

## II.4 Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est un observateur linéaire qui peut être, dans le cas d'un système non linéaire appliqué au modèle linéarisé. Pour l'estimation d'état, de la vitesse ou des paramètres, de la machine asynchrone, le filtre de Kalman est souvent utilisé [KAR 03, ZAI 92, NAI 00]. Ce filtre permet de résoudre, dans le domaine temporel, les problèmes de l'estimation statistique pour les systèmes linéaires. Il fait appel à la représentation d'état des systèmes linéaires stochastiques. Le filtre de Kalman fournit alors une estimation optimale au sens de la variance minimale de l'erreur d'estimation. Le modèle et les hypothèses stochastiques sont présentés au paragraphe II.6.1. La formulation du filtre standard est exposée dans le paragraphe II.6.2. On trouve une présentation plus détaillée du filtre de Kalman dans [BOR 90].

### II.4.1 Modèle stochastique et hypothèses

On considère un système discret représenté dans l'espace d'état par les équations récursives suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \end{cases} \quad (2.39)$$

Ce modèle est obtenu d'après le modèle d'état discret déterministe vu dans le premier chapitre I (1.39) avec la présence des bruits de mesure et d'état. Les hypothèses suivantes doivent être faites :

- Les bruits d'état  $\mathbf{v}_k$  et de mesure  $\mathbf{w}_k$  sont blancs, décorrelés, de moyenne nulle et de matrices de covariance  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  connues.
- L'état initial  $\mathbf{x}_0$  est une variable aléatoire d'espérance (ou de moyenne), de matrice de covariance  $\hat{\mathbf{P}}_{0/0}$  connue, indépendante des bruits d'état et de mesure.

Ces hypothèses peuvent être résumées en écrivant :

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{w}_k \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{x}}_{0/0} \end{bmatrix}, E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{w}_i \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{w}_k \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix}^T \right\} = \delta_{i-k} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{P}}_{0/0} \end{bmatrix} \quad \text{où } i, k \in \mathbb{N} \quad (2.40)$$

où  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{P}_0$  sont des matrices symétriques définies positives et  $\delta_{i-k}$  est défini comme suite :

$$\delta_0=1 \text{ et } \delta_n=1 \text{ pour } n \neq 0 \quad (2.41)$$

On note  $\hat{x}_{k/n}$  l'estimation à l'instant  $kT_e$  minimisant la variance de l'erreur d'estimation  $E((x_k - \hat{x}_{k/n})(x_k - \hat{x}_{k/n})^T)$  connaissant les mesures  $y_1, \dots, y_n$ .

Si  $k < n$   $\hat{x}_{k/n}$  est obtenu par un lissage.

Si  $k = n$   $\hat{x}_{k/n}$  est obtenu par un filtrage.

Si  $k > n$   $\hat{x}_{k/n}$  est obtenu par une prédiction.

### II.4.2 Filtre de Kalman standard

La prédiction de l'état  $\hat{x}_{k+1/k}$  et de la matrice de covariance, obtenue à partir de l'équation d'état du modèle (2.22) s'écrivent [ EMM 98]:

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k \\ \hat{P}_{k+1/k} = A_k \hat{P}_{k/k} A_k^T + Q \end{cases} \quad (2.42)$$

L'état de correction réajuste la prédiction à partir des mesures  $y_{k+1}$  pondérées par le gain de Kalman  $K_{k+1}$  :

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}(y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1/k}) \quad (2.43)$$

Le filtre de Kalman standard discret peut se mettre sous la forme du schéma suivant (Figure 2.13) :

