

## Modèles Mathématiques des Phénomènes Physiques

### II.1 Introduction

L'étude du transformateur à plasma thermique inductif basse fréquence (Fig.II.1.) nécessite la compréhension de plusieurs phénomènes physiques. Ces phénomènes sont décrits par des modèles mathématiques :

- L'électromagnétisme : s'applique à tout le domaine et est régi essentiellement par les équations de Maxwell.
- La thermique : s'applique à la région du plasma et de la paroi isolante et est régie par l'équation de conservation de l'énergie.
- L'écoulement : s'applique à la région du plasma et est régi par l'équation de conservation du mouvement. Ce phénomène ne sera pas pris en considération, puisqu'on considère le plasma immobile (pas de circulation de gaz).

Ces phénomènes physiques aboutissent aux équations de base de la physique des milieux continus.

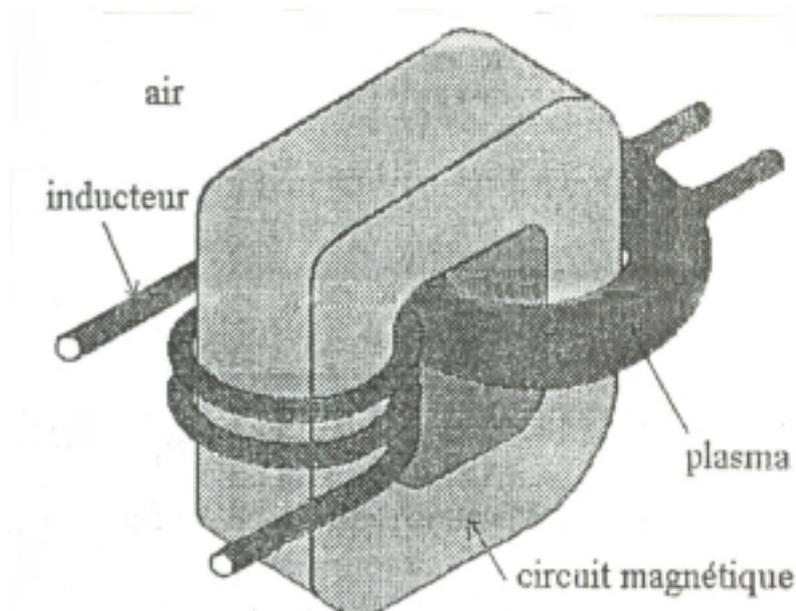


Fig.II.1. Différents milieux d'un transformateur à plasma inductif

## II.2 Modèle mathématique de l'électromagnétisme

### II.2.1 Les équations de MAXWELL

Le phénomène physique de l'électromagnétisme est souvent décrit par les modèles mathématiques connus par les équations de J. C. MAXWELL. Ce phénomène s'applique à des milieux très différents qu'on peut diviser en général en deux : Un milieu conducteur de charge électrique et un milieu non conducteur :

1. Le milieu conducteur de charge électrique se divise dans notre cas en deux régions très différentes :
  - a. La région de l'inducteur
  - b. La région du plasma annulaire
2. Le milieu non conducteur se divise en trois régions :
  - a. La région de l'air
  - b. La région du circuit magnétique
  - c. La région de la paroi

Les équations de Maxwell sont :

$$\mathbf{rot H} = \mathbf{Jt} \quad (\text{II.1})$$

$$\mathbf{rot E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{II.2})$$

$$\mathbf{div B} = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\mathbf{div D} = \rho \quad (\text{II.4})$$

tels que :

- E** : Champ électrique
- D** : Induction électrique
- H** : Champ magnétique
- B** : Induction magnétique
- J** : densité de courant total
- $\rho$**  : Densité de charge électrique

On ajoute les équations de comportement du milieu :

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{II.5})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (\text{II.6})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{II.7})$$

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{II.8})$$

tels que :

$\sigma$  : Conductivité électrique

$\varepsilon$  : Permittivité électrique

$\mu$  : Perméabilité magnétique

## II.2.2 Détermination de la densité totale de courant $\mathbf{J}_t$ dans les différentes régions

### II.2.2.1 Détermination de $\mathbf{J}_t$ dans la région conductrice du plasma

La densité de courant  $\mathbf{J}_t$  dans la région conductrice du plasma est donnée par [18] :

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_{cv} + \mathbf{J}_{gc} + \mathbf{J}_{gp} + \mathbf{J}_{gt} + \mathbf{J}_c$$

tels que :

$\mathbf{J}_d$  : densité de courant de déplacement

$\mathbf{J}_{cv}$  : densité de courant de convection

$\mathbf{J}_{gc}$  : densité de courant de gradient concentration

$\mathbf{J}_{gp}$  : densité de courant de gradient pression

$\mathbf{J}_{gt}$  : densité de courant de gradient de température

$\mathbf{J}_c$  : densité de courant de conduction.

On suppose que la densité de courant due à la force magnétique et la contribution des densités de courant dues aux gradients de concentration, de pression et de température sont négligeable [19].

