# MODELE DYNAMIQUE POUR UNE STRUCTURE AVEC ISOLATEUR PARASISMIQUE

## 3.1. Généralité :

L'une des étapes essentielles dans l'étude dynamique des structures est la formulation des équations de mouvement pour déterminer la réponse due au tremblement de terre.

Dans le présent chapitre, nous allons décrire les équations de mouvement régissant le comportement du système avec l'équation de mouvement de l'isolateur en tant que système linéaire et non linéaire.

## 3.2. Equations de mouvement régissant le comportement du système :

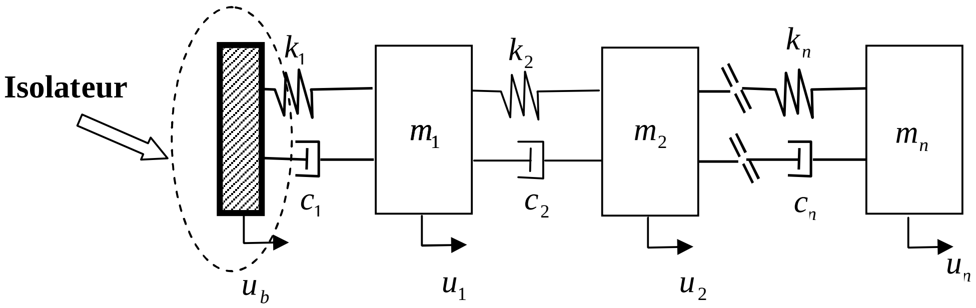


**Fig.3.1** : Modèle physique d'une structure avec isolateur parasismique

En considérant le modèle dynamique à plusieurs degrés de liberté de la figure.3.1, les masses $m_1, m_2, \ldots\ldots m_n$ sont prévues pour représenter la superstructure, $k_1, k_2, \ldots\ldots k_n$ représentant la rigidité et $c_1, c_2, \ldots\ldots c_n$ pour représenter l'amortissement de la superstructure.

Les déplacements absolus des masses sont notés par $u_b, u_1, u_2 \ldots\ldots u_n$ avec $u_b$ déplacement absolu de la base il convient d'employer les déplacements relatifs $v_b, v_1, v_2 \ldots\ldots v_n$ qui définissent respectivement les deux résultas principaux ; les déplacements relatifs entre les masses et le déplacement relatif du système d'isolation, ces derniers sont donnés par :

$$v_b = u_b - u_g \quad , \quad v_1 = u_1 - u_b \quad , \quad v_2 = u_2 - u_b \quad , \quad v_n = u_n - u_b$$

Où :

$u_g$ : Le déplacement du sol

Les équations de mouvement du modèle structurel sous excitation sismique en terme de déplacement absolu respectivement du messes, $m_1, m_2, m_n$, sont :

$$m_1\ddot{u}_1 + c_1(\dot{u}_1 - \dot{u}_b) + c_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + k_1(u_1 - u_b) + k_2(u_1 - u_2) = 0 \tag{3.1}$$

$$m_2\ddot{u}_2 + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + c_3(\dot{u}_2 - \dot{u}_3) + k_2(u_2 - u_1) + k_3(u_2 - u_3) = 0 \tag{3.2}$$

$$m_n\ddot{u}_n + c_n(\dot{u}_n - \dot{u}_{n-1}) + c_{n+1}(\dot{u}_n - \dot{u}_{n+1}) + k_n(u_n - u_{n-1}) + k_{n+1}(u_n - u_{n+1}) = 0 \tag{3.3}$$

D'où, en termes des déplacements relatifs, les équations (3.1), (3.2), (3.3) deviennent

$$m_1\ddot{v}_1 + (c_1 + c_2)\dot{v}_1 - c_2\dot{v}_2 + (k_1 + k_2)v_1 - k_2v_2 = -m_1(\ddot{v}_b + \ddot{u}_g) \tag{3.4}$$

$$m_2\ddot{v}_2 + (c_2 + c_1)\dot{v}_2 - c_2\dot{v}_1 - c_3\dot{v}_3 + (k_2 + k_3)v_2 - k_2v_1 - k_3v_3 = -m_2(\ddot{v}_b + \ddot{u}_g) \tag{3.5}$$

$$m_n\ddot{v}_n + (c_n + c_{n-1})\dot{v}_n - c_nv_{n-1} - c_{n+1}\dot{v}_{n+1} + (k_n + k_{n+1})v_n - k_nv_{n-1} - k_{n+1}v_{n+1} = -m_n(\ddot{v}_b + \ddot{u}_g) \tag{3.6}$$

