.56) et après avoir noté que le diamètre D est le produit de ψ et de \bar{D} . Ainsi :

$$D = 1,35 \bar{D} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} \quad (2.68)$$

Nous obtenons ainsi la relation générale du diamètre D de la conduite dans laquelle ne figure plus le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*. Les étapes de calcul de D sont alors les suivantes :

- i. A partir des valeurs connues du taux de remplissage η de la conduite, les relations (2.5) et (2.6) permettent de déterminer la valeur des fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ respectivement.
- ii. Les valeurs connues de $\sigma(\eta)$, $\varphi(\eta)$, Q et i sont introduites dans la relation (2.51) pour le calcul de \bar{D} .
- iii. Le nombre de *Reynolds* \bar{R}_p est alors déduit de la relation (2.54).
- iv. Ainsi, tous les paramètres de la relation (2.68) sont connus pour l'évaluation du diamètre D recherché de la conduite.

II.4.4.1. Exemple d'application 8

Reprendre les données de l'exemple d'application 7 et déterminer le diamètre D de la conduite par application de la relation générale (2.68).

Solution

Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence ainsi que les paramètres $\sigma(\eta)$, $\varphi(\eta)$ et \bar{R}_p ont été déjà calculés au cours de l'exemple d'application 7, soient :

$$\bar{D} = 1,923787694 \text{ m}, \varphi(\eta) = 1,180054383 \text{ et } \bar{R}_p = 1057134,407 .$$

Selon la relation générale (2.68), le diamètre D de la conduite serait égal à :

$$\begin{aligned} D &= 1,35 \bar{D} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} \\ &= 1,35 \times 1,923787694 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-3} / 1,923787694}{4,75 \times 1,180054383} + \frac{8,5}{1057134,407 \times 1,180054383^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} = 1,4907 \text{ m} \\ &\cong 1,5 \text{ m} \end{aligned}$$

II.4.4.2. Exemple d'application 9

On désire maintenir le taux de remplissage $\eta = 0,75$ dans une conduite circulaire écoulant un débit volume $Q = 3 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$. La conduite est caractérisée par une pente longitudinale $i = 5 \cdot 10^{-4}$ et une rugosité absolue $\varepsilon \rightarrow 0$. Déterminer la valeur :

- i. des coefficients de Chézy C et C_{\max} . Commenter.
- ii. du diamètre D de la conduite.
- iii. de la profondeur normale y_n et déduire la valeur réelle du taux de remplissage η .
- iv. vérifier les calculs.

Solution

- i. les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,75) = 2,0943951$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,75) \times \sqrt{0,75 \times (1 - 0,75)}}{2,0943951} = 1,20674834$$

Le diamètre du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.51) :

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \left[\sqrt{2} \sigma(\eta) \right]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} \\ &= \left[\sqrt{2} \times 2,0943951 \right]^{-0,4} \times 1,20674834^{-0,6} \times \left(\frac{3}{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4}}} \right)^{0,4} = 2,60088548 \text{ m}\end{aligned}$$

Ceci permet de déduire que, selon la relation (2.54) :

$$\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 2,60088548^3}}{10^{-6}} = 1661790,76$$

Ainsi, selon la relation (2.57), le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est :

$$\begin{aligned}C &= -5,343 \sqrt{g} \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \\ &= -5,343 \times \sqrt{9,81} \times \log \left(\frac{8,5}{1661790,76 \times 1,20674834^{3/2}} \right) = 90,595043 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \cong 90,6 \text{ m}^{0,5} / \text{s}\end{aligned}$$

En vertu de la relation (2.61), la valeur de C_{\max} est :

$$\begin{aligned}C_{\max} &= -5,343 \sqrt{g} \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{5,782} + \frac{6,329}{\bar{R}_p} \right) = -5,343 \times \sqrt{9,81} \times \log \left(\frac{6,329}{1661790,76} \right) = 90,6897 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \\ &\cong 90,7 \text{ m}^{0,5} / \text{s}\end{aligned}$$

Le faible écart observé entre les valeurs de C et de C_{\max} s'explique par le fait que le coefficient de Chézy subit de très lentes variations dans une large gamme du taux de remplissage η . Cette caractéristique du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy a été mise en évidence lors du tracé des figures 2.8a et 2.8b.

ii. Selon la relation (2.68), le diamètre de la conduite serait égal à :

$$\begin{aligned}D &= 1,35 \bar{D} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} \\ &= 1,35 \times 2,60088548 \times \left[-\log \left(\frac{8,5}{1661790,76 \times 1,20674834^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} = 1,786739 \text{ m}\end{aligned}$$

Adoptons alors le diamètre :

$$D = 1,8m$$

iii. Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds* R_p est, en vertu de la relation (2.38) :

$$R_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,8^3}}{10^{-6}} = 956760,534$$

Le débit volume maximal $Q_{\max.}$ est, en vertu de la relation (2.65) :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -2,332 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{4,28} + \frac{8,07}{R_p} \right) \\ &= -2,332 \times \sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,8^5} \times \log \left(\frac{8,07}{956760,534} \right) = 3,60224927 m^3 / s \cong 3,60 m^3 / s \end{aligned}$$

La profondeur normale y_n recherchée est, selon la relation (2.67) :

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{11}{5\pi} D \sin^{-1} \left[0,953 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,495} \right] = \frac{11}{5 \times \pi} \times 1,8 \times \sin^{-1} \left[0,953 \times \left(\frac{3}{3,60224927} \right)^{0,495} \right] \\ &= 1,33134451m \cong 1,331m \end{aligned}$$

Pour le diamètre $D = 1,8m$, le taux de remplissage η est :

$$\eta = y_n / D = 1,33134451 / 1,8 = 0,73963584 \cong 0,74$$

iv. Cette étape vise à vérifier les calculs en déterminant, pour le diamètre D ainsi adopté, le débit volume Q par la formule générale (2.36). Pour cela, évaluons :

- Les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ par les relations (2.5) et (2.6) respectivement, pour la nouvelle valeur calculée de η :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,73963584) = 2,07062101$$

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} \\ &= 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,73963584) \times \sqrt{0,73963584 \times (1 - 0,73963584)}}{2,07062101} = 1,20314714 \end{aligned}$$

- L'aire de la section mouillée A par la relation (2.4), soit :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{1,8^2}{4} \times 2,07062101 \times 1,20314714 = 2,01792202 m^2$$

- Le rayon hydraulique R_h par la relation (2.9), soit :

$$R_h = \frac{1}{4} D \varphi(\eta) = \frac{1}{4} \times 1,8 \times 1,20314714 = 0,54141621 m$$

- Le nombre de Reynolds R par la relation (2.37), soit :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 0,54141621^3}}{10^{-6}} = 1262645,31$$

Ainsi, le débit volume Q serait égal, selon la formule générale (2.36), à :

$$\begin{aligned} Q &= -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,01792202 \times \sqrt{0,54141621 \times 5.10^{-4}} \times \log\left(\frac{10,04}{1262645,31}\right) \end{aligned}$$

Soit :

$$Q = 2,99982663 m^3 / s \cong 3 m^3 / s$$

Ce débit volume, calculé en application de la formule générale (2.36), correspond bien à celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

II.4.5. Expression de la vitesse maximale V_{\max} .