Ainsi la densité totale de courant  $\mathbf{J}_t$  est la somme de la densité de courant de déplacement  $\mathbf{J}_d$  et la densité de courant de conduction  $\mathbf{J}_c$ . Donc l'expression de la loi d'Ampère (II-1) devient :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_t = \sigma_{pl}(T)\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathbf{E}) \quad (\text{II.9})$$

Il est à remarquer que les gradients de concentration, de pression et de température existent principalement près de la paroi du plasma. Nous les négligerons cependant dans cette étude.

### II.2.2.2 Détermination de $\mathbf{J}_t$ dans la région conductrice de L'inducteur

La densité totale de courant  $\mathbf{J}_t$  peut être exprimée dans la région métallique du conducteur de la même manière que dans la région du plasma :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_t = \sigma_{cu}\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathbf{E}) \quad (\text{II.10})$$

L'expression de la conductivité électrique dans l'inducteur  $\sigma_{cu}$  ne dépend pas de la température, car l'inducteur est refroidi à l'eau.

### I.2.2.3 Détermination de $\mathbf{J}_t$ dans les régions non conductrices (Air et circuit magnétique)

Dans les régions non conductrices la conductivité électrique  $\sigma$  est nulle alors on a :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \quad (\text{II.11})$$

### II.2.3 Equation de l'électromagnétisme dans tout le domaine

L'équation générale d'Ampère est ainsi exprimée dans tout le domaine par :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}) \quad (\text{II.12})$$

où

$\sigma = \sigma_{pl}(T)$	dans le plasma
$\sigma = \sigma_{cu}$	Dans l'inducteur
$\sigma = 0$	Ailleurs

Le système des équations possède plusieurs inconnues. Pour réduire le nombre d'inconnus on est amené à utiliser des formulations adéquates

#### II.2.4. Différentes formulations en électromagnétisme

On peut trouver plusieurs formulations exprimant ces modèles mathématiques de l'électromagnétisme : les formulations en champs ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$ ) et les formulations en potentiels ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $V$  et  $\varphi$ ). Les formulations en champs nécessitent l'utilisation des méthodes numériques spéciales tenant compte des discontinuités de l'inconnue aux interfaces de deux milieux différents. Par contre dans les formulations en potentiels l'inconnue est continue entre deux milieux différents et les méthodes numériques de base sont utilisées

##### II.2.4.1 Formulation en champ électrique $\mathbf{E}$

Des équations (II-2) et (II-7) on aboutit à :

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\mu} \int \mathbf{rot} \mathbf{E} . dt \quad (\text{II.13})$$

En introduisant les équations (II-5), (II-8) et (II-13) dans l'équation (II-1) :

$$\int \left[ \mathbf{rot} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \right) \right] dt + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} = 0 \quad (\text{II.14})$$

La dérivée première par rapport au temps de l'équation (II-14) donne :

$$\mathbf{rot} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{E} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.15})$$

C'est une équation différentielle aux dérivées partielles dans l'espace et en fonction du temps, dont l'inconnue est le champ électrique  $\mathbf{E}$  .

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{E}_Z \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

C'est la formulation en champ électrique  $\mathbf{E}$ .

#### II.2.4.2 Formulation en potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A}$ et en potentiel scalaire électrique $V$ ( $\mathbf{A}, V$ )

Pour notre cas, on a un modèle électromagnétique où les sources de courant et de tension varient en fonction du temps (le terme  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  n'est pas nul). Les champs électriques et magnétiques sont alors couplés par la présence des courants induits. Pour représenter l'état électromagnétique en un point, on est amené à utiliser la formulation en potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  et en potentiel scalaire électrique  $V$ .

De l'équation (II-3), on remarque qu'il existe un vecteur  $\mathbf{A}$  nommé potentiel vecteur magnétique tel que :

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (\text{II.17})$$

En remplaçant l'équation (I-17) dans l'équation (I-2), on aboutit à :

$$\text{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{II.18})$$

Le rotationnel d'un vecteur n'est nul que si et seulement si ce vecteur est le gradient d'une quantité scalaire nommée potentiel scalaire électrique  $V$ .

$$\left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \text{grad} V \quad (\text{II.19})$$

Cela conduit à :

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}V\right) \quad (\text{II.20})$$

Remplaçant cette dernière équation dans (II-15) on aura :

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}V\right)\right) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}V\right) + \sigma \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}V\right) = 0 \quad (\text{II.21})$$

L'intégration de cette équation par rapport au temps nous amène à l'expression suivante :

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot}\mathbf{A}\right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}V\right) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}V\right) = 0 \quad (\text{II.22})$$

Pour des raisons de commodité, on fait le changement de variable suivant :

$$\mathbf{V} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (\text{II.23})$$

$v$  : c'est le potentiel scalaire électrique réduit

Ainsi l'expression (II-22) s'écrit :