A partir les équations (3.4), (3.5), (3.6) l'équation de mouvement qui régissant le comportement de système sous forme matricielle est

$$[M_0]\{\ddot{v}\} + [C_0]\{\dot{v}\} + [K_0]\{v\} = -[M_0]\{r^t\}(\ddot{v}_b + \ddot{u}_g) \tag{3.7}$$

Dans laquelle $[M_0]$ est la matrice de masse qui s'écrit :

$$[M_0] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & m_n \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

$[C_0]$ est la matrice d'amortissement qui s'exprime :

$$[C_0]=\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & . & . & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & c_n \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$[K_0]$ est la matrice de rigidité dont l'expression est :

$$[K_0]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & . & . & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & k_n \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

On notera la matrice de rigidité est tri diagonale. Cette topologie de la matrice $[K_0]$ résulte toujours de l'idéalisation d'un bâtiment en un modèle en cisaillement

**3.3. Equation de mouvement de l'isolateur en tant que système linéaire** :

Le modèle mathématique simplifie d'un plusieurs degré de liberté du bâtiment avec des appuis en RB (caoutchouc naturel et synthétique - amortissement faible ou système en caoutchouc naturel - fort amortissement) sont montrés dans la figure 3.2 ce qui représente le comportement linéaire d'appuis avec $k_b$ la rigidité et $c_b$ l'amortissement visqueux.

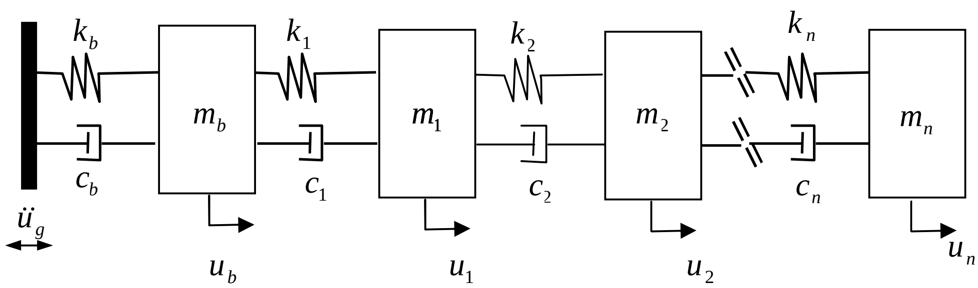


**Fig.3.2** : modèle mathématique d'une structure avec RB (Rubber Bearing) à n DDL

D'après la figure 3.2, l'équation de mouvement de l'isolateur en tant que système linéaire en fonction des déplacements absolus est la suivant :

$$m_b\ddot{u}_b + m_1\ddot{u}_1 + m_2\ddot{u}_2 + \ldots + m_n\ddot{u}_n + c_b\left(\dot{u}_b - \dot{u}_g\right) + k_b\left(u_b - u_g\right) = 0 \qquad (3.11)$$

Donc en termes de déplacements relatifs, l'équation (3.11) devient :

$$\left(m_b + \sum_{n=1}^{n} m_n\right)\ddot{v}_b + m_1\ddot{v}_1 + m_2\ddot{v}_2 + \ldots + m_n\ddot{v}_n + c_b\dot{v}_b + k_b v_b = -\left(m_b + \sum_{n=1}^{n} m_n\right)\ddot{u}_g \qquad (3.12)$$

