

## CHAPITRE I : INTRODUCTION GENERALE

Le problème mécanique que pose la réalité quotidienne concerne des corps, au temps le dire, qui n'ont jamais des formes simples et pour les quelles on peut espérer des solutions analytiques simples, il devient alors nécessaire de recourir à une pratique plus systématique de la décomposition en morceaux déformables ou modélisation. En conséquence, la méthode des éléments finis est généralement considérée comme l'outil le plus puissant à l'analyse linéaire dans la conception des structures, même si, pour des raisons pratiques (résistance, esthétique...), on limite souvent le domaine de fonctionnement normal des structures à des déplacements faibles, de sorte que des calculs linéaires suffisent à prédire leur comportement, cependant, il ne doit pas être perdu de vue que les structures réelles ont un comportement en général non-linéaire.

A ce stade, cette méthode gagne encore du terrain, leur importance reste indispensable pour des situations non-linéaires délicates (évaluation du comportement au moment de la ruine de la structure), quelle dépend de deux facteurs principaux. Premièrement, en raison des opérations numériques accrues liées aux problèmes non linéaires, la puissance d'un calcul considérable est exigée. Les développements dans la dernière décennie ont assuré des calculateurs numériques qui satisfont ce besoin avec un coût de calcul réduit. Deuxièmement, avant que la méthode des éléments finis puisse être employée dans la conception, l'exactitude de n'importe quelle solution technique proposée doit être prouvée. Le développement des caractéristiques améliorées d'élément et des solutions algorithmiques non linéaires plus efficaces et l'expérience acquise dans les problèmes rencontrés ont assuré la réalisation des analyses non linéaires avec certaine fiabilité. Par conséquent des obstacles à l'exploitation de ces techniques sont rapidement enlevés et le processus sur le plan économique est acceptable pour des applications industrielles choisies.

### I.1. Structures minces et épaisses :

Les structures complexes que l'on étudie couramment sont constituées de sous-ensembles aux géométries les plus diverses : barres ou poutres, plaques et coques minces ou épaisses, parties massives. Pour chacun de ces constituants, on dispose de la formulation de la théorie de l'élasticité ou plasticité ou de modèles théoriques qui en sont dérivés ( théorie des poutres, plaques et coques ). Nous nous sommes intéressés uniquement, dans ce travail, à l'analyse non linéaire ( élasto-plasticité ) des structures de type « plaque ».

Les plaques sont des structures en état plan de contraintes. Ce sont donc des structures minces et planes. Les plaques sont l'équivalent des poutres en 2D : Elles admettent des déplacements verticaux suivant l'axe  $z$ .<sup>[IMB84]</sup>

## I.2. La méthode des éléments finis :

Les sciences de l'ingénieur ( mécanique des solides et des fluides, thermique...) permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaire ou non linéaire, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur.<sup>[TOU81]</sup>

Les techniques de calcul des structures ont connu ces quarante dernières années un développement considérable, motivé par les besoins des industries de pointe et soutenu par les progrès réalisés dans le domaine des ordinateurs. Ainsi la méthode des éléments finis (en abrégé M.E.F ) est communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : aérospatial, nucléaire, génie civil, construction mécanique, etc...

Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que la M.E.F appliquée au calcul des structures est une technique récente, à caractère pluridisciplinaire, car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base :

- La mécanique des structures : élasticité, résistance des matériaux, dynamique, plasticité, etc..
- L'analyse numérique : méthodes d'approximation, résolution des systèmes linéaires, résolution des systèmes non linéaires, des problèmes aux valeurs propres....
- L'informatique appliquée : techniques de développement et de maintenance des grands logiciels.<sup>[IMB84]</sup>

La méthode des éléments finis est apparue vers [1955], en même temps que les ordinateurs puissants. D'abord appliquée au calcul des structures et solides, elle a pris, dès [1965], une extension fantastique, quand on a réalisé qu'elle représentait, en fait, une méthode générale de résolution numérique des problèmes aux limites. Tout phénomène physique, dont la modélisation conduit à des équations différentielles avec conditions aux limites, lui devenait accessible : structure, solide, chaleur, fluide, combustion, électromagnétisme, acoustique...<sup>[FRA01]</sup>

Les bases théoriques de M.E.F reposent d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation. Après la deuxième guerre mondiale on assiste, dans l'industrie aéronautique, au développement de méthodes matricielles permettant de traiter des problèmes de structures assez complexes, parmi les contributions les plus importantes, citons celle de LEVY en [1947] et GARVEY en [1951] pour la méthode des forces et LEVY en [1953] pour la méthode des déplacements. En fin, en [1956] TURNER et CLOUGH publièrent une présentation systématique de la méthode des

déplacements. Ces deux publications sont particulièrement importantes et représentent véritablement le début de la M.E.F comme technique de calcul des structures complexes.

