

1.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons faire une présentation succincte des équations et formulations utilisées dans le domaine de la modélisation des phénomènes électromagnétiques pour des géométries 2D, axisymétrique en vue de la modélisation des dispositifs du contrôle non destructif (CND).

Pour cela nous utilisons la méthode numérique la plus répandue dans ce domaine à savoir la méthode des éléments finis qui sera notée (MEF) et qui sera présentée dans ce chapitre.

1.2 PROBLEME ELECTROMAGNETIQUE

1.2.1 Expression locale

1.2.1.1 Equations de Maxwell

L'ensemble des phénomènes électromagnétiques peut être décrit par six grandeurs qui dépendent du temps et de l'espace et qui sont les suivantes :

$\vec{H}(x,t)$: Champ magnétique [$A.m^{-1}$],

$\vec{E}(x,t)$: Champ électrique [$V.m^{-1}$],

$\vec{B}(x,t)$: Induction magnétique [T],

$\vec{D}(x,t)$: Induction électrique [$C.m^{-2}$],

$\vec{J}(x,t)$: Densité de courant de conduction [$A.m^{-2}$],

$\rho_s(x,t)$: Densité de charges électriques libres [$C.m^{-3}$].

Ces différentes grandeurs sont liées par les équations de Maxwell [1] qui décrivent, de façon générale, les lois de l'électricité :

$$rot(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (I.1)$$

$$rot(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (I.2)$$

$$div(\vec{B}) = 0 \quad (I.3)$$

$$div(\vec{D}) = \rho_s \quad (I.4)$$

Les deux premières équations (I.1) et (I.2) expriment le couplage et l'évolution des grandeurs électriques et magnétiques alors que l'équation (I.3) assure la conservation du flux magnétique.

A partir des équations (I.1) et (I.4), nous obtenons la loi de conservation de la charge électrique :

$$\operatorname{div}(\vec{J}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.5})$$

Comportement des matériaux

Les équations de Maxwell sont générales et s'appliquent à tous les milieux. Pour prévoir le comportement des phénomènes électromagnétiques, il faut ajouter à ces équations des relations particulières aux milieux considérés : les relations de constitution [2]. Ces relations se formulent de la façon suivante :

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r \\ \vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

Le vecteur \vec{v} représente la vitesse de déplacement des charges dans le champ \vec{B} . Le vecteur \vec{B}_r représente l'induction rémanente. Le coefficient ε est la permittivité électrique, il vaut ε_0 dans le cas du vide et est supérieur pour tous les autres matériaux. Le coefficient μ est la perméabilité magnétique, il est égal à μ_0 dans le cas du vide et est supérieur pour tous les autres matériaux magnétiques. Le coefficient σ est la conductivité électrique. Elle est nulle dans le cas du vide.

Ces différentes propriétés ne sont pas nécessairement constantes et peuvent varier en fonction de divers paramètres tels que la température par exemple ou le champ magnétique. Ainsi, la figure.I.1 donne les variations de la perméabilité magnétique pour une tôle d'acier FeV 1000 65 HD. Dans un tel cas, si le champ magnétique est purement sinusoïdal dans le temps, l'induction ne l'est pas. On considère aussi couramment que la résistivité d'un matériau varie linéairement avec la température :

$$\rho(T) = \frac{1}{\sigma(T)} = \rho_0(1 + aT) \quad (I.7)$$

Pour le cuivre, on a : $a = 3.93.10^{-3} K^{-1}$ et $\rho_0 = 1.724.10^{-8} \Omega m$ à $20^\circ C$. Donc, pour calculer l'induction magnétique, on doit connaître la température qui est elle même fonction de l'induction magnétique [31].

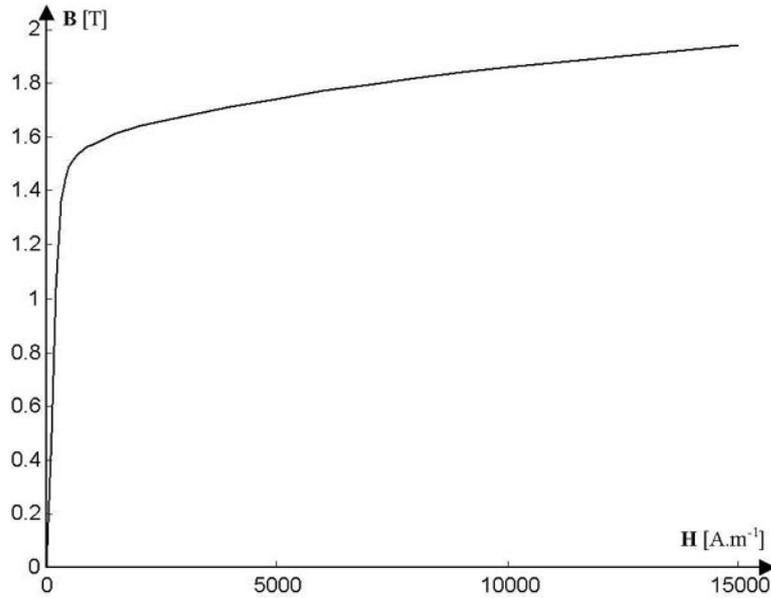


Fig.I.1. Courbe de saturation de la tôle FeV 1000 65 HD en quasi statique

1.2.1.2 Conditions de passage

Lors du passage d'un milieu repéré 1 vers un milieu repéré 2, les grandeurs électromagnétiques subissent des discontinuités et ne sont donc plus mathématiquement différentiables. Les équations qui les relient s'écrivent alors [31]:

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = \rho_s \quad (I.8)$$

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad (I.9)$$

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \wedge \vec{n} = 0 \quad (I.10)$$

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \wedge \vec{n} = \vec{K} \quad (I.11)$$

Avec ρ_s la densité surfacique de charge, \vec{K} la densité surfacique du courant et \vec{n} le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur du milieu 1.