En ayant recours à la relation générale (2.36) du débit volume Q et compte tenu du fait que la vitesse moyenne de l'écoulement est $V = Q / A$, il est aisé de déduire que :

$$V = -4\sqrt{2g} \sqrt{R_h} i \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.69)$$

En tenant compte des relations (2.9) et (2.43), la relation (2.69) devient :

$$V = -2\sqrt{2g} [\varphi(\eta)]^{1/2} \sqrt{g i D} \log\left(\frac{\varepsilon / D}{3,7\varphi(\eta)} + \frac{10,04}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}}\right) \quad (2.70)$$

Définissons le paramètre adimensionnel V^* tel que :

$$V^* = \frac{V}{\sqrt{g i D}} \quad (2.71)$$

La relation (2.70) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$V^* = -2\sqrt{2}[\varphi(\eta)]^{1/2} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7\varphi(\eta)} + \frac{10,04}{R_p[\varphi(\eta)]^{3/2}}\right) \quad (2.72)$$

Le paramètre V^* est donc fonction du taux de remplissage η , de la rugosité relative ε/D et du nombre de *Reynolds* R_p . Nous avons représenté sur les figures 2.10a et 2.10b, à titre qualitatif, la variation de V^* en fonction de η pour quelques valeurs du nombre de *Reynolds* R_p et pour les rugosités relatives $\varepsilon/D = 0$ et $\varepsilon/D = 0,01$ respectivement.

Les courbes des figures 2.10a et 2.10b montrent que, pour la même valeur du nombre de *Reynolds* R_p , V^* augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage η , jusqu'à un maximum, puis diminue dans un second temps lorsque η continue d'augmenter. Les calculs ont montré que la valeur maximale de V^* s'obtient pour le taux de remplissage $\eta \cong 0,8128$, quelle que soit la valeur du nombre de *Reynolds* R_p ou de celle de la rugosité relative ε/D . V_{\max}^* , et donc la vitesse moyenne V_{\max} , apparaît à la profondeur $y_n = 0,8128 D$ comme pour le cas du coefficient de résistance maximal C_{\max} de *Chézy*.

Les courbes des figures 2.10a et 2.10b révèlent aussi que plus la rugosité relative est élevée et plus les courbes de variation de V^* se resserrent et se confondent quasiment au-delà de la rugosité relative $\varepsilon/D = 0,01$. Pour cette rugosité relative, la figure 2.10b montre clairement que les courbes $\eta(V^*)$ se confondent pour $R_p \geq 10^5$.

Pour le taux de remplissage $\eta = 0,8128$, la fonction $\varphi(\eta)$ prend la valeur :

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} \\ &= 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,8128) \times \sqrt{0,8128 \times (1 - 0,8128)}}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,8128)} = 1,21723363 \end{aligned}$$

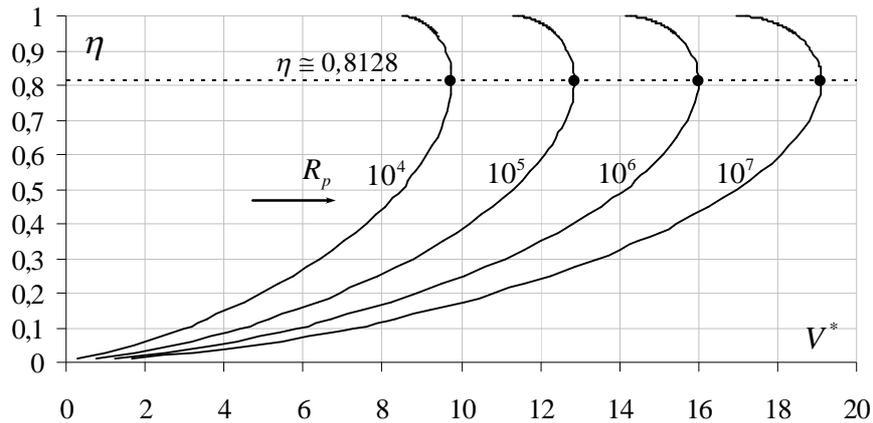
En substituant cette valeur de $\varphi(\eta)$ dans la relation (2.72), il vient que :

$$V_{\max}^* = -3,12 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{4,504} + \frac{7,476}{R_p}\right) \quad (2.73)$$

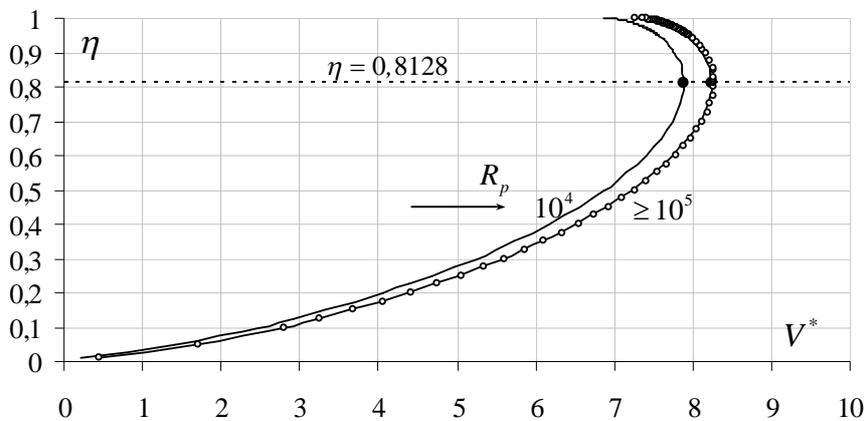
En tenant compte de la relation (2.71), la relation (2.73) permet d'écrire que :

$$V_{\max.} = -3,12 \sqrt{g i D} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{4,504} + \frac{7,476}{R_p} \right) \quad (2.74)$$

Nous obtenons ainsi l'expression de la vitesse maximale $V_{\max.}$ de l'écoulement uniforme dans une conduite circulaire, applicable dans le domaine entier de l'écoulement turbulent. Rappelons que le nombre de Reynolds R_p est donné par la relation (2.38).



a)



b)

Figure 2.10 : Variation de la vitesse relative V^* en fonction du taux de remplissage η pour quelques valeurs du nombre de Reynolds R_p . **a) :** $\varepsilon / D = 0$, **b) :** $\varepsilon / D = 0,01$.

(●) Valeurs maximales de V^* obtenues pour $\eta \cong 0,8128$.