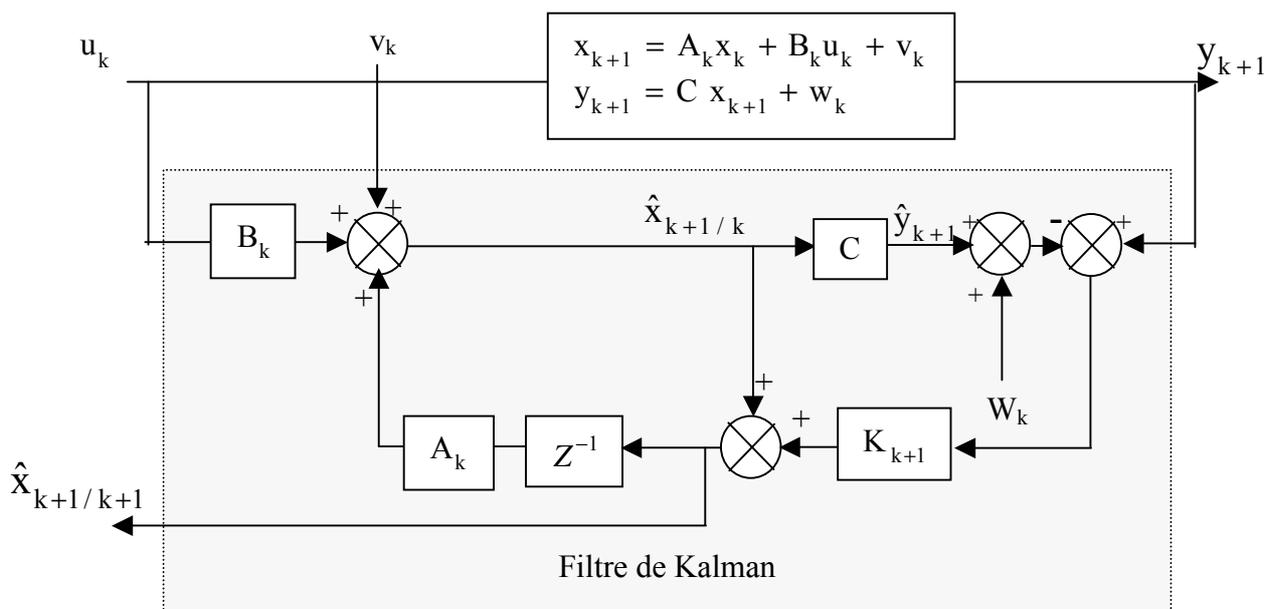


Figure 2.15 - Filtre de Kalman discret standard

Le gain de Kalman  $K_{k+1}$  est déterminé à partir de la matrice de covariance  $\hat{P}_{k+1/k}$  et de la matrice de covariance de bruits de mesure  $R$  :

$$K_{k+1} = \hat{P}_{k+1/k} C^T (C \hat{P}_{k+1/k} C^T + R)^{-1} \quad (2.44)$$

et

$$\hat{P}_{k+1/k+1} = (I - K_{k+1} C) \hat{P}_{k+1/k} \quad (2.45)$$

### II.4.2.1 Calcul de flux rotorique de la machine asynchrone en utilisant le filtre de Kalman

Le calcul de flux rotorique de la machine asynchrone par filtrage de Kalman utilise le modèle du deuxième ordre présenté précédemment. Ceci permet une implantation moins compliquée, d'ailleurs et par un réglage des coefficients des matrices de covariance  $Q$ ,  $R$  du filtre, il peut y avoir une bonne convergence.

#### II.4.2.1.1 Calcul de flux du modèle de 2<sup>ème</sup> ordre

En introduisant les bruits d'état  $v_{k2}$  et de sortie  $w_{k2}$  dans le modèle déterministe (1.40), on obtient le modèle stochastique de la machine asynchrone suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_{k2}(\omega_k) x_k + B_{k2} u_k + v_{k2} \\ z_{k+1} = C_{k+1}(\omega_k) x_k + w_{k2} \end{cases} \quad (2.46)$$

Comme dans le cas de l'observateur de Luenberger prenons ce modèle discret qui nous permet après deux étapes de calculé l'état de flux rotorique estimé :

- Etape de prédiction :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1/k} = A_{k2} \hat{x}_{k/k} + B_{k2} u_k \\ \hat{P}_{k+1/k} = A_{k2} \hat{P}_{k/k} A_{k2}^T + Q \end{cases} \quad (2.47)$$

- Etape de correction :

$$\begin{cases} K_{k+1} = \hat{P}_{k+1/k} C_{k+1}^T (C_{k+1} \hat{P}_{k+1/k} C_{k+1}^T + R)^{-1} \\ \hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} (z_{k+1} - C_{k+1} \hat{x}_{k+1/k}) \\ \hat{P}_{k+1/k+1} = \hat{P}_{k+1/k} - K_{k+1} C_{k+1} \hat{P}_{k+1/k} \end{cases} \quad (2.48)$$

Avec  $A_{k2}$ ,  $B_{k2}$  sont exprimés de la même manière que  $A_k$  et  $B_k$  au première chapitre (1.38).

### II.4.3 Filtre de Kalman étendu

Le filtre de Kalman standard décrit précédemment, permet l'estimation de l'état d'un système linéaire. Si on veut estimer des paramètres, une solution consiste à étendre le vecteur d'état estimé aux paramètres recherchés. Le modèle devient alors non linéaire. On peut, sous certaines hypothèses, appliquer le filtre de Kalman standard à un modèle linéarisé du système. On définit le vecteur des paramètres à estimer ainsi :

$$\theta_k = [\theta_{1k} \ \theta_{2k} \ \dots \ \theta_{mk}]^T \text{ où } m=4 \text{ pour la machine asynchrone} \quad (2.49)$$

On propose selon [GUY 96] un modèle stochastique de 2<sup>ème</sup> ordre suivant :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{k2}(\theta_k) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \theta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{k2}(\theta_k) \\ 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} v_{xk2} \\ \theta_{\theta k2} \end{bmatrix} \\ y_k = g_k(x_k, \theta_k) + w_{k2} \end{cases} \quad (2.50)$$

$$g_k(x_k, \theta_k) = [C_{k+1}(\theta_k) \ 0] \begin{bmatrix} x_k \\ \theta_k \end{bmatrix} + D_k(\theta_k)u_k + E(\theta_k)\dot{u}_k \quad (2.51)$$

