II- ETUDE DE L'ECOULEMENT DANS UN DIFFUSEUR A ANGLE VARIABLE

CHAPITRE II ETUDE DE L'ECOULEMENT DANS UN DIFFUSEUR A ANGLE VARIABLE

II-1- INTRODUCTION

Les lois physiques qui gouvernent l'écoulement d'un fluide expriment la conservation de la masse et de la quantité du mouvement.

Les lois de conservation s'expriment mathématiquement par des équations aux dérivées partielles (équations de **' Navier Stokes'**).

II- 2- EQUATION DE CONTINUITE

Cette équation est développée en écrivant l'équilibre massique à un volume de contrôle élémentaire de la figure (II-1) à travers lequel le fluide s'écoule :

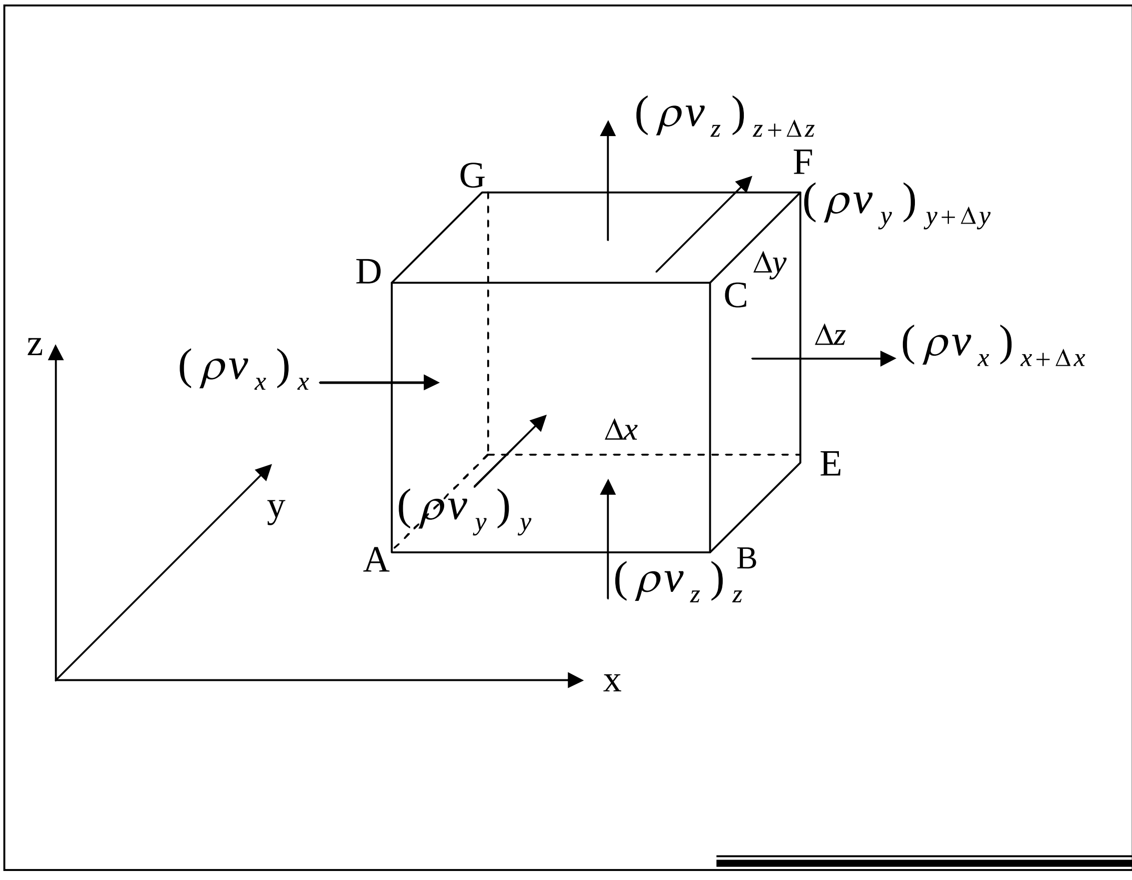

Figure (II-1) *: volume de contrôle élémentaire*

Le principe de la conservation de la masse s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} Taux \quad de \quad variation \\ de \quad la \quad masse \quad contenue \quad dans \\ le \quad volme \quad \Delta x \Delta y \Delta z \end{cases} = \begin{cases} Débit \quad massique \quad pénétrant \\ dans \quad le \quad volume \\ \Delta x \Delta y \Delta z \end{cases}$$

$$- \begin{cases} Débit \quad massique \quad sortant \\ du \quad volume \\ \Delta x \Delta y \Delta z \end{cases} \qquad \text{(II-1)}$$

Ce bilan massique peut se traduire par l'équation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \chi_i}(\rho V_i) = 0 \qquad \text{(II-2)}$$

Où : ρ : la masse volumique du fluide (kg/m^3)

V : la vitesse du fluide (m/s)