II.4.5.1. Exemple d'application 10

Soit une conduite circulaire en béton de rugosité absolue $\varepsilon = 1 \text{ mm}$. On admet que la vitesse d'auto-curage doit être supérieure ou égale à $0,2 \text{ m/s}$ et que, pour éviter tout phénomène érosif, la vitesse moyenne admissible ne doit pas excéder $2,5 \text{ m/s}$ à 3 m/s . La conduite écoule le débit

volume $Q = 1,7 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$, sous une pente longitudinale $i = 3 \cdot 10^{-4}$. Le taux de remplissage de la conduite est $\eta = 0,6$.

Déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement.

Solution

i. Selon les relations (2.5) et (2.6), les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,6) = 1,77215425$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1-2 \times 0,6) \times \sqrt{0,6 \times (1-0,6)}}{1,77215425} = 1,11057682$$

Le diamètre du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.51) :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \left[\sqrt{2} \sigma(\eta) \right]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} \\ &= \left[\sqrt{2} \times 1,77215425 \right]^{-0,4} \times 1,11057682^{-0,6} \times \left(\frac{1,7}{\sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4}}} \right)^{0,4} = 2,579204314 \text{ m} \end{aligned}$$

Ceci permet de déduire que, selon la relation (2.54) :

$$\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4} \times 2,579204314^3}}{10^{-6}} = 1271155,673$$

ii. En application de la relation (2.68), le diamètre de la conduite est égal à :

$$\begin{aligned} D &= 1,35 \bar{D} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} \\ &= 1,35 \times 2,579204314 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-3} / 2,579204314}{4,75 \times 1,11057682} + \frac{8,5}{1271155,673 \times 1,11057682^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} \\ &= 1,9799512 \text{ m} \cong 1,98 \text{ m} \end{aligned}$$

Adoptons alors le diamètre :

$$D = 2 \text{ m}$$

iii. Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds* R_p est, en vertu de la relation (2.38) :

$$R_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 2^3}}{10^{-6}} = 867990,783$$

Le débit volume maximal $Q_{\max.}$ est, selon la relation (2.65) :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -2,332 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{4,28} + \frac{8,07}{R_p} \right) \\ &= -2,332 \times \sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 2^5} \times \log \left(\frac{10^{-3} / 2}{4,28} + \frac{8,07}{867990,783} \right) \\ &= 2,79046163 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 2,79 \text{ m}^3 / \text{s} \end{aligned}$$

La profondeur normale y_n recherchée est, en application de la relation (2.67) :

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{11}{5\pi} D \sin^{-1} \left[0,953 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,495} \right] = \frac{11}{5 \times \pi} \times 2 \times \sin^{-1} \left[0,953 \times \left(\frac{1,7}{2,79046163} \right)^{0,495} \right] \\ &= 1,17866169 \text{ m} \cong 1,18 \text{ m} \end{aligned}$$

Pour le diamètre $D = 2 \text{ m}$, le taux de remplissage η serait égal à :

$$\eta = y_n / D = 1,17866169 / 2 = 0,58933 \cong 0,59$$

iv. Déterminons la vitesse moyenne V de l'écoulement, après avoir calculé l'aire de la section mouillée A par la relation (2.4). Pour le taux de remplissage $\eta = 0,59$, les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,59) = 1,75178278$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,59) \times \sqrt{0,59 \times (1 - 0,59)}}{1,75178278} = 1,10107417$$

L'aire de la section mouillée A est par suite :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{2^2}{4} \times 1,75178278 \times 1,10107417 = 1,92884277 \text{ m}^2$$

La vitesse moyenne V est donc :

$$V = Q / A = 1,7 / 1,92884277 = 0,88135748 \text{ m / s} \cong 0,88 \text{ m / s}$$

La vitesse V ainsi calculée est bien supérieure à la vitesse d'auto-curage de $0,2 \text{ m / s}$, imposée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

v. Déterminons la vitesse maximale V_{\max} par la relation (2.74), soit :

$$\begin{aligned} V_{\max} &= -3,12 \sqrt{g i D} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{4,504} + \frac{7,476}{R_p} \right) \\ &= -3,12 \times \sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 2} \times \log \left(\frac{10^{-3} / 2}{4,504} + \frac{7,476}{867990,783} \right) = 0,93884059 \text{ m / s} \cong 0,94 \text{ m / s} \end{aligned}$$

La vitesse V_{\max} ainsi calculée est bien inférieure à la vitesse admissible indiquée dans l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

vi. Cette étape vise à vérifier les calculs en déterminant, pour le diamètre D ainsi adopté, le débit volume Q par la formule générale (2.36). Pour cela, évaluons :

- Le rayon hydraulique R_h par la relation (2.9), soit :

$$R_h = \frac{1}{4} D \varphi(\eta) = \frac{1}{4} \times 2 \times 1,10107417 = 0,550537985 \text{ m}$$

- Le nombre de Reynolds R par la relation (2.37), soit :

$$R = \frac{32 \sqrt{2} \sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 0,550537985^3}}{10^{-6}} = 1002859,229$$

Ainsi, le débit volume Q serait égal, selon la formule générale (2.36), à :

$$\begin{aligned} Q &= -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 1,92884277 \times \sqrt{0,550537985} \times 3.10^{-4} \times \log \left(\frac{10^{-3}}{14,8 \times 0,550537985} + \frac{10,04}{1002859,229} \right) \end{aligned}$$

Soit :

$$Q = 1,70276702 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 1,703 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Ce débit volume, calculé en application de la formule générale (2.36), correspond, avec un écart relatif inférieur à 0,18% seulement, à celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

II.4.6. Relation générale du coefficient n de Manning

L'expression générale du coefficient n de *Manning* peut être déduite des relations (2.2) et (2.36). En comparant ces deux relations, nous pouvons en effet déduire que :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} R_h^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.75)$$

Le nombre de *Reynolds* R est, pour rappel, donné par la relation (2.37). La relation (2.75) montre que le coefficient n de *Manning* est fonction de la rugosité absolue ε , du nombre de *Reynolds* R et du rayon hydraulique R_h . Cette dépendance de n vis-à-vis de R_h traduit bien le fait que n varie en fonction du taux de remplissage η de la conduite. Mais nous verrons, lors de la représentation graphique de n , que cette variation n'est que relative, voire faible.

