

### 3.1 INTRODUCTION

Afin de valider notre application on doit élaborer des outils mathématiques nécessaires au passage par modélisation des configurations planes à des configurations tubulaires.

Pour présenter cette application nous commencerons par l'introduction des techniques de transformation et leur application aux cas qui nous intéressent, nous donnerons ensuite le développement de la transformation vectorielle à travers l'utilisation des éléments finis. Nous terminerons par une application numérique du modèle.

### 3.2 TRANSFORMATIONS CONFORMES

#### 3.2.1 Définition

Soit une fonction analytique  $Z = F(z)$ , Quand le point 'm' dont l'affixe est  $z = x + jy$ , décrit une courbe  $\gamma$  dans le plan  $z$ , le point 'M', dont l'affixe est  $Z = X + jY$ , décrit une courbe  $\Gamma$  dans le plan des  $Z$  (fig.III.1) [17].

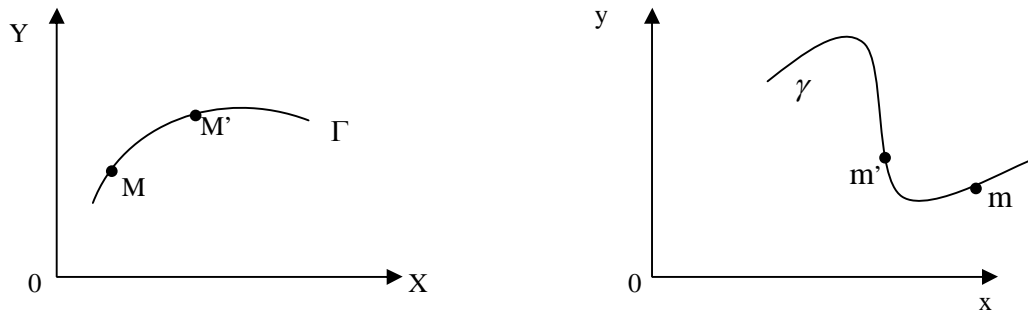


Fig.III.1. *Représentation graphique de la transformation conforme*

La courbe  $\Gamma$  est dite la courbe transformée de la courbe  $\gamma$  et réciproquement. Les points  $M$  et  $m$  sont dits conjugués. La propriété fondamentale de cette transformation est de conserver les angles, donc les formes des éléments infiniment petits, d'où le nom de transformation conforme qui lui est donné.

Les propriétés conservées par la transformation conforme (bijective) seront présentées dans l'annexe.

L'intérêt de la définition de la transformation conforme est de rappeler le principe de la bijection, d'où le passage d'une géométrie à l'autre et réciproquement, c'est pour cette raison qu'on propose la transformation géométrique ponctuelle.

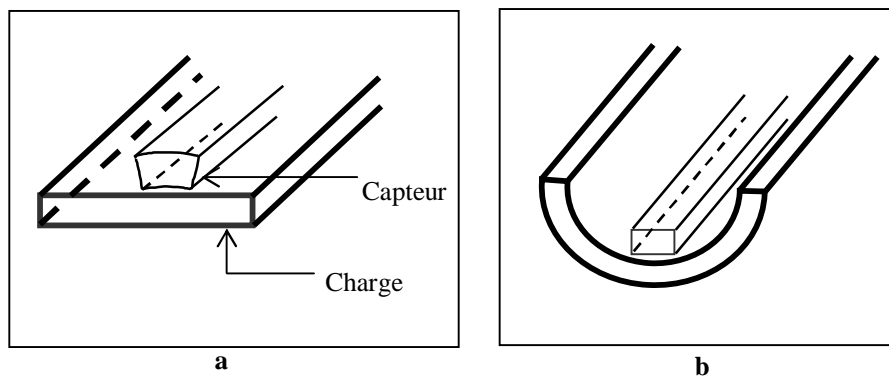
Parmi les transformations ponctuelles on trouve que les plus connues sont les translations, symétries, rotations, homothéties, elles ne sont pas définies sur une figure donnée, mais en tout point de l'espace. On peut aussi effectuer en chaîne plusieurs transformations, il en résulte une transformation composée [18].

D'après notre recherche bibliographique, l'application de la transformation conforme dans le domaine de l'électromagnétisme est un sujet en cours d'exploration, à titre d'exemple on peut citer les travaux de recherches sur les méthodes de transformations appliquées à la représentation de l'infini de problèmes d'électromagnétisme [19], [20].