' \wedge ', représente le produit vectoriel et ' \cdot ' le produit scalaire de deux vecteurs.

Rappelons que ϵ , μ et σ peuvent être soit des scalaires, modélisant ainsi les matériaux isotropes, soit des tenseurs qui permettent de tenir compte des effets d'anisotropie. De plus, la relation entre l'induction magnétique \vec{B} et le champ magnétique \vec{H} peut être non linéaire car μ est une fonction de \vec{H} ($\mu = f(\vec{H})$). De même ϵ , μ et σ peuvent dépendre aussi de la température, on a donc couplage des phénomènes électromagnétiques et thermiques par le biais des propriétés physiques.

1.2.1.3 Régime harmonique

Dans le cas où les sources électriques sont parfaitement sinusoïdales, on peut utiliser la notation complexe pour les représenter :

$$U = U_0 \cos(\omega t + \varphi) = \Re(U_0 e^{j(\omega t + \varphi)}) \quad (\text{I.12})$$

Où $\omega = 2\pi \cdot f$ est la pulsation et f la fréquence. Dans ce cas, la dérivation d'une grandeur par rapport au temps revient à une multiplication par $j\omega$.

Si, de plus, les matériaux ont des relations constitutives linéaires alors les grandeurs électromagnétiques ont des variations dans le temps parfaitement sinusoïdales. Les équations de Maxwell se réécrivent alors sous la forme :

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + j\omega\vec{D} \quad (\text{I.13})$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = -j\omega\vec{B} \quad (\text{I.14})$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{I.15})$$

$$\text{div}(\vec{D}) = \rho \quad (\text{I.16})$$

Si les propriétés sont non linéaires, les grandeurs électromagnétiques ne sont plus nécessairement sinusoïdales dans le temps. C'est le cas en particulier des matériaux magnétiques saturables. Pour éviter d'avoir à résoudre le problème en pas à pas dans le temps, les grandeurs électromagnétiques sont calculées en valeurs efficaces. La courbe de saturation

du matériau est alors recalculée pour des grandeurs purement sinusoïdales de manière à conserver l'énergie mise en jeu.

1.2.1.4 Etat quasi stationnaire

L'approximation des états quasi stationnaires s'appuie sur l'approximation suivante :

$$\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx \vec{J} \quad (\text{I.17})$$

que l'on peut écrire, pour un matériau obéissant à la loi d'ohm, sous la forme :

$$\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \approx \sigma \vec{E} \quad (\text{I.18})$$

Si l'on se place en régime harmonique, on peut transformer cette équation sous la forme suivante :

$$\sigma \vec{E} + j\omega\varepsilon \vec{E} \approx \sigma \vec{E} \quad (\text{I.19})$$

On donne dans la table ci-dessous les valeurs de ω_l pour différents matériaux couramment utilisés dans les dispositifs électriques. Cette condition de pulsation sera respectée. De plus, les charges volumiques seront négligées ($\rho \approx 0$).

Matériau	$\sigma [\Omega^{-1}.m^{-1}]$	$\varepsilon [F.m^{-1}]$	$\omega_l [rd.s^{-1}]$
Cuivre	$5,8.10^7$	$8,8.10^{-12}$	$6,6.10^{18}$
Acier	1.107	$8,8.10^{-12}$	$1,1.10^{18}$
Résine époxyde	10^{14} à 10^{16}	3.10^{-11} à $4,4.10^{-11}$	$2,3.10^{24}$ à $3,3.10^{26}$
Aluminium	$3,8.10^7$	$8,8.10^{-12}$	$4,3.10^{19}$

1.2.1.5 Puissance électromagnétique

Dans l'approximation des états quasi stationnaires, on peut écrire les équations de Maxwell sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

Multiplions la première équation par \vec{H} et la seconde par \vec{E} . Après soustraction terme à terme, il vient :

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) + \vec{E} \cdot \vec{J} + \sigma \vec{E} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.21})$$

On intègre cette équation sur un volume Ω délimité par une surface fermée Γ :

$$\begin{aligned} \oiint_{\Gamma} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n} d\Gamma + \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} \cdot d\Omega + \iiint_{\Omega} \sigma \cdot \vec{E} \cdot \vec{E} \cdot d\Omega + \\ \iiint_{\Omega} \sigma \cdot \vec{E} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B}) d\Omega + \iiint_{\Omega} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

Cette équation représente le bilan de puissance avec le vecteur de Poynting sur le volume Ω . La signification de chaque terme est la suivante [2] :

- $\oiint_{\Gamma} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n} d\Gamma$: Flux du vecteur de Poynting, il représente la puissance que le volume Ω échange avec l'extérieur,
- $\iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} \cdot d\Omega$: Représente la puissance émise par la source dans le volume Ω ,
- $\iiint_{\Omega} \sigma \cdot \vec{E} \cdot \vec{E} \cdot d\Omega$: Représente la puissance électromagnétique induite dans le volume Ω et dissipée par effet Joule,
- $\iiint_{\Omega} \sigma \cdot \vec{E} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B}) d\Omega$: Représente la puissance électromagnétique induite dans le volume Ω et transformée en énergie mécanique,

- $\iiint_{\Omega} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\Omega$: Représente la puissance électromagnétique emmagasinée dans le volume Ω .