En ayant recours aux relations (2.9) et (2.43) qui expriment respectivement le rayon hydraulique R_h et le nombre de *Reynolds* R , la relation (2.75) peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{n} = -7,127\sqrt{g} D^{-1/6} [\varphi(\eta)]^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon / D}{3,7\varphi(\eta)} + \frac{10,04}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}}\right) \quad (2.76)$$

En introduisant le paramètre adimensionnel :

$$N = \frac{D^{1/6}}{n\sqrt{g}} \quad (2.77)$$

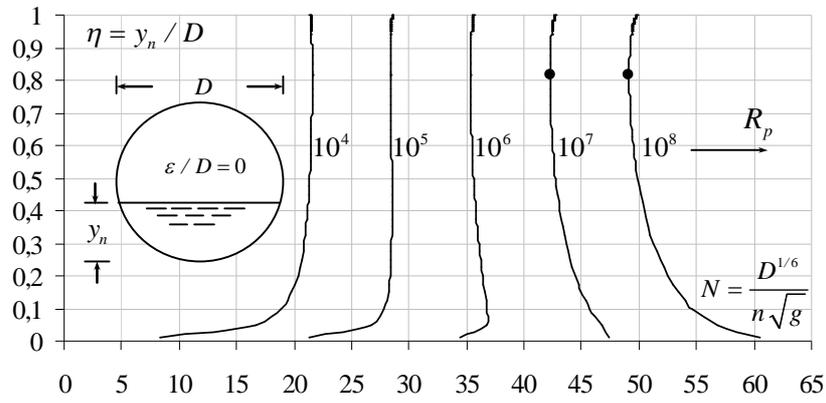
la relation (2.77) s'écrit alors :

$$N = -7,127 [\varphi(\eta)]^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon / D}{3,7\varphi(\eta)} + \frac{10,04}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}}\right) \quad (2.78)$$

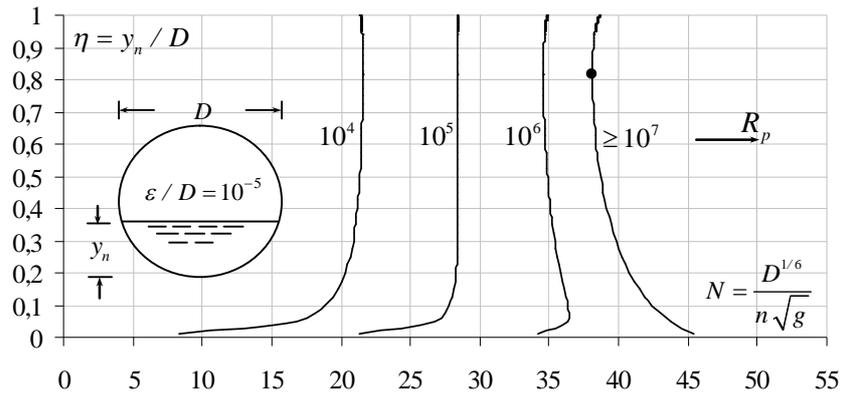
Lorsque les paramètres η , ε , D et ν sont connus, la relation (2.76) ou (2.78) permet d'évaluer le coefficient n de *Manning*.

Sur les figures 2.11a à 2.11h a été tracée la variation du coefficient N en fonction du taux de remplissage η pour des valeurs fixées de la rugosité relative ε / D et du nombre de Reynolds R_p . Il ressort des figures obtenues que :

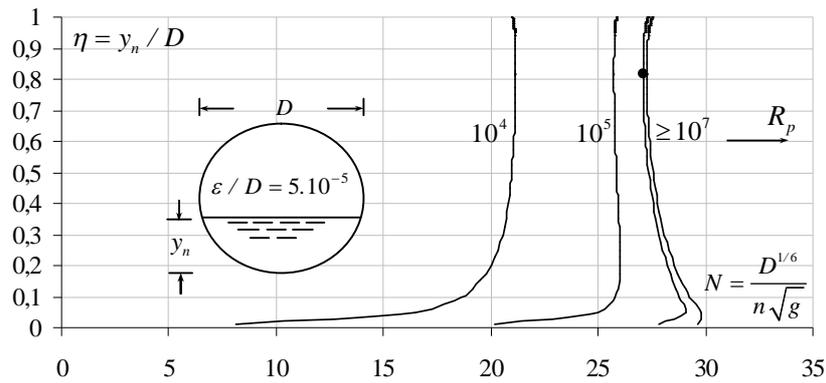
- i. Quelles que soient les valeurs de R_p et de ε / D , le coefficient N subit une variation très rapide pour les faibles valeurs du taux de remplissage η ($\eta \leq 0,1$). Pour ces faibles valeurs de η , le coefficient N peut augmenter ou diminuer avec l'augmentation de η , selon la valeur du nombre de Reynolds R_p . C'est ainsi que N augmente avec l'accroissement de η pour des valeurs de R_p inférieures ou égales à 10^6 environ, mais diminue avec l'accroissement de η lorsque R_p est supérieur à 10^6 .
- ii. Pour $\eta > 0,1$, le coefficient N subit une variation très faible et tend à devenir constant au fur et à mesure de l'augmentation de η . La variation de η n'a que peu d'influence sur la valeur du coefficient N . La constance du paramètre N est remarquable pour la valeur $R_p = 10^5$. Cette dernière valeur de R_p , qui est par ailleurs la plus faible valeur pratique, semble être la limite au-delà de laquelle s'opère un changement de concavité des courbes. Ce changement de concavité est ponctué par l'apparition d'une valeur minimale du paramètre N . Mais, notons que la valeur minimale de N n'est pas remarquable lorsqu'on la compare aux autres valeurs que prend le paramètre N . En effet, l'écart entre la valeur minimale de N et les autres valeurs que peut prendre ce paramètre n'est pas significatif. Notons que les valeurs minimales du paramètre N apparaissent pour le taux de remplissage $\eta \cong 0,8128$, valeur pour laquelle le coefficient C de Chézy atteint son maximum.
- iii. Pour une valeur fixée de η , le coefficient N augmente avec l'accroissement du nombre de Reynolds R_p .
- iv. Au fur et à mesure de l'augmentation de la rugosité relative ε / D et de celle du nombre de Reynolds R_p , les courbes des figures 2.11a à 2.11h se resserrent et tendent à se confondre au-delà d'une valeur donnée de R_p indiquée sur les figures. A titre indicatif, les courbes de la figure 2.11c, correspondant à la rugosité relative $\varepsilon / D = 5.10^{-5}$, se confondent pour les valeurs de $R_p \geq 10^7$. Pour la plus forte rugosité relative considérée, soit $\varepsilon / D = 10^{-2}$, les courbes de la figure 2.11h se confondent pour $R_p \geq 10^5$.