En effet, nous avons cherché à implémenter une transformation bijective. On prend comme exemple le passage d'un modèle de départ (configuration plane) à un modèle équivalent (configuration cylindrique) tout en gardant le principe de la bijection.

### **3.2.2 Modèle proposé**

Soit un capteur déformé dans une configuration plane appelé système de départ (Figure III.2.a). Ce système est considéré à caractère physico-géométrique difficile à modéliser. En vue de déterminer ses grandeurs électromagnétiques, en l'occurrence, (l'induction magnétique, les courants induits, l'impédance...), on appliquera une transformation mathématique bijective directe, ainsi nous obtenons un modèle géométrique équivalent, et qui normalement doit être facile à modéliser (fig.III.2.b).



**Fig.III.2. Modèles géométriques**  
**a. Configuration de départ**  
**b. Configuration équivalente**

Notre contribution consiste à procéder la modélisation du modèle géométrique équivalent par la méthode des éléments finis (MEF) pour déterminer ses grandeurs électromagnétiques. Par la suite, et par une transformation vectorielle inverse appliquée aux résultats physiques (induction magnétique, potentiel vecteur...) ainsi obtenus en modélisant le modèle géométrique équivalent, nous obtenons les valeurs des grandeurs électromagnétiques de la configuration du départ sans passer par sa propre modélisation.

Pour valider cette procédure proposée, nous sommes dans l'obligation de choisir un modèle de départ relativement simple pour pouvoir appliquer la MEF au modèle de départ pour la résolution des équations aux dérivées partielles caractéristiques aux phénomènes électromagnétiques en question (le potentiel vecteur, l'induction magnétique, les courants induits, l'impédance).

Les valeurs de ces grandeurs ainsi obtenues seront prises comme des valeurs de référence. Les résultats obtenus par la transformation vectorielle inverse, appliquée aux grandeurs physiques données par la modélisation du modèle géométrique équivalent, seront comparées à ces valeurs de référence.

### 3.3 TRANSFORMATION GEOMETRIQUE

Analytiquement, les transformations géométriques directe et inverse s'écrivent sous la forme suivante :

$$P = \begin{cases} x' = x \\ y' = (R_0 - z) \cdot \sin\left[\frac{y}{R_0}\right] \\ z' = (-R_0 + z) \cdot \cos\left[\frac{y}{R_0}\right] + R_0 \end{cases} \quad P^{-1} : \begin{cases} x = x' \\ y = R_0 \times a \tan\left(\frac{y'}{R_0 - z'}\right) \\ z = R_0 \times \sqrt{y'^2 + (R_0 - z')^2} \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

et sous forme complexe :

$$P = \begin{cases} x' = x \\ Z' = -i(R_0 - z) e^{\left(\frac{iy}{R_0}\right)} + iR_0 \end{cases}$$

avec :  $Z' = y' + iz'$

Nous avons implanté cette transformation et son inverse par un programme développé sous environnement Matlab® (Tdirecte.m, Tinverse.m).

Nous disposons là d'une situation idéale pour modéliser un problème électromagnétique car :

- La géométrie étudiée dans le plan YOZ.
- Le système inducteur crée un champ magnétique que l'on peut estimer facilement (dans notre cas l'estimation est numérique).
- La fréquence utilisée correspond à une épaisseur de peau d'un ordre de grandeur comparable à l'épaisseur de la plaque (1mm / 1.27mm).

Nous choisissons un capteur mono filaire de longueur infinie (fig.III.2.a), En raison de l'invariance des phénomènes électromagnétiques suivant l'axe OX, le problème sera ainsi traité dans le plan (YOZ).

