

ANNEXE I

LES METHODES NUMERIQUES 3D POUR LE CND

A.1. Introduction

Les logiciels de modélisation numérique des dispositifs du génie électrique partent d'une description des ces dispositifs (géométrie, matériaux constitutifs, excitations électriques ...) et utilisent ces informations pour y résoudre les équation de Maxwell (plus au moins simplifiées suivant les fréquences considérées).

Suivant les cas, la matériaux sont décrits de manière plus au moins complexe : quelques constantes suffisent souvent (conductivité, perméabilité, ...) : mais il faut parfois tenir en compte de comportements non linéaire (saturation magnétique), la valeur et la nature de la fréquence de la source, de dépendances diverses (par exemple, influence de la température sur les autres paramètres). Les numériciens savent prendre en compte ces caractéristiques dans les logiciels de résolution des équations de Maxwell.

Dans ce contexte, nous allons présenter la méthode des éléments finis en 3D et la méthode des volumes finis et les outils numériques associés à ces méthodes.

L'environnement de développement choisi est le logiciel Matlab®. Cet outil s'est révélé efficace dans le traitement des calculs scientifiques qui font l'objet de notre étude. En particulier, Matlab® nous a permis de résoudre des problèmes numériques et de calcul matriciel.

A.2. La MEF en 3D

A la suite de paragraphe I.4 de chapitre I, la MEF en 3D conduit à des tailles importantes pour la mémoire des calculateurs et à des temps de calcul longs qui nécessitent souvent des stations de travail pour la résolution des problème à des géométries complexes.

La présence au sein de laboratoire LRTI du mailleur (Préflu 3D)® sous Unix (station de travail HP) nous permet de traiter les géométries 3D en utilisant l'interface (Préflu3D/Matlab) développée par D.Trichet [10] dans le cadre de sa thèse de Doctorat. La difficulté de maillage de certaines structures 3D nous a amenés à utiliser le Mailleur Tranche 3D [10] qui est basé sur la maillage 2D issu de Matlab® PDE ToolBox (2D)[7].

A.2.1. Formulations en 3D

La résolution des équations de Maxwell en 3D se présente sous plusieurs formes en fonction des contraintes liées à la complexité de la géométrie à étudier, à modéliser et surtout à la place mémoire occupée dans le cas des grandeurs vectorielles conduisant à un nombre d'inconnues très élevé.

A notre connaissance le consensus actuel qui se dégage de la part de la communauté scientifique est le suivant :

- L'utilisation des éléments d'arêtes pour les grandeurs vectorielles,
- L'utilisation des éléments nodaux pour les grandeurs scalaire.

De plus l'unicité de la solution pour les deux types d'éléments utilisés reste posé. Pour cela, on fait appel à la technique de la jauge de Coulomb [9], introduite sous forme de terme de pénalité dans le cas des éléments nodaux. Pour les éléments d'arêtes, le système obtenu est trop riche et le recours à des techniques de réduction. Le recours à des algorithmes puissants des résolutions avec un préconditionnement adéquat est recommandé tant en magnétostatique qu'en magnétodynamique.

Nous citons les principales formulations utilisées dans le domaine de la modélisation des dispositifs électrotechnique :

- Formulation en Potentiel Vecteur Magnétique et en Potentiel Scalaire Electrique notée $AV-A$ [24], [28].
- Formulation en Potentiel Vecteur Electrique et en Potentiel Scalaire Magnétique notée $T\Omega-\Omega$ [29]
- Formulation en Champ Magnétique H [28], [30].

D'autres combinaisons de formulations existent, en essayant de trouver le cas le plus favorable et le plus économique en terme de place mémoire et de temps de calcul.