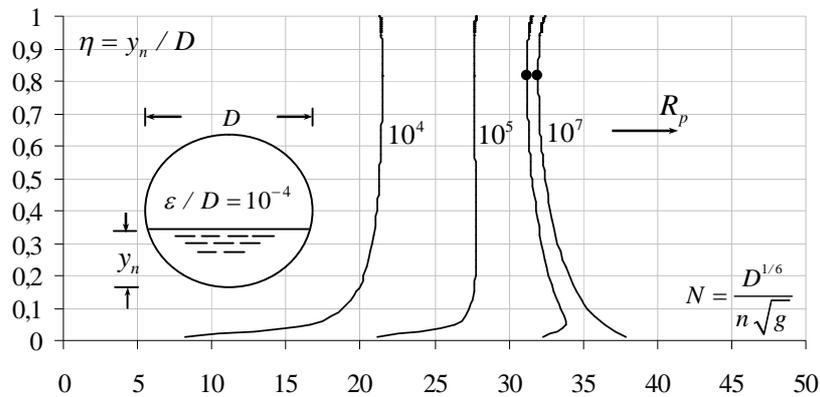
a)



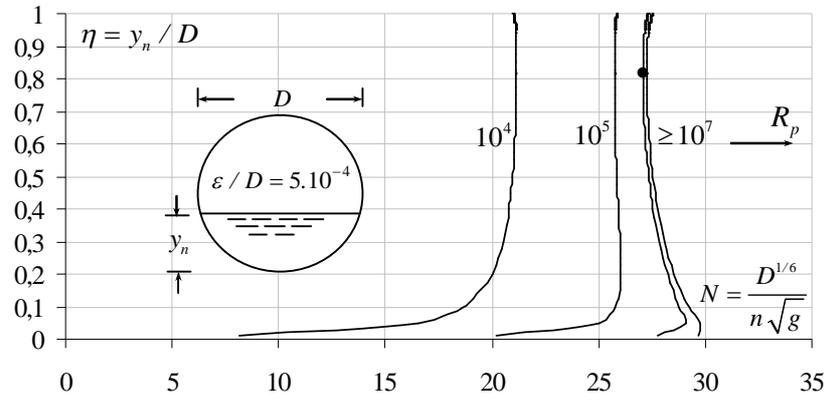
b)



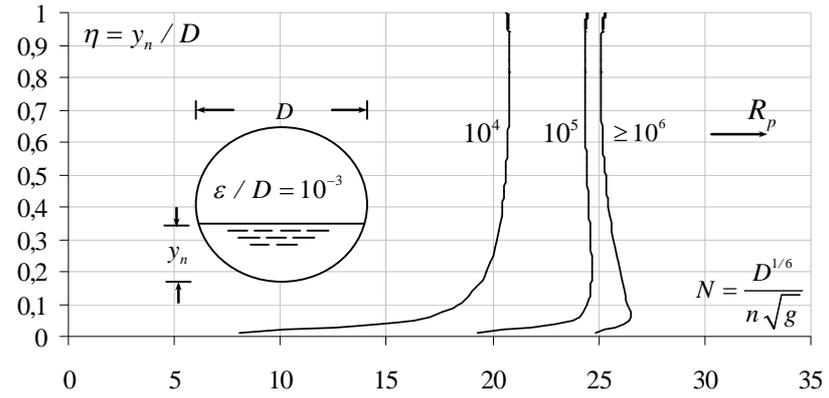
c)



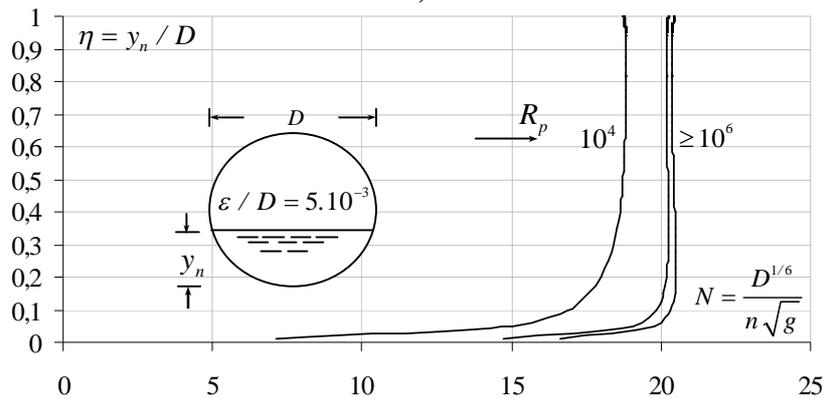
d)



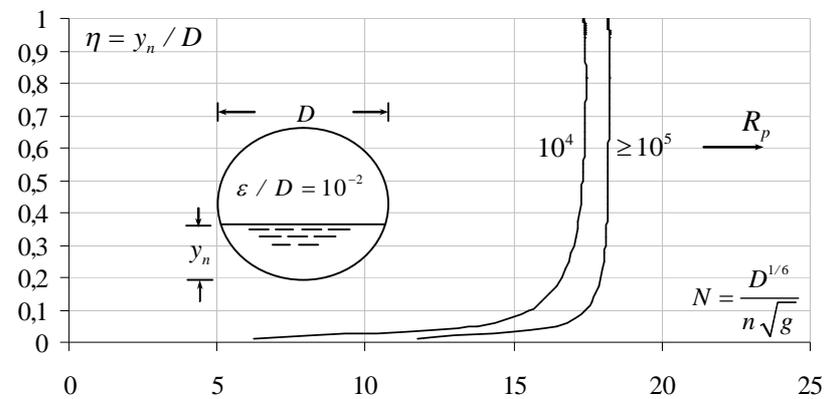
e)



f)



g)



h)

Figure 2.11 : Variation de $N = D^{1/6} / (n\sqrt{g})$ en fonction du taux de remplissage η , pour des valeurs fixées de la rugosité relative ϵ / D et du nombre de Reynolds R_p .
Courbes tracées selon la relation (2.78).

(●) Taux de remplissage $\eta \cong 0,8128$ correspondant à la valeur minimale de N .

Pour la valeur de $\eta = 0,8128$, la fonction $\varphi(\eta)$ prend la valeur :

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1-0,8128) \times \sqrt{0,8128 \times (1-0,8128)}}{\cos^{-1}(1-2 \times 0,8128)} = 1,217233628$$

Par suite, la relation (2.78) devient :

$$N_{min} = -6,897 \log \left(\frac{\varepsilon / D}{4,504} + \frac{7,476}{R_p} \right) \quad (2.79)$$

Ou bien, en tenant compte de la relation (2.77) :

$$n_{max} = -\frac{0,145D^{1/6}}{\sqrt{g}} \left[\log \left(\frac{\varepsilon / D}{4,504} + \frac{7,476}{R_p} \right) \right]^{-1} \quad (2.80)$$

II.4.6.1. Calcul du coefficient n de Manning par la MMR

La relation (2.76) ou (2.78) ne permet d'évaluer le coefficient n de *Manning* que si le diamètre D de la conduite est une donnée du problème. Dans le cas où D n'est pas connu, il est tout de même possible de calculer la valeur de n , à condition d'avoir recours à la méthode du modèle rugueux (MMR).