Cependant, il existe bien d'autres types de structures où l'opération de discrétisation n'est pas aussi immédiate ; pour les problèmes de coques ou de plaques par exemple. Il faut alors utiliser des techniques d'approximation appropriées. Dans le cadre de la M.E.F, on étudie un modèle discret du continuum. Ce modèle est basé sur subdivision du domaine continu en sous-domaines de forme géométrique simple que l'on appellera « éléments finis » interconnectés en des points remarquables appelés « nœuds ». De plus, on définit dans chaque élément une approximation adéquate de la solution permettant de résoudre le problème en fonction uniquement des valeurs de la solution aux nœuds.<sup>[IMB84]</sup>

Il existe plusieurs sortes de formulations d'éléments finis en mécanique des structures, formulation contraintes, formulation déplacement ou formulation mixtes....etc. Mais la plus utilisée et qu'on développera dans notre étude est la formulation déplacements vu son efficacité numérique et parce qu'elle permet la résolution aisée de problèmes non linéaires qui sont l'objet de notre projet.

On formule le problème en fonction des déplacements aux nœuds et les différentes étapes de calcul sont les suivantes :

- ❑ Idéalisation / modélisation : choix du modèle mathématique ( champ de déplacement ).
- ❑ Discrétisation : maillage.
- ❑ Choix des hypothèses sur le champ de déplacement dans les éléments ( type d'élément ) et interpolation du déplacement dans l'élément fini en fonction des inconnues nodales qui conduit à l'établissement des matrices de rigidités élémentaires.
- ❑ Formation de la matrice de rigidité de la structure tout entière en vue d'écriture des équations d'équilibre aux nœuds.
- ❑ Formation du vecteur force nodale correspondant aux diverses charges appliquées.
- ❑ Introduction des conditions aux limites de déplacement permettant la détermination des déplacements nodaux de la structure.
- ❑ Résolution des équations d'équilibre pour déterminer le vecteur des déplacements nodaux ( inconnus nodaux ).
- ❑ Substitution des déplacements des nœuds pour construire : le champ de déformation, le champ de contrainte.

### I.3. Eléments plaques :

Les premiers éléments de plaque ont été formulés en utilisant la théorie de Kirchhoff qui néglige les effets de cisaillement transverse (CT). Les plus populaires sont ceux basés sur l'introduction des hypothèses de Kirchhoff sous forme discrète. Wempner et Al [1968], Stricklin et Al [1969] et Dhatt [1969] sont les premiers à avoir introduit l'idée de base relative aux éléments dits « de Kirchhoff-discret », en particulier les éléments DKT (Discrète Kirchhoff Triangle) et DKQ (Discrète Kirchhoff Quadrilatéral) dont les formulations sont dues à Batoz et Al [1980-1982].

Un pas plus important consiste l'abandon de la théorie de Kirchhoff en faveur de la théorie des plaques modérément épaisses de Reissner-Mindlin. Les éléments finis de plaque basés sur la théorie de Reissner-Mindlin [1945-1951] tiennent compte des effets de CT. En conséquence, ils peuvent être utilisés pour l'analyse des plaques épaisses et minces. Ces éléments dits « de premier ordre » sont très populaires, car seule la continuité  $C^0$  des variables cinématiques est requise. De plus, leur extension aux éléments de coque à géométrie courbe de type isoparamétriques dégénérés est simple.<sup>[AYA93]</sup>

Dans notre étude, on s'intéressera aux éléments plaque en flexion basés sur la formulation en déplacement utilisant la théorie de Reissner-Mindlin ( Zienkiewicz & Taylor [1991] ) qui tient compte de l'effet de cisaillement transverse, avec intégration sélective, ils donnent une précision comparable aux meilleurs éléments de Kirchhoff. L'étude se fera pour l'élément à quatre nœuds, l'élément de Serendip à huit nœuds, l'élément de Lagrange à neuf nœuds, l'élément Hétérosis à neuf nœuds qui est développé par Hughes, il est basé sur des fonctions d'interpolation de Serendip pour  $w$  et des fonctions d'interpolation de Lagrange pour  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . Il possède donc un nœud central avec  $\theta_x$  et  $\theta_y$  comme d.d.l, ses performances sont excellentes, il ne présente aucun mécanisme et permet la modélisation des plaques très minces, et l'élément à quatre nœuds avec cisaillement transversal constant par côté  $Q4\gamma$ .