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot}\mathbf{A}\right) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{A} + \mathbf{grad}v) + \sigma \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \mathbf{grad}v) = 0 \quad (\text{II.24})$$

L'existence de deux inconnues dans l'équation différentielle ci-dessus nécessite l'appel à d'une autre équation différente pour résoudre le problème, cette équation est déduite de celle de la divergence du courant.

$$\mathit{div} \mathbf{J}_t = \mathit{div}(\mathbf{J}_C + \mathbf{J}_D) = 0 \quad (\text{II.25})$$

Introduisons les expressions (II-5) et (II-8) dans (II-25) ça donne :

$$\operatorname{div}\left(\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = 0 \quad (\text{II-26})$$

Des deux expressions (II-20) et (II-23) on tire  $\mathbf{E}$  :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \mathbf{grad} v) \quad (\text{II-27})$$

D'où on peut mettre l'expression (II-24) sous la forme :

$$\operatorname{div}\left[\sigma \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \mathbf{grad} v) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{A} + \mathbf{grad} v)\right] = 0 \quad (\text{II-28})$$

Enfin, on aboutit à un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}\right) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{A} + \mathbf{grad} v) + \sigma \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \mathbf{grad} v) = 0 \\ \operatorname{div}\left[\sigma \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \mathbf{grad} v) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathbf{A} + \mathbf{grad} v)\right] = 0 \end{cases} \quad (\text{II-29})$$

Les deux équations considérées ci-dessus forment la formulation en potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  et en potentiel scalaire électrique réduit  $v$ .

Considérons que la densité de courants dans l'inducteur  $\mathbf{J}_s$  comme connue et uniformément répartie, cela nous amène à introduire ce terme dans le modèle mathématique en ajoutant  $\mathbf{J}_s$  au deuxième membre de l'équation (II-24).

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot}\mathbf{A}\right) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{A} + \mathbf{grad}v) + \sigma \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \mathbf{grad}v) = \mathbf{J}_s \\ \mathit{div}\left[\sigma \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \mathbf{grad}v) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{A} + \mathbf{grad}v)\right] = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II-30})$$

De plus nous intéressons dans notre étude au régime fréquentiel en remplaçant  $\frac{\partial}{\partial t}$  par  $j\omega$ , nous aboutissons à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot}(v\mathbf{rot}\mathbf{A}) + j\omega(\sigma + j\omega\varepsilon)(\mathbf{A} + \mathbf{grad}v) = \mathbf{J}_s \\ \mathit{div}[j\omega(\sigma + j\omega\varepsilon)(\mathbf{A} + \mathbf{grad}v)] = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II-31})$$

Le système (II-31), nous permet de résoudre le problème sur le domaine ( $\Omega$ ), tous en connaissant les conditions aux limites sur la frontière ( $\Gamma$ ), mais il est à remarquer que si le couple ( $\mathbf{A}, V$ ) est une solution du système ci-dessus, on peut avoir une autre solution formée par le couple ( $\mathbf{A}_1, V_1$ ), tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{grad}\psi \\ V_1 = V - \frac{\partial\psi}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{II-32})$$

Ce qui conduit à une infinité de solution.

Pour surmonter ce problème, on a recourt à une condition de Jauge pour unifier la solution. Deux types de conditions de Jauge sont à envisager et largement utilisés [18].

#### ➤ Jauge de Lorentz

La condition de Jauge de Lorentz consiste à imposer dans le cas le plus complexe où la densité volumique de charge qui n'est plus nulle, une fonction  $V$  qui doit être évaluée comme suit :

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = (\sigma + j\omega\epsilon)\mu V \quad (\text{II-33})$$

Ce qui nous permet d'avoir un système :

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\operatorname{vrot}\mathbf{A}) + (\sigma + j\omega\epsilon)\left(\frac{1}{(\sigma + j\omega\epsilon)\mu}\operatorname{div}\mathbf{A} + j\omega\mathbf{A}\right) = \mathbf{J}_s, \\ \operatorname{div}[-(\sigma + j\omega)\operatorname{grad}V] - (\sigma + j\omega\epsilon)(j\omega\sigma\mu V) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-34})$$

### ➤ Jauge de Coulomb

La condition de jauge de Coulomb qui est la plus souvent utilisée en électromagnétisme consiste à imposer le terme  $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$  (densité volumique de charge nulle et qui est le cas dans presque tous les dispositifs à induction classique) avec introduction du terme  $\left[-\operatorname{grad}\left(\frac{1}{\mu_P}\operatorname{div}\mathbf{A}\right)\right]$

appelé terme de pénalité,  $\mu_P$  doit être prise égal à  $\mu$  et ainsi

le système (II-31) devient :

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\operatorname{vrot}\mathbf{A}) - \operatorname{grad}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{div}\mathbf{A}\right) + j\omega(\sigma + j\omega\epsilon)(\mathbf{A} + \operatorname{grad}v) = \mathbf{J}_s, \\ \operatorname{div}[j\omega(\sigma + j\omega\epsilon)(\mathbf{A} + \operatorname{grad}v)] = 0 \end{cases} \quad (\text{II-35})$$