En comparant les relations (2.1) et (2.2), nous pouvons déduire que :

$$n = \frac{R_h^{1/6}}{C} \quad (2.81)$$

Par conséquent, le modèle rugueux de référence est caractérisé par un coefficient de *Manning* tel que :

$$\bar{n} = \frac{\bar{R}_h^{1/6}}{\bar{C}} \quad (2.82)$$

Rappelons que $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$.

Le modèle rugueux est caractérisé par un diamètre \bar{D} ; il écoule un débit volume \bar{Q} d'un liquide de viscosité cinématique $\bar{\nu}$ correspondant à un taux de remplissage $\bar{\eta}$, pour une pente longitudinale \bar{i} .

Pour déterminer le coefficient n de *Manning*, admettons les conditions suivantes :

- i. $\bar{D} \neq D$: cette condition énonce que le diamètre de la conduite et celui du modèle rugueux de référence sont différents.
- ii. $\bar{Q} = Q$: la conduite considérée et le modèle rugueux de référence écoulent le même débit volume Q .
- iii. $\bar{i} = i$: la conduite et le modèle rugueux de référence sont caractérisés par la même pente longitudinale i .
- iv. $\bar{\eta} = \eta$: le taux de remplissage de la conduite considérée est égal à celui du modèle rugueux de référence.
- v. $\bar{\nu} = \nu$: la conduite considérée et le modèle rugueux de référence écoulent le même liquide.

Le débit volume \bar{Q} écoulé par le modèle rugueux de référence s'écrit, en vertu de la relation de *Manning* :

$$\bar{Q} = Q = \frac{1}{n} \bar{A} \bar{R}_h^{2/3} \sqrt{\bar{i}} \quad (2.83)$$

L'aire de la section mouillée A ainsi que le rayon hydraulique R_h de l'écoulement dans la conduite considérée sont liés à leurs homologues du modèle rugueux de référence \bar{A} et \bar{R}_h par les relations suivantes :

$$A = \psi^2 \bar{A} \quad (2.84)$$

$$R_h = \psi \bar{R}_h \quad (2.85)$$

En tenant compte des relations (2.84) et (2.85), la relation (2.2) devient :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} = \frac{\psi^{8/3}}{n} \bar{A} \bar{R}_h^{2/3} \sqrt{\bar{i}} \quad (2.86)$$

Il ressort ainsi des relations (2.83) et (2.86) que :

$$n = \bar{n} \psi^{8/3} \quad (2.87)$$

Tenant compte du fait que $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$, la combinaison des relations (2.82) et (2.87) mène à écrire que :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (2.88)$$

Le coefficient de correction des dimensions linéaires ψ est donné par la relation (2.56), tandis que \bar{R}_h s'exprime par la relation :

$$\bar{R}_h = \frac{\bar{D}}{4} \varphi(\eta) \quad (2.89)$$

Ainsi, la relation (2.88) permet d'écrire que :

$$n = \frac{0,156}{\sqrt{g}} \left[\bar{D} \varphi(\eta) \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.90)$$

Selon la relation (2.90), le coefficient n de *Manning* s'exprime en fonction du taux de remplissage η , de la rugosité absolue ε et des caractéristiques \bar{D} et \bar{R}_p du modèle rugueux de référence. Le diamètre \bar{D} est donné par la relation (2.51), tandis que le nombre de *Reynolds* \bar{R}_p est régi par la relation (2.54).

L'exemple d'application suivant montre les étapes d'évaluation du coefficient n de *Manning*, par application de la méthode du modèle rugueux.

II.4.6.2. Exemple d'application 11

Reprenons les données de l'exemple d'application 4 et déterminons la valeur du :

- i. coefficient n de *Manning*.
- ii. diamètre D de la conduite.

Solution

Les données du problème sont :

$$Q = 0,987 \text{ m}^3 / \text{s} ; i = 3 \cdot 10^{-4} ; \varepsilon = 10^{-4} \text{ m} ; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s} ; \eta = 0,6 .$$

- i. Au cours de l'exemple d'application 4, les paramètres suivants ont été déterminés, soient :

- $\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)} = 1,110576819$

- $\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = 1,77215425$
- $\bar{D} = \left[\sqrt{2} \sigma(\eta) \right]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} = 2,075071373 m$
- $\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 917317,5$

Ainsi, selon la relation (2.90), le coefficient n de *Manning* serait égal à :

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{0,156}{\sqrt{g}} \left[\bar{D} \varphi(\eta) \right]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} \\
 &= \frac{0,156}{\sqrt{9,81}} \times 2,075071373^{1/6} \times 1,110576819^{1/6} \times \\
 &\quad \left[-\log \left(\frac{10^{-4} / 2,075071373}{4,75 \times 1,110576819} + \frac{8,5}{917317,5 \times 1,110576819^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} \cong 0,01082 m^{-1/3} s
 \end{aligned}$$

ii. La relation (2.23) permet de déduire que le diamètre D de la conduite est :

$$D = \frac{(nQ / \sqrt{i})^{3/8}}{[\sigma(\eta)]^{3/8} [\varphi(\eta)/4]^{5/8}} = \frac{(0,01082 \times 0,987 / \sqrt{3 \cdot 10^{-4}})^{3/8}}{1,77215425^{3/8} \times (1,110576819 / 4)^{5/8}} = 1,4991 m \cong 1,5 m$$

Nous retrouvons ainsi, avec un écart relatif extrêmement faible, la même valeur du diamètre D calculée par la relation de *Chézy* lors de l'exemple d'application 4, soit $D = 1,5 m$.

Selon la relation (2.38), le nombre de *Reynolds* R_p est :

$$R_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4} \times 1,5^3}}{10^{-6}} = 563776,551$$

La valeur maximale de n est, selon la relation (2.80) :

$$\begin{aligned}
 n_{\max} &= -\frac{0,145 D^{1/6}}{\sqrt{g}} \left[\log \left(\frac{\varepsilon / D}{4,504} + \frac{7,476}{R_p} \right) \right]^{-1} = -\frac{0,145 \times 1,5^{1/6}}{\sqrt{9,81}} \left[\log \left(\frac{0,0001 / 1,5}{4,504} + \frac{7,476}{563776,551} \right) \right]^{-1} \\
 &= 0,01088157 m^{-1/3} s \cong 0,0109 m^{-1/3} s
 \end{aligned}$$

II.5. ECOULEMENT CRITIQUE

II.5.1. Débit relatif

La profondeur critique est un paramètre important qui permet de se prononcer sur le caractère fluvial ou torrentiel de l'écoulement. Lorsque la profondeur critique y_c est supérieure à la profondeur normale y_n , l'écoulement est de nature torrentielle. Dans le cas contraire, l'écoulement est fluvial.