En ce qui concerne la CND, nous ne nous intéressons qu'à la formulation $AV-A$. Nous présentons, seulement les équations en magnétodynamique transitoire et harmonique. La résolution du système global obtenu se fait soit par rapport aux équations (A.1.1 et A.1..2) dans le cas du régime transitoire soit par rapport aux équations (A.1.3 et A.1.4) dans le cas du régime harmonique.

$$\text{rot}(\text{vrot}(A)) + \sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \text{grad}(V) \right) = J_{\text{ex}} \quad (\text{A.1.1})$$

$$\text{div} \left(\sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma \text{grad}(V) \right) = 0 \quad (\text{A.1.2})$$

$$\text{rot}(\text{vrot}(A)) + j\omega\sigma A + \sigma \text{grad}(V) = J_{\text{ex}} \quad (\text{A.1.3})$$

$$\text{div}(j\omega\sigma A + \sigma \text{grad}(V)) = 0 \quad (\text{A.1.4})$$

A.2.2. Etude en Magnétostatique

Pour le cas de la magnétostatique, nous utilisons la formulation classique en potentiel vecteur magnétique A .

Les coefficients de la matrice assemblée sont réels et de ce fait après avoir éliminé les nœuds ou les arêtes correspondants aux conditions aux limites de type Dirichlet, on peut réduire la taille de la matrice globale.

A.2.2.1. Eléments Nodaux

La formulation utilisée est la suivante [24] :

$$\int_{\Omega} (\text{rot}(N_i) \nu \text{rot}(A) + \text{div}(N_i) \nu_p \text{div}(A)) d\Omega = \int_{\Omega} N_i J_{\text{exe}} d\Omega \quad (\text{A.2})$$

Où ν_p représente le terme de pénalité [24] qui a la dimension d'une réluctivité magnétique, ce terme nous permet d'avoir les deux approches avec ou sans terme de pénalité.

Le système algébrique linéaire obtenu après assemblage éléments finis est donné par la relation suivante :

$$[S][A] = [F] \quad (\text{A.3})$$

Le calcul des intégrants de l'équation (A.3) et leur assemblage nous donne le système algébrique suivant :

$$S = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

La matrice $[S]$ est la matrice de raideur.

Le vecteur $[A]$ est le vecteur des inconnues, dans notre cas le potentiel vecteur magnétique A .

Le vecteur $[F]$ représente le terme source.

A.2.2.2. Éléments d'Arêtes

Formulation non compatible (Calcul direct du potentiel vecteur magnétique A)

La formulation utilisée est la suivante [25] :

$$\int_{\Omega} \text{rot}(W_i) \nu \text{rot}(A) d\Omega = \int_{\Omega} W_i J_{exe} d\Omega \quad (\text{A.5})$$

De la même manière le calcul des intégrants de l'équation (A.3) et leur assemblage donne le système algébrique suivant :

$$[S][X] = [F] \quad (\text{A.6})$$

$$[S] = [S_{AA}], \quad [X] = [A], \quad [F] = [F_A]$$

Formulation compatible (Calcul indirecte du potentiel vecteur magnétique)

Le calcul du potentiel vecteur électrique T (cf. équation (A.7)) nous permet d'assurer la compatibilité de condition de conservation du courant.

$$[J_s] = \text{rot}[T_s], \quad \text{div}(J_s) = 0 \quad (\text{A.7})$$

La formulation utilisée est la suivante [9] :

$$\int_{\Omega} \text{rot}(W_i) \text{rot}(T) d\Omega = \int_{\Omega} \text{rot}(W_i) J_{exe} d\Omega \quad (\text{A.8})$$

De la même manière, le calcul des intégrants des l'équation (A.8) et leur assemblage nous donne le même système que celui obtenu en (A.5), la seule différence sera au niveau du terme source.

Une géométrie 3D est donnée par la figure suivante, ce dispositif présente un cas de contrôle non destructif, l'inducteur est une bobine ponctuelle parcourue par un courant continu, cette bobine se déplace sur une plaque conductrice.

Le maillage de ce dispositif est illustré par la figure A.1.