**3.4. Equation de mouvement de l'isolateur en tant que système non - linéaire** :

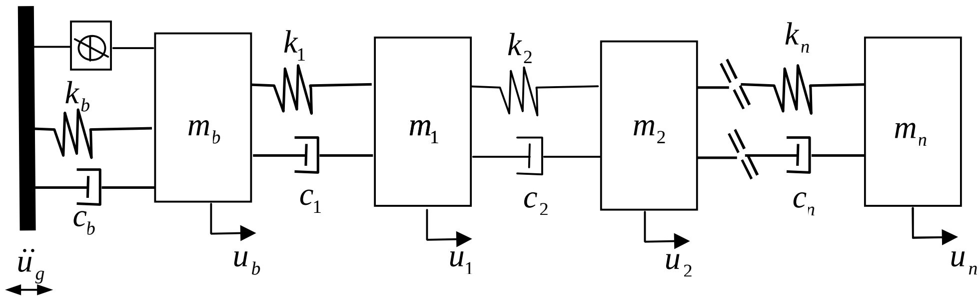


**Fig. 3.3** : modèle mathématique d'une structure avec isolateur en LRB à n DDL

La plus par des systèmes d'isolateurs caractérisant par le comportement non linéaire sont définis par deux phases à savoir la phase d'attachement avec les conditions **:**

$$\ddot{v}_b = \dot{v}_b = 0 \qquad \text{Et} \qquad v_b = \text{constant}$$

Et la phase de mouvement, qui représente le comportement non linéaire pendant l'excitation sismique, alors on peut exprimer les équations de mouvement pour chaque type d'isolateur avec le comportement non linéaire comme suit :

En concédèrent le modèle mathématique d'une structure avec le système d'isolateur en caoutchouc avec barreau de plomb, comme illustré dans la figure 3.3 qui montre le comportement non linéaire des forces en fonction des déplacements, dans ce cas, l'équation de mouvement d'isolateur à partir des déplacements absolus est donnée par :

$$m_b\ddot{u}_b + m_1\ddot{u}_1 + m_2\ddot{u}_2 + \ldots + m_n\ddot{u}_n + c_b\left(\dot{u}_b - \dot{u}_g\right) + k_b\left(u_b - u_g\right) + F_b = 0 \qquad (3.13)$$

Avec :

$F_b$ ; est la force mobilisée dans le sens X ou Y, donnée par [31] :

$$F_b\,(x) = \alpha\left(\frac{F_y}{Y}\right)u_x + (1-\alpha)F_y Z_x \tag{3.14}$$

$$F_b\,(y) = \alpha\left(\frac{F_y}{Y}\right)u_y + (1-\alpha)F_y Z_y \tag{3.15}$$

L’équation du mouvement en tant que système non linéaire en fonction des déplacements relatifs s’écrit sous la forme :

$$\left(m_b + \sum_{n=1}^{n} m_n\right)\ddot{v}_b + m_1\ddot{v}_1 + m_2\ddot{v}_2 + ... + m_n\ddot{v}_n + c_b\dot{v}_b + k_b v_b + F_b = -\left(m_b + \sum_{n=1}^{n} m_n\right)\ddot{u}_g \tag{3.16}$$

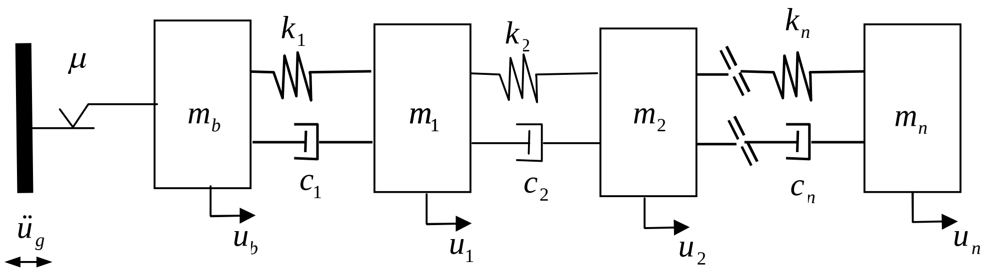


**Fig.3.4** : modèle mathématique d’une structure avec isolateur en FP à n DDL

A partir la figure 3.4, l'équation de mouvement d'un système de frottement pur en tant que système non linéaire en fonction des déplacements absolus est :

$$m_b\ddot{u}_b + m_1\ddot{u}_1 + m_2\ddot{u}_2 + ... + m_n\ddot{u}_n + \mu(m_b + \sum_{n=1}^{n} m_n)g\,\mathrm{sgn}(\dot{v}_b) = 0 \tag{3.17}$$

Avec la condition :

$$\left|(m_b + \sum_{n=1}^{n} m_n)\ddot{v}_g + \sum_{n=1}^{n} m_n\ddot{v}_n\right| \succ \mu\left(m_b + \sum_{n=1}^{n} m_n\right)g \tag{3.18}$$

Où :

$\mu$ = cœfficient de frottement

$g$ =accélération de pesanteur

$\mathrm{sgn}(\dot{v}_b)$ =est le signe de la direction de la vitesse du dispositif.