L'écoulement critique est régi par la relation bien connue sous le nom de condition de criticité. Celle-ci s'écrit :

$$\frac{Q^2 e_c}{g A_c^3} = 1 \quad (2.91)$$

où e_c désigne la largeur du plan d'eau (Figure 2.12) et l'indice « c » se réfère l'état critique de l'écoulement.

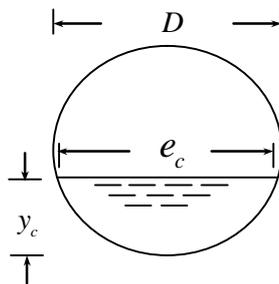


Figure 2.12 : Schéma de définition de l'écoulement critique dans une conduite circulaire de diamètre D

Si $\eta_c = y_c / D$ est le taux de remplissage de la conduite à l'état critique, la largeur du plan d'eau e_c s'écrit alors :

$$e_c = 2D\sqrt{\eta_c(1-\eta_c)} \quad (2.92)$$

Selon la relation (2.3), l'aire de la section mouillée critique A_c s'exprime par :

$$A_c = \frac{D^2}{4} \left[\cos^{-1}(1-2\eta_c) - 2(1-2\eta_c)\sqrt{\eta_c(1-\eta_c)} \right] \quad (2.93)$$

En insérant les relations (2.92) et (2.93) dans la relation (2.91), celle-ci devient :

$$\frac{128\sqrt{\eta_c(1-\eta_c)}}{\left[\cos^{-1}(1-2\eta_c) - 2(1-2\eta_c)\sqrt{\eta_c(1-\eta_c)} \right]^3} \left(\frac{Q^2}{gD^5} \right) = 1 \quad (2.94)$$

En introduisant le débit relatif :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}} \quad (2.95)$$

la relation (2.94) permet alors de déduire que :

$$Q^* = \frac{\left[\cos^{-1}(1-2\eta_c) - 2(1-2\eta_c)\sqrt{\eta_c(1-\eta_c)} \right]^{3/2}}{8\sqrt{2}[\eta_c(1-\eta_c)]^{1/4}} \quad (2.96)$$

La relation (2.96) est celle qui régit l'écoulement critique dans une conduite circulaire. En pratique, les paramètres Q et D , par conséquent Q^* , sont connus et l'on recherche alors à déterminer la profondeur critique y_c . La détermination de y_c passe par celle de η_c , puisque $y_c = \eta_c D$. La relation (2.96) montre clairement que η_c est implicite vis-à-vis de Q^* et l'évaluation de η_c nécessiterait un procédé itératif ou graphique. L'un des objectifs principaux de notre étude est de proposer une relation approchée, fiable, au calcul du taux de remplissage critique η_c et donc de la profondeur critique y_c .

La relation (2.96) a été représentée graphiquement sur la figure 2.13. Celle-ci montre que le taux de remplissage η_c à l'état critique augmente avec l'accroissement du débit relatif Q^* . En outre, nous pouvons constater que lorsque $Q^* \rightarrow \infty$, le taux de remplissage à l'état critique $\eta_c \rightarrow 1$.

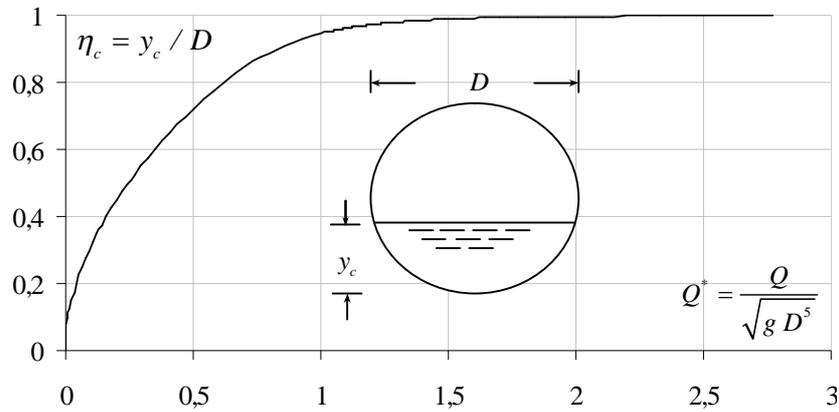


Figure 2.13 : Variation du taux de remplissage critique η_c en fonction du débit relatif Q^* .

Courbe tracée selon la relation (2.96).

II.5.2. Relation approchée de la profondeur critique

La relation implicite (2.96) a fait l'objet d'un programme de calcul intense, plus particulièrement dans la gamme $0,05 \leq \eta_c \leq 0,75$. La valeur limite supérieure $\eta_c = 0,75$ de la gamme choisie de η_c a été dictée par des considérations pratiques, puisque la conduite est dimensionnée en règle générale pour des taux de remplissage dépassant rarement les 75%. Un taux de remplissage de la conduite allant au-delà de 75% n'est que très rarement observé.

Nos calculs ont montré que l'une des relations fiables qui approche le mieux la relation implicite (2.96) est :

$$\sinh(0,3\eta_c) = 0,312 Q^{*0,52} \quad (2.97)$$

Cette relation a été établie dans la gamme $0,2 \leq \eta_c \leq 0,80$ correspondant à $0,042 \leq Q^* \leq 0,618$. L'écart relatif maximal qu'elle occasionne est inférieur à 0,42%, comme l'indique la figure 2.14.

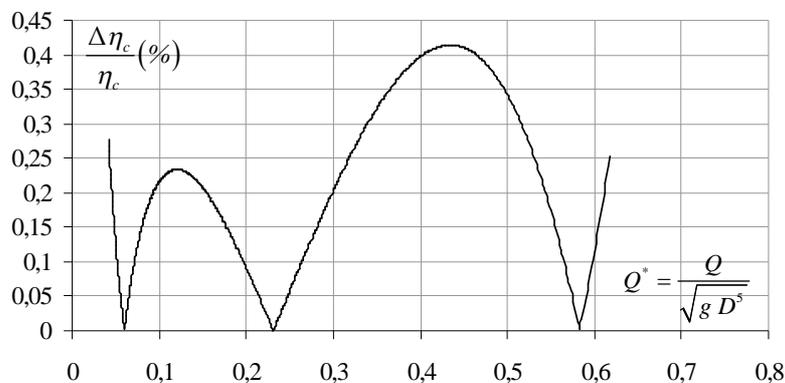


Figure 2.14 : Ecart relatif en % occasionnés par la relation (2.97) sur le calcul du taux de remplissage critique η_c .

La relation (2.97) permet alors d'écrire que :

$$y_c = \frac{D}{0,3} \operatorname{asinh}(0,312 Q^{*0,52}) \quad (2.98)$$

A partir des valeurs connues du débit volume Q et du diamètre D de la conduite, le débit relatif Q^* est alors déduit de la relation (2.95). Par suite, la relation (2.98) donne de manière explicite la valeur de la profondeur critique y_c .