***En négligeant les effets de bords***, l'application directe et inverse de la transformation 'P' point par point, nous permet d'obtenir la figure suivante :

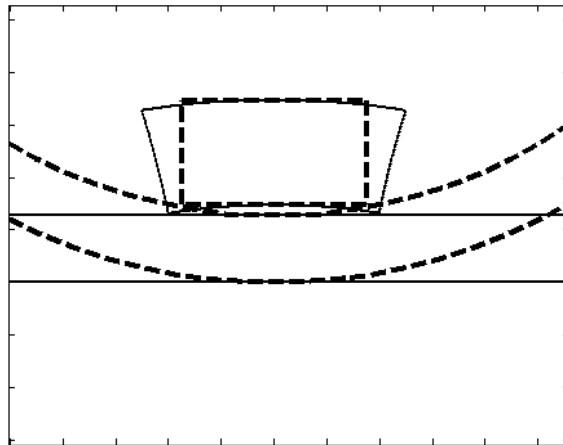
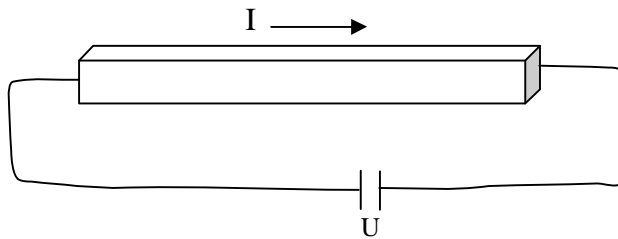


Fig.III.3. *Visualisation au voisinage de l'entrefer de la transformation bijective*

La bijection de la transformation ponctuelle 'P' est validée pour l'ensemble de la configuration, en l'occurrence, le tube, le capteur et l'entrefer. Le choix d'un bon repère, qui sera l'origine de la transformation, est primordial pour le passage entre les deux configurations.

### 3.4 CALCUL DE L'IMPEDANCE APPARENTE ET LA PUISSANCE DISSIPEE DANS LA CHARGE

Notre capteur est alimenté en courant alternatif de fréquence  $f$ , ce qui implique une différence de potentiel  $U$  sur la longueur " $l$ " du conducteur.



La densité de puissance dissipée dans la charge est donnée par la formule suivante :

$$P = \frac{l}{\sigma} J_{induit}^2 \quad (III.2)$$

L'impédance apparente  $\underline{Z}$  est calculée à partir de la loi d'Ohm  $\underline{Z} = \frac{U}{I}$ , pour cela on exprime la densité du courant dans un conducteur par la formulation suivante :

$$J = -\sigma \left( \frac{\partial A}{\partial t} + gradV \right) = -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma gradV \quad (III.3)$$

Le terme  $\sigma \frac{\partial A}{\partial t}$  exprime la densité des courants induits par la variation temporelle du potentiel

vecteur magnétique dans les zones conductrices de courant,

$gradV$  est le gradient de potentiel électrique,

$\sigma$  est la conductivité du cuivre.

$$J = -j\omega\sigma A - \sigma \frac{\Delta V}{l} = \frac{I}{S} = -j\omega\sigma A - \sigma \frac{U}{l}$$

$$\Rightarrow U = -j\omega l A - \frac{I l}{\sigma S} \quad (\text{III.4})$$

$\omega$  : pulsation de la source,  
 $l$  : longueur du capteur,  
 $S$  : la section du capteur.

Sachant que  $Z = \frac{U}{I}$ , l'équation (III.4) s'écrit sous la forme suivante :

$$Z = -j\omega l \frac{A}{I} - \frac{l}{\sigma S} \quad (\text{III.5})$$

En fonction des parties réelle et imaginaire du potentiel vecteur magnétique, et du courant défini par sa partie réelle  $I_r$ , l'équation (III.5) s'écrit :

$$Z = -j\omega l \frac{A_r + jA_j}{I_r} - \frac{l}{\sigma S}$$

Finalement :

$$Z = \underbrace{\left( -\frac{l}{\sigma S} - \frac{\omega}{I_r} A_j \right)}_R - j \underbrace{\left( \frac{\omega}{I_r} A_r \right)}_{L\omega} \quad (\text{III.6})$$

L'équation (III.6) est l'impédance apparente vue par le primaire (capteur) pour 1m de longueur.

### 3.5 RESOLUTION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Comme outil numérique, nous allons choisir la méthode des éléments finis. Nous appliquerons le modèle à l'étude d'un capteur (infiniment long) dans une configuration de départ (fig.III.4.a) et dans une configuration équivalente (fig.III.4.b).

Aux logiciels du laboratoire, nous avons intégré un programme d'introduction des données géométriques, physiques et des conditions aux limites. Ces outils numériques sont développés sous environnement Matlab®. Le programme ainsi développé s'applique aux problèmes magnétodynamiques.