$Q_x = E\{v_{xk} v_{xk}^T\}$  représente la matrice de covariance des états. On considère les variations de paramètres comme aléatoires et on les modélise par des bruits blancs centrés  $v_{\theta k}$ . La dynamique des paramètres est caractérisée par la matrice de covariance  $Q_\theta = E\{v_{\theta k} v_{\theta k}^T\}$ . Plus une variance (terme diagonal de  $Q_\theta$ ) est grande, plus les variations du paramètre correspondant pourront être importantes, on définit des matrices de covariance diagonales [LUI 93, EMM 98] :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_x & 0 \\ 0 & Q_\theta \end{bmatrix} \text{ avec } Q_\theta = \begin{bmatrix} q_{\theta 1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{\theta 21} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & q_{\theta m} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

La prédiction s'écrit :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1/k} = A_{k2} \hat{x}_{k/k} + B_{k2} u_k \\ \hat{\theta}_{k+1/k} = \hat{\theta}_{k/k} \\ \hat{Y}_{k+1/k} = H_{k+1} \hat{x}_{k+1/k} \\ \hat{P}_{k+1/k} = F_k \hat{P}_{k/k} F_k^T + Q \end{cases} \quad (2.53)$$

où

$$F_k = \begin{bmatrix} A_k & \frac{\partial}{\partial \theta} (A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k) \\ 0 & I \end{bmatrix} \bigg|_{\hat{\theta}_{k/k}} \quad (2.54)$$

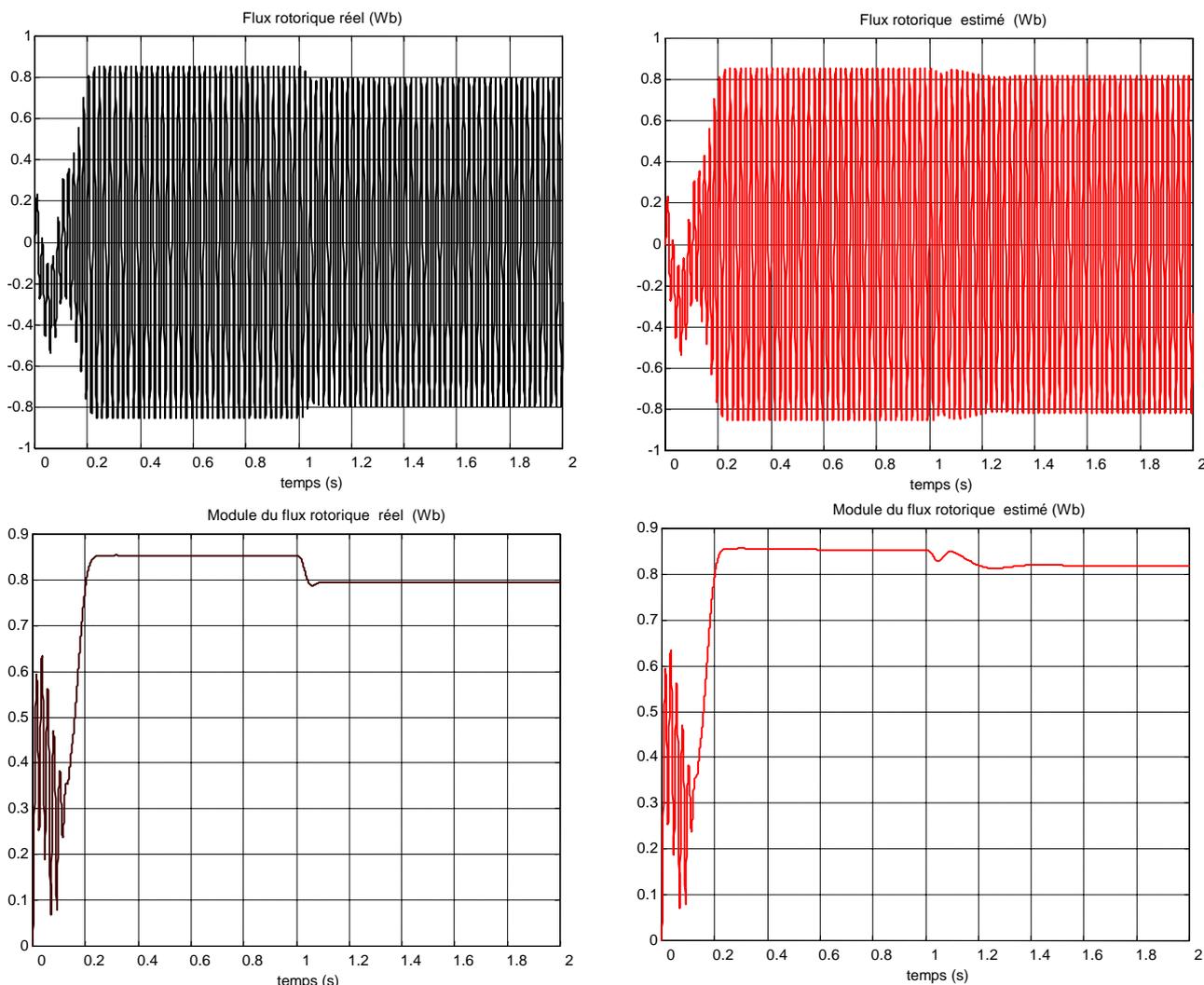
En posant :

$$H_{k+1} = \left[ \frac{\partial g(x_k, \theta_k)}{\partial x} \right]_{x=\hat{x}} = [C_{k+1} \ J_Y] \quad (2.55)$$

$$J_Y = \left[ \frac{\partial Y_{k+1,i}}{\partial \theta_j} \right]_{x=\hat{x}} \quad i=1,2 \text{ et } j=1,..m \quad (2.56)$$

### II.4.4 Résultats de simulation

Dans un premier temps, nous avons simulé un démarrage à vide et à l'instant  $t = 1s$ , nous chargeons le moteur par un couple résistant de 25 Nm. Le pas d'échantillonnage utilisé est  $T_e = 400 \mu s$ .