Les équations différentielles ainsi formées par le système (II-35) ne sont résolues qu'à partir des conditions aux limites bien spécifiées. Généralement deux types de conditions existent :

### ➤ Condition de type Dirichlet

La fonction inconnue doit être spécifiée sur les limites :

$$\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (\text{condition de Dirichlet homogène})$$

$$\mathbf{A} \neq \mathbf{0} \quad (\text{condition de Dirichlet non homogène})$$

➤ **Condition de type Newmann**

Elle exprime la variation de la fonction inconnue à une surface :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (\text{Condition de Newmann homogène})$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}} \neq 0 \quad (\text{Condition de Newmann non homogène})$$

$\mathbf{n}$  : est la normale

Le calcul numérique obtenu à partir des méthodes numériques se base sur des modèles mathématiques.

Dans le cas de la formulation en potentiel vecteur magnétique et en potentiel scalaire électrique, on peut définir deux modèles de calcul: l'attaque en courant et l'attaque en tension .

## II.2.5 Modèle de l'attaque en courant et de l'attaque en tension

### II.2.5.1 Modèle de l'attaque en courant

Puisque la densité totale de courant source  $\mathbf{J}_s$  dans l'inducteur est connue, la formulation  $(\mathbf{A}, v)$  dans la région de l'inducteur s'écrit :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{vrotA}) - \mathbf{grad}(v \operatorname{div} \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \quad (\text{II-36})$$

Dans ce modèle, le terme  $(\sigma + j\omega\epsilon)$  est nul et le terme de la densité totale de courant source  $\mathbf{J}_s$  est considérée comme la somme algébrique de deux termes : un terme explicitant la densité de courant inducteur  $\mathbf{J}_{s \text{ inducteur}}$  et un terme explicitant la densité des courants induits  $\mathbf{J}_{s \text{ induit}}$  .

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_{s \text{ inducteur}} + \mathbf{J}_{s \text{ induit}} \quad (\text{II-37})$$

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{s \text{ inducteur}} = (\sigma_{in} + j\omega\epsilon_{in}) \mathbf{E}_{\text{inducteur}} \\ \mathbf{J}_{s \text{ induit}} = (\sigma_{in} + j\omega\epsilon_{in}) \mathbf{E}_{\text{induit}} \end{cases} \quad (\text{II-38})$$

$\sigma_{in}$  : Conductivité électrique de l'inducteur.

$\epsilon_{in}$  : Permittivité électrique de l'inducteur.

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\text{inducteur}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}V\right)_{\text{inducteur}} \\ \mathbf{E}_{\text{induit}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}V\right)_{\text{induit}} \end{cases} \quad (\text{II-39})$$

Dans ce modèle, les courants inducteurs sont connus et ils sont exprimés par :

$$\mathbf{J}_{s \text{ inducteur}} = (\sigma_{in} + j\omega\epsilon_{in}) \frac{U}{nl} \mathbf{i}_1 \quad (\text{II-40})$$

U : La tension totale aux bornes de l'inducteur.

n : Le nombre de spires dans l'inducteur.

l : La longueur d'une spire.

Ainsi le terme de densité de courant de source devient :

$$\mathbf{J}_s = (\sigma_{in} + j\omega\epsilon_{in}) \left[ -\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}V\right) + \frac{U}{nl} \mathbf{i}_1 \right] \quad (\text{II-41})$$

Le calcul du courant total :

$$I = \int_{S_0} \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{II-42})$$

$$U = nI + nl(\sigma_{in} + j\omega\epsilon_{in}) \int_{S_0} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}V\right) \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{II-43})$$

tel que :  $S_0$  est la section totale de l'inducteur.

### II.2.5.2 Modèle de l'attaque en tension

Dans ce modèle la densité totale de courant source dans l'inducteur n'est pas connue, la formulation  $(A, v)$  dans la région de l'inducteur s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{rot}(v\mathbf{rot}\mathbf{A}) - \mathbf{grad}(v\mathbf{div}\mathbf{A}) + (\sigma_{in} + j\omega\epsilon_{in}) \left( \mathbf{grad}V + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{J}_s, \\ \mathbf{div} \left[ -(\sigma_{in} + j\omega\epsilon_{in}) \left( \mathbf{grad}V + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) \right] = 0 \end{cases} \quad (\text{II-44})$$

Dans ce modèle, le terme  $(\sigma + j\omega\epsilon)$  n'est pas nulle et il est égal à  $(\sigma_{in} + j\omega\epsilon_{in})$  et le terme de la densité de courant source  $\mathbf{J}_s$  est considéré comme densité du courant inducteur  $\mathbf{J}_{s \text{ inducteu}}$ . Ainsi la densité totale du courant est exprimée par :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_{s \text{ induit}} \quad (\text{II-45})$$

$$\begin{cases} \mathbf{J}_s = (\sigma_{in} + j\omega\epsilon_{in}) \frac{U}{nl} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{J}_{s \text{ induit}} = - \left( \mathbf{grad}V + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right)_{\text{induit}} \end{cases} \quad (\text{II-46})$$

