

## CHAPITRE II : FORMULATION EN ELEMENTS FINIS DES ELEMENTS PLAQUES

### II.1. Théorèmes de l'énergie :

#### II.1.1. Notations :<sup>[IMB84]</sup>

Soit un corps solide déformable figure (II.1) dont la géométrie définit un volume (domaine)  $V$  et une surface extérieure  $S$ , sur ce corps agissent des forces de volume  $b_i$  et de surface  $f_i$ .

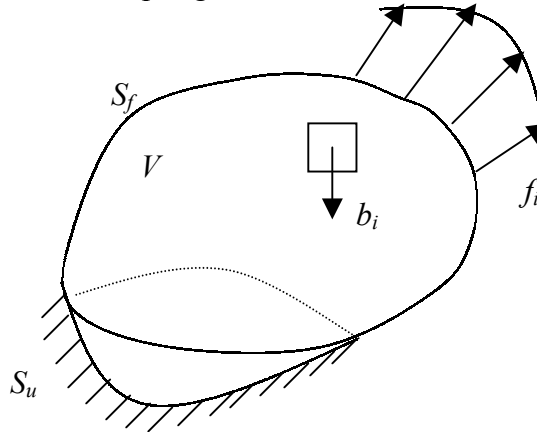


Figure (II.1) : Corps solide déformable<sup>[IMB84]</sup>

Nous travaillerons dans le cadre des petites déformations, cela implique que la position de référence reste la position initiale. Les chargements peuvent être de type volumique ou de type surfacique dans le cas 3-D.

Nous avons adopté dans ce chapitre la notation indicielle qui permet un exposé théorique rigoureux et concis.

La résolution d'un problème de structure consiste à étudier trois champs vectoriels ainsi que leur relation. Le champ de déplacement, noté :

$$u(x) = \begin{cases} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Le champ des déformations noté :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

Le champ des contraintes noté :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

Relation déplacement-déformation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (\text{II.4})$$

Dans le cas de la théorie linéaire de l'élasticité ( les déplacements et les déformations sont petits, donc le produit  $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$  devient négligeable ), on aura :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.5})$$

### II.1.2. Les relations de compatibilité :<sup>[IMB84],[COI97]</sup>

Quand on connaît les déplacements il est simple de déterminer les déformations, mais le Problème inverse n'est pas aussi simple : 3 composantes pour le déplacement et 6 composantes pour le tenseur des déformations. On a donc 6 inconnues et trois équations : le problème n'a pas de solution unique. Cela est dû au mouvement de corps solide : Rotation d'ensemble, translation ( Mécanique des milieux indéformables). Il existe des relations de compatibilité pour enlever ces indéterminations qui sont :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial i} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ji}}{\partial x_k} \right) \quad (\text{II.6})$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial x_i^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Ces formules sont données sans sommation de l'indice répété.

En d'autres termes la relation générale de compatibilité est :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (\text{II.8})$$

### II.1.3. Comportement élastique linéaire isotrope (Loi de Hooke) :<sup>[GUE98],[COI97]</sup>

Un matériau est dit élastique si l'état de contraintes ne dépend que de la configuration courante, que des seules déformations instantanées, et non de l'histoire du mouvement ou encore si la variation des contraintes est entièrement définie par comparaison de la configuration courante avec toute configuration antérieure.

Cette définition est une extension de la notion d'élasticité linéaire infinitésimale due à Cauchy; dans ce cas, si  $\varepsilon_{ij}$  est le tenseur infinitésimal des déformations, la relation constitutive est :

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{II.9})$$

Où le Tenseur d'ordre quatre  $D_{ijkl}$  n'est pas nécessairement symétrique, et il contient 36 coefficients différents.

Pour un matériau isotrope cette relation devient :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{II.10})$$

Où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes de Lamé.

Cette équation, généralement appelée loi de Hooke, est due à Cauchy avec des apports de Navier et Poisson.

Dans le cas d'un matériau isotrope ( si toutes ses directions sont équivalentes ) la loi de comportement élastique dépend alors de deux coefficients et s'écrit :

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{II.11})$$

avec :

$$D_{ijkl} = \left( K - \frac{2G}{3} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{II.12})$$

où :  $K$  : Est le module volumique.

$G$  : Est le module de cisaillement.

$D_{ijkl}$  : Sont les composantes du tenseur d'élasticité.

Ou bien :

$$\varepsilon_{ij} = (1+\nu) \frac{\sigma_{ij}}{E} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\sigma_{kl}) \delta_{ij} \quad (\text{II.13})$$

où  $E$  : Le module d'Young.

$\nu$  : Coefficient de Poisson.

avec :  $\text{Tr}(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$

Et le symbole de Kronecker est défini par :  $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Les relations entre les paramètres de comportements sont les suivantes :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{II.14})$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (\text{II.15})$$

L'hypothèse de stabilité du matériau impose les conditions suivantes sur les coefficients  $E$  et  $\nu$  :  $E > 0$  et  $\nu < 0.5$ .<sup>[GUE98]</sup>

Par ailleurs, les relations entre les paramètres de comportement  $K$ ,  $G$ ,  $E$  et  $\nu$  sont les suivantes :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{II.16})$$

$$E = \frac{9KG}{3K+G} \quad \nu = \frac{3K-2G}{6K+2G} \quad (\text{II.17})$$

### II.1.3.1. Etat de déformation plan : <sup>[DEC00],[LOI02]</sup>

L'hypothèse des déformations planes est surtout utilisée pour les corps élastiques cylindriques longs dans la direction  $z$ , de section de forme quelconque mais constante suivant  $z$ , chargés parallèlement au plan des sections de la même manière dans toutes les sections.

