# RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS ASSOCIEES AU MODELE DYNAMIQUE

## 5.1. Généralité :

Le premier objectif d'une analyse dynamique structurale déterministe est l'évaluation des histoires de temps de déplacement d'une structure donnée soumise à un chargement variable dans le temps. Dans la plupart des cas, l'analyse approximative impliquant seulement un nombre limité de degrés de liberté suffisant, le problème peut être réduit à la détermination des histoires de temps de ces composants choisis des déplacements. Les expressions mathématiques définissant les déplacements dynamiques s'appellent les équations du mouvement de la structure, et la solution de ces équations de mouvement est associée au modèle fournissant la réponse dynamique.

La formulation des équations du mouvement d'un système dynamique est probablement la plus importante, et parfois la plus difficile. La résolution de ces équations se fait par le biais de plusieurs méthodes à savoir la méthode d'intégration fréquentielle, la méthode d'intégration modale spectrale, et la méthode d'intégration temporelle. Cette dernière est souvent utilisée parce qu'elle est convenablement appliquée à tout type de comportement linéaire ou non linéaire d'un système, dont les propriétés varient au cours de la sollicitation.

Le principe de cette méthode directe d'intégration temporelle déterminant les valeurs approximatives de la solution pour un ensemble choisi de valeurs de temps *(t),* se résume comme suit : (i) supposer des fonctions décrivant les variations du déplacement, de la vitesse et de l'accélération durant un intervalle de temps et (ii) satisfaire l'équation du mouvement, à tout instant de temps $t$ avec un intervalle de temps constant appelé pas ( $\Delta t$ ) ou incrément de temps. Ceci veut dire que l'équilibre statique de la force d'inertie, de la force d'amortissement et de la force de rappel avec le chargement est recherché à des multiples du pas de temps, $\Delta t$, soient à $\Delta t, 2\Delta t, \ldots\ldots t, t+\Delta t, \ldots\ldots t_d$ , où $t_d$ est la durée totale du chargement. La précision des résultas, la stabilité de la solution et la durée du calcul dépend de la longueur du pas de temps et du choix de la fonction décrivant la variation du déplacement, de la vitesse et de l'accélération.

Dans ce chapitre, on va formuler les équations différentielles et la mise en équation du système dynamique, puis on va exposer la méthode de RUNGE - KUTTA, et la solution du modèle dynamique de l'isolateur à comportement linéaire et non - linéaire.

**5.2. Réponse du modèle dynamique :**

Certaines des actions qui s'exercent sur une structure telle que les charges sismiques, sont à l'origine des sollicitations variables dans le temps ; ce qui fait la différence entre un problème dynamique et un problème statique, ainsi que la réponse de la structure caractérisée par les forces d'inertie.

Le calcul du modèle dynamique est basé sur la détermination de la réponse des systèmes, à la sollicitation sismique en tenant compte de la force d'inertie. Il reste tout de même que les données requises pour une analyse quelconque (statique ou dynamique) sont les caractéristiques intrinsèques de la structure à savoir les fréquences et les modes propres de vibration de système.

**5.2.1. Système d'équations différentielles :**

Le système d'équations différentielles pour un modèle dynamique du comportement linéaire soumis à une excitation sismique est donné sous forme matricielle à partir de l'équation (3.7) et (3.12) comme suit :

$$\left[M^*\right]\left\{\ddot{v}^*\right\}+\left[C^*\right]\left\{\dot{v}^*\right\}+\left[K^*\right]\left\{v^*\right\}=-\left[M_0\right]\left\{r^t\right\}\ddot{u}_g \tag{5.1}$$

$\left[M^*\right]$ est la matrice de la rigidité de système exprimée :

$$\left[M^*\right]=\begin{bmatrix} m_b+\sum_{n=1}^{n} m_n & \left\{r^t\right\}\left[M_0\right] \\ \left[M_0\right]\left\{r\right\} & \left[M_0\right] \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

$\left[C^*\right]$ est la matrice d'amortissement écrite :

$$\left[C^*\right]=\begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & \left[C_0\right] \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Où $\left[k^*\right]$ est la matrice de la rigidité de système exprimée :

$$[k^*]=\begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & [k_0] \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

$\{v^*\}$est le vecteur du déplacement relatif dont l'expression est :

$$\{v^*\}=\begin{Bmatrix} v_b \\ v_n \end{Bmatrix} \tag{5.5}$$

$\{r\}$ : est le vecteur des Cœfficient d'influence donné :

$$\{r\}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{6.6}$$

Pour un modèle dynamique du comportement non linéaire, le système d'équations différentielles s'exprime sous forme matricielle pour chaque type comme suit :

Pour le système d'isolation en caoutchouc avec barreau de plomb (LRB), le système d'équations différentielles s'écrit à partir de l'équation (3.7) et (3.16) comme suit :

$$\begin{bmatrix} m_b+\sum_{i=1}^{n} m_i & \{r^t\}[M_0] \\ [M_0]\{r\} & [M_0] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{v}_b \\ \ddot{v}_n \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & [C_0] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{v}_b \\ \dot{v}_n \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & [K_0] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_b \\ v_n \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} F_b \\ 0 \end{Bmatrix}=[M_0]\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\ddot{u}_g \tag{5.7}$$