L'équation (II-2) peut s'écrire:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla . V = 0 \qquad \text{(II-3)}$$

$\frac{D}{Dt}$: représente l'opérateur dérivée particulaire définie par :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{(II-4)}$$

II-3- EQUATION DE QUANTITE DE MOUVEMENT

Considérons un domaine « D » d'un fluide, alors la dérivée par rapport au temps du torseur $\lfloor \rho \vec{U} \rfloor_D$ (où $\vec{U}$ est le vecteur vitesse) des quantités de mouvement est égale au torseur des forces extérieures appliquées au domaine « D »

Ces forces se composent de :

***** Forces de volume dues à l'existence d'un ou plusieurs champs de forces, elles sont de la forme ‘‘ $\rho \vec{F} dV$ ’’ pour un élément de volume ‘‘ dV ’’.

****** forces dues aux actions moléculaire du milieu extérieur sur une surface, elles sont appelées forces de surface ‘‘ $\vec{T} ds$ ’’

Où :

$$\overrightarrow{T} = \sigma_{ij} \overrightarrow{n_j} \tag{II-5}$$

σ_{ij} : tenseur de contrainte, il se décompose en tenseur de contraintes de viscosité τ_{ij} et en tenseur des contraintes associées à la pression - $P\overline{\delta}$ P : est la pression

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} \tag{II-6}$$

avec $$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On peut écrire aussi :

$$\left\{ \begin{array}{l} Quantité \\ d'accélération \\ par\ \ unité \\ de\ \ volume \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} force\ \ associées \\ à\ \ la\ \ pression\ \ pression\ \ par \\ unité\ \ de \\ volume \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} forces \\ de\ \ volume \\ par\ \ unité \\ de\ \ volume \end{array} \right. + \left\{ \begin{array}{l} contraintes \\ visqueuses \\ par\ \ unité \\ de\ \ volume \end{array} \right.$$

Alors l'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho g - \nabla p + \nabla \tau \tag{II-7}$$

Cette notation fait apparaître la divergence du tenseur τ, $\nabla.\tau$ est un vecteur dont la composante suivant l'axe i est : $(\nabla.\tau)_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij}$

Avec :
$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \tag{II-8}$$

En notation indicielle :

$$\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial xj}\left(\mu\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\right) \tag{II-9}$$

Pour un fluide incompressible en écoulement stationnaire on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho U_j U_i\right] = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \tag{II-10}$$

II-4- EQUATIONS DE L'ECOULEMENT EN COORDONNEES CYLINDRIQUES :

Vu que notre modèle du domaine physique a une forme de section circulaire, il est très utile de présenter les équations décrivant l'écoulement en coordonnées cylindriques

a/ Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r U) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho W) = 0 \tag{II-11}$$

avec *U, V, W* sont les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{U}$ dans le repère (0 , r, θ, z)

b/ Equations de quantité de mouvement :

$$\rho\left(\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{V}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}+W\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{V^{2}}{r}\right)=$$

$$\rho g_{r}-\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\tau_{rr}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}$$

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}+U\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{V}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}+W\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{U.V}{r}\right)=$$

$$\rho g_{\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\left(\frac{1}{r}\right)^{2}\frac{\partial\left(r^{2}\tau_{r\theta}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}$$

$$\rho\left(\frac{\partial W}{\partial t}+U\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{V}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta}+W\frac{\partial W}{\partial z}\right)=$$

$$\rho g_{z}-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\tau_{rz}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \qquad \text{(II-12)}$$

Avec :

$$\tau_{rr}=2\mu\frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\tau_{\theta\theta}=2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}+\frac{U}{r}\right)$$

$$\tau_{zz}=2\mu\frac{\partial W}{\partial z}$$

$$\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}=\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right] \qquad \text{(II-13)}$$

$$\tau_{\theta z}=\tau_{z\theta}=\mu\left[\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta}\right]$$

$$\tau_{zr}=\tau_{rz}\ \mu\left[\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial r}\right]$$

II-5- ECOULEMENT DANS UN DIFFUSEUR CONIQUE :

Notre travail est consacré pour l'étude d'un écoulement visqueux incompressible dans un diffuseur conique à angle variable dont la géométrie est représentée sur la figure (II-2), des simplifications sont misent en considération par certaines suppositions pour faciliter la solution des équations de mouvement :

- Le fluide mis en étude est un fluide incompressible ($\rho = C^{st}$)
- L'écoulement du fluide dont le régime est laminaire s'écoule à travers le domaine étudié est stationnaire $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- L'écoulement est symétrique $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$
- L'effet des forces de volume est négligeable devant l'influence des autres forces $\left(\vec{g} = \vec{0}\right)$(forces de pression, forces d 'inertie et forces visqueuses).