Le terme de densité de courant devient :

$$\mathbf{J}_s = (\sigma_{in} + j\omega\epsilon_{in}) \left[ - \left( \mathbf{grad}V + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) + \frac{U}{nl} \mathbf{i}_1 \right] \quad (\text{II-47})$$

## II.3 Modèle mathématique de la thermique

### II.3.1 Introduction

Le transfert de chaleur est défini par la transmission de l'énergie d'une région à une autre sous l'influence d'une différence de températures.

Le transfert de chaleur est régi, non seulement par une relation unique, mais, plutôt par une combinaison de différentes lois physiques indépendantes.

On distingue, généralement, trois modes de transfert : par conduction, par convection ou par rayonnement. Chacun de ces modes étant lui-même lié à un processus physique bien déterminé, et sont régis par des lois bien spécifiques.

### II.3.2 Conduction

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur (ou l'échange d'énergie interne). Provoquée par une différence de température entre deux milieu solides, en contact physique. Ainsi, le corps à température plus élevée donne de l'énergie thermique à celui dont la température est plus faible, sans qu'il y ait transfert de matière. La différence de température entre deux corps provoque les transferts thermiques à l'intérieur même de chacun des corps. On obtient un système dynamique dans la conduction, l'énergie (chaleur) se propage par contact direct des molécules sans un déplacement appréciable des molécules.

#### II.3.2.1 Généralités

➤ Champ thermique

On peut définir en chaque point M d'un corps solide, liquide ou gazeux, une température T (M, t).

Lorsque la température dépend du temps, on dit que le régime thermique est non stationnaire (variable), dans le cas contraire, on dit qu'il est stationnaire (permanent) .

➤ Surface isotherme

Toutes les points de cette surface ayant à chaque instant la même température, quantité de chaleur, flux et densité de flux thermique.

Soit un corps chauffer de manière uniforme sur toute sa surface (S).

Soit dQ la quantité de chaleur échangée entre ce corps.

➤ Flux thermique  $\Phi$  :

La puissance échangée par la surface S du plancher est donné par :

$$\Phi = \frac{dQ}{dt}$$

➤ Densité de flux thermique  $\varphi$

La puissance échangée par une surface unité de ce corps est donné par :

$$\varphi = \frac{dQ}{Sdt} = \frac{\Phi}{S}$$

➤ La conductivité thermique

C'est le flux de chaleur qui traverse une surface unitaire quand le gradient de température est égal à l'unité. La conductivité thermique dépend de : la nature chimique du matériaux, la nature de la phase considérée (solide, liquide, gaz), la température.

Lorsque les écarts de température ne sont pas trop élevés, on peut considérer, avec une précision suffisante, ( $k$ ) comme une constante pour un milieu donné. La résistance thermique d'un matériaux est inversement proportionnelle à sa conductivité thermique ( $k$ ). Dans le vide, la conductivité thermique est évidemment nulle puisque en l'absence de matière les chocs sont inexistant.

➤ Loi de Fourier

Il existe une relation linéaire entre la densité du flux thermique et le gradient de température. En tout point d'un milieu isotrope, le vecteur de densité de flux thermique  $\varphi$  est proportionnelle au gradient de la température  $T$  est la conductivité  $k$  du milieu.

Donc la loi locale de Fourier est :

$$\varphi = -k \text{grad} T$$

$\varphi$	:	Vecteur densité du flux thermique
$k$	:	Conductivité thermique
$T$	:	Température

### II.3.3 Convection

La convection est un mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Elle apparaît lorsqu'un fluide, liquide ou gaz, est en mouvement. La convection intervient, en particulier, dans

les échanges thermiques entre un milieu solide et un fluide en mouvement. On distingue deux formes de convection :

### II.3.3.1 Convection libre (naturelle)

Dans la quelle le mouvement du fluide est crée par des différences de densité. Elles mêmes dues à des différences de températures existantes dans le fluide.

### II.3.3.2 Convection forcée

Dans la quelle le mouvement du fluide dû à l'action d'une pompe ou d'un ventilateur.

### II.3.3.3 Loi de Newton

Il y a plusieurs lois à utilisés pour résoudre les problèmes relatifs à la convection, parmi ces lois, en applique la loi de Newton qui exprime le flux moyen  $\Phi$  échangé entre un solide et un fluide à travers leur surface de contact  $S$  :

$$\Phi = h_c S (T_s - T_F)$$

$T_s$  : La température à la surface du solide.

$T_F$  : La température du fluide.

$h_c$  : Le coefficient d'échange par convection.

$S$  : Surface de contact.