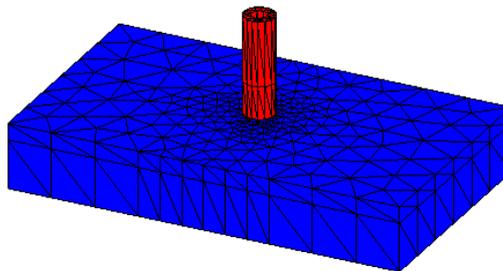


Fig.A.1. *Maillage 3D (Mailleur Tranche) utilisé*

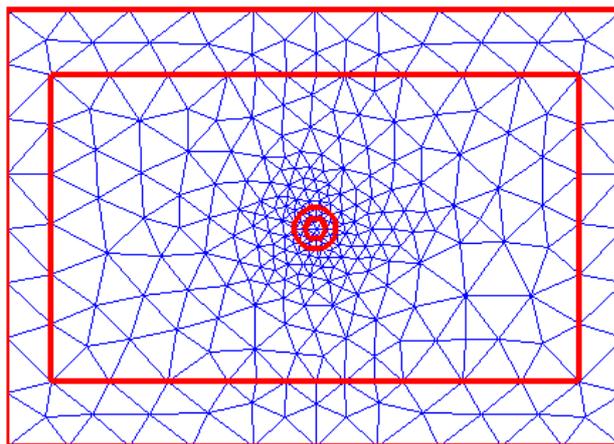


Fig.A.2. *Vue de dessus du maillage 3D*

En conclusion de cette partie, l'intérêt principal est l'avantage des éléments d'arêtes par rapport aux éléments nodaux pour le calcul du champ magnétique ou de l'induction

magnétique lorsqu'il a un fort gradient de perméabilité. Par contre pour ce qui est du temps de calcul, la méthode des éléments nodaux reste très performante.

Une indication particulière pour la méthode des éléments nodaux avec le terme de pénalité, en effet le choix de ce terme a une grande influence sur les résultats (le temps de calcul, et le nombre d'itérations seront réduit).

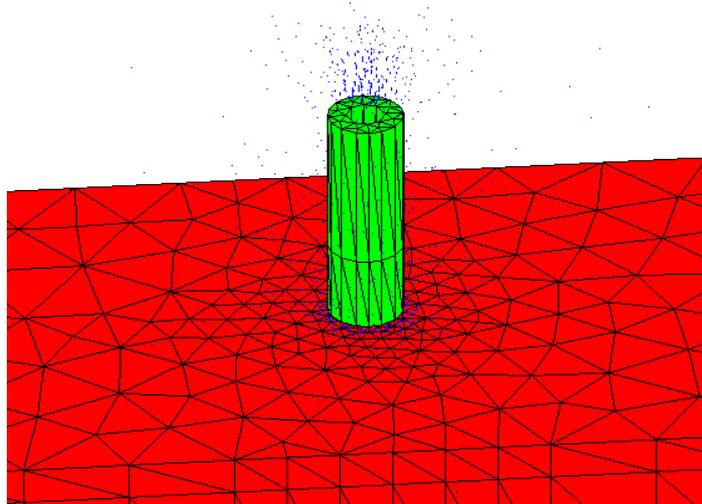


Fig.A.3. *Visualisation de l'induction magnétique au voisinage du capteur*

A.2.3. Etude en Magnétodynamique [9], [26]

Avec la condition de jauge de Coulomb (dans les dispositions à induction classique on impose le terme $\text{div} \mathbf{A} = 0$), avec l'introduction du terme de pénalité, la formulation intégrale sur le volume Ω , le système des équations (A.3), (A.4) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \text{rot}(N_i) \nu \text{rot}(A) + \text{div}(N_i) \nu_p \text{div}(A) d\Omega \\ + \int_{\Omega} j\omega\sigma N_i A d\Omega + \int_{\Omega} j\omega\sigma N_i \text{grad}(V) d\Omega = \int_{\Omega} N_i J_{exe} d\Omega \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(a)} \\ \text{(A.9)} \end{array}$$

$$\int_{\Omega} j\omega\sigma \alpha_i \text{grad}(A) d\Omega + \int_{\Omega} j\omega\sigma \text{grad}(\alpha_i) \text{grad}(V) d\Omega = 0 \quad \text{(b)}$$

La formulation ainsi utilisée est au sens faible.