Le système d'équations différentielles pour un système de frottement pur se décrit sous forme matricielle à partir de l'équation (3.7) et (3.19) comme suit **:**

$$\begin{bmatrix} m_b+\sum_{i=1}^{n} m_i & \{r^t\}[M_0] \\ [M_0]\{r\} & [M_0] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{v}_b \\ \ddot{v}_n \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [C_0] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{v}_b \\ \dot{v}_n \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [K_0] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_b \\ v_n \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\mu\left(m+\sum_{n=1}^{n} m_n\right)g\,\mathrm{sgn}(\dot{v}_b)=[M_0]\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\ddot{u}_g \tag{5.8}$$

D'après l'équation (3.7) et (3.23), le système d'équations différentielles sous forme matricielle pour système EDF (Electricité de France) s'exprime :

$$\begin{bmatrix} m_b+\sum_{i=1}^{n} m_i & \{r^t\}[M_0] \\ [M_0]\{r\} & [M_0] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{v}_b \\ \ddot{v}_n \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & [C_0] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{v}_b \\ \dot{v}_n \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & [K_0] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_b \\ v_n \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\mu\left(m+\sum_{n=1}^{n} m_n\right)g\,\mathrm{sgn}(\dot{v}_b)=[M_0]\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\ddot{u}_g \tag{5.9}$$

Pour le système d'isolation résistant par frottement(R-FBI), le système d'équations différentielles à partir de l'équation (3.7) et (3.24) s'écrit comme suit **:**

$$\begin{bmatrix} m_b+\sum_{i=1}^{n} m_i & \{r^t\}[M_0] \\ [M_0]\{r\} & [M_0] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{v}_b \\ \ddot{v}_n \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & [C_0] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{v}_b \\ \dot{v}_n \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & [K_0] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_b \\ v_n \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\mu\left(m+\sum_{n=1}^{n} m_n\right)g\,\mathrm{sgn}(\dot{v}_b)=[M_0]\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\ddot{u}_g \tag{5.10}$$

Le système d'équations différentielles pour système pendule de glissement pur (FPS) se présente sous forme matricielle à partir de l'équation (3.7) et (3.27) comme suit **:**

$$\begin{bmatrix} m_b+\sum_{i=1}^{n} m_i & \{r^t\}[M_0] \\ [M_0]\{r\} & [M_0] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{v}_b \\ \ddot{v}_n \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [C_0] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{v}_b \\ \ddot{v}_n \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & [K_0] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_b \\ v_n \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}\mu\left(m+\sum_{n=1}^{n} m_n\right)g\,\mathrm{sgn}(\dot{v}_b)=[M_0]\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\ddot{u}_g \tag{5.11}$$

**II.3.2.2. Mise en équation du système dynamique :**

La mise en équation d'un problème dynamique est l'une des étapes les plus délicates de l'analyse de la réponse d'un système. Deux techniques, une basée sur des quantités vectorielles et l'autre basée sur des grandeurs scalaires, sont utilisées, dans ce chapitre, par des formulations directes pour résoudre le problème.

On considère un système dynamique du comportement linéaire, reposant sur un support et soumis à une accélération $\ddot{u}_g(t)$, Où $u_b$ est le déplacement de la masse dans un référentiel fixe, Or la règle de composition des mouvements s'écrit :

$$u_b = v_b + u_g \tag{5.12}$$

Avec $u_g$ est le déplacement du support.

L'équation d'équilibre pour le système représenté dans la figure (5.1) est donnée comme suit :

$$f_I + f_D + f_S = 0 \tag{5.13}$$

Où $f_I$, $f_D$, $f_s$ respectivement sont de force d'inertie, de force d'amortissement et de force représentant la rigidité. En remplaçant les forces par leurs expressions équivalentes, on obtient :

$$\left(m_b + \sum_{n=1}^{n} m_n\right)\ddot{u}_b + m_1\ddot{v}_1 + m_2\ddot{v}_2 + \ldots + m_n\ddot{v}_n + c_b\dot{v}_b + k_b v_b = 0 \qquad (5.14)$$

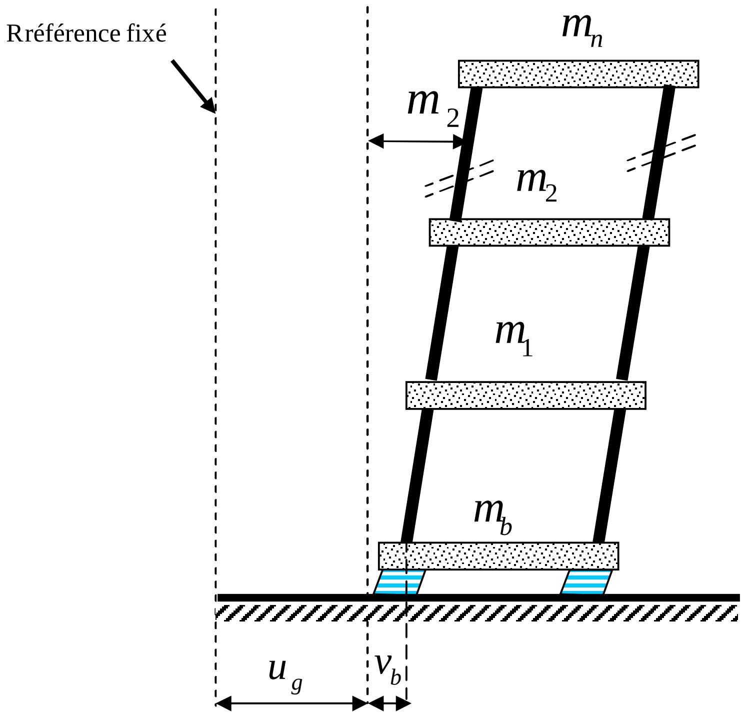


**Fig.5.1 :** influence du support sur le modèle dynamique

D'après l'équation (5.12) et (5.14) on peut écrire :

$$\left(m_b + \sum_{n=1}^{n} m_n\right)\ddot{v}_b + m_1\ddot{v}_1 + m_2\ddot{v}_2 + \ldots + m_n\ddot{v}_n + c_b\dot{v}_b + k_b v_b = -\left(m_b + \sum_{n=1}^{n} m_n\right)\ddot{u}_g \equiv p^{eff} \qquad (5.15)$$