### II.3.4 Rayonnement

Le rayonnement thermique est le mode de transmission par lequel la chaleur se transmis d'un corps à haute température à un autre froid et ou, les deux corps sont séparés par un milieu. Il s'agit de l'air ou du vide. Dans la matière, les charges sont soumises à des mouvements oscillatoires à cause de l'effet des forces électriques internes et de l'agitation thermique ou pour tout cause (radioactivité). Ce mouvement oscillatoire génère des ondes électromagnétiques.

Le terme de rayonnement désigne tout transfert d'énergie par ces ondes caractérisées par leur fréquences ou par leur longueurs d'ondes. L'énergie transmise par rayonnement est appelée chaleur rayonnée. L'énergie rayonnante se propage à la vitesse de la lumière. La seule différence entre le rayonnement thermique et la lumière est par leurs longueurs d'ondes.

### II.3.4.1 Loi fondamentale du rayonnement thermique

La loi de STEFAN-BLTZMAN exprime que le flux d'énergie radiante émise par une surface idéale est proportionnel à l'air de cette surface est à la quatrième puissance de la température absolue  $T$  de la surface. Est donnée par :

$$q = \sigma T^4$$

$q$	:	Flux d'énergie radiante,
$\sigma$	:	Constante universelle,
$T$	:	Température absolue.

### II.3.5 Formulation vectorielle

Pour un fluide compressible, et en négligeant l'échauffement provoqué par la dissipation visqueuse, l'équation de la chaleur fondée sur l'enthalpie  $H$  s'écrit [20] :

$$\rho \frac{dH}{dt} = \frac{dp}{dt} + \text{div}(k \mathbf{grad} T) + S \quad (2-48)$$

comme :

$$\frac{dH}{dt} = \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dt} + \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dt} \quad (2.49)$$

avec :

$$\left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left( 1 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right) T \right) \quad (2.50)$$

$$\left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = C_p \quad (2.51)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} T \quad (2.52)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p \quad (2.53)$$

tels que :

S	:	Terme source
$C_p$	:	Chaleur spécifique à pression constante
T	:	Température
$\rho$	:	Masse volumique du fluide
k	:	Conductivité thermique
p	:	Pression
v	:	Vitesse

Si on travail à pression constante et en régime permanent l'équation (2-48) s'écrit :

$$\rho C_p (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} T) = \text{div}(k \mathbf{grad} T) + S \quad (2.54)$$

#### II.4 Terme source

Le terme source s'écrit :

$$S = P - Q \quad (2.55)$$

avec :

P : la densité de puissance électromagnétique produite par les courants induits

Q : la densité de puissance perdue par rayonnement

La densité de puissance électromagnétique P est déterminée par la résolution de l'équation électromagnétique :

$$P = \frac{J^2}{\sigma} \quad (2-56)$$

Cette relation lie l'équation thermique avec l'équation magnétique.

## II.5 Hypothèse sur le tube en quartz

Le tube en quartz est refroidi par une circulation d'un liquide réfrigérant (l'eau en général). La température sur la paroi externe du tube en quartz est alors égale à la température du réfrigérant qui est prise celle de température ambiante  $T_a$ . La température à la paroi interne du tube varie avec la température du plasma. Le transfert de chaleur se fera donc par conduction thermique à travers l'épaisseur de tube. La conductivité thermique est :

$k_q$  : est d'environ 1.4 W/m.K pour un quartz .

## II.6 Propriétés thermodynamiques, de transport et de rayonnement

Les propriétés thermodynamiques, de transport et de rayonnement sont nécessaires pour la modélisation du plasma thermique. Les données expérimentales ne sont disponibles que pour certains processus de collisions. Pour cela, la nécessité de calculer ces propriétés avec des méthodes de calcul numérique s'est imposées .

Les propriétés thermodynamiques et de transport dépendent directement de la composition du plasma.

### II.6.1 Composition d'un plasma

Trois espèces composent un plasma d'un gaz monoatomique comme l'argon ; légères (électrons) et lourdes dans un état fondamental ou excité : (atomes neutres et ions positifs). La figure (II.2) représente les évolutions, en fonction de la température de la composition d'un plasma d'argon. On voit que l'ionisation commence à se manifester vers tant que la température reste inférieure à 1500K, l'ion  $A^{++}$  n'apparaît pas.