De façon similaire l'équation du mouvement en tant qu'isolateur non linéaire en fonction des déplacements relatifs s'écrit :

$$\left(m_b+\sum_{n=1}^{n}m_n\right)\ddot{v}_b+m_1\ddot{v}_1+m_2\ddot{v}_2+\ldots+m_n\ddot{v}_n+\mu\left(m_b+\sum_{n=1}^{n}m_n\right)g\,sign(\dot{v}_b)=-\left(m_b+\sum_{n=1}^{n}m_n\right)\ddot{u}_g \quad (3.19)$$

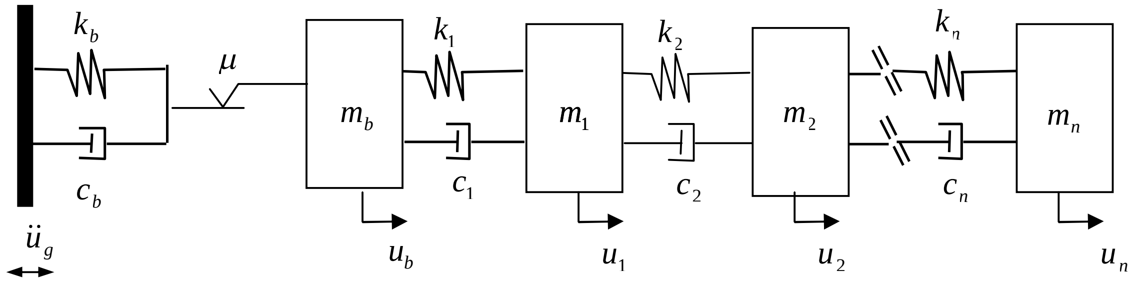


**Fig. 3.5 :** modèle mathématique d'une structure avec isolateur en EDF à n DDL

La figure 3.5 montre le modèle mathématique d'une structure avec système EDF (Electricité de France), l'équation de mouvement du système (EDF) en fonction des déplacements absolus est :

$$m_b\ddot{u}_b+m_1\ddot{u}_1+m_2\ddot{u}_2+\ldots+m_n\ddot{u}_n+c_b(\dot{u}_b-\dot{u}_g)+k_b(u_b-u_g)+\mu(m_b+\sum_{n=1}^{n}m_n)g\,\mathrm{sgn}(\dot{v}_b)=0 \quad (3.20)$$

D'autre part l'équation de mouvement en tant que système non linéaire en fonction des déplacements relatifs devient :

$$m_b\ddot{v}_b+m_1\ddot{v}_1+m_2\ddot{v}_2+\ldots+m_n\ddot{v}_n+c_b\dot{v}_b+k_bv_b+\mu(m_b+\sum_{n=1}^{n}m_n)g\,\mathrm{sgn}(\dot{v}_b)=0 \quad (3.21)$$

En considérant le modèle mathématique d'une structure avec système résistant par frottement(R-FBI) la figure 3.6, illustre l'équation de mouvement de l'isolateur.

En fonction des déplacements absolus l'équation de mouvement est donnée par :

$$m_b\ddot{u}_b+m_1\ddot{u}_1+m_2\ddot{u}_2+\ldots+m_n\ddot{u}_n+c_b(\dot{u}_b-\dot{u}_g)+k_b(u_b-u_g)+\mu(m_b+\sum_{n=1}^{n}m_n)g\,\mathrm{sgn}(\dot{v}_b)=0 \quad (3.22)$$

L'équation du mouvement d'isolateurs en tant que système non linéaire en fonction des déplacements relatifs est donné par :

$$m_b\ddot{v}_b+m_1\ddot{v}_1+m_2\ddot{v}_2+\ldots+m_n\ddot{v}_n+c_b\dot{v}_b+k_bv_b+\mu(m_b+\sum_{n=1}^{n}m_n)g\,\mathrm{sgn}(\dot{v}_b)=0 \quad (3.23)$$