En comparant l'équation (5.15) avec l'équation (3.12) du chapitre 3, on constate que ses réponses sismiques sont identiques ; pour cela nous déduisons que :

$$p^{eff}(t) = \left(m_b + \sum_{n=1}^{n} m\right)\ddot{u}_g$$

Les mêmes étapes sont suivies pour la mise en équation du système de comportement non linéaire.

**5.2.3. Méthodes numériques :**

Il existe plusieurs méthodes d'intégration directe pour la résolution l'équation de mouvement, nous avons choisi deux méthodes les plus utilisées à savoir la méthode de NEWMARK et la méthode de RUNGE - KUTTA.

**5.2.3.1. Méthode de RUNGE - KUTTA :**

La méthode de RUNGE - KUTTA de quatrième ordre est conçue pour rapprocher les solutions numériques de série de Taylor des équations de premier ordre [19].

L'équation de mouvement est sous la forme :

$$\{\ddot{u}(t)\} = M^{-1}(\{p(t)\} - [K]\{u(t)\} - [C]\{\dot{u}(t)\}) \qquad (5.16)$$

Ou sous la forme symbolique [19] :

$$\{\ddot{u}(t)\} = \{f(t, u(t), \dot{u}(t))\} \qquad (5.17)$$

Pour transformer l'équation (5.16) de second ordre au premier ordre, on pose $\dot{u} = s$, Or l'équation (5.17) peut être scindée en deux équations de premier ordre comme suit

$$\{\dot{s}(t)\} = \{f(t, u, s)\} \qquad (5.18)$$

et

$$\{\dot{u}(t)\} = \{p(t, u)\} \qquad (II.3.19)$$

Nous pouvons employer des formules de quatrième ordre de Runge Kutta pour résoudre l'équation (5.18) et (5 .19). Les dérivés des ces formules sont détaillées comme suit :

A partir de l'équation du premier ordre $y = dy/du$, $f(u, y) = f$, et avec les conditions initiales $y(u_0) = y_0$, la solution $y(u_0 + h)$ peut être exprimée sous forme de série de Taylor comme suit [19] :

$$y(u_0 + h) = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \frac{h^3}{3!}y'''_0 + \frac{h^4}{4!}y_0^{iv} + \ldots \qquad (5.20)$$

Avec :

$$h = (u - u_0)$$

On pose : $y' = f$ avec $dy' = \left(\partial f / \partial y\right) du$ ; ce qui conduit à exprimer la relation de y'' comme suit :

$$y'' = \frac{dy'}{dv} = \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = f_v + f_y f \tag{5.21}$$

Faisant même opération pour $y'''$, on obtient :

$$y''' = \frac{dy''}{dv} = \frac{\partial y''}{\partial u} + \frac{\partial y''}{\partial y}\frac{dy}{du} = \frac{\partial(f_v + f_y f)}{\partial u} + \frac{\partial(f_v + f_y f)}{\partial y}\frac{dy}{du}$$

$$= f_{vv} + 2 f f_{vy} + f^2 f_{yy} + f_y f_v + f f_y f_v \tag{5.22}$$

En posant aussi : $D = \partial / \partial u + f\left(\partial / \partial y\right)$, ce qui implique de décrire $D^2$, $D^3$ comme suit :

$$D^2 = \left[\partial / \partial u + f\left(\partial / \partial y\right)\right]^2 = \partial^2 / \partial u + 2f\left[\left(\partial^2 / \partial u \partial y\right)\right] + f^2\left(\partial^2 / \partial y^2\right) \text{ et}$$

$$D^3 = \partial^3 / \partial u^3 + 3f\frac{\partial^3}{\partial u^2 \partial y} + 3f^2\frac{\partial^3}{\partial u \partial y^2} + f^3\frac{\partial^3}{\partial y^3}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} y' &= f \\ y'' &= f_v + f f_y = Df \\ y''' &= f_{vv} + 2 f f_{vy} + f^2 f_{yy} + f_y\left(f_v + f f_y\right) = D^2 f + f_y Df \end{aligned} \tag{5.23}$$

Similaire à l'équation :

$$D^3 f = \partial^3 f / \partial u^3 + 3f\frac{\partial^3 f}{\partial u^2 \partial y} + 3f^2\frac{\partial^3 f}{\partial u \partial y^2} + f^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

Alors nous avons :

$$y^{iv} = \frac{\partial(D^2 f + f_y Df)}{\partial u} + \frac{\partial(D^2 f + f_y Df)}{\partial y}\frac{dy}{du} = D^3 f + f_y D^2 f + 3DfDf_y \tag{5.24}$$

Substituant l'équation. (5. 23) et (5.24) dans l'équation (5.20) on aura :

$$y(v_0+h)-y(v_0)=hy'_0+\frac{h^2}{2!}y''_0+\frac{h^3}{3!}y'''_0+\frac{h^4}{4!}y^{iv}_0\ldots.$$

$$\approx hy'_0+\frac{h^2}{2!}y''_0+\frac{h^3}{3!}y'''_0+\frac{h^4}{4!}y^{iv}_0 \tag{5.25}$$

$$=\left[hf+\frac{h^2}{2!}Df+\frac{h^3}{3!}\left(D^2f+f_yDf\right)+\frac{h^4}{4!}\left(D^3f+f_yD^2f+3DfDf_y\right)\right]_{v=v_0}$$

On néglige tout terme dont son ordre est supérieur au quatrième ordre. On observe que l'équation (5.25) a une erreur de troncation de $h^5$.