### I.4. Plasticité et analyse non linéaire :

Les travaux scientifiques relatifs à la plasticité remontent à [1864] sur le critère de la contrainte de cisaillement maximal. La formulation actuelle de la théorie a été faite en [1870] par Saint-Venant. Levy plus tard avait obtenu les équations générales en trois dimensions. Une généralisation similaire aux résultats de Levy était établie indépendamment par Von-Mises dans un papier en [1913]. En [1924], Prandtl étend les équations de Saint-Venant/Lévy/Von-Mises du problème plan continu pour inclure la composante élastique de déformation. En [1928], Von-Mises généralisa son travail prévu pour un solide rigide parfaitement plastique pour

inclure une fonction générale d'écoulement et discuta la relation entre la direction du taux de déformation plastique ( incrément ) et la surface d'écoulement régulier.

La loi d'écoulement isotrope était formulée dès [1871] par Saint Venant et Levy mais il a fallu attendre les années [1950] pour en voir une utilisation dans les problèmes de structures grâce aux théorèmes limites, puis les années [1970] pour voir des applications pratiques grâce à l'avènement des ordinateurs rapides et de grande capacité. Le cas du chargement radial (invariance des directions principales du tenseur des contraintes en chaque point d'une structure) fournit un vaste champ d'applications aux théories fondées sur l'écrouissage isotrope.

L'écrouissage est presque toujours anisotrope ; cette propriété doit être introduite dans les modèles dès que le chargement n'est plus radial et en particulier lorsqu'il est cyclique. C'est Prager qui vers [1950] en a donné la première formulation simple : l'écrouissage cinématique sur lequel sont fondées la plupart des théories actuelles.<sup>[LEM91]</sup>

Généralement, on a recourt à l'analyse non linéaire des structures quand l'une des deux hypothèses suivantes n'est plus satisfaite :

- Les déplacements sont suffisamment petits pour pouvoir "confondre" les configurations déformées aux configurations non déformées ( pour définir des grandeurs telles que les contraintes, les éléments de volume ...); c'est la linéarité géométrique.
- Les matériaux se comportent de manière élastique linéaire dans le domaine des déformations résultant de ces déplacements; c'est la linéarité matérielle.

Ces deux hypothèses sont dites hypothèses de l'élasticité linéaire, elles sont généralement admises pour le dimensionnement de la plupart des structures courantes. Cependant l'utilisation dans la construction des éléments de forme de plus en plus élancées d'une part et la réalisation de structures plus économiques ou "à risque" d'autre part conduit à abandonner les hypothèses très étroites de l'élasticité linéaire. Il convient également de mieux évaluer les coefficients de sécurité vis-à-vis de la ruine. Il est alors nécessaire d'introduire des comportements plus proche de la réalité. Ainsi, la prise en compte de ces points conduit alors à l'élaboration d'une analyse non linéaire afin de traduire correctement le comportement géométrique ou matériel des structures citées. Si maintenant l'analyse non linéaire est largement utilisée et pratiquement maîtrisée, il n'en demeure pas moins qu'elle reste toujours d'actualité et fait toujours l'objet de nombreuses recherches.<sup>[GUE99]</sup>

Deux types de non linéarité peuvent se manifester dans l'analyse des structures par la M.E.F : les Non linéarités géométriques interviennent lorsque les déplacements et éventuellement les déformations sont suffisamment importantes. Dans ce cas les caractéristiques de rigidité de la structure sont non linéaires, (qui sort du cadre de notre étude). Les non linéarités matérielles

peuvent apparaître dans la dépendance des paramètres physiques ( module de Young ) aux inconnus du problème et aussi dans la dépendance dans les équations aux dérivées partielles.

