

METHODES APPROCHEES POUR LE CALCUL DES FREQUENCES ET DES MODES DE VIBRATION

4.1. Introduction :

Dans ce chapitre, on va décrire les méthodes approchées pour la résolution de la problématique citée ci-dessous avec l'estimation d'éventuelles erreurs pendant le calcul.

La problématique réside dans la résolution des valeurs propres standards suivantes :

$$k\phi = \lambda M\phi \quad (4.1)$$

Où k : la rigidité et M : la masse d'un modèle mathématique, La valeur propre λ_i introduite dans ce chapitre par convention d'écriture qui représente la fréquence propre ω^2 en (rad / s), et le vecteur propre ϕ_i est le mode propre de vibration associé.

4.2. Méthodes approchées :

Pour calculer les fréquences propres et les modes propres, on va utiliser deux méthodes à savoir la méthode Rayleigh Ritz, et la méthode des polynômes.

4.2.1. Méthode de Rayleigh Ritz :

La méthode de Rayleigh Ritz forme une approximation de la première valeur propre du vecteur propre associé. En règle générale, on va inclure plus d'un mode de vibration dans l'analyse dynamique afin d'améliorer les prédictions des réponses. Cette méthode est une technique générale permet d'obtenir une approximation des valeurs propres, et des vecteurs propres associés, concernant l'équation $K\phi = \omega^2 M\phi$, en supposant que les matrices K et M sont définies positives.

On exprime les déplacements $u(t)$ comme une combinaison linéaire des vecteurs de base de Ritz $\psi_i, i = 1, 2, \dots, q$. On obtient ;

$$u(t) = \sum_{i=1}^q z_i(t)\psi_i = \Psi z(t) \quad (4.2)$$

Où les $z(t)$ sont les coordonnées de Ritz et ψ_i sont les vecteurs de Ritz linéairement indépendants. Puisqu'il n'y a pas de risque de confusion, et on considère le vecteur $\tilde{\phi}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de Ritz ; on écrira tout simplement :

$$\tilde{\phi} = \sum_{i=1}^q z_i \psi_i = \Psi z \quad (4.3)$$

Et en évaluant le quotient de Rayleigh $p(\tilde{\phi})$

$$p(\tilde{\phi}) = \frac{\tilde{\phi}^T K \tilde{\phi}}{\tilde{\phi}^T M \tilde{\phi}} = \frac{z^T \Psi^T K \Psi z}{z^T \Psi^T M \Psi z} = \frac{z^T K z}{z^T M z} = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}} \quad (4.4)$$

On peut l'exprimer par la forme suivante :

$$p(\tilde{\phi}) = \frac{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q z_i z_j \tilde{k}_{ij}}{\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^q z_i z_j \tilde{m}_{ij}} \quad (4.5)$$

Où le numérateur et le dénominateur sont des fonctions des coordonnées de Ritz z_i :

$$\tilde{k}_{ij} = \psi_i^T K \psi_j \quad (4.6a)$$

$$\tilde{m}_{ij} = \psi_i^T M \psi_j \quad (4.6b)$$

Ce quotient de Rayleigh ne peut pas être évalué car les coordonnées de Ritz z_i sont inconnues.

Sachant que $\omega_1^2 \leq \tilde{\omega}^2 = p(\tilde{\phi}) \leq \omega_{\eta eq}^2$ où ω_1^2 et $\omega_{\eta eq}^2$ sont les premières et les dernières valeurs propres, respectivement.

On utilisera les propriétés de stationnarité de quotient de Rayleigh pour obtenir $p(\tilde{\phi})$ égale à zéro, la dérivée seconde de l'équation (4.4) soit

$$\frac{\partial p(\tilde{\phi})}{\partial z_i} = \frac{2\tilde{m} \sum_{j=1}^q z_j \tilde{k}_{ij} - 2\tilde{k} \sum_{j=1}^q z_j \tilde{m}_{ij}}{\tilde{m}^2} = 0 \quad (4.7)$$