1.2.2 Formulation magnétodynamique

Dans toute la suite, sauf indication contraire, on se placera dans l'hypothèse des états quasi stationnaires du paragraphe (1.2.1.5).

1.2.2.1 Présentation du problème

La figure (I.2) représente une configuration magnétodynamique type dans laquelle l'inducteur est parcouru par un courant variable dans le temps de densité \vec{J}_{ex} .

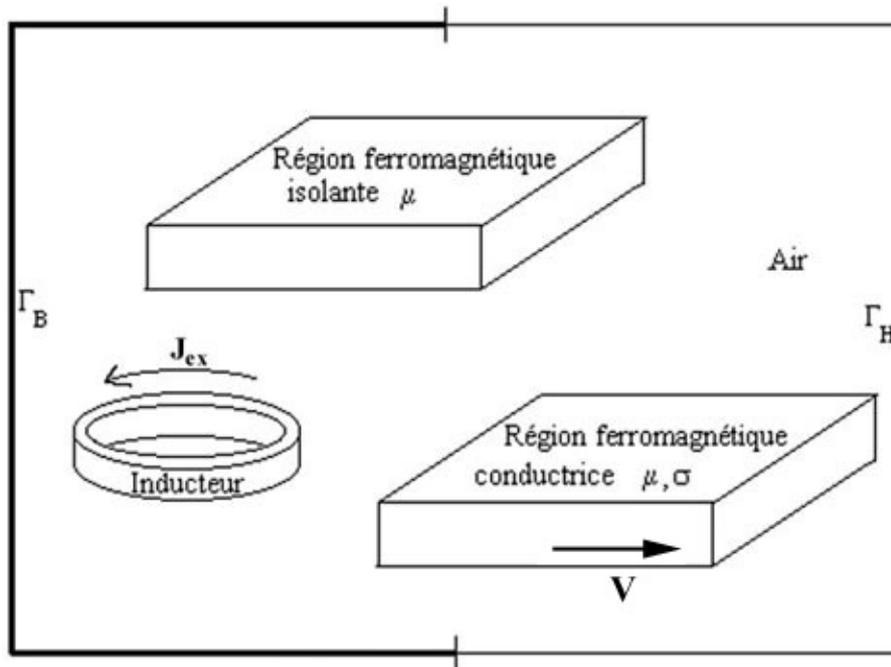


Fig.I.2. *Problème magnétodynamique type comportant un inducteur et différents types de charges.*

Les équations de Maxwell se réécrivent alors :

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J}_{ex} + \vec{J}_0 \quad (\text{I.23})$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.24})$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{I.25})$$

Auxquelles on ajoute les équations constitutives :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{I.26})$$

$$\vec{J}_0 = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (\text{I.27})$$

Et les conditions aux limites :

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_B \quad (\text{I.28})$$

$$\vec{H} \wedge \vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_H \quad (\text{I.29})$$

1.2.2.2 Formulation en potentiel vecteur magnétique

Nous ne nous intéressons qu'à la formulation en potentiel vecteur magnétique car cette formulation est la plus favorable et la plus économique en terme de place mémoire et de temps de calcul. Nous présentons, seulement les équations en magnétodynamique transitoire et harmonique.

D'après l'équation (I.25), \vec{B} dérive d'un potentiel vecteur \vec{A} tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \quad (\text{I.30})$$

En combinant avec l'équation (I.24), on obtient :

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) - \overrightarrow{grad}(V) \quad (\text{I.31})$$

L'équation (I.23) donne alors la formulation en potentiel vecteur magnétique d'un système magnétodynamique [21]:

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) + \sigma\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}(V) - \vec{v} \wedge \overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = \vec{J}_{ex} \quad (\text{I.32})$$

Les conditions aux limites décrites par les équations (I.28), (I.29) deviennent :

$$\vec{n} \wedge \vec{A} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_B \quad (\text{I.33})$$

$$\vec{n} \wedge \frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot}(\vec{A}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_H \quad (\text{I.34})$$

1.2.2.3 Condition d'unicité

On note que si \vec{A} est solution de l'équation alors $\vec{A} + \overrightarrow{grad}(u)$ l'est aussi quelque soit u . Dans ce cas, V devient $V + \frac{\partial u}{\partial t}$ dans l'équation (I.31). La solution du problème électromagnétique n'est donc pas unique malgré les conditions aux limites. Pour résoudre ce problème, on peut utiliser entre autre la jauge de Coulomb décrite par :

$$div(\vec{A}) = 0 \tag{I.35}$$

1.2.2.4 Conditions de passage

Dans le cas de la formulation magnétodynamique en potentiel vecteur A , les conditions de passage entre deux milieux 1 et 2 définis par les équations (I.9) et (I.11) deviennent :

- pour une discontinuité de la perméabilité magnétique μ :

$$\left(\frac{1}{\mu_1} \overrightarrow{rot}(\vec{A}_1) - \frac{1}{\mu_2} \overrightarrow{rot}(\vec{A}_2) \right) \wedge \vec{n} = 0 \tag{I.36}$$

- pour une discontinuité de la conductivité électrique σ :

$$\left(-\sigma_1 \left(\frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} + \overrightarrow{grad}(V_1) \right) + \sigma_2 \left(\frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t} + \overrightarrow{grad}(V_2) \right) \right) \cdot \vec{n} = 0 \tag{I.37}$$

1.3 PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Les équations décrites aux paragraphes précédents expriment les équations de Maxwell sous forme continue. La résolution analytique de ces équations n'est possible que dans certains cas très simples. Dans beaucoup d'autres cas, et en particulier celui des machines, il faut faire appel à des méthodes d'approximation numériques [1].