**Figure 2.16** -Flux rotorique réel et estimé

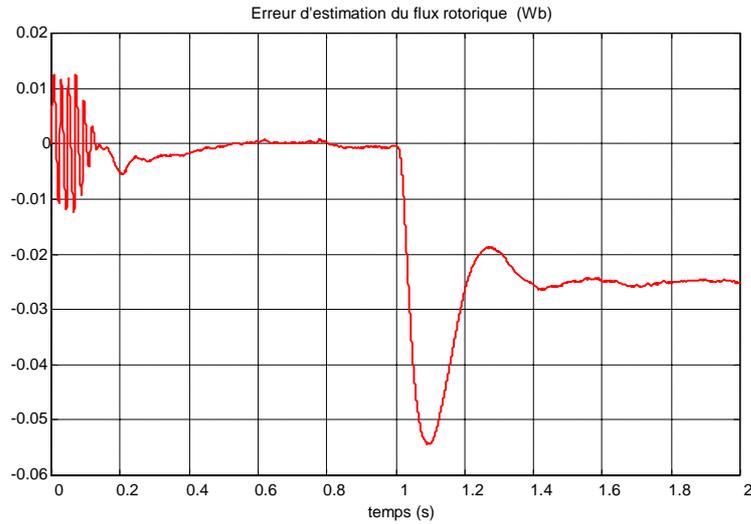


Figure 2.17 – Erreur d'estimation de flux rotorique

II.3.2.1 Résultats de simulations avec variation paramétrique

Ces résultats sont obtenus avec une variation des paramètres et une charge de 25 Nm, à l'instant  $t=1s$ .

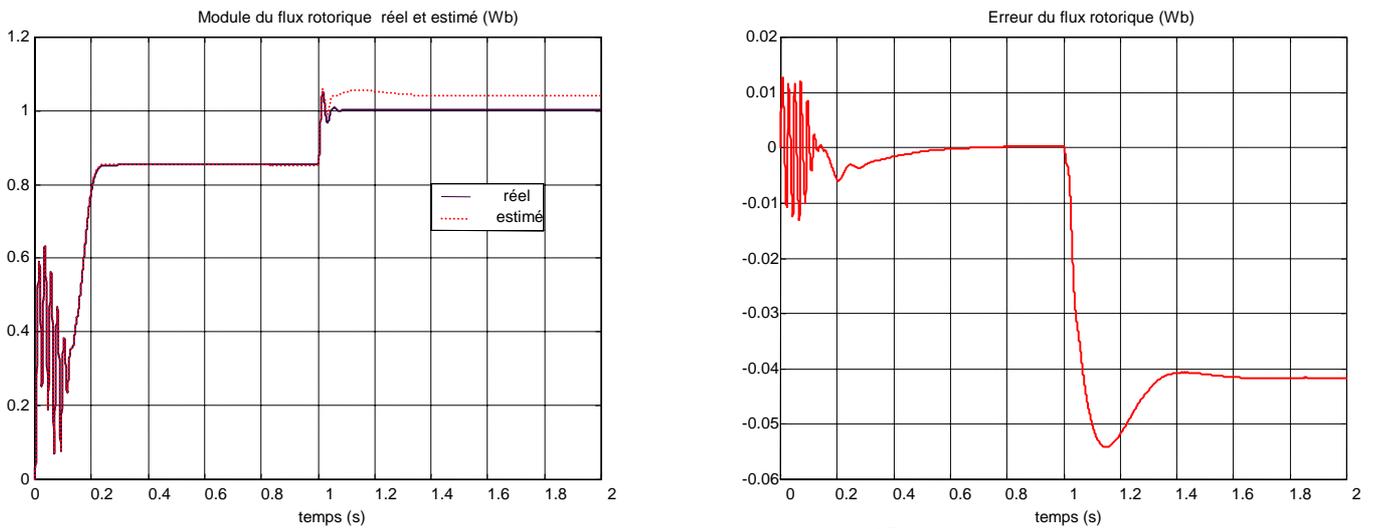


Figure 2.18 -Flux rotorique réel, estimé (Wb) avec  $(\frac{\Delta L_s}{L_s} = -10 \%)$