N_i : fonction de projection vectorielle

α_i : fonction de projection scalaire

De la même manière, le calcul des intégrants de l'équation (A.9) et leur assemblage donne le système algébrique global suivant :

$$[S][X] = [F]$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{xx} + M & S_{xy} & S_{xz} & G_{xv} \\ S_{yx} & S_{yy} + M & S_{yz} & G_{yv} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} + M & G_{zv} \\ G_{vx} & G_{vy} & G_{vz} & G_{vv} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ V \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ F_v \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$[S]$ est la matrice de raideur issue de l'assemblage du 1^{er} terme de l'équation (A.9),

$[M]$ est appelée matrice de masse, issue de l'assemblage du 2^{ème} terme de l'équation (A.9) (a),

$[G_{iv}]$ est appelée matrice de couplage, issue de l'assemblage du 3^{ème} terme de l'équation (A.9) (a), $i = x$ ou y ou z ,

$[F]$ est appelée vecteur source, issu de l'assemblage du 4^{ème} terme de l'équation (A.9) (a),

$[X]$ est le vecteur des inconnues, dans notre cas le potentiel vecteur A et le potentiel scalaire V ,

$[G_{vi}]$ est appelée matrice de couplage, issue de l'assemblage du 1^{er} terme de l'équation (A.9) (b) $i = x$ ou y ou z ,

$[G_{vv}]$ est issue de l'assemblage du 2^{ème} terme de l'équation (IV.9) (b).

A.3. La méthode des volumes finis [35]

La MVF est une méthode numérique à pour but de discrétiser le système d'équations différentielles. Elle est utilisée, en particulier en mécanique des fluides [27]. Depuis la méthode des volume finis a connue un essor considérable non seulement pour la modélisation en mécanique des fluides, mais aussi pour la modélisation d'autre branche de l'ingénierie : Le transfère de chaleur, l'électromagnétisme...etc.

La MVF peut être vue comme une version spéciale de la MEF dont les fonctions de projections N_i et α_i sont prise égale à l'unité. Elle consiste à subdiviser le domaine d'étude en volumes élémentaires, de formes simples et adjacentes. Chaque volume est délimité par : deux interfaces dans le cas monodimensionnel (e,w) (fig.A.4) , quatre interfaces dans le cas bidimensionnel (e,w,s,n) et six interfaces dans le cas tridimensionnel (e,w,s,n,t,b). Chaque volume entoure un nœud principal **P** et limité par des nœuds voisins (E,W) dans le cas monodimensionnel, (E,W,S,N) dans le cas bidimensionnel, et (E,W,S,N,T,B) dans le cas tridimensionnel (fig.A.4).

Sur la figure suivante : Δx est le pas de discrétisation suivant la direction X,

Δy est le pas de discrétisation suivant la direction Y,

Δz est le pas de discrétisation suivant la direction X.

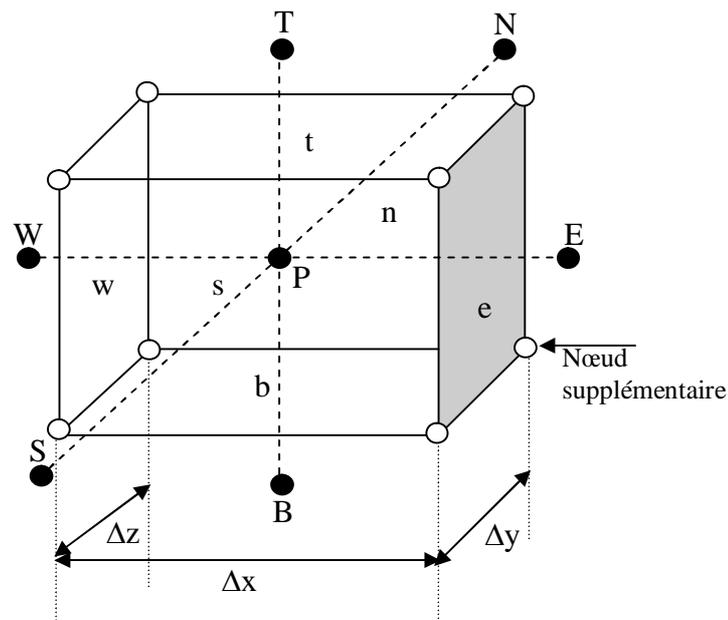


Fig.A.4 Description d'un volume élémentaire de base

E : nœud Est

W : nœud West

N : nœud Nord

S : nœud Sud

T : nœud Top (Haut)