L'objectif de telles méthodes est de remplacer le modèle décrit dans un espace continu par un modèle discret équivalent. Pour cela, on découpe le domaine de résolution en éléments géométriques simples : c'est le maillage. Ensuite, on applique l'ensemble d'équations à résoudre à chacun de ces éléments simples. L'assemblage de toutes ces équations sur l'ensemble des éléments conduit à un système d'équations linéaire à résoudre. On détermine alors la solution pour un nombre fini d'éléments. La solution sur tout le domaine s'obtient alors par interpolation. Les deux techniques les plus couramment rencontrées pour résoudre de tels problèmes sont la méthode des différences finies (MDF) et la méthode des éléments finis (MEF) [3][4][5].

La méthode des éléments fins (MEF) a été introduite par P. SILVESTER et MVK CHARI [33] au début des années soixante-dix dans le domaine du calcul électromagnétique car au départ cette méthode n'était utilisée que dans le domaine du génie mécanique ou bien du génie civil pour le calcul des efforts sur les structures.

Par mis les logiciels les plus populaire dans les milieux scientifiques dans le domaine du calcul des courant induit nous citons : Maxwell 2D/3D (*USA*), Trifou (MEF, méthode des éléments d'intégrales de frontières) (*Fr*) [6], Flux 2D/3D (*Fr*), Flux Expert 2D/3D (*Fr*), PC-Opera 2D/3D (*UK*), Matlab P.D.E Tool-Box (*USA*) [7] etc...

1.3.1 Rappels sur les éléments finis

La méthode des éléments finis est basée sur une discrétisation du domaine d'étude en éléments finis linéique unidimensionnelle (fig.I.3.a) ou bien triangulaire ou quadrilatère en 2D (fig.I.3.b), tétraédrique, prismatique ou hexaédrique en 3D (fig.I.3.c).

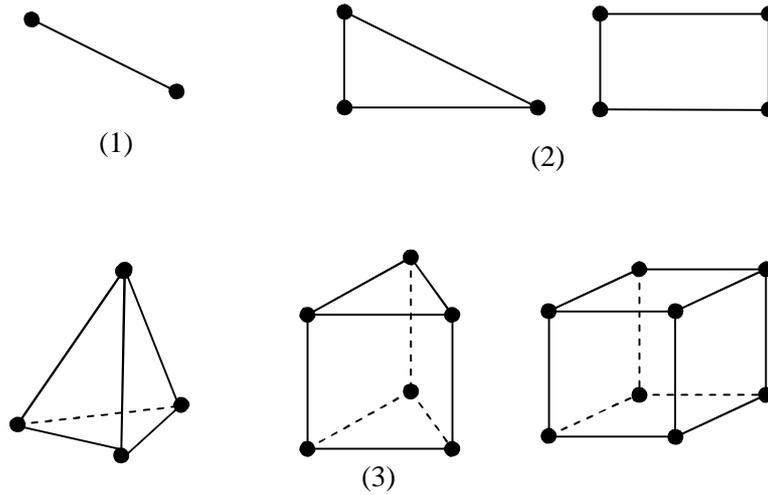


Fig.I.3. *Les géométries des éléments finis*

La méthode des éléments finis se base sur l'application systématique des formulations intégrales. Elle correspond, en effet, au choix des fonctions d'approximation (identique aux fonctions de projection W_i) qui sont des fonctions polynomiales par morceau et qui assure la continuité de la fonction inconnue et sa dérivabilité par morceau, cette méthode est nommée la méthode projective de Galerkin (équation I.38)[8].

$$\int_{\Omega} W_i (E.D.P) d\Omega = 0 \tag{I.38}$$

Les éléments finis sont de plusieurs types : nodaux, arêtes, facettes, volumes, dans notre cas, nous intéressons aux éléments nodaux [9], [10], [11].

La MEF est utilisée pour résoudre des équations aux dérivées partielles (E.D.P) dans les milieux de forme géométrique complexe et de caractéristiques physiques connues, dans le domaine d'étude Ω et qui vérifient la condition de Dirichlet et la condition de Neumann homogène sur les frontières.

1.3.2 cas unidimensionnelle (1D)

Les éléments 1D utilisés dans la suite de texte sont illustrés par la figure (I.4).

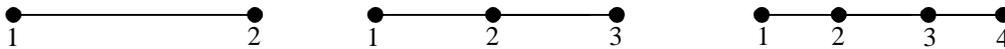


Fig.I.4. *Eléments finis linéique 1D 1^{er} ordre, 2^{ème} ordre, 3^{ème} ordre*

Les fonctions d'interpolations utilisées sont les suivantes :

1^{er} ordre $N_i(x) = a + bx$

2^{ème} ordre $N_i(x) = a + bx + cx^2$

3^{ème} ordre $N_i(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

La variable recherchée 'A' par exemple s'écrira pour un élément du maillage utilisé selon les formules ci-dessous :

1^{er} ordre $A^e(x) = \sum_{j=1}^2 N_j^e(x) A_j^e$

2^{ème} ordre $A^e(x) = \sum_{j=1}^3 N_j^e(x) A_j^e$

3^{ème} ordre $A^e(x) = \sum_{j=1}^4 N_j^e(x) A_j^e$

1.3.3 Cas bidimensionnel ou axisymétrique

Les éléments 2D utilisés dans la suite du paragraphe sont illustrés par la figure (I.5) :