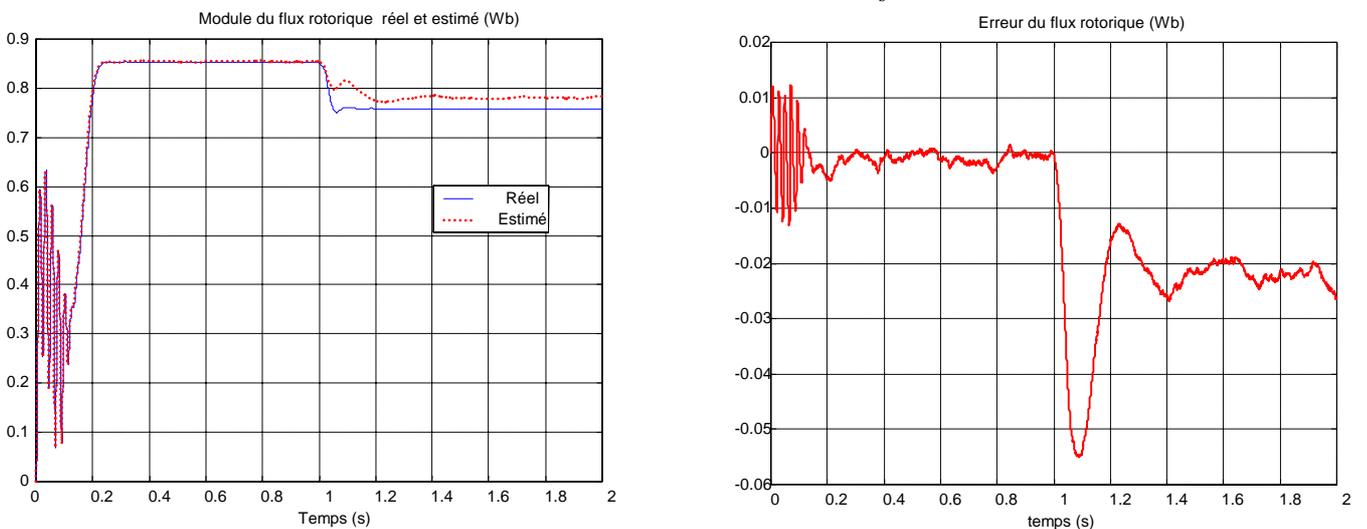
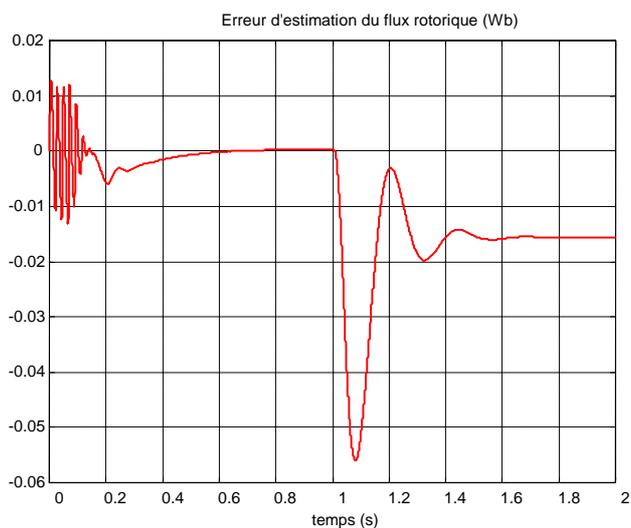
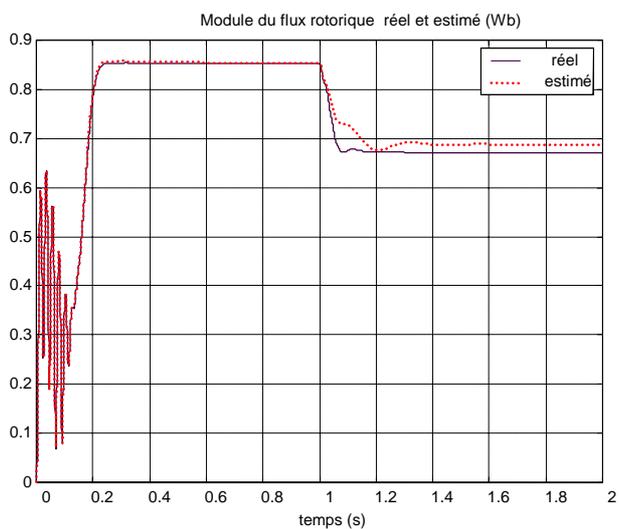
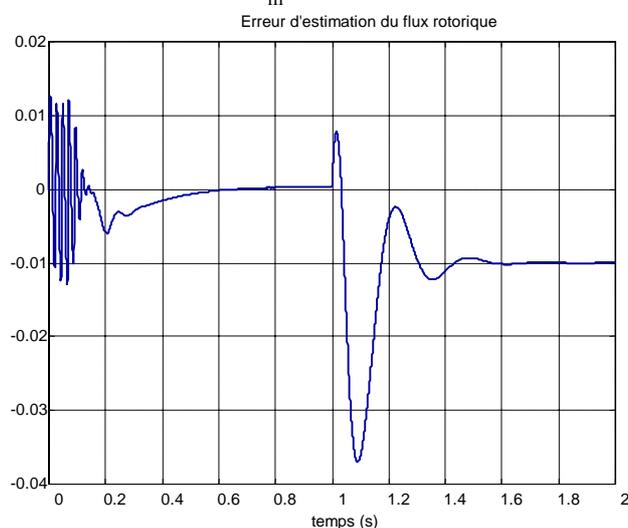
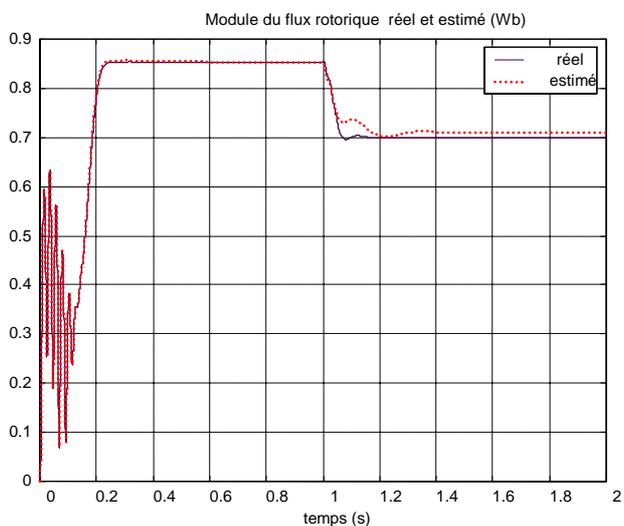