Par ailleurs $f=\frac{dy}{du}$ avec $dy=fdu$, donc l'équation (5.20) peut être exprimée comme suit :

$$y(u_0+h)=y(u_0)+\int_{u_0}^{u_0+h}\frac{dy}{dv}du=y(u_0)+\int_{u_0}^{u_0+h}f(u,y)du \tag{5.26}$$

L'intégrale d'équation (5.26) peut être exprimée comme suit :

$$y(u_0+h)-y(u_0)=\int_{u_0}^{u_0+h}f(u,y)du=hf(u_0+\theta h,y(u_0+\theta h)) \tag{5.27}$$

Où :

$$0\prec\theta\prec h$$

On note que les équations (5.27) et (5.25) sont équivalentes. Donc l'équation linéaire s'écrit :

$$hf(u_0+\theta h,y(u_0+\theta h))=y(u_0+h)-y(u_0)=\mu_1k_1+\mu_2k_2+\mu_3k_3\mu_4k_4 \tag{5.28}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
k_1&=hf(u_0,y_0)=hf_0\\
k_2&=hf(u_0+\alpha h,y_0+\beta k_1)\\
k_3&=hf(u_0+\alpha_1h,y_0+\beta_1k_1+\gamma_1k_2)\\
k_4&=hf(u_0+\alpha_2h,y_0+\beta_2k_2+\gamma_2k_2+\delta_2k_3)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Où $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\kappa,\beta,\kappa_1,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2$ et $\delta_2$ sont les constantes à déterminer, en appliquant le théorème de série de Taylor en replaçant les fonction $f(u_0,y_0)$, $f(u_0+\alpha h,y_0+\beta k_1)$, $f(u_0+\alpha_1h,y_0+\beta_1k_1+\gamma_1k_2)$ et $f(u_0+\kappa_2h,y_0+\beta_2k_1+\gamma_2k_2+\delta_2k_3)$ dans l'équation. (5.29). La série de Taylor de la fonction de deux variables est résumée comme suit :

$$f\left(u_0+\kappa_r, y_0+\beta_r\right)=\left[f\left(u, y\right)+D_r f\left(u, y\right)+\frac{D_r^2 f\left(u, y\right)}{2!}+\frac{D_r^3 f\left(u, y\right)}{3!}+\frac{D_r^4 f\left(u, y\right)}{4!}+\ldots\right]_{y=y_0} \quad (5.30)$$

Et l'opération est définie comme :

$$D_r=\kappa_r \frac{\partial}{\partial u}+\beta_r \frac{\partial}{\partial y} \quad (5.31)$$

Où $\kappa_r$ et $\beta_r$ sont des scalaire.

D'après la série de Taylor on exprime $k_1, k_2, k_3$ et $k_4$ à partir des deux équations (5.20) et (5.21), comme suit :

$$k_1=hf\left(u_0, y_0\right)=hf_0 \quad (5.32a)$$

$$k_2=hf\left(u_0+\kappa h, y_0+\beta k_1\right)=h\left[f+D_{11} f+\frac{D_{11}^2 f}{2!}+\frac{D_{11}^3 f}{3!}+\frac{D_{11}^4 f}{4!}+\ldots\right]_{u=u_0}$$

$$=h\left[f+D_1 f+\frac{h^2}{2!} D_1^2 f+\frac{h^3}{3!} D_1^3 f+\frac{h^4}{4!} D_1^4 f+\ldots\right]_{u=u_0} \quad (5.32b)$$

Où :

$D_{11}=(\kappa h) \partial/\partial u+\left(\beta k_1\right) \partial/\partial y$ et $D_1=D_{11}/h$ De même, $D_{21}=\kappa_1 h\left(\partial/\partial u\right)+\left(\beta_1 k_1+\gamma_1 k_2\right)\left(\partial/\partial y\right)$ et $D_2=\kappa_1\left(\partial/\partial u\right)+\left(\beta_1+\gamma_1\right) f_0\left(\partial/\partial y\right)$ Alors :

$$D_{21}=\kappa_1 h\left(\partial/\partial u\right)+\left(\beta_1 k_1+\gamma_1 k_2\right)\left(\partial/\partial y\right)=h\left(\kappa_1 \frac{\partial}{\partial u}+\beta_1 f_0 \frac{\partial}{\partial y}\right)+\gamma_1 k_2 \frac{\partial}{\partial y}$$

$$=hD_2+\gamma_1\left(k_2-hf_0\right) \frac{\partial}{\partial y}=hD_2+\gamma_1\left[h^2 D_1 f+\frac{h^3}{2!} D_1^2 f+\frac{h^4}{3!} D_1^4 f+\ldots\right]_{u=u_0} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$=hD_2+\gamma_1\left(k_2-hf_0\right) \frac{\partial}{\partial y}=hD_2+\gamma_1 h^2\left[D_1 f+\frac{h}{2!} D_1^2 f+\frac{h^2}{3!} D_1^3 f+\ldots\right]_{u=u_0} \frac{\partial}{\partial y} \quad (5.33)$$

$$D_{31}=\kappa_2 h\left(\partial/\partial u\right)+\left(\beta_2 k_1+\gamma_2 k_2+\delta_2 k_3\right)\left(\partial/\partial y\right)=hD_3+\left[\gamma_2\left(k_2-hf_0\right)++\delta_2\left(k_3-hf_0\right)\right] \frac{\partial}{\partial y}$$