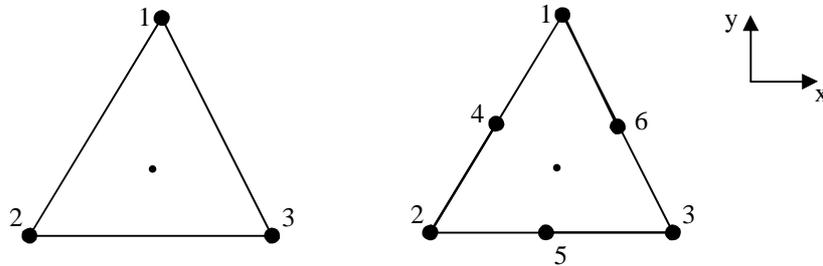


Fig.I.5. *Eléments finis triangulaire 1^{er} ordre, 2^{ème} ordre*

A partir de ces éléments, nous utiliserons les fonctions d'interpolations suivantes :

1^{er} ordre

$$N_i(x, y) = a + bx + cy \quad \text{en coordonnées cartésiennes}$$

$$N_i(x, y) = a + br + cz \quad \text{en coordonnées axisymétrique}$$

2^{ème} ordre

$$N_i(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy \quad \text{en coordonnées cartésiennes}$$

$$N_i(x, y) = a + br + cz + dr^2 + ez^2 + frz \quad \text{en coordonnées axisymétrique}$$

On peut exprimer le fait que l'inconnu $A(x, y)$ soit la solution de l'équation (I.38) et des conditions aux limites associées, s'écrira selon les formules ci-dessous :

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{nn} A_i N_i(x, y) \quad (\text{I.39})$$

$$A(r, z) = \sum_{i=1}^{nn} A_i N_i(r, z) \quad (\text{I.40})$$

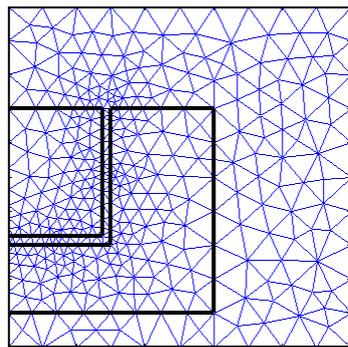
$$nn = \begin{cases} 3 & (1^{\text{er}} \text{ ordre}) \\ 6 & (2^{\text{ème}} \text{ ordre}) \end{cases}$$

En ce qui concerne les éléments d'arêtes, la fonction d'interpolation est donnée par l'équation suivante :

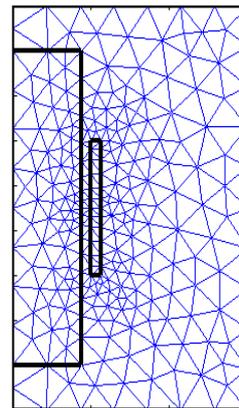
$$1^{\text{er}} \text{ ordre} \quad W_{ij}(x, y) = l_{ij}(N_i \Delta N_j - N_j \Delta N_i)$$

où l_{ij} représente la longueur allant du nœud i au nœud j .

Le maillage d'un dispositif 2D, aussi bien d'un dispositif axisymétrique sont illustrés par le biais d'un exemple issu de maillage bidimensionnel 1^{er} ordre, avec des éléments triangulaires (fig.I.6) :



(a)



(b)

Fig.I.6. *Maillage éléments finis triangulaire 1^{er} ordre*
a- bidimensionnel
b- axisymétrique

1.3.4 Cas tridimensionnelle

Les éléments 3D utilisés dans la suite de travail sont illustrés par la figure (I.7) :

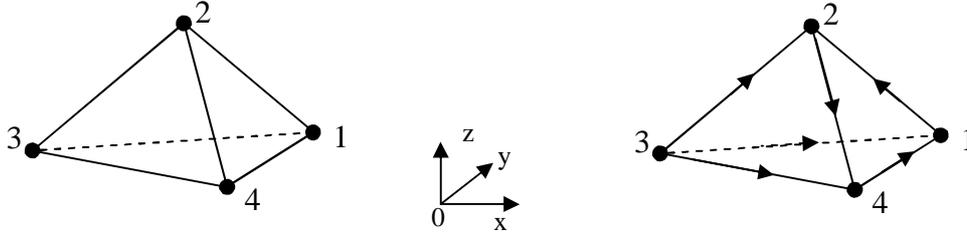


Fig.I.7. *Eléments finis tétraédrique 3D 1^{er} ordre*

On écrit les fonctions d'interpolations suivantes :

$$1^{\text{er}} \text{ ordre } N_i(x, y, z) = a + bx + cy + dz \quad (\text{I.41})$$

la variable recherchée $A(x, y, z)$ s'écrira selon la formule suivante :

$$A^e(x, y, z) = \sum_{j=1}^4 N_j^e(x, y, z) A_j \quad (\text{I.42})$$

En ce qui concerne les éléments d'arêtes, la fonction d'interpolation est donnée par l'équation suivante :

$$1^{\text{er}} \text{ ordre } W_{ij}(x, y, z) = l_{ij}(N_i \Delta N_j - N_j \Delta N_i) \quad (\text{I.43})$$

La variable recherchée 'A' s'écrira selon les formules ci-dessous :

$$\text{Nodaux : } A^e(x, y, z) = \sum_{j=1}^4 A_j^e N_j^e(x, y, z) \quad (\text{I.44})$$

$$\text{Arêtes : } A^e(x, y, z) = \sum_{j=1}^6 A_j^e W_j^e(x, y, z) \quad (\text{I.45})$$

1.3.5 Propriétés des fonctions de projection (Ni et Wi)

Les fonctions d'interpolation vérifient les propriétés suivantes :

$$N_i(x_j, y_j, z_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{I.46})$$

δ_{ij} est le symbole de **Krönecker** [22].