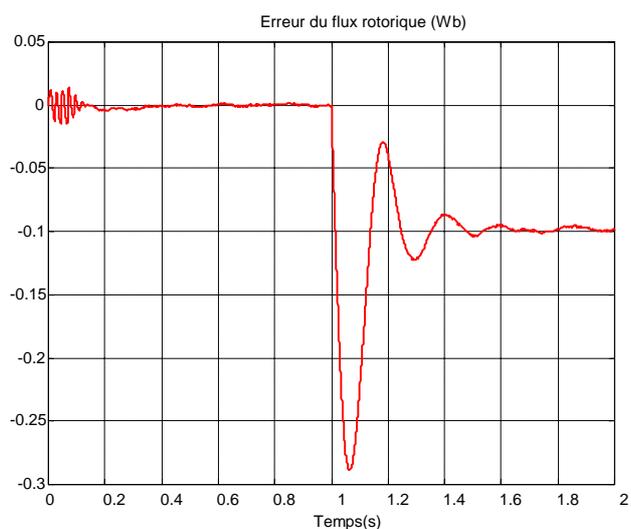
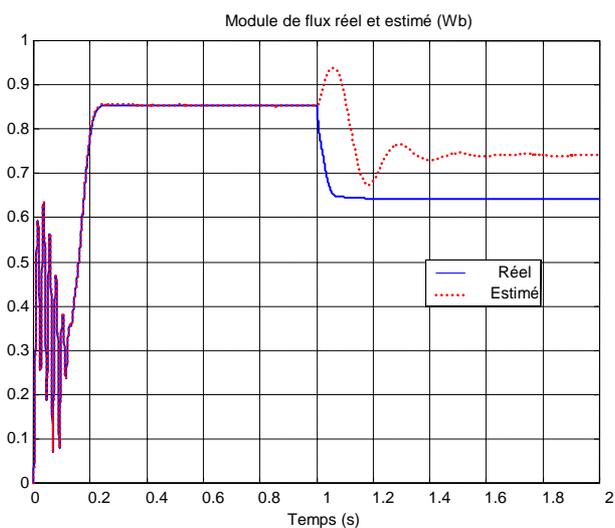
Figure 2.19 -Flux rotorique réel, estimé et l'erreur (Wb) avec  $(\frac{\Delta R_s}{R_s} = +100 \%)$