D'où

$$\sum_{j=1}^q (\tilde{k}_{ij} - \tilde{\omega}^2 \tilde{m}_{ij}) z_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.8)$$

et

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}.$$

Avec les n équations (4.8) s'écrivent de façon compacte sous la forme matricielle suivante

$$\tilde{K}z_i = \tilde{\omega}^2 \tilde{M}z_i \quad (4.9)$$

Où \tilde{K} et \tilde{M} sont des matrices de dimensions $n \times n$ dont les éléments sont définis par les équations (4.5) et (4.6) et z_i est un vecteur des coordonnées de Ritz. On constate que l'analyse de Rayleigh Ritz sert à réduire le nombre de degrés de liberté du système de η_{eq} à n degrés de liberté représentant le nombre de coordonnées généralisées de Ritz z_i . En générale, les vecteurs de base de Ritz ψ_i ne possèdent pas les propriétés d'orthogonalité des modes propres. Or les termes hors diagonale des matrices généralisées \tilde{K} et \tilde{M} ne sont pas nuls. Pour un bon choix de vecteurs de base de Ritz, on obtient les termes hors diagonales relativement petits. On remarque qu'à ce stade, il est très facile de calculer la réponse du système réduit avec n degrés de liberté par intégration numérique directe.

La solution de l'équation aux fréquences (4.9) donne n valeurs propres $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_q$ qui sont des approximations de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$, et n vecteurs propres

$$z_1 = \begin{Bmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{q1} \end{Bmatrix}, \quad z_2 = \begin{Bmatrix} z_{12} \\ z_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{q2} \end{Bmatrix}, \quad z_q = \begin{Bmatrix} z_{1q} \\ z_{2q} \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{qq} \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Les vecteurs propres z_i servent à évaluer les vecteurs propres en coordonnées généralisées telles que $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \dots, \tilde{\phi}_q$ qui sont des approximations des vecteurs propres $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q$ du système et qui d'après l'équation (4.2) s'expriment :

$$\tilde{\phi}_i = \Psi z_i = \sum_{j=1}^q z_{ij} \psi_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.11)$$

Les valeurs propres $\tilde{\omega}_i^2$ sont des approximations des valeurs propres ω_i^2 et satisfont la relation suivante :

$$\omega_i^2 \leq \tilde{\omega}_i^2 \leq \omega_{\eta_{eq}}^2 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.12)$$

Les vecteurs $\tilde{\phi}_i$ ne sont que des approximations des vecteurs propres ϕ_i satisfont eux aussi les conditions d'orthogonalité

$$\tilde{\phi}_i^T K \tilde{\phi}_j = 0 \quad \text{Et} \quad \tilde{\phi}_i^T M \tilde{\phi}_j = 0 \quad i \neq j \quad (4.13)$$

En effet, les vecteurs propres z_i satisfont les conditions d'orthogonalité par rapport aux matrices réduites \tilde{K} et \tilde{M} d'après l'Eq (4.9), on peut écrire

$$z_i^T K z_j = 0 \quad \text{Et} \quad z_i^T M z_j = 0 \quad i \neq j \quad (4.14)$$

D'après cette propriété et selon l'Eq (4.11), on déduit la première condition d'orthogonalité

$$\tilde{\phi}_i^T K \tilde{\phi}_j = z_i^T \Psi^T K \Psi z_j = z_i^T \tilde{K} z_j = 0 \quad i \neq j \quad (4.15)$$

La deuxième condition d'orthogonalité s'obtient de manière similaire

$$\tilde{\phi}_i^T M \tilde{\phi}_j = z_i^T \Psi^T M \Psi z_j = z_i^T \tilde{M} z_j = 0 \quad i \neq j \quad (4.16)$$

Si les vecteurs z_i sont normés par rapport à la matrice de masse réduite \tilde{M} , on a :

$$z_i^T \tilde{M} z_j = \delta_{ij} \quad \text{Et} \quad z_i^T \tilde{K} z_i = \tilde{\omega}_i^2 \quad (4.17)$$

Ce qui implique que les vecteurs de Ritz sont aussi orthonormés par rapport à la matrice de masse M soit :

$$\tilde{\phi}_i^T M \tilde{\phi}_j = \delta_{ij} \quad \text{Et} \quad \tilde{\phi}_i^T K \tilde{\phi}_i = \tilde{\omega}_i^2 \quad (4.18)$$

Les vecteurs de Ritz peuvent être utilisés dans une superposition modèle classique puisqu'ils satisfont les conditions d'orthogonalité par rapport aux matrices K et M . La précision de la solution obtenue avec une analyse de Rayleigh Ritz dépendra de justesse avec laquelle les vecteurs de Ritz représentent les vecteurs propres du système. Cette itération permet l'aboutissement d'une solution de ces vecteurs acceptable. Les vecteurs de Ritz peuvent être sélectionnés si nous pouvons visualiser les formes des premières modes propres. Cette approche est conseillée seulement pour des structures simples et non pas pour les structures complexes particulièrement en trois dimensions.