En 3D la fonction de projection est vectorielle et est définie par :

$$N_i = \begin{bmatrix} N_{ix} & 0 & 0 \\ 0 & N_{iy} & 0 \\ 0 & 0 & N_{iz} \end{bmatrix} \quad (\text{I.47})$$

En ce qui concerne les éléments d'arêtes, la fonction de projection W_{ij} présente des propriétés intéressantes (équation (I.47) et (I.48)) à savoir [23] :

$$\text{rot}(W_{ij}) = 2l_{ij}(\Delta N_i \times \Delta N_j) \quad (\text{I.48})$$

$$\text{div}(W_{ij}) = 0 \quad (\text{I.49})$$

Cette dernière propriété évite de recourir au terme de pénalité dans le cadre de la méthode des éléments d'arêtes.

1.4 MODELISATION PAR LA MEF

1.4.1 Modélisation en 3D

Les problème 3D sont complexes par la taille des matrices obtenues et surtout le nombre de valeur non nuls dans ces matrices, le recours à des algorithmes de pré conditionnement puissants ainsi que l'utilisation des méthodes itératives pour la résolution des grande système algébrique est indispensable surtout pour le cas de la magnétodynamique car les coefficients de la matrice assemblée sont complexes pour le régime harmonique, nous poserons avec plus de détaille ce problème ultérieurement (chapitre 4).

1.4.2 Modélisation en 2D

Dans le cadre de la MEF nodaux, le noyau de calcul ainsi fourni permet de traiter les problèmes 2D, axisymétriques.

Nous avons développé un programme d'introduction des données géométriques, physiques et conditions aux limites. Le programme ainsi développé s'applique au problème de magnétodynamique ce qui permet d'étudier les problèmes du contrôle non destructif (deuxième chapitre).

A partir de l'introduction de la géométrie par un fichier Matlab PDE Toolbox [7], on passe à la phase de maillage, ensuite à l'affectation des propriétés physiques et des conditions aux limites. L'assemblage et la résolution, enfin l'exploitation des résultats. Dans la figure suivante, nous présentons le schéma adopté pour la modélisation des éléments finis.

1.4.2.1 Assemblage éléments finis

Supposons à résoudre l'équation suivante de la variable A dans un domaine 2D Ω de frontière $\Gamma = \Gamma_h + \Gamma_b$:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_x \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_y \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \beta \cdot A = f \quad (I.50)$$

Avec les conditions aux limites :

$$A = A_0 \text{ Sur } \Gamma_h \quad (I.51)$$

$$\text{Sur } \Gamma_b : \quad \left(\alpha_x \frac{\partial A}{\partial x} e_x + \alpha_y \frac{\partial A}{\partial y} e_y \right) \cdot \vec{n} + \gamma \cdot A = q \quad (\text{I.52})$$

Le système d'équations (I.50) à (I.52) peut décrire aussi bien le problème électromagnétique dans le cas transverse magnétique que le problème thermique. Ce système d'équation est exprimé en éléments finis nodaux du premier ordre sur un maillage triangulaire. Les éléments de ce maillage sont supposés être suffisamment petit pour pouvoir faire l'approximation.. Sur chaque élément e du maillage, la solution A est de la forme :

$$A^e = a^e + b^e x + c^e y \quad (\text{I.53})$$

On cherche les valeurs de l'inconnue aux nœuds du maillage.

1.4.2.2 Fonctions d'approximation

La solution (I.53) doit vérifier :

$$\forall i = 1, 2 \text{ ou } 3 \quad A^e(x_i, y_i) = A_i^e \quad (\text{I.54})$$

Où A_i^e est la valeur de la solution au nœud i de l'élément e . Soit :

$$\begin{cases} A_1^e = a^e + b^e x_1 + c^e y_1 \\ A_2^e = a^e + b^e x_2 + c^e y_2 \\ A_3^e = a^e + b^e x_3 + c^e y_3 \end{cases} \quad (\text{I.55})$$

Que l'on peut exprimer sous la forme :

$$A^e = \sum_{i=1}^3 N_i^e \cdot A_i^e \quad (\text{I.56})$$

avec :

$$N_i^e = \frac{1}{2\Delta^e} (a_i^e + b_i^e x + c_i^e y) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{I.57})$$

Les N_i^e sont les fonctions d'approximation nodale de premier ordre entièrement définies par les coordonnées des nœuds du maillage et Δ^e est la surface de l'élément considéré.

On vérifiera aisément que les fonctions d'approximation vérifient :

$$N_i^e(x_k, y_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases} \quad (\text{I.58})$$

La solution recherchée s'exprime alors comme une combinaison linéaire des valeurs aux nœuds du maillage.

1.4.2.3 Formulation intégrale

L'équation (I.50) s'exprime sous forme intégrale par [32]:

$$F(A) = \iint_{\Omega} \left\{ A' \left(-\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) - \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) + \beta A - f \right) \right\} d\Omega = 0 \quad (\text{I.59})$$

où A' est la fonction de pondération choisie a priori. Cette équation traduit le fait que si A est la solution du problème, alors sa projection sur l'espace des fonctions qui la décrivent A' est globalement nulle sur le domaine de résolution Ω .

