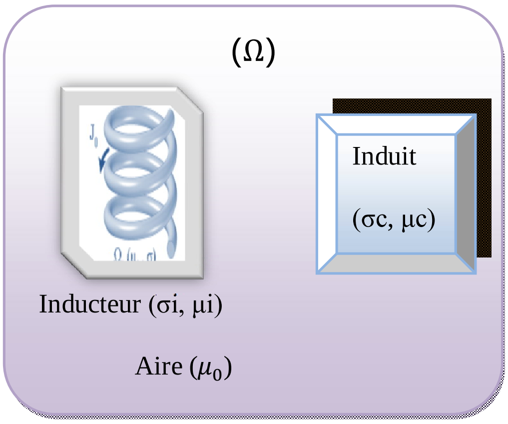
I.1 INTRODUCTION

Pour l'étude du fonctionnement de tout dispositif physique l'établissement d'un modèle mathématique permettant de décrire les phénomènes qui s'y déroulent constitue la première Approche au problème. Nous exposerons les équations locales, qui décrivent les champs et les formulations en potentiel vecteur magnétique.

Dans ce chapitre, nous allons, essayer d'étudier l'évolution des phénomènes électromagnétiques en prenant comme exemple d'application constitué d'un inducteur, d'un Induit et de l'air environnant, cette quantification est assurée par la formulation des équations aux dérivées partielles caractéristiques. Ces formulations sont déduites à partir des systèmes de MAXWELL.

Le système électromagnétique peut être schématiquement représenté par des trois principaux éléments (figure. I.1). [11]

- Un inducteur : la région de l'excitation.
- Induit : la région de la charge.
- Un isolant électrique : l'air environnant.



σi : conductivité électrique de l'inducteur
σc: conductivité électrique de la charge
μ0 : perméabilité magnétique absolue du vide
μc: perméabilité magnétique de la charge
Ω : Domaine d'étude
∂Ω: frontière du domaine d'étude

Figure I.1. Objets constitutifs d'un dispositif électromagnétique

I.2 Équations de Maxwell

Il y a un peu moins de deux cents ans, Maxwell réunit les lois expérimentales trouvées par ses prédécesseurs Faraday, Ampère et Gauss en les mettant en forme et en les exprimant sous forme différentielle. Ces équations mathématiques sont fondamentales, elles sont à l’origine de la théorie de la relativité restreinte et de la physique quantique. Elles constituent la base de l’électromagnétisme.

Les équations de Maxwell font apparaître différentes variables d’´etat Suivant chaque type de problèmes électromagnétiques, différentes formulations ou une combinaison de plusieurs d’entre elles permettent de résoudre le problème électromagnétique, Ainsi, de nombreuses formulations ont déjà été développées en deux ou en trois dimensions.

Elles peuvent s’´ecrire en termes de potentiels scalaires, de potentiels vecteurs ou de champs de nature électrique ou magnétique .Ces phénomènes électromagnétiques variables dans le temps et dans l’espace sont régis par les quatre équations locales de Maxwell qui s’´ecrivent quel que soit le milieu considéré :

- ***Lois de Maxwell- Ampères***

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{H} = \vec{Jc} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (I.1)$$

- ***Lois de Maxwell-Faraday (loi de l'induction)***

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (I.2)$$

- ***Lois de conservation du flux (Loi de Biot - Savart)***

$$div\vec{B} = 0 \quad (I.3)$$

- ***Lois de Maxwell-gauss***

$$div\vec{D} = \rho \quad (I.4)$$

Chacune de ces équations traduit les propriétés physiques des grandeurs électromagnétiques.