L'objectif d'un critère de résistance est de prévenir l'endommagement d'une structure soumise à un champ de contraintes. L'endommagement est défini ici comme un état irréversible de la matière. Suivant le type de matériau, le dépassement de la limite élastique, à partir de laquelle le matériau ne peut plus être considéré comme élastique, peut conduire à différents types d'endommagement :

- Pour un matériau ductile, celui-ci va d'abord se plastifier avant la rupture. La plastification va engendrer une déformation permanente.
- Pour un matériau fragile, le stade de plastification sera quasiment inexistant et nous aurons alors une fissuration conduisant rapidement à la rupture complète.

Souvent, la limite élastique est obtenue expérimentalement par un essai simple de traction en contrainte uniaxiale (ou plusieurs lorsqu'il s'agit de matériaux anisotropes). L'objectif du critère est alors de prévoir l'état de chargement à partir duquel l'endommagement du matériau (plastification, rupture...) s'amorcera, et ce, quel que soit l'état de contraintes. Pour les matériaux isotrope ductiles, les critères de plastification les plus connus sont les critères de Tresca et de Von-Mises, pour les matériaux isotrope fragiles, le critère de Mohr<sup>[CHR00]</sup>.

### **I.5. Objectifs du mémoire :**

Dans le cadre de modéliser les plaques par éléments finis pour l'analyse non-linéaire (élasto-plasticité) on arrive souvent aux problèmes suivants :

- La détermination numérique de la réponse statique des solides élastiques, plastiques sous l'action d'un trajet de chargement donné.
- Le choix de type d'élément et leur influence sur les résultats numériques représentant la propagation de la plasticité.
- La détermination du début de la plastification.
- Le calcul de la charge ultime de la structure.

Donc, notre démarche consiste à :

- Elargir un programme de Hinton et Owen<sup>[HIN80]</sup> en éléments finis pour l'analyse non-linéaire des plaques basées sur la théorie de Reissner-Mindlin comprenant :
  - Plusieurs éléments de plaque en flexion qui tiennent compte de l'effet de CT, en particulier l'élément linéaire Q4, les éléments quadratiques (Q8, Q9, HT9) et l'élément à quatre nœuds avec cisaillement transversal constant par côté Q4 $\gamma$ .
  - Plusieurs critères de plasticité ( Von-Mises, Tresca, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager ).

- Des différentes méthodes de résolution de système non linéaire ( Newton Raphson, Newton Raphson modifiée, Rigidité initiale ).
- L'expérimentation numérique permettant l'évaluation de l'influence du type d'élément fini sur le comportement élasto-plastique des plaques minces et épaisses avec différentes conditions aux limites, et testé les différents critères de plasticité pour différents éléments finis utilisés.

### **I.6. Plan de travail :**

Dans le présent travail on se propose une introduction générale ( Chapitre I ), où on a met en évidence la méthode des éléments finis, appliquée au calcul des structures non linéaires formées des plaques minces et épaisses, ainsi que l'aspect historique de la plasticité.

Le deuxième chapitre concerne la formulation en éléments finis des éléments plaques basées sur la théorie de Reissner-Mindlin et une présentation générale sur les éléments utilisés dans le programme ( l'élément linéaire, les éléments quadratiques et l'élément à quatre nœuds avec cisaillement transversal constant par côté ) et a la fin, un bref aperçu a été cité sur la transformation isoparamétrique et l'intégration numérique.

Le troisième chapitre consacré à la théorie d'élasto-plasticité des matériaux :

- La loi de comportement ( élasticité et plasticité ).
- Les critères de plasticité ( Tresca, Von-Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager ).
- La loi d'écrouissage ( écrouissage isotrope, cinématique et mixte ).
- La règle d'écoulement plastique.
- La théorie incrémentale de plasticité.

Le quatrième chapitre est consacré à l'analyse non linéaire des structures : les méthodes de résolution de système non linéaire ainsi que les différents critères de convergence.

La validation du programme et l'expérimentation numérique fait l'objet du cinquième chapitre, en simulant la propagation de la plasticité au niveau de la plaque pour différents cas, on fera varier le type d'élément, l'épaisseur, les conditions aux limites, les critères de plasticité, les méthodes de résolution de système non linéaire. Evidemment cela se fera avec interprétation des résultats obtenus.

Finalement, l'étude sera finalisée par une conclusion générale sur le sujet d'étude et des recommandations.