En tenant compte de ces hypothèses le système d'équation précèdent devient :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r U) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho W) = 0 \qquad (II-14)$$

$$\rho\left(U\frac{\partial U}{\partial r} + W\frac{\partial U}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU)\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right] \qquad (II-15)$$

$$\rho\left(U\frac{\partial W}{\partial r} + W\frac{\partial W}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right] \qquad (II-16)$$

Ces équations seront appliquées au domaine d'étude représenté sur la figure (II-2):

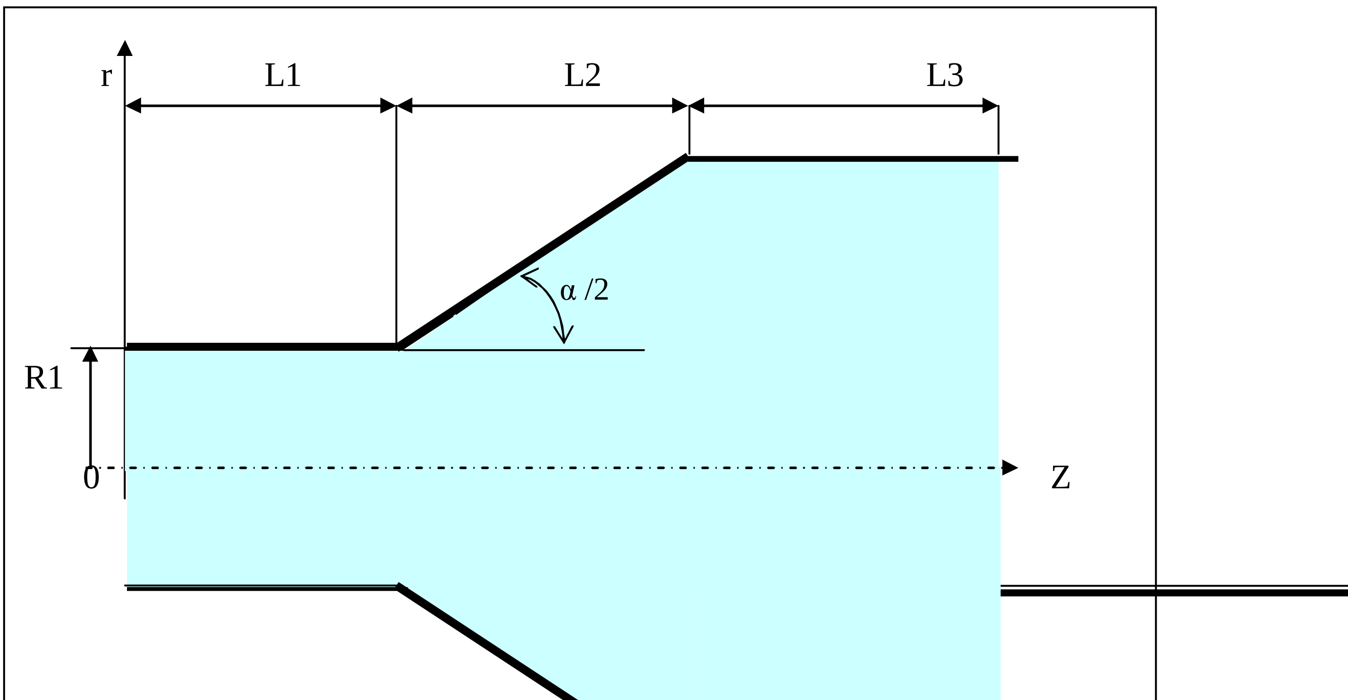

Figure (II-2) *: Représentation géométrique du domaine d'étude*

II-6- CONDITIONS AUX LIMITES:

Une fois qu'on a configuré le système d'étude, il convient de formuler les conditions aux limites adéquates permettant de trouver des solutions aux équations précédentes.

Pour le cas de notre problème, nous donnons les conditions aux limites suivantes :

i) Le profil de la vitesse à l'entrée est parabolique : les lignes de courant sont parallèles aux parois, ceci est exprimé par :

$$Z = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} U = 0 \\ W = 2W_e(1-r)^2 \end{array} \right\} \tag{II-17}$$

Où :

W_e : est la vitesse de l'écoulement à l'entrée de la conduite tel que

$$W_e = \frac{\mathrm{Re}.\mu}{\rho.D} \quad \text{et} \quad D = 2.\mathrm{R1}$$

ii) Vu que l'écoulement est axisymétrique, les conditions peuvent se traduire par :

$$r = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial W}{\partial r} = 0 \\ U = 0 \end{array} \right. \tag{II-18}$$

iii) L'effet d'adhérence avec la paroi solide exige que :

A la paroi :
$$\begin{cases} W = 0 \\ U = 0 \end{cases} \qquad \text{(II-19)}$$

iv) A la sortie, et comme l'écoulement tend à s'établir alors on peut écrire :

A la sortie
$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad \text{(II-20)}$$

Ces conditions aux limites vont servir à orienter la solution du problème afin qu'il reflète le bon sens du comportement physique de l'écoulement à l'intérieur des conduites divergentes.