D'après l'équation. (5.24), $k_3$ peut être exprimé comme suit :

$$k_3 = hf\left(u_0 + \kappa_1 y_0 + \beta_1 k_1 + \gamma_1 k_2\right) = h\left[f + D_{21}f + \frac{D_{21}^2 f}{2!} + \frac{D_{21}^3 f}{3!} + \frac{D_{21}^4 f}{4!} + \ldots\right]_{u=u_0}$$

$$= h\left\{\begin{array}{l}\left[f + hD_2 f + \frac{h^2}{2!}D_2^2 f + \frac{h^3}{3!}D_2^3 f + \frac{h^4}{4!}D_2^4 f + \ldots\right] \\ + h^2\gamma_1\left[f_y D_1 f + \frac{h}{2!}f_y D_1^2 f + hD_1 f D_2 f_y + \frac{h^2}{3!}f_y D_1^3 f + \ldots\right]\ldots\end{array}\right\} \quad (5.34)$$

La relation du formule $D_{31}$ s'écrit comme suit:

$$D_{31} = hD_3 + h^2\left\{\begin{array}{l}\gamma_2\left[D_1 f + \frac{h}{2!}D_1^2 f + \frac{h^2}{3!}D_1^3 f + \frac{h^3}{4!}D_1^4 f + \frac{h^4}{4!}D_2^4 f + \ldots\right] \\ + \delta_2\left[D_2 f + \frac{h}{2}\left(D_2^2 f + 2\gamma_1 f_y D_1 f\right) + \frac{h^2}{3!}D_2^3 f + \frac{h}{2!}\gamma_1 f_y D_1^2 f + h^2\gamma_1 D_1 f D_2 f_y + \ldots\right]\end{array}\right\}_{u=u_0} \frac{\partial}{\partial y}$$

Pour trouver $k_4$, on remplace $k_2$ et $k_3$ dans l'équation. (5.32) et (5.34) on aura :

$$k_4 = hf\left(u_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_2 k_1 + \gamma_2 k_2 + \delta_2 k_3\right) = h\left[f + D_{31}f + \frac{D_{31}^2 f}{2!} + \frac{D_{31}^3 f}{3!} + \frac{D_{31}^4 f}{4!} + \ldots\right]_{u=u_0}$$

$$= h\left\{\begin{array}{l} f + hD_3 f + h^2 f_y\left[\begin{array}{l}\gamma_2\left(D_1 f \frac{h}{2!}D_1^2 f + \frac{h^2}{3!}D_1^3 f + \ldots\right) \\ + \delta_2\left(D_2 f + h\gamma_1 f_y D_1 f + \frac{h}{2!}D_2^2 f + \frac{h^2}{2}\gamma_1 f_y D_1^2 f + h^2\gamma_1 D_1 f D_2 f_y + \frac{h^2}{3!}D_2^3 f + \ldots\right)\end{array}\right] \\ + \frac{1}{2!}\left(\begin{array}{l}h^2 D_3^2 f + 2h^3 D_3 f_y\left[\gamma_2\left(D_1 f + \frac{h}{2}D_1^2 f + \ldots\right) + \delta_2\left(D_2 f + \frac{h}{2!}D_2^2 f + h\gamma_1 f_y D_1 f + \ldots\right)\right] \\ + h^4 f_{yy}\left[\gamma_2^2 D_1^2 f + 2\gamma_2\delta_2 D_1 f D_2 f + \delta^2\left(D_2 f\right)^2\right]\end{array}\right) + \\ \frac{1}{3!}\left(h^3 D_3^3 f + 3h^4 D_3^2 f_y\left[\gamma_2 D_1 f + \delta_2 D_2 f + \ldots\right]\right) + \frac{1}{4!}\left(h^4 D_3^4 f + \ldots\right) + \ldots\end{array}\right\}_{u=u_0} \quad (5.35)$$

Les constants $\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \gamma_1, \gamma_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \delta_2$ sont donnés successivement $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 1$ avec

$\beta = \frac{1}{2}, \beta_1 = 0$ et $\beta_2 = 0$

Après le remplacement des constants dans l'équation (5. 28) et (5.29) on aura :

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(u_0, y_0) \\
k_2 &= hf\left(u_0 + h/2, y_0 + k_1/2\right) \\
k_3 &= hf\left(u_0 + h/2, y_0 + k_2/2\right) \\
k_4 &= hf\left(u_0 + h/2, y_0 + k_3\right)
\end{aligned} \tag{5.36a}$$

et:

$$\begin{aligned}
y(u_0 + h) - y(u_0) &= \mu_1 k_1 + \mu_2 k_2 + \mu_3 k_3 + \mu_4 k_4 \\
&= 1/6\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]
\end{aligned} \tag{5.36b}$$

Cette dernière équation représente une formule de quatrième ordre de RUNGE - KUTTA. Comme mentionné précédemment, la méthode RUNGE-KUTTA de quatrième ordre sert à rapprocher les solutions des équations de premier ordre.