**Figure 2.20** -Flux rotorique réel, estimé (Wb) avec  $(\frac{\Delta L_m}{L_m} = -5 \%)$

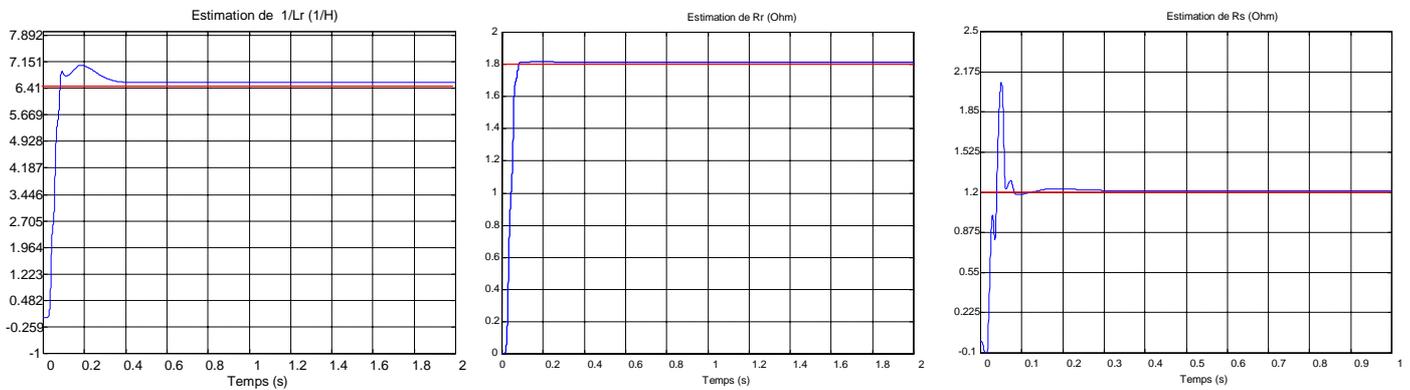


**Figure 2.21** -Flux rotorique réel, estimé (Wb) avec  $(\frac{\Delta L_r}{L_r} = +10 \%)$



**Figure 2.22** -Flux rotorique réel, estimé (Wb) avec  $(\frac{\Delta R_r}{R_r} = +100 \%)$

Les résultats obtenus en mode fonctionnement à vide et en charge montre qu'ils sont identiques de celle de Luenberger sauf que dans ce cas le système est perturbé avec un bruit d'état et du mesure, ce que nous avons pas vu dans le cas déterministe, le filtre de Kalman entendu nous permet aussi d'estimer et identifier les paramètres inconnus (figure 2.23 ).



**Figure 2.23** – Estimation des paramètres par Filtre de Kalman

L'estimation des paramètres  $R_r$ ,  $R_s$ ,  $L_r$  dans la figure 2.23 montre que le filtre atteint ces valeurs après un temps bref ce qui prouve que ce filtre est capable de poursuivre les variations de ces paramètres.

## II.5 Etude comparative entre l'observateur de Luenberger et le filtre de Kalman

L'observateur de Luenberger et le filtre de Kalman sont comparés en se basant sur le modèle d'ordre 2, les estimations à partir des données de simulations montrent les avantages et les inconvénients de chaque observateur.

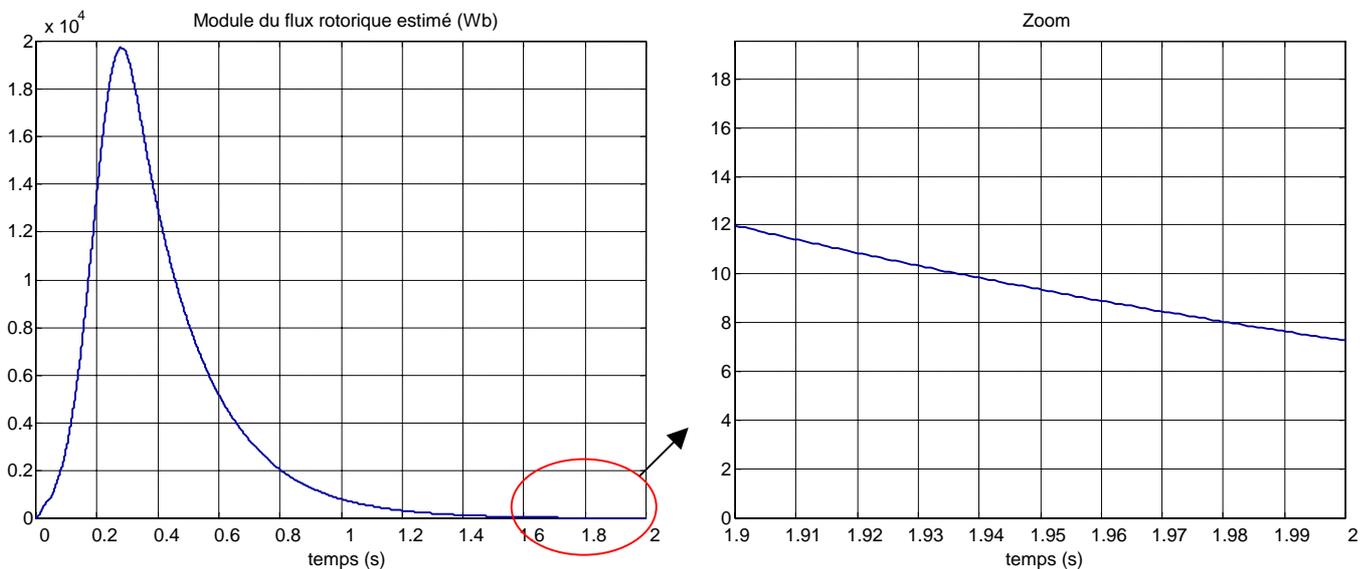
### II.5.1 Comparaison des deux observateurs dans le cas non observable

Le modèle (1.35) est non linéaire, car il fait intervenir des produits entre les variables d'état. Pour étudier l'observabilité de ce modèle, nous utiliserons le critère d'observabilité des modèles non-linéaires [SAH 03, AND 01], qui est basé sur le vecteur des dérivées de la sortie. A l'inverse des modèles linéaires, l'ordre maximal des dérivées de la sortie n'est pas limité. Néanmoins, pour notre cas, il suffit de considérer les composantes de  $z$  et leur dérivées premières, car on constate directement, une perte d'observabilité du modèle, lorsque les deux composantes du flux rotor sont constantes, car dans ce cas les deux composantes de la dérivée de la sortie sont nulles et il en sera de même pour les dérivées d'ordre supérieur :