En pratique, les vecteurs de Ritz sont déterminés en résolvant un problème statique dans lequel n vecteurs de chargement sont spécifiés dans une matrice R .

$$K\Psi = R \quad (4.19)$$

Où $[\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_q]$ est une matrice contenant les vecteurs de Ritz de dimensions $\eta_{eq} \times n$. Nous projetons ensuite les matrices K et M dans le sous espace de Ritz E_q engendré par les vecteurs ψ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ qui nous donne

$$\tilde{k} = \Psi^T K \Psi \quad (4.20a)$$

$$\tilde{M} = \Psi^T M \Psi \quad (4.20b)$$

Les matrices symétriques \tilde{k} et \tilde{M} sont appelées matrices d'interaction ou matrice de Rayleigh. Or, d'après l'Eq (4.18) nous avons

$$K = \Psi^T R \quad (4.21)$$

Nous résolvons le problème aux valeurs propres réduit comme suit :

$$\tilde{K}Z = \tilde{M}Z\tilde{\Lambda} \quad (4.22)$$

Où $\tilde{\Lambda} = \text{diag}(\tilde{\omega}_i^2)$ est une matrice diagonale contenant les approximations des valeurs propres ω_i^2 et Z est la matrice des vecteurs propres z_1, z_2, \dots, z_q qui sont orthonormés par rapport à \tilde{M} . Les approximations des vecteurs propres du problème $K\phi = \omega^2 M\phi$ sont :

$$\tilde{\Phi} = \Psi Z \quad (4.23)$$

On peut montrer qu'après la vérification par l'analyse que l'approximation des premières valeurs propres de rang inférieur à $n/2$ est en générale excellente alors qu'elle est mauvaise pour les fréquences propres.

4.2.2. Méthode des polynômes :

Dans cette méthode nous réécrivons le problème aux valeurs propres l'Eq (4.1) sous la forme suivante :

$$(k - \lambda M)\phi = 0 \quad (4.24)$$

Ce système d'équations linéaires admet n solutions non triviales (c'est-à-dire ϕ non nul) et ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ telles que soient vérifiées les équations suivantes

$$(k - \lambda_i M)\phi_i = 0 \quad (4.25)$$

Où les grandeurs λ_i sont les racines de l'équation caractéristique

$$\det(k - \lambda_i M) = 0 \quad (4.26)$$

Où le polynôme du premier membre est un polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \det(k - \lambda M) \quad (4.27)$$

L'équation (4.25) peut être satisfaite pour la solution non triviale ϕ_i c'est à dire $\phi_i \neq 0$, seulement si la matrice $k - \lambda_i M$ est singulière. Ceci veut dire que si l'on factorise la matrice $k - \lambda_i M$ en un produit d'une matrice unitaire triangulaire inférieure L et d'une matrice supérieure U selon une élimination de Gauss, nous avons $u_{mm} = 0$ puisque :

$$p(\lambda) = \det(LU) = \prod_{i=1}^n u_{ii} \quad (4.28)$$

Il s'ensuit que $p(\lambda_i) = 0$. Si la valeur propre λ_i est de multiplicité m , nous aurons $u_{n-1, n-1} = u_{n-2, n-2} = \dots = u_{n-m+1, n-m+1} = 0$. Si, durant le processus de factorisation, la matrice $k - \lambda_i M$ reste symétrique parce qu'il n'y a pas eu de changement de ligne ou changement de colonne

séparément ou qu'il y a eu de changement de ligne et de la colonne correspondant, et l'équation (4.29) peut s'écrire :

$$p(\lambda) = \det(LUL^T) = \prod_{i=1}^n d_{ii} \quad (4.29)$$

Où d_{ii} sont les termes sur la diagonale de D , LDL^T , est la factorisation de $k - \lambda_i M$ ou de la matrice obtenue après changement des lignes et des colonnes correspondantes, (c'est-à-dire utilisant une autre numérotation de degrés de liberté). Si λ_i est de multiplicité m éléments de D sont nul.