En se basant sur les deux équations (5.18) et (5.19) fondées de l'équation (5.36a), on peut exprimer $s(t+\Delta t)$ comme suit :

$$s(t+\Delta t) = s(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{5.37}$$

Où :

$$\begin{aligned}
k_1 &= (\Delta t) f(t, u(t), s(t)) \\
k_2 &= (\Delta t) f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, u(t) + \frac{q_1}{2}, s(t) + \frac{k_1}{2}\right) \\
k_3 &= (\Delta t) f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, u(t) + \frac{q_2}{2}, s(t) + \frac{k_2}{2}\right) \\
k_4 &= (\Delta t) f(t + \Delta t, u(t) + q_3, s(t) + k_3)
\end{aligned} \tag{5.38}$$

A partir de l'équation (5.37) on peut écrire :

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \frac{1}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4) \tag{5.39}$$

Où :

$$
\begin{aligned}
q_1 &= (\Delta t)F(s(t)) = (\Delta t)s(t) \\
q_2 &= (\Delta t)F\left(s(t)+\frac{k_1}{2}\right) = (\Delta t)\left(s(t)+\frac{k_1}{2}\right) \\
q_3 &= (\Delta t)F\left(s(t)+\frac{k_2}{2}\right) = (\Delta t)\left(s(t)+\frac{k_2}{2}\right) \\
q_4 &= (\Delta t)F(s(t)+k_3) = (\Delta t)(s(t)+k_3)
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

Maintenant on remplace l'équation (5.40) dans les équations (5.39) et (5.28), on aura :

$$
\begin{aligned}
k_1 &= (\Delta t)f(t,u(t),s(t)) \\
k_2 &= (\Delta t)f\left(t+\frac{\Delta t}{2}, v(t)+\frac{\Delta t}{2}s(t), s(t)+\frac{k_1}{2}\right) \\
k_3 &= (\Delta t)f\left(t+\frac{\Delta t}{2}, u(t)+\frac{\Delta t}{2}\left(s(t)+\frac{k_1}{2}\right), s(t)+\frac{k_2}{2}\right) \\
k_4 &= (\Delta t)f\left(t+\Delta t, v(t)+\Delta t\left(s(t)+\frac{k_2}{2}\right), s(t)+k_3\right) \\
&= (\Delta t)f\left(t+\Delta t, v(t)+(\Delta t)s(t)+\frac{\Delta t}{2}k_2, s(t)+k_3\right)
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

et

$$
u(t+\Delta t) = u(t)+\frac{1}{6}(q_1+2q_2+2q_3+q_4)
$$

$$
= u(t)+\frac{1}{6}\left[\Delta t s(t)+2\Delta t\left(s(t)+\frac{k_1}{2}\right)+2\Delta t\left(s(t)+\frac{k_2}{2}\right)+\Delta t(s(t)+k_3)\right]
$$

$$
= u(t)+\frac{1}{6}\Delta t[6s(t)+k_1+k_2+k_3] \tag{5.42}
$$

$$
= u(t)+\Delta t\dot{u}(t)+\frac{\Delta t}{6}[k_1+k_2+k_3]
$$

D'après les équations (5. 35), (5.41), et (5.42), la solution numérique pour l'équation de mouvement (5,16) basée sur la méthode de quatrième ordre de RUNGE-KUTTA peut être résumée comme suit :

$$
\{u(t+\Delta t)\} = \{u(t)\}+\Delta t\{\dot{u}(t)\}+\frac{\Delta t}{6}[\{k_1\}+\{k_2\}+\{k_3\}] \tag{5.43}
$$

$$\{\dot{u}(t+\Delta t)\} = \{\dot{u}(t)\} + \frac{1}{6}\left(\{k_1\} + 2\{k_2\} + 2\{k_3\} + \{k_4\}\right) \tag{5.44}$$

Où :

$$\begin{aligned}\{k_1\} &= \Delta t\{t, u(t), \dot{s}(t)\}\\ &= \Delta t[M]^{-1}\left(\{p(t) - [K]\{u(t)\}\} - [C]\{\dot{v}(t)\}\right)\end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\{k_2\} = (\Delta t)\left\{ f\left( t + \frac{\Delta t}{2}, u(t) + \frac{\Delta t}{2} s(t), s(t) + \frac{k_1}{2}\right)\right\} \tag{5.46}$$

$$= \Delta t[M]^{-1}\left(\left\{ p\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - [K]\left\{u(t) + \frac{\Delta t}{2}\{\dot{u}(t)\}\right\}\right\} - [C]\left\{\dot{u}(t) + \frac{1}{2}\{k_1\}\right\}\right)$$

$$\{k_3\} = (\Delta t)\left\{ f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, u(t) + \frac{\Delta t}{2} s(t), s(t) + \frac{\Delta t}{4} k_1, s(t) + \frac{k_2}{2}\right)\right\} \tag{5.47}$$

$$= \Delta t[M]^{-1}\left( p\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - [K]\left(u(t) + \frac{\Delta t}{2}\left\{\dot{u}(t) + \frac{\Delta t}{4}\right\}\right) - [C]\left(\{\dot{u}(t)\} + \frac{1}{2}\{k_2\}\right)\right)$$

$$\{k_4\} = (\Delta t)\left\{ f\left( t + \Delta t, u(t) + \Delta t s(t), s(t) + \frac{\Delta t}{2} k_2, s(t) + k_3\right)\right\} \tag{5.48}$$

$$= \Delta t[M]^{-1}\left( p(t + \Delta t) - [K]\left( u(t) + \Delta t\{\dot{u}(t)\} + \frac{\Delta t}{2}\right) - [C]\left(\{\dot{u}(t)\} + \{k_3\}\right)\right)$$