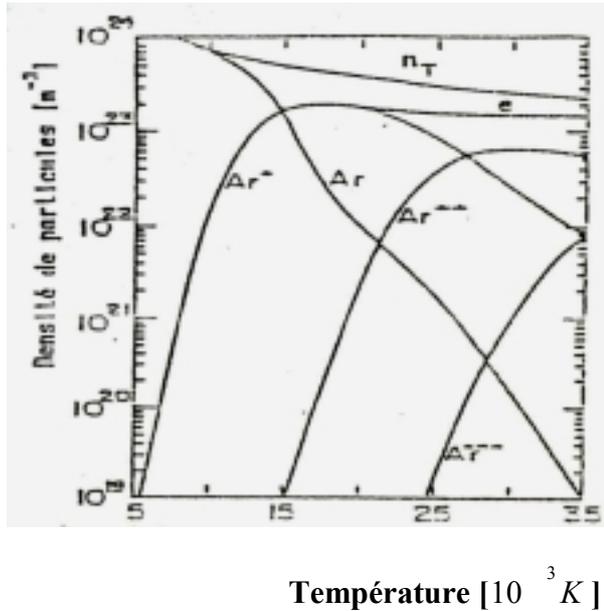


Fig .II.2. Composition d'un plasma d'argon avec la température [21]

**II.6.2 Propriétés thermodynamiques**

Les fonction thermodynamiques sont : la densité de masse  $\rho_m$  , la chaleur spécifique  $C_p$  , l'énergie interne  $\epsilon$  , l'enthalpie  $H$  et l'entropie  $S$  . Ces grandeurs sont calculées à partir des lois de la thermodynamique en considérant l'équilibre thermodynamique locale complet [21]. La figure (II.3) montre la densité de masse  $\rho_m$  et la figure (II.4) montre la chaleur spécifique  $C_p$  du plasma d'argon en fonction de la température à la pression atmosphérique.

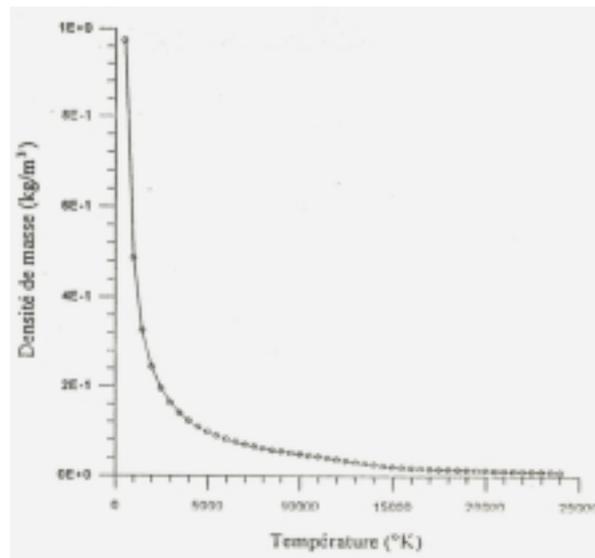


Fig .II.3. Densité de masse du plasma d'argon en fonction de la température à 1 atm [21]

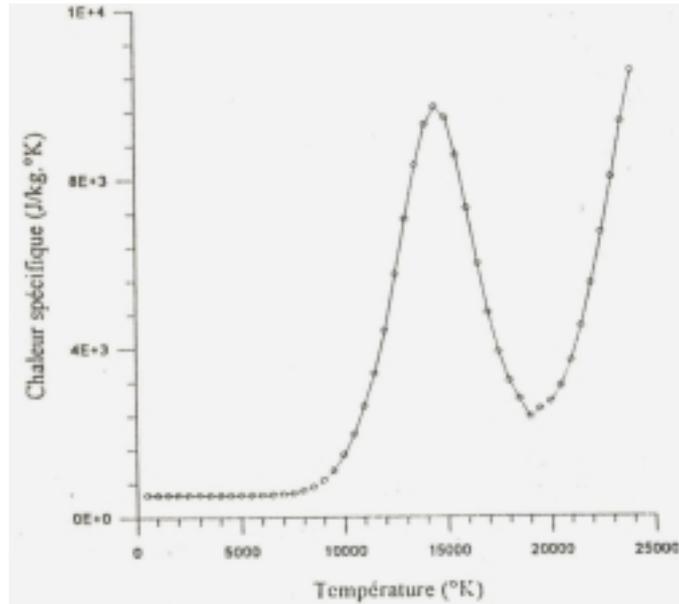


Fig. II.4. Chaleur spécifique du plasma d'argon en fonction de la température à 1atm [21]

### II.6.3 Propriétés de transports

On appelle propriétés de transport la conductivité électrique  $\sigma$ , la conductivité thermique  $K$  et la viscosité  $\eta$ . Ces grandeurs interviennent respectivement dans le transport du courant électrique, de la chaleur et de la quantité de mouvement dans le plasma. La figure (II.5) montre la conductivité thermique et la figure (II.6) montre la conductivité électrique du plasma d'argon en fonction de la température à la pression atmosphérique.