A ces équations, on ajoute les équations de comportement du milieu :

$$\vec{J}c = \sigma\vec{E} \tag{I.5}$$

$$\vec{J}d = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{I.6}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \tag{I.7}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad \left(\mu = \frac{1}{\nu}\right) \tag{I.8}$$

Tel que :-

$\vec{H}$: champ magnétique[A/m]

$\vec{D}$: Induction Electrique[C/m^2]

$\vec{E}$: Champ Electrique [V/m]

$\vec{B}$: Induction magnétique[T]

$\vec{J}c$: Densité volumique du courant de conduction [A/m^2]

$\vec{J}d$: la densité volumique du courant de déplacement [A/m^2]

ρ : Densité volumique de la charge electrique [c/m^2]

σ : conductivité electrique [S/m]

ε : Permittivité dielectrique [F/m]

ν : Reluctivité magnetique [m/H]

I.3 Descriptions des Équations de MAXWELL

I.3.1 la loi d'Ampère

On intégrant le champ magnétique $\vec{H}$ sur le long d'un contour fermé (c) qui est égale au courant I encercle par le contour (c), C'est-à-dire :

$$I = \iint_s \vec{J}\,\overrightarrow{ds} \qquad (I.9)$$

Donc :

$$\oint_c \vec{H}\,\overrightarrow{dl} = \iint_s \vec{J}\,\overrightarrow{ds} \qquad (I.10)$$

De la loi de stockes :

$$\oint_c \vec{H}\,\overrightarrow{dl} = \iint_s \overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{H}\overrightarrow{ds} \qquad (I.11)$$

La comparaison entre (I.10) et (I.11) donne (I.1)

La formule (I.1) exprime la dépendance du champ magnétique de la densité de courant total c'est-à-dire le courant de conduction

I.3.2 La loi de Faraday

La force électromotrice (e) induite dans un circuit (c) placé dans un champ électrique $\vec{E}$

Et Donnée par l'intégrale curviligne suivant :

$$e = \oint_c \vec{E}\,\overrightarrow{dl} \qquad (I.12)$$

La variation du flux magnétique passant à travers une surface quelconque S limitée par

Un contour est égal à la force électromotrice induite c'est-à-dire :-

$$e = -\frac{\partial \emptyset}{\partial t} \tag{I.13}$$

Le flux magnétique à travers une surface S est donnée par :

$$\emptyset = \iint_{s} \vec{B}\,\overrightarrow{ds} \tag{I.14}$$

D'après le théorème de stockes, on a :-

$$e = \oint_{c} \vec{E}\,\vec{dl} = \iint_{s} \overrightarrow{rot}\,\vec{E}\,\overrightarrow{ds} \tag{I.15}$$

En remplaçant l'équation (I.14) dans (I.13) ; on aura :-

$$e = -\iint_{s} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\overrightarrow{ds} \tag{I.16}$$

À partir des équations (I.15) et (I.16), nous avons :-

$$\iint_{s} \overrightarrow{rot}\,\vec{E}\,\overrightarrow{ds} = -\iint_{s} \frac{\partial \vec{B}}{\partial s}\overrightarrow{ds} \tag{I.17}$$

Finalement, on obtient (I.2), cette équation exprime le couplage électrique magnétique en dynamique ou la variation temporelle de $\vec{B}$ déterminer $\overrightarrow{rot}\vec{E}$.

I.3.3 La loi de Gauss

Le vecteur champ électrique $\vec{E}$sortant d'une surface fermée (''S''), est égale au quotient par $\varepsilon_0$de la somme des charges électriques situées à l'intérieur de la somme des charges électriques situées à l'intérieur de cette surface (''S''), tel que :

$$\iint_S \vec{E}\,\overrightarrow{ds} = \frac{q}{\varepsilon_o} \qquad (I.18)$$

Si les charges libres sont reparties uniformément selon une densité volumique (ρ) , la relation précédente devient

$$\iint_s \vec{E}\,\overrightarrow{ds} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \mathrm{div}\,\vec{E}\,dV \qquad (I.19)$$

De le théorème de Ostrogradoski - Gauss on aura :-

$$\iint_s \vec{E}\overrightarrow{ds} = \iiint_v \mathrm{div}\vec{E}dv \qquad (I.20)$$