### 5.3. Solution du modèle dynamique de l'isolateur à comportement linéaire :

La solution du modèle dynamique de l'isolateur à comportement linéaire de l'équation (5.1) par la méthode de RUNGE – KUTTA est effectuée selon les étapes suivantes :

1- Calcul des vecteurs de l'accélération $\{\ddot{u}_0\}$à partir des conditions initiales à $t = 0, \{\dot{u}\} = \{0\}, \{u\} = \{0\}$ comme suit :

$$[M]\{\ddot{v}_0^*\} = [M_0]\{r^t\}\ddot{u}_g(0) - [C]\{\dot{v}^*(0)\} - [K]\{v^*(0)\} \tag{5.49}$$

2- Choix du pas d'intégration $\Delta t$ .

3- Incrémentation du temps $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ avec, $n = 1,2,3,.........t_d / \Delta t$

4-Calcul des constantes $k_1, k_2, k_3$ et $k_4$ d'après les équations (5.36),(5.37),(5.38) et (5.39) on aura:

$$k_1 = t_{n+1}[M]^{-1}\left[[M_0]\{r^t\}\ddot{u}_g(0) - [C]\{\dot{v}^*(0)\} - [K]\{v^*(0)\}\right] \tag{5.50}$$

$$k_2 = t_{n+1}M^{-1}\left[[M_0]\{r^t\}\ddot{u}_g\left(\frac{t_{n+1}}{2}\right) - [k]\left(\{v^*(0)\} + \frac{t_{n+1}}{2}\{\dot{v}^*(0)\}\right) - [C]\left(\{\dot{v}^*(0)\} + \frac{[K_1]}{2}\right)\right] \tag{5.51}$$

$$k_3 = t_{n+1}[M^{-1}]\left[[M_0]\{r^t\}\ddot{u}_g\left(\frac{t_{n+1}}{2}\right) - [K]\left(\{v^*(0)\} + \frac{t_{n+1}}{2}\{\dot{v}^*(0)\} + \frac{t_{n+1}}{4}[K_1]\right) - [C]\left(\{\dot{v}^*(0)\} + \frac{[K_2]}{2}\right)\right] \tag{5.52}$$

$$k_4 = t_{n+1}[M^{-1}]\left[[M_0]\{r^t\}\ddot{u}_g(t_{n+1}) - [K]\left(\{v^*(0)\} + t_{n+1}\{\dot{v}^*(0)\} + \frac{t_{n+1}}{2}[K_2]\right) - [C](\{\dot{v}^*(0)\} + [K_3])\right] \tag{5.53}$$

5- Calcul du vecteur de déplacement, et la vitesse, par les équations (5.43), (5.44) comme suit :

$$\{v^*_{n+1}\} = \{v^*(0)\} + t_{n+1}\{\dot{v}^*(0)\} + \frac{\Delta t}{6}([K_1] + [K_2] + [K_3]) \tag{5.54}$$

$$\{\dot{v}^*_{n+1}\} = \{\dot{v}^*(0)\} + \frac{1}{6}([K_1] + 2[K_2] + 2[K_3] + [K_4]) \tag{5.55}$$

6- Calcul du vecteur de l'accélération à partir de l'équation (5.16) comme suit :

$$\{\ddot{v}^*_{n+1}\} = \{M^{-1}\}\left[[M_0]\{r^t\}\ddot{u}_g(t_{n+1}) - [K]\{v^*\}(t_{n+1}) - [C]\{\dot{v}^*\}(t_{n+1})\right] \tag{5.56}$$

**5.3.4. Solution du modèle dynamique de l'isolateur à comportement non - linéaire :**

La solution du modèle dynamique, pour les différents systèmes d'isolateur de comportement non – linéaire, par la méthode numérique de NEWMARK, est décrite comme suit :

L'équation générale pour un système de comportement non linéaire peut être écrite sous forme réduite comme suit :

$$[\tilde{M}]\{\ddot{v}_t\} + [\tilde{C}]\{\dot{v}_t\} + [\tilde{K}]\{v_t\} + \{F_t\} = \{\tilde{P}_t\} \tag{5.57}$$

Avec $\{\tilde{P}_t\} = [M_0]\{r^t\}\ddot{u}_g$

Et à partir du temps $t + \Delta t$, on peut écrire la formule ci-dessus comme suit :

$$[\tilde{M}]\{\ddot{v}_{t+\Delta t}\} + [\tilde{C}]\{\dot{v}_{t+\Delta t}\} + [\tilde{K}]\{v_{t+\Delta t}\} + \{F_{t+\Delta t}\} = \{\tilde{P}_{t+\Delta t}\} \tag{5.58}$$

Aussi on peut écrire la formule sous forme incrémentale comme suit :

$$[\tilde{M}]\{\Delta\ddot{v}_{t+\Delta t}\} + [\tilde{C}]\{\Delta\dot{v}_{t+\Delta t}\} + [\tilde{K}]\{\Delta v_{t+\Delta t}\} + \{\Delta F_{t+\Delta t}\} = \{\tilde{P}_{t+\Delta t}\} - [\tilde{M}]\ddot{v}_t - [\tilde{C}]\Delta\dot{u}_t - [\tilde{K}]\Delta v_t - \{F_t\} \tag{5.59}$$

Où $[\tilde{M}]$, $[\tilde{C}]$, $[\tilde{K}]$ et $[\tilde{P}]$ représentent respectivement la matrice de masse, la matrice d'amortissement, la matrice de rigidité et le vecteur de force externe due au séisme .