B : nœud Bottom (bas)

e : interface est

w : interface west

n : interface nord

s : interface sud

t : interface top

b : interface bottom

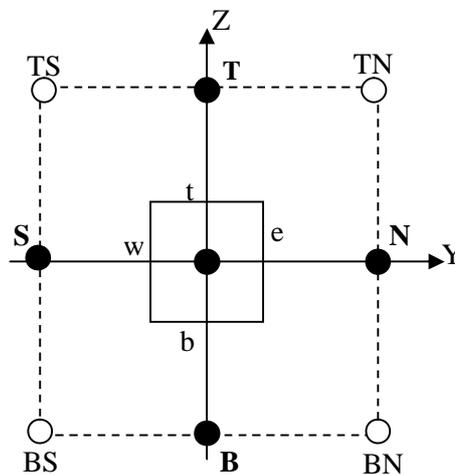
La méthode des volumes finis intègre, sur chaque volume élémentaire les équations des problèmes à résoudre. Elle fournit ainsi d'une manière naturelle des formulations discrètes.

A.3.1. Formulation de l'équation électromagnétique pour la MVF

Rappelons la formulation en 3D des équations électromagnétique du système (A.9) qui est valable pour la MVF [35].

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \text{rot}(N_i) \nu \text{rot}(A) + \text{div}(N_i) \nu_p \text{div}(A) d\Omega \\ + \int_{\Omega} j\omega\sigma N_i A d\Omega + \int_{\Omega} j\omega\sigma N_i \text{grad}(V) d\Omega = \int_{\Omega} N_i J_{exe} d\Omega \\ \int_{\Omega} j\omega\sigma \alpha_i \text{grad}(A) d\Omega + \int_{\Omega} j\omega\sigma \text{grad}(\alpha_i) \text{grad}(V) d\Omega = 0 \end{array} \right.$$

Pour prendre en compte l'effet de l'opérateur rotationnel dans ce système, il est nécessaire d'ajouter des nœuds supplémentaires en plus de ceux de bases : TW, TE, TS, TN, BW, BE, BS, BN, NE, NW, SE, et SW.



FigA.5 *Représentation des nœuds supplémentaires*
Vue dans le plan (YZ)

La projection sur des fonctions de projection N_i et α_i , l'intégrale dans chaque volume fini ($d\Omega = dx.dy.dz$) correspondant au nœud principal \mathbf{P} , puis on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{wsb}^{ent} \int_{wsb}^{ent} \int_{wsb}^{ent} [rot(N_i) \nu rot(A) + div(N_i) \nu_p div(A) + j\omega\sigma N_i A + j\omega\sigma N_i grad(V)] d\Omega \\ = \int_{wsb}^{ent} \int_{wsb}^{ent} \int_{wsb}^{ent} [N_i J_{exe}] d\Omega \\ \int_{wsb}^{ent} \int_{wsb}^{ent} \int_{wsb}^{ent} [j\omega\sigma \alpha_i grad(A) + j\omega\sigma grad(\alpha_i) grad(V)] d\Omega \end{array} \right. \quad (A.11)$$

Pour calculer l'intégrale du système (A.11), on procède les hypothèses suivantes :

- On projette chaque équation du système sur les trois axes et on discrétise l'équation projetée sur un volume élémentaire,
- On considère que la variation du potentiel scalaire électrique réduit et le potentiel vecteur magnétique comme linéaire entre deux nœuds consécutifs,
- On discrétise le système partie par partie sur les trois axes.

A la fin de notre développement, on aboutis à quatre équations [32] qui expriment les trois composantes du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} et le potentiel scalaire V prise au nœud principal \mathbf{P} en fonction des autres composantes du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} et du potentiel scalaire électrique V aux nœuds voisins.