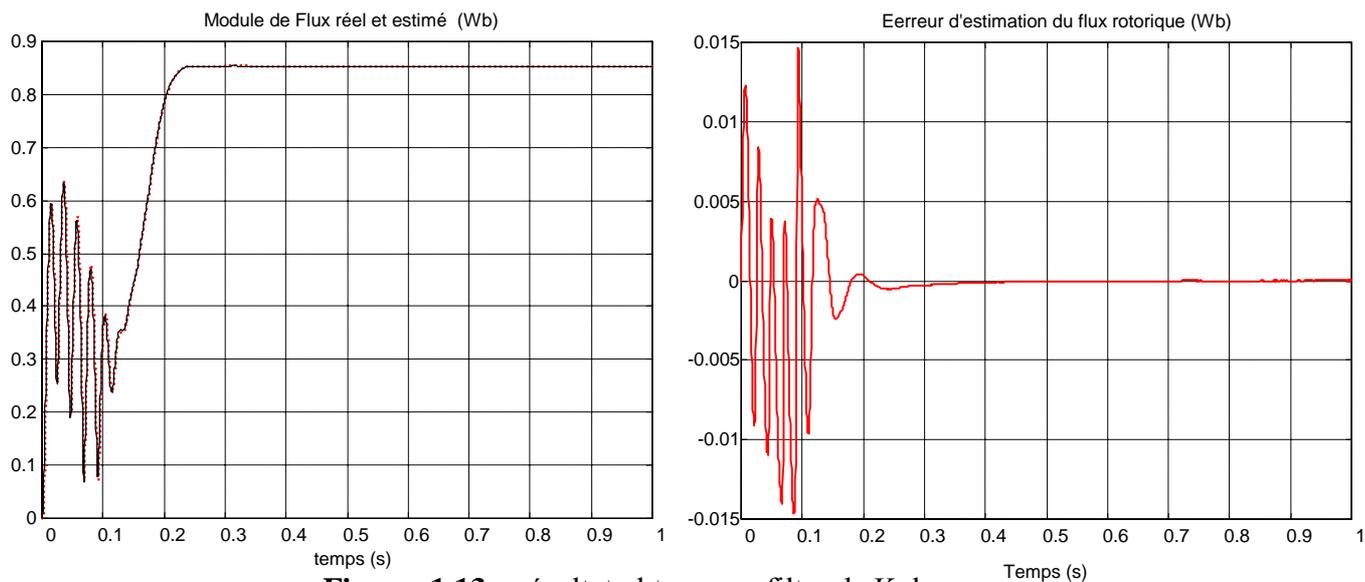
$$\begin{cases} z_{\alpha} = \frac{c\delta}{a} \varphi_{r\alpha} - \frac{c\omega}{a} \varphi_{r\beta} \\ z_{\beta} = \frac{c\omega}{a} \varphi_{r\alpha} + \frac{c\delta}{a} \varphi_{r\beta} \\ \dot{z}_{\alpha} = \frac{c\delta}{a} \dot{\varphi}_{r\alpha} - \frac{c\omega}{a} \dot{\varphi}_{r\beta} \\ \dot{z}_{\beta} = \frac{c\omega}{a} \dot{\varphi}_{r\alpha} + \frac{c\delta}{a} \dot{\varphi}_{r\beta} \end{cases} \quad (2.57)$$

On constate la non-observabilité du modèle, lorsque les composantes du flux rotor sont constantes, puisque les relations précédentes ont été obtenues dans le repère fixe, si le flux rotor est constant, sa pulsation instantanée est nulle. Autrement dit, en régime permanent, le modèle n'est pas observable si la fréquence statorique est nulle  $\omega_s = 0$  rad/s.

Les résultats de simulation dans un repère lié au champ tournant ( figure 1.13 et 1.14) montre la différence de comportement de filtre de Kalman et l'observateur de Luenberger vis-à-vis de l'observabilité du modèle .



**Figure 1.13** – résultat obtenu par l'observateur de luenberger



Les résultats obtenus dans cette comparaison montrent que l'observateur de Luenberger diverge lorsque le modèle n'est plus observable, par contre le filtre de Kalman est moins perturbé par la perte d'observabilité.

## II.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté des estimateurs de flux rotorique en boucle ouverte et en boucle fermée « observateur ». Nous avons choisis deux observateurs connus, le premier est l'observateur déterministe de Luenberger qui permet de reconstituer l'état d'un système observable et le deuxième c'est le Filtre de Kalman qui donne une estimation d'état du système perturbé dans le sens d'un critère statistique. Nous avons appliqué ces deux observateurs à un modèle réduit de 2<sup>ème</sup> ordre de la machine asynchrone, et validé ce modèle par simulation lors d'un démarrage à vide et d'un chargement par un couple résistant et variation paramétrique. Et finalement nous avons étudié le comportement de ces deux types d'observateur, vis-à-vis d'une perte d'observabilité, à fréquence stator nulle lors de l'estimation simultanée du flux rotorique.