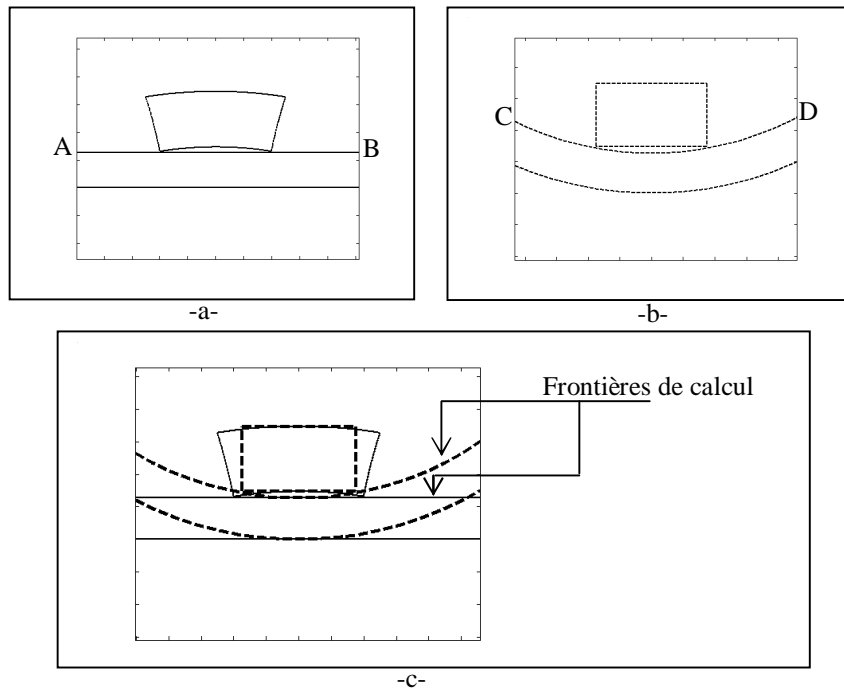


Fig.III.4. *Visualisation de la transformation géométrique*

*a. Configuration de départ*

*b. Configuration équivalente*

*c. Superposition des deux configurations*

Le tableau III.1 montre les caractéristiques physiques et géométriques de la configuration de départ et celles de la configuration équivalente :

Surface du capteur ( $\text{m}^2$ )	$7.10^{-6}$
Surface du capteur déformé ( $\text{m}^2$ )	$8,98.10^{-6}$
Fréquence (Hz)	240000
Courant injecté (par spire) (mA)	4,573
Nombre de spires	328
Conductivité de la charge ( $\text{S.m}^{-1}$ )	1000000
Perméabilité relative	1
Epaisseur de la plaque (m)	$1,27.10^{-3}$

Tab.III.1. *Les caractéristiques physiques et géométriques de l'application*

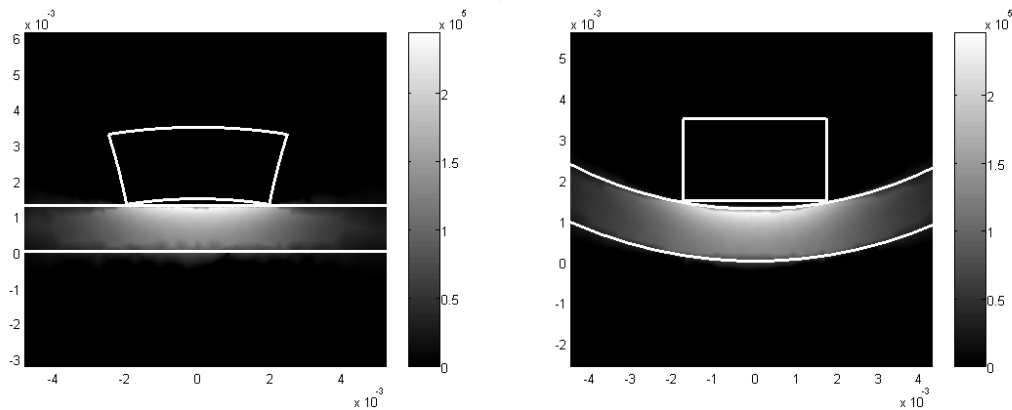


Fig.III.5. *Visualisation par la méthode des éléments finis des courants Induits*

a. *Configuration du départ*

b. *Configuration équivalente*

Le tableau III.2 montre les valeurs des puissances calculées dans la charge, des résistances, des inductances et des impédances données par un calcul numérique classique directe appliquée aux configurations : du départ et celle équivalente **séparément**.