Des les deux relations précédentes, on a:-

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad (I.21)$$

Le vecteur de densité de polarisation $\vec{p}$ est le moment électrique d'un petit volume

dv On obtient :-

$$\iiint_v \mathrm{div}(\varepsilon_o\vec{E} + \vec{P})dv = \iiint_v \rho dv \qquad (I.22)$$

Donc :

$$\mathrm{div}\left(\varepsilon_o\vec{E} + \vec{P}\right) = \rho \qquad (I.23)$$

Le vecteur d'induction électrique $\vec{D}$ est égal :

$$\vec{D} = \varepsilon_o\vec{E} + \vec{P} \qquad (I.24)$$

Finalement on trouve la formule précédente (I.4).

I.3.4 Théorème de la divergence de l'induction magnétique $\vec{B}$

On constate que le flux magnétique à travers une surface quelconque fermée (s) est toujours nul, c'est-à-dire

$$\iint_{s} \vec{B}\,\overrightarrow{ds} = \vec{0} \qquad (I.25)$$

Du théorème d'Ostragradoski-Green, on aura :

$$\oiint_{s} \vec{B}\,\overrightarrow{ds} = \iiint_{v} \operatorname{div}\vec{B}dv = 0 \qquad (I.26)$$

En fin en trouve la formule précédente (I.3).

Cette relation traduit mathématiquement que les seules sources de champ sont fermées sur elles même, ils n'ont ni point ni de départ ni point de convergence, d'où la nomination d'induction conservative

I.3.5 Conservation de la densité du courant total

Le champ dépend du temps la dérivée par rapport au temps de (I.21) est :

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) = \frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (I.27)$$

Puis, en tenant compte de l'équation de continuité :

$$\operatorname{div}\vec{j}_c = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (I.28)$$

De (I.27) et (I.28), on obtient :

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_C\right) = 0 \qquad (I.29)$$

On a alors :

$$\vec{J}_t = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_c \qquad (I.30)$$

Finalement, on trouve l'équation (I.1)

I.4 formulation Mathématique du Système Électromagnétique

Les équations de propagation électromagnétiques, peuvent être formulées de différentes manières suivant les hypothèses auxquelles elles sont soumises, et ne sont par conséquent pas strictement équivalentes en termes d'approximation. On distingue en générale les formulations,

Intégrale et différentielle des équations de Maxwell exprimées dans le domaine temporel ou spectral à chacune de ces représentations correspondent une technique particulière de résolution. On

Retiendra malgré tout, que plus qu'un problème de terminologie auquel tout cela peut se ramener, l'idée directrice est de résoudre les valeurs de champs électromagnétiques en temps et en espace.

I.4.1 Modèle magnétodynamique

La magnétodynamique consiste en l'´etude des phénomènes magnétiques et électriques en régime dynamique, en négligeant toute fois les courants de déplacement $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ c'est-à-dire sous l'hypothèse de l'´electrotechnique. Les champs électromagnétiques sont alors variables, soit par Variation de courants d'excitation, soit par mouvement d'une partie de la géométrie. Ce problème de courants induits: il s'agit de calculer, sous l'excitation du courant $J_s$variable dans le temps, la distribution du champ magnétique $\vec{H}$ (ou$\vec{B}$) en tout point du domaine d'´etude et de la densité de courant $J_c$dans le domaine conducteur pour tout temps supérieur au temps initial.