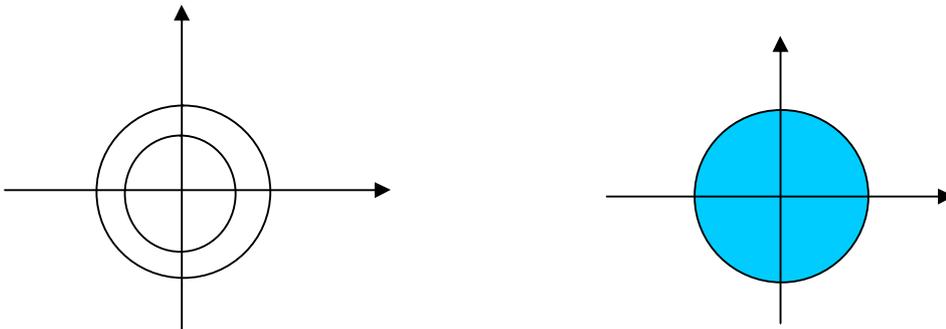
Ces quatre équations sont définies pour les nœuds situés à l'intérieur du domaine d'étude, c'est à dire pour les volumes intérieurs. Afin de compléter la formulation, il faudra y également réécrire ces équations pour les différentes limites du domaine d'étude à partir des conditions aux limites adéquates.

ANNEXE II

FONCTION HOLOMORPHES

LES PROPRIETES CONSERVEES PAR LA TRANSFORMATION CONFORME

U est un ouvert connexe du plan (physiquement en un seul morceau)



Exemple 1 : U **multiplément** connexe (avec trous) Exemple 2 : U **simplement** connexe (sans trous)

f est une application de U dans U : $z = x + iy \rightarrow w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$.

Si f est dérivable sur U elle est indéfiniment dérivable. On dit que f est analytique ou holomorphe.

Exemples :

a) $f(z) = z^2$; b) $f(z) = e^z = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$

c) $f(z) = \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ d) $f(z) = \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$

A.1. U et v vérifient les conditions de CAUCHY-RIEMANN :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

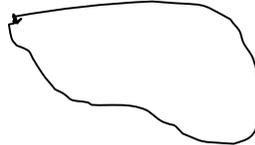
A.2. Les courbes $u(x, y) = \alpha$ et $v(x, y) = \beta$ sont orthogonales.

A.3. U et v sont harmonique $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

A.4. Théorème de CAUCHY-GOURSAT :

A.4.1. $\oint_L f(z)dz = 0$ où L est une courbe simple fermée incuse dans U .

$$Z(t_1) = Z(t_2)$$



Si $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [t_1; t_2]$ est une représentation paramétrique continue de L la courbe est fermée lorsque $z(t_1) = z(t_2)$. Elle est simple si elle n'est pas d'autre point double. L'intérieur de L est un ouvert simplement connexe.

Si $a \in U$ et $z \in U$ alors $g(z) = \int_a^z f(z)dz$ a pour dérivée $f(z)$.