Type de la configuration	Puissance dissipée (Watt)	Résistance ( $\Omega$ )	Inductance (H)	Impédance ( $\Omega$ )
Plane	0,1713	0,0716	$1,5325.10^{-7}$	0,2419
Cylindrique	0,1731	0,0806	$1,4914.10^{-7}$	0,2389
$\Delta$ (%)	1,05	12,56	2,68	1,24

Tab.III.2 *Récapitulatif des résultats*



Pour confirmer nos constatations en matière de validité et de précision de notre modèle, nous proposons dans ce qui suit de procéder au calcul de l'évolution spatiale de l'induction magnétique (B) dans une région fortement sensible de l'application et où les variations des phénomènes électromagnétiques sont très importantes.

En effet, nous allons évaluer la variation de (B) de deux manières différentes au niveau de la configuration de départ.

Dans un premier temps nous calculons cette variation de (B) sur le segment de droite AB (fig.III.4.a) en modélisant par la MEF la configuration de départ elle même. Il s'agit donc d'un calcul numérique classique direct.

Dans un second temps, nous calculons cette même variation de (B), en utilisant la MEF de la même manière que précédemment, mais, cette fois-ci sur l'arc CD de la configuration équivalente (fig.III.4.b) obtenue après l'application de la transformation géométrique sur la configuration de départ. Cette variation de (B) ainsi obtenue est ramenée par transformation vectorielle inverse à la configuration de départ et sera confrontée à celle obtenue initialement en traitant le modèle de la configuration de départ. Les valeurs des écarts entre les deux manières de calcul de (B) définissent le degré de validité du modèle [34].

### 3.6 TRANSFORMATION VECTORIELLE

Examinons à présent la transformation vectorielle (fig.III.6) qui s'appliquerait aux valeurs du champ :

On associe sur la configuration de départ et la configuration équivalente respectivement les vecteurs unitaires suivants :  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  et  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ .

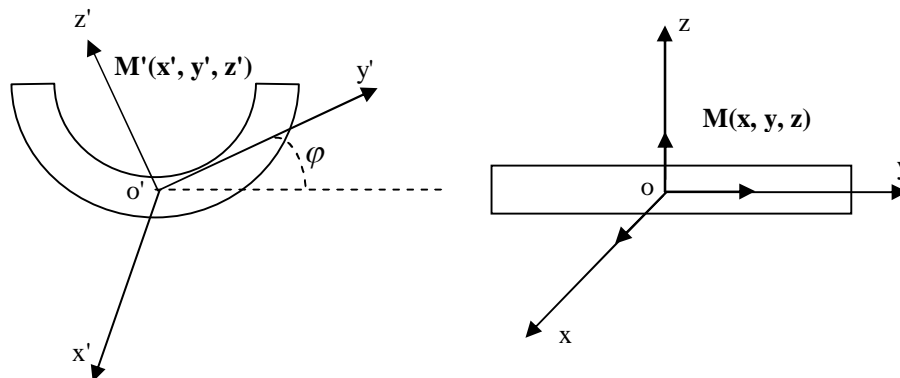


Fig.III.6. *Rotation des vecteurs locaux*

Les transformations vectorielles directe et inverse sont données par les expressions suivantes [16] :

$$V : \begin{cases} \vec{i}' = \vec{i} \\ \vec{j}' = \cos\left(\frac{y}{R_0}\right)\vec{j} + \sin\left(\frac{y}{R_0}\right)\vec{k} \\ \vec{k}' = -\sin\left(\frac{y}{R_0}\right)\vec{j} + \cos\left(\frac{y}{R_0}\right)\vec{k} \end{cases}$$

$$V^{-1} : \begin{cases} V^{-1}(\vec{i}') = (1, 0, 0) \\ V^{-1}(\vec{j}') = \left(0, \frac{R_0(R_0 - z')}{\lambda}, -\frac{y' \sqrt{y'^2 + (z' - R_0)^2}}{\lambda}\right) \\ V^{-1}(\vec{k}') = \left(0, \frac{R_0 y'}{\alpha}, \frac{(R_0 - z') \sqrt{y'^2 + (R_0 - z')^2}}{\alpha}\right) \end{cases}$$

' $R_0$ ' est le rayon externe

'y' est l'abscisse du point connu dans la configuration cylindrique

$\alpha$  et  $\lambda$  sont les expressions en fonction de y, z et ' $R_0$ '

Nous proposons d'appliquer cette transformation sur l'induction magnétique.