L'application de ce modèle est très répondue dans l'étude des machines électriques, des dispositifs de chauffage par induction, des transformateurs, …etc. de l'équation (I.1) et comme Dans le cas des systèmes fonctionnant à faible fréquence, le courant de déplacement est fortement négligeable devant le courant de conduction, dans ce cas on peut écrire:

$$\frac{1}{\mu}\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \sigma\vec{E} \tag{I.31}$$

On intègre la relation (I.2) par rapport du temps, on obtient :

$$\vec{B} = -\int \overrightarrow{rot}\,\vec{E}dt \tag{I.32}$$

Mettant l'équation (I.32) dans le (I.31), il vient :

$$-\frac{1}{\mu}\overrightarrow{rot}\left[\int \overrightarrow{rot}\vec{E}dt\right] = \sigma\vec{E} \tag{I.33}$$

Compte tenu de la relation (1.3), l'induction magnétique s'´ecrit comme le rotationnel d'un vecteur appelé potentiel vecteur magnétique A:

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A} \tag{I.34}$$

Remplaçant l'équation (I.34) dans le (I.2), on obtient :

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{I.35}$$

Ceci nous permet de constater que le champ $\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ est un champ conservatif ; il vient

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}U \qquad (I.36)$$

Tel que U est le potentiel électrique scalaire du champ électromagnétique, on obtient :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (I.37)$$

Ensuite, mettant la relation (I.37) dans (I.33), donc:

$$\frac{1}{\mu}\overrightarrow{rot}\left[\int \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}U + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})dt\right] + \sigma\left(\overrightarrow{grad}U + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \qquad (I.38)$$

On constate que le rotationnel d'un gradient est identiquement nulle c'est-à-dire que :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}U\right) = \vec{0} \qquad (I.39)$$

Finalement, on obtient :

$$\overrightarrow{rot}\,(\frac{1}{\mu}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = -\sigma\left(\overrightarrow{grad}U + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \qquad (I.40)$$

La formule (I.40) est une équation différentielle contient deux inconnues $\vec{A}$ *et* U, pour avoir une solution unique.

On doit ajouter à cette équation une autre équation pour former un système de deux équations deux inconnues, dans ce cas l'équation la plus utilisée est celle de la conservation de la densité de courant, Le système obtient est le suivant :

Pour introduire cette densité de courant $\vec{J}_s$ dans la formulation générale (I.40) et cette grandeur $\vec{J}_s$ sera éliminé suivant la région étudié car Js est divergence nulle).

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right) = -\sigma\overrightarrow{grad}U - \sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{J}_s \\ div\left(\sigma\overrightarrow{grad}U - \sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \end{cases} \qquad (I.41)$$

Pour surmonter ce problème, on introduit une condition supplémentaire dite de jauge donnée par:

$$div\vec{A} = 0 \qquad (I.42)$$

Dans le cas des dispositifs alimentent en courant, l'équation magnétodynamique s'écrit: [23]

$$\begin{cases} \sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right) + \vec{J_s} \\ div\vec{A} = 0 \end{cases} \qquad (I.43)$$

I.4.2 Modèle magnétostatique

La magnétostatique consiste en l'´etude des phénomènes magnétiques en régime stationnaire.

Le champ magnétique est alors invariant dans le temps et n'est dû qu'`a des courants stationnaires imposés ou `a des aimants permanents. Les équations `a considérer sont les équations de Maxwell ou les dérivées temporelles sont annulées. Elles sont Il décrit tous les dispositifs dans la

Quel le champ électrique est produit par des charges dont la répartition et la conductivité électrique est nulle puisque le cas est quasi statique.

Deux sortes de ce modèle sont adaptées:

I.4.2.1 Modèle magnétostatique scalaire

Dans ce modèle, les courants électriques sont nuls, alors les champs ne dépendent pas du temps on obtient les relations suivantes, donc d'après les équations (I.1) et (I.3), on obtient :

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{0} \\ div\vec{B} = 0 \end{cases} \quad (I.44)$$

Tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} \quad (I.45)$$

$\vec{H}$: est dérive d'un potentiel scalaire, d'où la nomination du modèle magnétostatique scalaire Φ

La formule précédente, devient :

$$div(\mu\overrightarrow{gad}\emptyset) = 0 \quad (I.46)$$

I.4.2.2 Modèle magnétostatique vectorielle

Dans ce modèle, les courants électriques ne sont pas nul, Alors les deux équations (I.1) et (I.2) deviennent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{J} \\ div\vec{B} = \vec{0} \end{cases} \quad (I.47)$$