II.5.3. Exemple d'application 12

Une conduite circulaire, siège d'un écoulement uniforme, écoule le débit volume $Q = 1,8 \text{ m}^3 / \text{s}$ sous la pente longitudinale $i = 3 \cdot 10^{-4}$. La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ et la viscosité cinématique du liquide en écoulement est $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$. Pour le taux de remplissage $\eta = 0,65$, déterminer :

- i. le diamètre D de la conduite.
- ii. la nature de l'écoulement en comparant les profondeurs normale et critique.

Solution

- i. Selon les relations (2.5) et (2.6), les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$ prennent respectivement la valeur :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,65) = 1,87548898$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} = 1 - \frac{2 \times (1 - 2 \times 0,65) \times \sqrt{0,65 \times (1 - 0,65)}}{1,87548898} = 1,152590478$$

Le diamètre du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.51) :

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \left[\sqrt{2} \sigma(\eta) \right]^{-0,4} [\varphi(\eta)]^{-0,6} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} \\ &= \left[\sqrt{2} \times 1,87548898 \right]^{-0,4} \times 1,152590478^{-0,6} \times \left(\frac{1,8}{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4}}} \right)^{0,4} = 2,52286567 \text{ m}\end{aligned}$$

Ceci permet de déduire que, selon la relation (2.54) :

$$\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 2,52286567^3}}{10^{-6}} = 1229734,369$$

En application de la relation (2.68), le diamètre de la conduite est égal à :

$$\begin{aligned}D &= 1,35 \bar{D} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4,75 \varphi(\eta)} + \frac{8,5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} \\ &= 1,35 \times 2,52286567 \times \left[-\log \left(\frac{5.10^{-4} / 2,52286567}{4,75 \times 1,152590478} + \frac{8,5}{1229734,369 \times 1,152590478^{3/2}} \right) \right]^{-0,4} \\ &= 1,8866 \text{ m}\end{aligned}$$

Adoptons alors le diamètre :

$$D = 1,9 \text{ m}$$

Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds* R_p est, en vertu de la relation (2.38) :

$$R_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 1,9^3}}{10^{-6}} = 803712,127$$

Le débit volume maximal Q_{\max} est, selon la relation (2.65) :

$$\begin{aligned}Q_{\max} &= -2,332 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon / D}{4,28} + \frac{8,07}{R_p} \right) \\ &= -2,332 \times \sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 1,9^5} \times \log \left(\frac{5.10^{-4} / 1,9}{4,28} + \frac{8,07}{803712,127} \right) \\ &= 2,60968521 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 2,61 \text{ m}^3 / \text{s}\end{aligned}$$

La profondeur normale y_n recherchée est, en application de la relation (2.67) :

$$y_n = \frac{11}{5\pi} D \sin^{-1} \left[0,953 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,495} \right] = \frac{11}{5 \times \pi} \times 1,9 \times \sin^{-1} \left[0,953 \times \left(\frac{1,8}{2,60968521} \right)^{0,495} \right]$$

$$= 1,21826901 m \cong 1,22 m$$

Pour le diamètre $D = 1,9 m$, le taux de remplissage η serait égal à :

$$\eta = y_n / D = 1,21826901 / 1,9 = 0,64119422 \cong 0,641$$

ii. Selon la relation (2.95), le débit relatif Q^* est

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{g D^5}} = \frac{1,8}{\sqrt{9,81 \times 1,9^5}} = 0,1154925$$

Par suite, la profondeur critique est, en application de la relation (2.98) :

$$y_c = \frac{D}{0,3} \operatorname{asinh} \left(0,312 Q^{*0,52} \right) = \frac{1,9}{0,3} \times \operatorname{asinh} \left(0,312 \times 0,1154925^{0,52} \right) = 0,64205357 m \cong 0,642 m$$

Nous pouvons ainsi déduire que l'écoulement est de nature fluviale puisque $y_n > y_c$.

II.6. Conclusion

L'étude s'est intéressée à l'écoulement uniforme dans une conduite de forme circulaire. L'écoulement a été analysé dans le cas d'un coefficient de résistance constant, puis variable. L'étude s'est basée sur les relations de *Chézy* et de *Manning*, largement utilisées dans la pratique. En se basant sur la formule de *Chézy* et pour un coefficient de résistance constant, la conductivité Q^* rapportée au diamètre de la conduite a été exprimée et la courbe de remplissage de la conduite a été tracée, puis discutée. Une relation approchée, explicite et fiable, du taux de remplissage η en fonction de Q/Q_p a été déterminée. L'étude s'est poursuivie par la détermination de la relation de la profondeur normale en termes de débit volume maximal Q_{\max} . En introduisant la notion de conductivité rapportée à la profondeur normale, une relation explicite a été proposée pour le calcul du taux de remplissage de la conduite. Deux exemples d'application détaillés ont été proposés pour illustrer la démarche à suivre pour le calcul de la profondeur normale et du diamètre de la conduite.

L'étude de l'écoulement à coefficient de résistance constant, basée sur la formule de *Manning*, a mené à l'expression de la conductivité rapportée au diamètre de la conduite, puis à la relation approchée de la profondeur normale. L'étude s'est poursuivie par le tracé de la courbe de remplissage de la conduite, dont les particularités ont été commentées. La transformation de la

relation de la conductivité rapportée au diamètre de la conduite a pu aboutir à une excellente relation approchée du taux de remplissage en fonction de la conductivité rapportée à la profondeur normale. Un exemple d'application a été proposé pour expliquer les étapes à suivre au calcul de la profondeur normale et du diamètre de la conduite lorsque la relation de *Manning* est utilisée.

La seconde partie du chapitre a eu pour objectif l'étude de l'écoulement uniforme à coefficient de résistance variable, en se basant sur la formule de *Chézy* et de *Manning*. La relation générale du coefficient de *Chézy* et de *Manning* a été exprimée et sa représentation graphique a montré des particularités que nous avons discutées, en particulier les valeurs maximales de ces coefficients. En l'absence du diamètre de la conduite, la méthode du modèle rugueux (MMR) nous a permis de calculer les coefficients de *Chézy* et de *Manning* et la méthode a été illustrée à travers un exemple d'application. Les expressions du débit maximal et de la vitesse maximale ont été déterminées et des exemples d'application ont été proposés.

Le chapitre s'est achevé par l'étude de l'écoulement critique dans la conduite de forme circulaire. Le débit relatif a été exprimé, sous une forme implicite, en fonction du taux de remplissage critique et sa représentation graphique a montré une courbe ascendante, tendant vers un taux de remplissage critique égal à l'unité lorsque le débit relatif tend vers l'infini. L'étude de l'écoulement critique s'est particulièrement intéressé au calcul de la profondeur critique. Une excellente relation approchée a ainsi été proposée dont l'application a été illustrée à travers un exemple d'application.