Sachant que :  $\vec{A} = A_x \vec{i}$

L'expression de l'induction magnétique est donnée par le rotationnel du potentiel vecteur magnétique :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ -\frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } \vec{B} = \frac{\partial A_x}{\partial z} \vec{j} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \vec{k} = B_y \vec{j} - B_z \vec{k} \quad (\text{III.6})$$

les composantes  $B_y$  et  $B_z$  sont issues de notre calcul éléments finis, l'application de cette transformation à ce vecteur peut s'écrire comme suit :

$$V(\vec{B}) = \frac{\partial A_x}{\partial z} V(\vec{j}) - \frac{\partial A_x}{\partial y} V(\vec{k}) \quad (\text{III.7})$$

La substitution de la transformation "V" dans (III.7), donnera l'expression de l'induction magnétique transformée. Cette expression est composée d'une nouvelle composante selon  $\vec{j}$  et une autre selon  $\vec{k}$ .

$$V(\vec{B}) = \frac{\partial A_x}{\partial z} \left[ \cos\left(\frac{y}{R_0}\right) \vec{j} + \sin\left(\frac{y}{R_0}\right) \vec{k} \right] - \frac{\partial A_x}{\partial y} \left[ -\sin\left(\frac{y}{R_0}\right) \vec{j} + \cos\left(\frac{y}{R_0}\right) \vec{k} \right]$$

On peut aussi écrire

$$\vec{B}' = V(\vec{B}) = \left[ \frac{\partial A_x}{\partial z} \cos\left(\frac{y}{R_0}\right) + \frac{\partial A_x}{\partial y} \sin\left(\frac{y}{R_0}\right) \right] \vec{j} + \left[ \frac{\partial A_x}{\partial z} \sin\left(\frac{y}{R_0}\right) - \frac{\partial A_x}{\partial y} \cos\left(\frac{y}{R_0}\right) \right] \vec{k} \quad (\text{III.8})$$

Ainsi, l'expression (III.7) s'écrit sous la forme :

$$(\vec{B}') = [day'] \vec{j} + [dax'] \vec{k}$$

### 3.7 APPLICATION NUMERIQUE

Afin d'appliquer la transformation vectorielle, nous rappelons les données numériques de la configuration de départs et celle équivalente (Tableau III.1).

Le calcul de l'induction magnétique sera effectué dans le plan (XOY).

Sachant que la transformation géométrique P réalise une rotation dans le plan (XOY), il vient alors que les vecteurs tangents subissent une rotation, alors que le vecteur normale, demeure invariant.

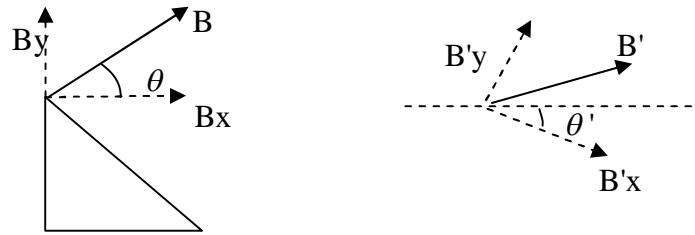


Fig.III.7. *Rotation du vecteur de l'induction*

$\theta'$  est l'angle de rotation des grandeurs vectorielles

Il est possible d'appliquer la formule (8) sur l'une des grandeurs vectorielles à partir de la configuration plane, les valeurs de l'induction magnétique sont calculées dans le centre de chaque triangle, à travers la valeur moyenne nous calculons l'induction dans chaque point du maillage sur la frontière intérieure de la plaque.

Pour appliquer la transformation vectorielle, seule la moitié du domaine ( $x < 0$ ) sera prise en compte car (YOZ) est un plan de symétrie. (fig.III.8).