Combinant les deux formulations (I.38) et (I.8) avec (I.47), on obtient :

$$\overrightarrow{rot}(\nu\overrightarrow{rot}\,\vec{A}) = \vec{J} \quad (I.48)$$

Donc, on tirant une équation qui reliant directement le potentiel vecteur à la densité du courant, et puisque le domaine qui nous étudie dans la vide, donc on peut écrire :

$$\overrightarrow{rot}(\nu\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(\nu div\vec{A}) - \nu\overrightarrow{\Delta A} \quad (I.49)$$

Tel que la jauge de Coulomb est la jauge la plus couramment utilisée.

La formulation constituée par les équations (I.49) est adaptée aux problèmes bidimensionnels, alors le jauge de coulomb $div\vec{A} = 0$ il a disparaît alors

$$\overrightarrow{rot}\left(\nu\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right) = -\nu\overrightarrow{\Delta A} \quad (I.50)$$

On introduit un nouvel opérateur :

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}A}\right) = \overrightarrow{\Delta A} \quad (I.51)$$

On combinant les équations (I.50), (I.51) et (I.47), on obtient :

$$\overrightarrow{rot}\left(\nu\overrightarrow{\mathrm{rot}A}\right) = -\mathrm{div}\left(\nu\overrightarrow{\mathrm{grad}A}\right) = \vec{J} \quad (I.52)$$

Cette formule représente le potentiel vecteur magnétique de type du poisson. [78]

Pour surmonter ce problème, deux types de classifications sont présenter :

I.4.3 Classification mathématique

En général les équations aux dérivées partielles sont classifiées en trois catégories, appelées elliptiques, paraboliques, et hyperboliques. Pour illustrer cette classification on considère la plus générale équation différentielle de deuxième ordre en deux variables indépendantes x et y :

Si U est une fonction de n variables indépendantes, les E.D.P linéaires des seconds ordres sont du type:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\,(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial^2 U}{\partial {x_1}^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i\,(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial U}{\partial x_i} + c(x_1, \dots, x_n)U$$

$$+d(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (I.53)$$

- Si a_i=0 (et de même signe) alors que l'E.D.P est de type elliptique.
- Si $a_i \neq 0$ on dit que l'E.D.P est de type hyperbolique.
- Si un seul des ai est nul et tous les autres de même signe et si bi est non nul L'E.D.P.et de type parabolique.

Soient U(x, y) une fonction de deux variables et V(x, y, t) une fonction de trois variables

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = F(x) \qquad \text{est une E. D. P elliptique}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + F(x) \qquad \text{est une E. D. P hyperbolique}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + F(x) \qquad \text{est une E. D. P parabolique}$$

Tel que:

F(x): c'est la densité de la source

I.4.4 Classification physique des E.D.P

De nombreux phénomènes physiques se rangent dans l'une des classes suivantes:

- Les problèmes d'équilibre étudient l'état stationnaire d'un phénomène (Champ, Chaleur, etc.…) dans un domaine borné ou non, il gouvernés par des E.D.P. elliptique.
- Les problèmes de valeurs propres sont en général des extensions des problèmes d'équilibre dans lesquels les valeurs critiques de certains paramètres doivent être déterminées. C'est le cas par exemple de la rèsonce des circuits électriques.
- Les problèmes d'évolution étudient l'évolution avec le temps d'un phénomène (champ, chaleur,vibration, etc...) à partir d'un état initial.

I.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre on se propose, les différentes formulations mathématiques physiques des phénomènes électromagnétiques. Nous avons exposé la formulation magnétostatique en potentiel vecteur magnétique et la formulation magnétodynamique.

Le prochain chapitre sera consacré à étude le modèle numérique des méthodes volumes combiné opté pour la résolution des Formulation mathématique qui décrivent l'évolution spatiotemporelle des phénomènes électromagnétique.