Avec la condition ;

$$\left|(m_b + \sum_{n=1}^{n} m_n)\left[\ddot{v}_g + \ddot{v}_b\right] + \sum_{n=1}^{n} m_n \ddot{v}_n + c_b \dot{v}_b + k v_b\right| \succ \mu\left(m_b + \sum_{n=1}^{n} m_n\right) g \quad (3.24)$$

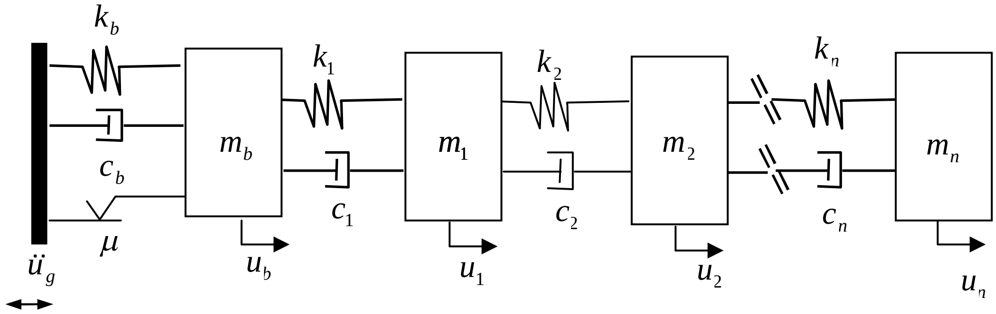


**Fig. 3.6 :** modèle mathématique d'une structure avec isolateur en R-FBI à n DDL

A partir de la figure 3.7, l'équation de mouvement d'un système de pendule de glissement (FPS) en fonction des déplacements absolus est :

$$m_b \ddot{u}_b + m_1 \ddot{u}_1 + m_2 \ddot{u}_2 + \ldots + m_n \ddot{u}_n + k_b (u_b - u_g) + \mu (m_b + \sum_{n=1}^{n} m_n) g \,\mathrm{sgn}(\dot{v}_b) = 0 \quad (3.25)$$

Avec la condition ;

$$\left|(m_b + \sum_{n=1}^{n} m_n)\ddot{v}_g + \sum_{n=1}^{n} m_n \ddot{v}_n + k v_b\right| \succ \mu\left(m_b + \sum_{n=1}^{n} m_n\right) g \quad (3.26)$$

Où :

$$k_b = \frac{(m_b + \sum_{n=1}^{n} m_n)}{R}$$ Et R = est le rayon de courbure

L'équation du mouvement de l'isolateur en tant que système non linéaire en fonction des déplacements relatifs est donné par :

$$m_b \ddot{v}_b + m_1 \ddot{v}_1 + m_2 \ddot{v}_2 + \ldots + m_n \ddot{v}_n + k_b v_b + \mu (m_b + \sum_{n=1}^{n} m_n) g \,\mathrm{sgn}(\dot{v}_b) = 0 \quad (3.27)$$

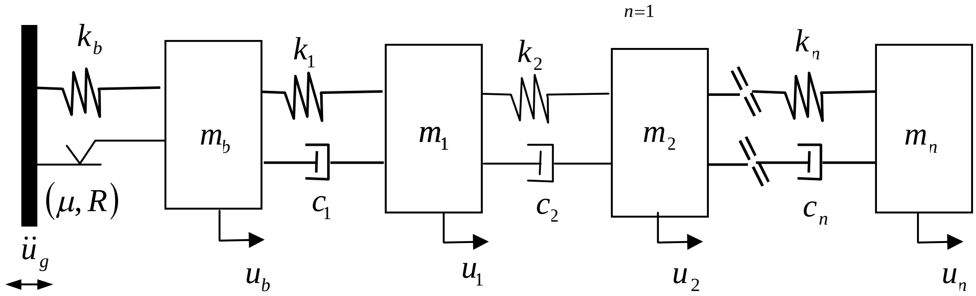


**Fig. 3.7** : modèle mathématique d'une structure avec isolateur en FPS à n DDL