L'incrément de vecteur de force $\{\Delta F_{t+\Delta t}\}$ non linéaire en (5.59) est inconnu. Ce vecteur de force est apporté au côté droit de l'Eq.(5.59) et traité comme pseudo-force. L'algorithme de NEWMARK stable constante sans réserve d'accélération moyenne, a deux étapes, décrites ci-dessous, pour solutionner les équations du mouvement :

**Première étape ; Les conditions initiales :**

a. Calcul de la matrice de rigidité $[\tilde{K}]$, la matrice de masse $[\tilde{M}]$, la matrice d'amortissement $[\tilde{C}]$. en utilisant les vecteurs $\{\ddot{v}_0\}$, $\{\dot{v}_0\}$ et $\{v_0\}$.

b. Choix du pas de temps, $\Delta t$ et des paramètres $\delta = 0.25$ et $\theta = 0.5$ pour calculer les constantes d'intégration :

$$a_1 = \frac{1}{\delta(\Delta t)^2} \tag{5. 60-a}$$

$$a_2 = \frac{1}{\delta.\Delta t} \tag{5.60-b}$$

$$a_3 = \frac{1}{2\delta} \tag{5.60-c}$$

$$a_4 = \frac{\theta}{\delta.\Delta t} \tag{5.60-d}$$

$$a_5 = \frac{\theta}{\delta} \tag{5.60-e}$$

$$a_6 = \Delta t\left(\frac{\theta}{2\delta} - 1\right) \tag{5.60-f}$$

c. Calcul de la matrice de rigidité effective :

$$\left[K^*\right] = a_1\left[\tilde{M}\right] + a_4\left[\tilde{C}\right] + \left[\tilde{K}\right] \tag{5.61}$$

**Deuxième étapes ; L'itération à chaque pas de temps**

a. Supposition du vecteur de pseudo force : $\left\{\Delta F^{i}_{t+\Delta t}\right\} = \{0\}$ (5.62)

Dans l'itération i=1 :

b. Calcul du vecteur de la force au temps $t + \Delta t$

$$\left\{P^*_{t+\Delta t}\right\} = \left\{\Delta P^*_{t+\Delta t}\right\} - \left\{\Delta F^{i}_{t+\Delta t}\right\} + \left[\tilde{M}\right]\left(a_2\{\dot{v}_t\} + a_3\{\ddot{v}_t\}\right) + \left[\tilde{C}\right]\left(a_5\{\dot{v}_t\} + a_4\{\ddot{v}_t\}\right) \tag{5.63}$$

$$\left\{\Delta\tilde{P}_{t+\Delta t}\right\} = \left\{\tilde{P}_{t+\Delta t}\right\} - \left(\left[\tilde{M}\right]\{\ddot{v}_t\} + \left[\tilde{C}\right]\{\dot{v}_t\} + \left[\tilde{K}\right]u\{v_t\} + \{F_t\}\right) \tag{5.64}$$

**c**. Calcul du vecteur du déplacement au $t + \Delta t$ par la formule :

$$\left[K^*\right]\left\{\Delta v^{i}_{t+\Delta t}\right\} = \left\{P^*_{t+\Delta t}\right\} \tag{5.65}$$

d. Adaptation de l'état de mouvement au temps $t + \Delta t$ comme suit :

$$\left\{\ddot{v}_{t+\Delta t}\right\} = \{\ddot{v}_t\} + a_1\left\{\Delta v^{i}_{t+\Delta t}\right\} - a_2\{\dot{v}_t\} - a_3\{\ddot{v}_t\} \tag{5.66}$$

$$\left\{\dot{v}_{t+\Delta t}\right\} = \{\dot{v}_t\} + a_4\left\{\Delta v^{i}_{t+\Delta t}\right\} - a_5\{v_t\} - a_6\{\ddot{v}_t\} \tag{5.67}$$

$$\left\{v_{t+\Delta t}\right\} = v_t + \Delta v^{i}_{t+\Delta t} \tag{5.68}$$

e. Calcul du vecteur de la force non linéaire résultant de pseudo force $\left\{\Delta F_{t+\Delta t}^{i+1}\right\}$

f. Calcul de l’erreur :

$$erreur = \frac{\left|\left\{\Delta F_{t+\Delta t}^{i+1}\right\} - \left\{\Delta F_{t+\Delta t}^{i}\right\}\right|}{\left|\left\{\Delta F_{t+\Delta t}^{i}\right\}\right|} \tag{5.69}$$

g. Si l'erreur $\geq$ tolérance, davantage d'itération est nécessaire pour la deuxième étape en utilisant $\left\{\Delta F_{t+\Delta t}^{i+1}\right\}$, comme vecteur de pseudo-force et état du mouvement au temps $t$, $\{\ddot{v}_t\}$ $\{\dot{v}_t\}$ et $\{v_t\}$.

h. Si l’erreur $\prec$ tolérance, aucune itération n’y a lieu.