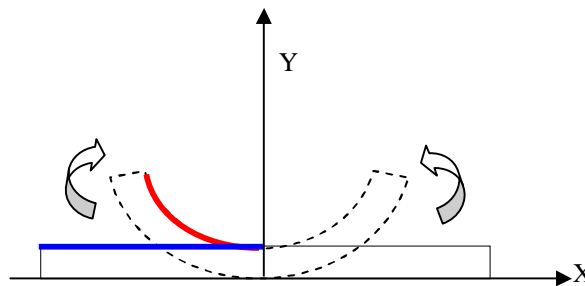


Fig.III.8. *Frontière de calcul*

Nous calculons l'évolution de l'induction magnétique sur le rayon intérieur de la plaque (configuration du départ), ensuite l'application de la transformation géométrique et vectorielle nous permet de calculer et de visualiser l'induction magnétique sur le demi tube.

La vérification de notre solution sera réalisée par le calcul éléments finis sur la configuration de départ.

La figure III.9 montre les modules de ( $B_x$ ) et de ( $B_y$ ) de l'induction magnétique donnés par les deux manières de calcul : en traitant directement la configuration de départ dans un premier temps, et par application des techniques de transformations (géométriques et vectorielles) proposées dans le cadre de ce travail [34].

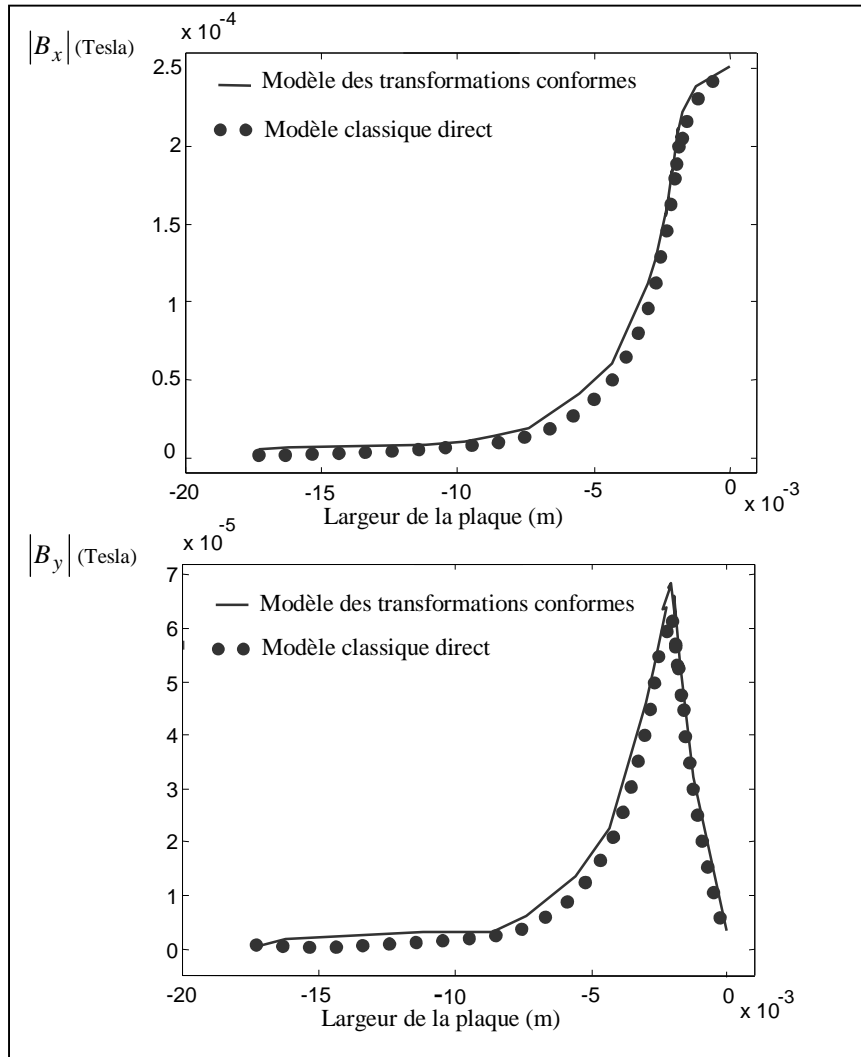


Fig.III.9. *Comparaison des modules de  $B_x$  et de  $B_y$  données par les deux méthodes de calcul: Directe et par transformations conformes*

### 3.8 CONCLUSION

Le calcul des grandeurs vectorielles nécessite l'association de la transformation géométrique et la transformation vectorielle. Ces résultats nous permettent de préciser que l'application de la transformation ébauchée auparavant donne des résultats cohérents pour l'exemple traité.