Soit, après l'intégrale par partie :

$$F(A) = \iint_{\Omega} \left(\alpha_x \frac{\partial A'}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial A'}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} + \beta \cdot A \cdot A' - f A' \right) d\Omega + \oint_{\Gamma} A' \left(\alpha_x \frac{\partial A}{\partial x} \vec{e}_x + \alpha_y \frac{\partial A}{\partial y} \vec{e}_y \right) \cdot \vec{n} \cdot d\Gamma = 0 \quad (\text{I.60})$$

La première intégrale décrit l'équation (I.50) sur le domaine de résolution et s'exprime comme la somme des intégrales élémentaires alors que la seconde décrit les conditions aux limites définies par (I.51) et (I.52). Les inconnues A et A' sont remplacées par leur forme définie en (I.53). Puisque ces formes sont des approximations linéaires de la solution exacte, l'équation (I.60) n'est pas nulle mais minimale pour la meilleure d'entre elles. L'équation à résoudre devient alors :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A'} = 0 \quad (\text{I.61})$$

Il apparaît d'abord que, comme A' est une combinaison linéaire des valeurs aux nœuds du maillage, la dérivée (I.61) s'exprime comme une dérivée par rapport à chacune de ces valeurs. De plus, les conditions aux limites sont imposées et connues avec (I.51) et (I.52),

donc la seconde intégrale sur le contour dans l'équation (I.60) n'a pas d'intérêt immédiat. L'équation (I.61) devient sur chaque élément e du maillage :

$$\frac{\partial F^e(A)}{\partial A'^e} = \iint_{\Omega^e} \left(\alpha_x \frac{\partial A'^e}{\partial x} \frac{\partial A^e}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial A'^e}{\partial y} \frac{\partial A^e}{\partial y} + \beta \cdot A^e \cdot A'^e - f A'^e \right) d\Omega^e = 0 \quad (I.62)$$

Qui devient après calcul :

$$\sum_{i=1}^3 \left\{ \iint_{\Omega^e} \left(\alpha_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \beta \cdot N_i^e N_j^e \right) d\Omega^e \times A_i^e \right\} = \iint_{\Omega^e} (f \cdot N_j^e) d\Omega^e \quad (I.63)$$

Cette équation décrit, pour chaque élément e du maillage, un système de trois équations linéaire (j) à 3 inconnues A_i^e qui s'exprime sous forme matriciel par :

$$\mathbf{K}^e \mathbf{A}^e + \mathbf{M}^e \mathbf{A}^e = \mathbf{F}^e \quad (I.64)$$

Les matrices et vecteurs de cette équation sont donnés par :

$$\mathbf{K}^e = \left[K_{i,j}^e \right]_{i,j=1,2,3} \quad \text{avec} \quad K_{i,j}^e = \iint_{\Omega^e} \left(\alpha_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) d\Omega^e \quad (I.65)$$

$$\mathbf{M}^e = \left[M_{i,j}^e \right]_{i,j=1,2,3} \quad \text{avec} \quad M_{i,j}^e = \iint_{\Omega^e} (\beta \cdot N_i^e N_j^e) d\Omega^e \quad (I.66)$$

$$\mathbf{F}^e = \left[F_j^e \right]_{j=1,2,3} \quad \text{avec} \quad F_j^e = \iint_{\Omega^e} (f \cdot N_j^e) d\Omega^e \quad (I.67)$$

$$\mathbf{A}^e = \left[A_i^e \right]_{i=1,2,3} \quad (I.68)$$

Les contributions de tous les éléments du maillage sont ajoutées pour aboutir à un système matriciel décrivant le problème sur l'ensemble du domaine.

1.4.2.4 Calcul des intégrants

Il est alors possible d'exprimer directement les diverses parties d'une équation aux dérivées partielles en connaissant leur traduction en éléments finis nommés intégrants. Avec la formule suivante [5] ou N_i^e est défini par l'équation (I.57):

$$\iint_{\Omega^e} \left\{ (N_1^e)^l (N_2^e)^m (N_3^e)^n \right\} d\Omega^e = 2\Delta^e \frac{l!m!n!}{(l+m+n+2)!} \quad (\text{I.69})$$

l'équation (I.65) devient :

$$K_{i,j}^e = \frac{1}{4\Delta^e} \left(\alpha_x^e b_i^e b_j^e + \alpha_y^e c_i^e c_j^e \right) \quad (\text{I.70})$$

L'ensemble des intégrants utilisé est récapitulé dans la table ci-dessous :

$rot(\alpha rot(A))$	$K_{i,j}^e = \frac{1}{4\Delta^e} \left(\alpha_x^e b_i^e b_j^e + \alpha_y^e c_i^e c_j^e \right)$
$\beta.A$	$M_{i,j}^e = \frac{\Delta^e}{12} \beta^e (1 + \delta_{i,j})$
f	$F_j = \frac{\Delta^e}{3} f^e$