Le problème aux valeurs propres du r^e est associé au contrainte correspondant à $k\phi = \lambda M\phi$ est donné par :

$$k^{(r)}\phi^{(r)} = \lambda^{(r)} M^{(r)}\phi^{(r)} \quad (4.30)$$

Où toutes les matrices sont d'ordre $(n - r)$ et $k^{(r)}$ et $M^{(r)}$ sont obtenues en supprimant les dernières lignes et colonnes des matrices k et M . Le polynôme caractéristique du r^e problème associé au contrainte est :

$$p^{(r)}(\lambda^{(r)}) = \det(k^{(r)} - \lambda^{(r)} M^{(r)}) \quad (4.31)$$

Or, nous savons que les valeurs propres du $(r + 1)^e$ problème associé au contrainte séparant celles du r^e problème associé au contrainte selon :

$$\lambda_1^{(r)} \leq \lambda_1^{(r+1)} \leq \lambda_2^{(r)} \leq \lambda_2^{(r+1)} \leq \dots \leq \lambda_{n-r-1}^{(r)} \leq \lambda_{n-r-1}^{(r+1)} \leq \lambda_{n-r}^{(r)} \quad (4.32)$$

Ce résultat est un cas particulier du théorème d'entrelacement de Cauchy.

4.3. Estimation de l'erreur :

La figure 2.3 du chapitre 2, montre que le composant principal de la réponse est celui du premier mode de vibration (mode fondamentale). Ceci serait particulièrement évident dans un système avec un très grand nombre de degrés de liberté où les quelques premiers modes de vibration contribuent à la réponse.

La résolution du problème aux valeurs propres des systèmes avec un grand nombre de degrés de liberté demande beaucoup de temps de calcul ; et en évitant le calcul de tous les modes propres et des fréquences associés est très avantageux. On dit qu'on utilise une base vectorielle propre tronquée quand on ne considère que les m premiers modes propres. Évidemment, la réponse d'un système avec plusieurs degrés de liberté, est calculée avec une base vectorielle propre complète. La différence entre ces deux réponses réside dans l'erreur commise due à l'utilisation d'une base vectorielle tronquée. Il s'agit de déterminer le nombre de modes $m \ll n_{eq}$ nécessaire afin de minimiser cette erreur.

Dans l'équation du mouvement d'un système à n_{eq} degrés de liberté, $p(t)$ est un vecteur de charges variant dans le temps. Ces vecteurs de charges sont causés par des forces externes dont l'amplitude, qui est en fonction du temps, et la distribution spatiale sont constantes. Dans ce cas, les vecteurs de charges s'expriment comme le produit d'un vecteur de distribution spatiale des charges

$f(s) = f$ Et d'une fonction d'amplitude $g(t)$:

$$p(t) = g(t) \quad (4.33)$$

Cette expression s'applique à un grand nombre de chargement, y compris les charges durée à un tremblement de terre. s'expriment :

$$p(t) = Mr \ddot{u}_g(t) \quad (4.34)$$

Où M la matrice de masse du système, r est le vecteur des déplacements pseudo statiques, $\ddot{u}_g(t)$ est l'historique de l'accélération du sol due au tremblement de terre, dans ce cas, la distribution spatiale du chargement s'écrit :

$$f = Mr \quad (4.35)$$

Pour ce type de chargement l'équation du mouvement pour le mode i s'écrit :

$$\ddot{Z}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{Z}_i(t) + \omega_i^2 Z_i(t) = \frac{\phi_i^T f}{\tilde{m}_i} g(t) \quad (4.36)$$

Et dans le cas d'un tremblement de la terre :

$$\ddot{Z}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{Z}_i(t) + \omega_i^2 Z_i(t) = \frac{\phi_i^T Mr}{\tilde{m}_i} \ddot{u}_g(t) \quad (4.37)$$