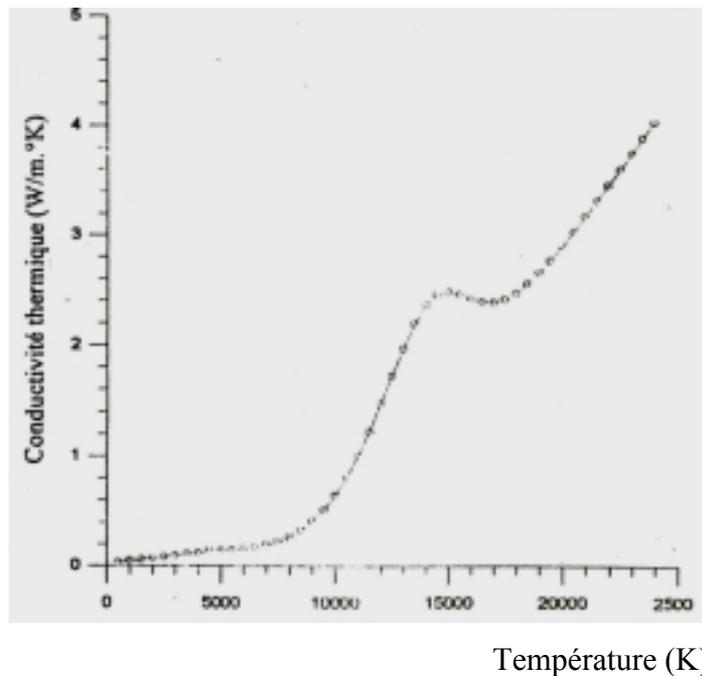
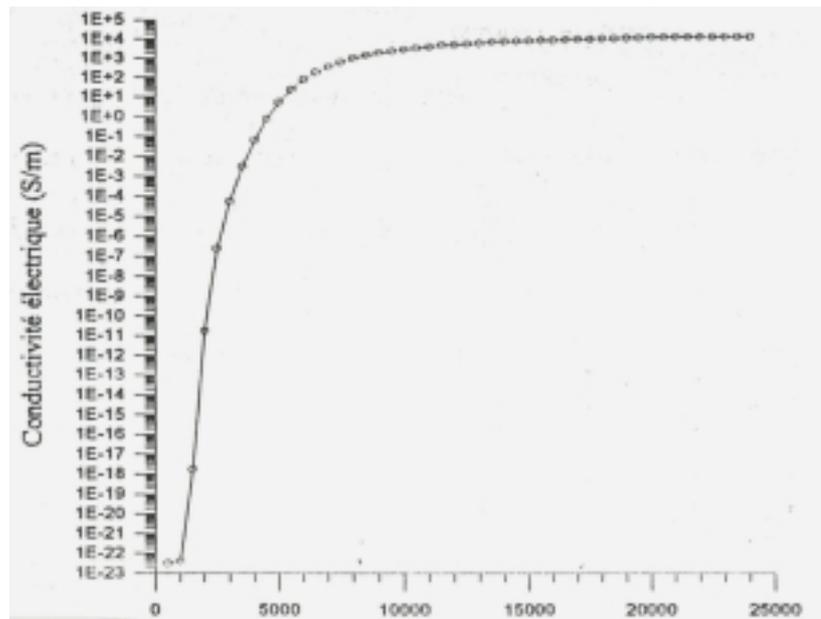


Fig. II.5. Conductivité thermique du plasma d'argon en fonction de la température à 1atm [21]



Température (K)

Fig.II.6. Conductivité électrique du plasma d'argon en fonction de la température à 1 atm [21]

#### II.6.4 Rayonnement

Le rayonnement représente l'un des modules de transfert de chaleur du plasma avec le milieu extérieur. Dans le bilan d'énergie du plasma on introduit la densité de puissance rayonnée dans le terme source de l'équation de la thermique. Les données de la densité du rayonnement de l'argon sont très dispersées. Actuellement les données de calculs récents faits par A. T. M. Wilberts [22] seront utilisés dans notre travail (Fig.II.7).

Densité de  
rayonnement  
( $W/m^3 \cdot ster$ )

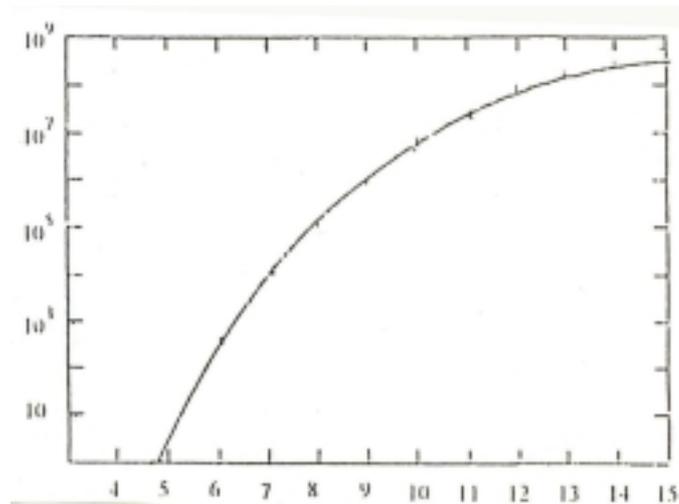
Température  $10^3$  K

Fig .II.7. Densité du rayonnement  $Q$  du plasma d'argon en fonction de la température à la pression atmosphérique. (Pour trouver  $Q$  en  $W/m^3$  le résultat doit être multiplier par  $4\pi$ )