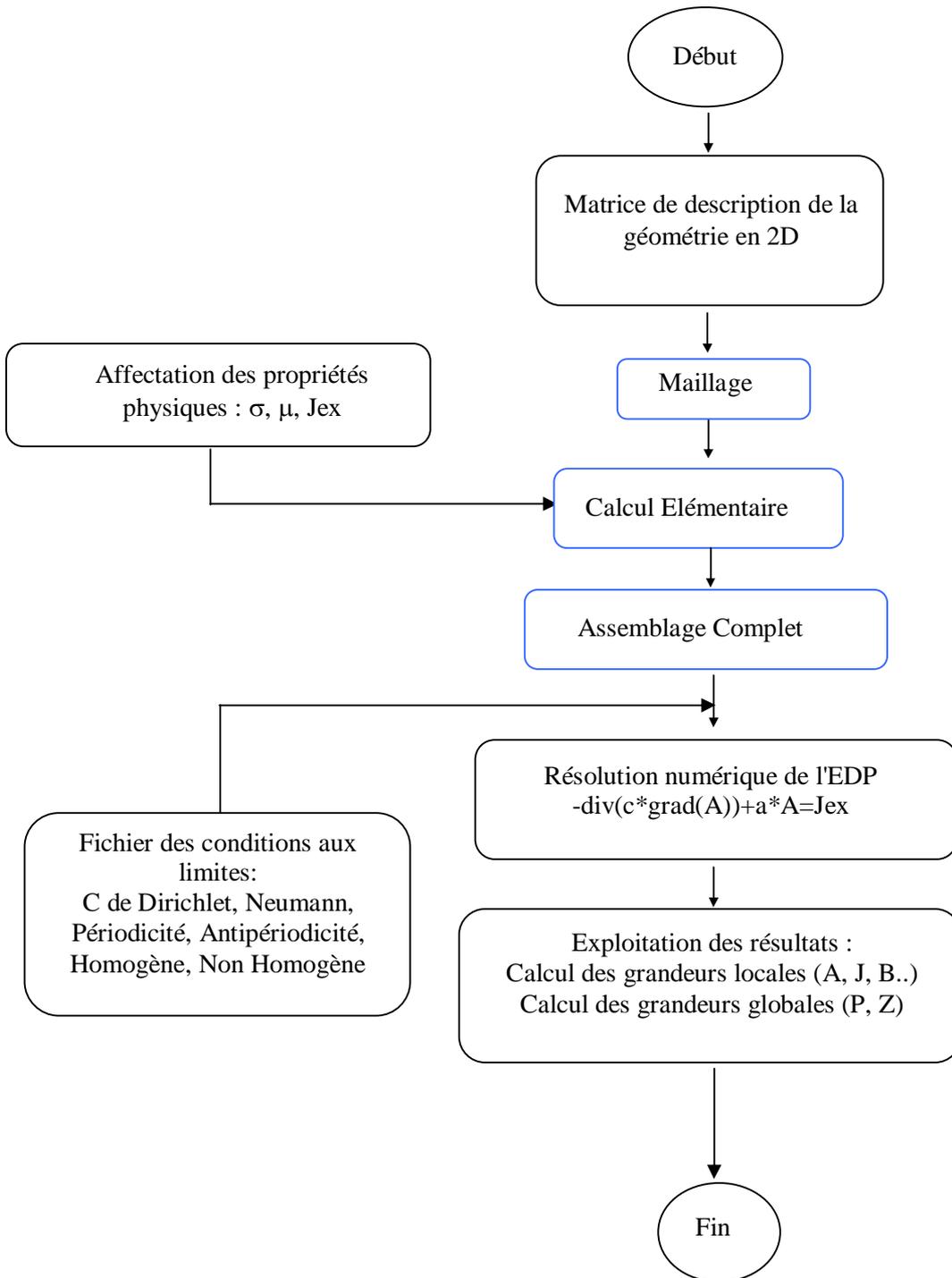


Fig.I.8. Architecture globale de la méthode numérique développée

Sur deux exemples, nous visualisons les équipotentielles à travers une distribution dégradée du potentiel vecteur magnétique (fig.I.9) :

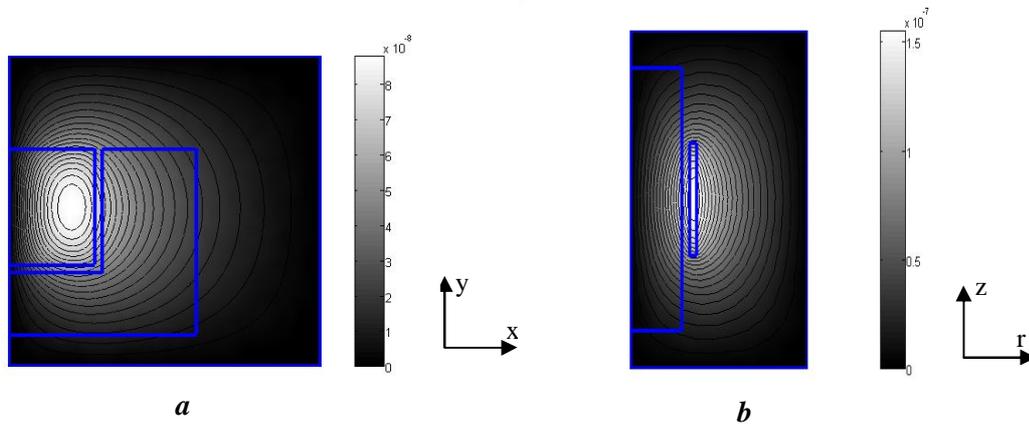


Figure I.9. *Visualisation du potentiel vecteur magnétique*
a- Exemple 2D
b- Exemple axisymétrique

1.5 CONCLUSION

Les outils numériques développés autour de la MEF ont été présentés pour le cas 2D. Nous allons voir l'intérêt de ces développements par le biais du contrôle non destructif, et nous présenterons par la suite une comparaison entre la méthode de calcul numérique (éléments finis) et une méthode de calcul analytique en l'occurrence le code MESSINE.