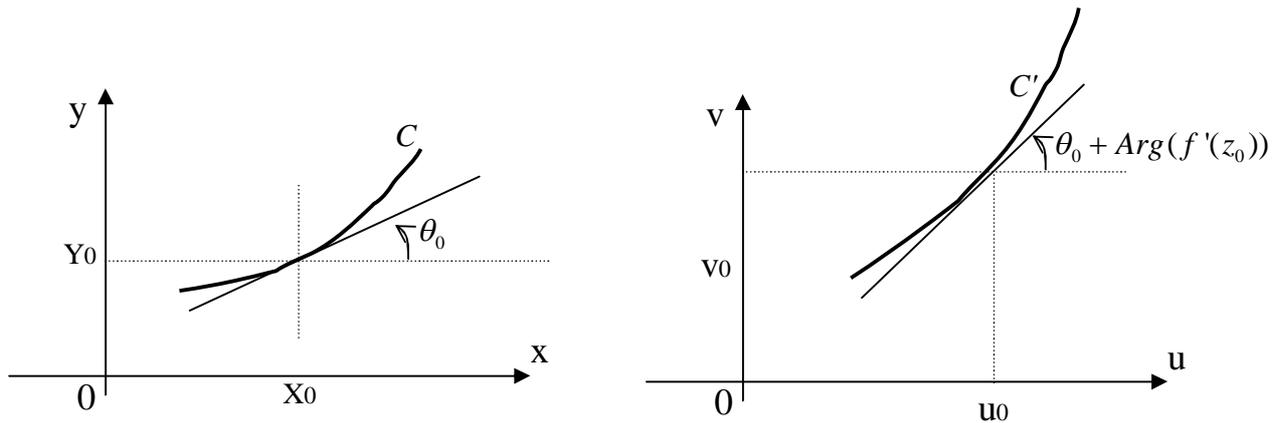
A.4.2. La formule de CAUCHY : si $a \in U$ et $a \notin L$ alors : $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \left(\frac{f(z)}{z-a} \right) dz$

A.5. Le jacobien de la transformation est $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = |f'(z)|^2$

A.5.1. Les points pour lesquels $f'(z) = 0$ sont appelés points critiques

A.5.2. Si $f'(z) \neq 0$ on dit alors que f est une fonction conforme

La courbe C passant par $z_0 = x_0 + iy_0$ se transforme en une courbe C' passant par $w_0 = f(z_0) = u_0 + iv_0$, la tangente subit une rotation égale à $\text{Arg}(f'(z_0))$

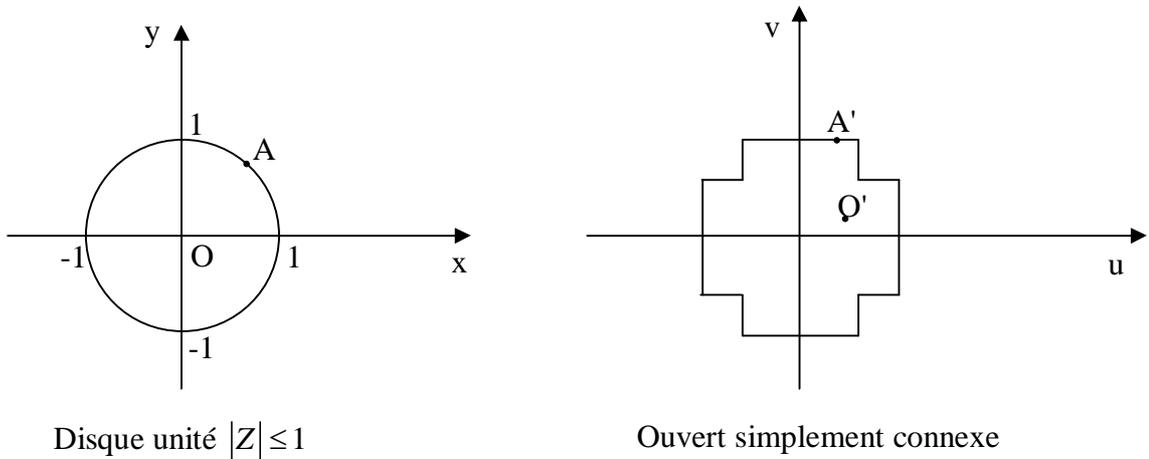


Plan initial des $z = x + iy$

Plan des $W = u + iv$

L'angle initial entre deux courbes est ainsi conservé dans la transformation.

A.6. Un théorème de RIEMANN précise que si U est un ouvert simplement connexe de frontière C' alors il existe une bijection holomorphe f transformant le disque unité fermé en \overline{U}



Disque unité $|Z| \leq 1$

Ouvert simplement connexe

f transforme biunivoquement la frontière C $|Z|=1$ en la frontière C' de U

La fonction considérée f dépend de trois constantes arbitraires réelles : on peut ainsi imposer O de se transformer en un point O' de U et à un point A de C de se transformer en un point A' de C' .