Où $\tilde{m} = \phi_i^T M \phi_i$ est la masse généralisée pour le mode i . Comme on l'a vu, on normalise les vecteurs propres de manière à obtenir $\tilde{m} = 1$. Pour garder la généralité de la formulation, nous gardons \tilde{m}_i dans les équations. Et nous définissons la fraction dans le second membre de l'équation (4.36) comme les facteurs de participation modale pour un chargement quelconque :

$$\Gamma_i = \frac{\phi_i^T f}{\tilde{m}_i} \quad (4.38)$$

Et la fraction dans le second membre de l'équation (4.37) comme le facteur de participation modale pour un tremblement de terre :

$$\Gamma_i = \frac{\phi_i^T Mr}{\tilde{m}_i} \quad (4.39)$$

La participation dans un mode quelconque à la réponse dépend essentiellement de l'interaction entre le mode de vibration et la distribution spatiale du chargement.

On conclut, de ce qui précède, que la réponse dans les coordonnées géométriques peut être calculée avec une bonne précision en superposant la réponse de m modes propres. Ce qu'on peut écrire :

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m \phi_i z_i(t) = \Phi_m z_m(t) \quad (4.40)$$

Où Φ_m est une matrice rectangulaire des m modes propres et $z_m(t)$ est un vecteur des m coordonnées modales. L'indice m dans $u_m(t)$ indique que le vecteur de déplacement obtenu à partir de l'équation (4.40) dans laquelle on ne considère que les m premiers modes ne sont pas égaux aux vecteurs U , qu'on obtient en considérant des n_{eq} comme modes de vibration. En tenant compte de fait que le chargement peut s'écrire $p(t) = fg(t)$, nous obtenons :

$$M\ddot{u}_m(t) + C\dot{u}_m(t) + Ku_m(t) = f_m g(t) \quad (4.41)$$

Le vecteur $f_m g(t)$ est la représentation de la force d'excitation obtenue en utilisant une base tronquée de modes. Puisque u_m n'est pas exactement égale à u , f_m est différent de f et la différence entre les deux réside dans une mesure d'erreur. L'équation (4,41) donne :

$$M\Phi_m \ddot{z}_m(t) + C\Phi_m \dot{z}_m(t) + K\Phi_m z_m(t) = f_m g(t) \quad (4.42)$$

En tenant compte des propriétés d'orthogonalité des modes propres par rapport à la matrice de masse et avec une matrice d'amortissement proportionnelle, on peut écrire :

$$K\Phi_m = M\Phi_m A_m \quad (4.43)$$

Et

$$C\Phi_m = M\Phi_m \Delta_m \quad (4.44)$$

Où A_m est la matrice diagonale des fréquences aux carres ω_i^2 et Δ_m est le matrice diagonale des termes $2\xi_i \omega_i$. Nous substituons les équations (4,43) et (4,44) dans l'équation (4.42), nous obtenons :

$$M\Phi_m \ddot{z}_m(t) + M\Phi_m \Delta_m \dot{z}_m(t) + M\Phi_m A_m z_m(t) = f_m g(t) \quad (4.45)$$

Et en supposant que les modes propres sont orthonormés par rapport à la matrice de masse, nous avons :

$$\ddot{z}_m(t) + \Delta_m \dot{z}_m(t) + A_m z_m(t) = \Phi_m^T f g(t) \quad (4.46)$$

Multiplions les deux membres de l'équation (4,46) par $M\Phi_m$ et substituons l'équation résultante dans l'équation (4.45), nous obtenons :

$$f_m g(t) = M\Phi_m \Phi_m^T f g(t) \quad (4.47)$$

L'équation (4,47) donne l'expression de la fonction d'excitation si on utilise une série tronquée des modes propres. Quand m s'approche de n_{eq} , f_{eq} s'approche aussi de f . Pour $m < n_{eq}$ l'erreur commise dans la représentation de la fonction d'excitation est notée $e_m g(t)$, où :

$$e_m = f - f_m \quad (4.48)$$

On peut encore écrire :

$$e_m = f - M\Phi_m\phi_m^t f \quad (4.49)$$

Une norme d'erreur peut alors être définie comme :

$$e = \frac{f^T e_m}{f^T f} \quad (4.50)$$

La norme d'erreur e est égale à zéro si tous les modes sont inclut, c'est-à-dire $m = n_{eq}$ et égale à 1, si $m = 0$. La base modale peut être tronquée quand la norme d'erreur e devient petite.