On peut alors écrire une loi de comportement réduite pour les déformations planes :

$$\bar{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left( \bar{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} Tr \bar{\varepsilon} \bar{I} \right) \quad (II.18)$$

$$\sigma_3 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} Tr \bar{\varepsilon} = \nu Tr \bar{\sigma} \quad (II.19)$$

avec : 
$$\bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \left( \bar{\sigma} - \nu Tr \bar{\sigma} \bar{I} \right) \text{ et } \varepsilon_z = 0 \quad (II.20)$$

où :  $\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}$  les parties planes respectives de  $\sigma, \varepsilon$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \varepsilon_{ij} \quad (II.21)$$

$$\text{où : } \sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} ; \varepsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

### II.1.3.2. Etat de contrainte plan : <sup>[DEC00],[LOI02]</sup>

L'hypothèse des contraintes planes est surtout utilisée pour modéliser des corps élastiques planes et minces ( plaques ) chargés dans leur plan.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} Tr \bar{\sigma} \bar{I} \quad (II.22)$$

et 
$$\varepsilon_3 = \frac{\nu}{E} Tr \bar{\sigma} = -\frac{\nu}{1-\nu} Tr \bar{\varepsilon} \quad (II.23)$$

ou 
$$\bar{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left( \bar{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-\nu} Tr \bar{\varepsilon} \bar{I} \right) \text{ et } \sigma_z = 0 \quad (I.24)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \varepsilon_{ij} \quad (II.25)$$

$$\text{avec } \sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} ; \varepsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

**II.1.4. Equations d'équilibre :**<sup>[GAR01],[GUE98]</sup>

Dans le cas général, on montre que les équations d'équilibre s'écrivent sous la forme :

$$\operatorname{div}(\overline{\overline{\sigma}}) + \vec{f} = \rho \vec{\gamma} \quad (\text{II.26})$$

qui se simplifient dans le cas de la statique à :

$$\operatorname{div}(\overline{\overline{\sigma}}) + \vec{f} = 0 \quad (\text{II.27})$$

où  $\vec{f}$  : est une force volumique dans le cas 3-D.

ou par la notation indicielle :

$$\sigma_{ji,i} + b_j = 0 \quad (\text{II.28})$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{II.29})$$

en élasticité à deux dimensions on aura :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + b_x = 0 \quad (\text{II.30})$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y = 0 \quad (\text{II.31})$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad (\text{II.32})$$

**II.1.5. Théorèmes énergétiques en élasticité :**<sup>[IMB84],[GUE98]</sup>

Pour effectuer un calcul de structure, il est nécessaire de connaître :

- L'expression des équations d'équilibre et les efforts appliqués.
- Les conditions aux limites.
- La loi de comportement.

Les différentes formulations énergétiques permettent de faire une synthèse de ces trois éléments constitutifs d'un problème de structure, et ainsi d'obtenir une formulation plus compacte et donc facile à discrétiser. Ce sont ces formulations qui sont à la base des méthodes par éléments finis.

**II.1.5.1. Principe de travaux virtuels :**

Pour un corps solide en équilibre sous l'action de forces de volume  $b_i$  et des forces de surfaces  $f_i$ , et pour tous champs de déplacements virtuels cinématiquement admissible ( $\delta u_i = 0$ ):

$$\int_{S_f} f_i \delta u_i ds + \int_V b_i \delta u_i dV = \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV \quad (\text{II.33})$$

Cette relation est l'expression générale du principe des travaux virtuels pour un corps solide déformable.

On peut la mettre sous la forme courante si l'on effectue les hypothèses suivantes :

H1 : Petits déplacements et déformations :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{II.34})$$

H2 : Existence d'un potentiel de déformation  $W$  tel que :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (\text{II.35})$$

Donc :

$$\delta U = \delta \int_V W dV = \int_V b_i \delta u_i dV + \int_{S_f} f_i \delta u_i dS \quad (\text{II.36})$$

L'accroissement virtuel de l'énergie de déformation ( $U = \int_V W dV$ ) est égal à la somme des travaux virtuels des forces de volume et de surface dans tout accroissement virtuel cinématique admissible du champ des déplacements.

### II.1.5.2. Théorème de l'énergie potentielle totale :<sup>[IMB84]</sup>

Le principe des déplacements virtuels et du minimum d'énergie potentielle totale jouent un rôle important dans les méthodes de calcul des structures élastiques. Les déplacements cinématiquement admissibles pour un état d'équilibre stable, qui satisfont les conditions d'équilibre, sont ceux qui minimisent l'énergie potentielle et réciproquement. Soit la première variation de l'énergie potentielle totale :

$$\delta U = \delta \int_V W dV = \int_V b_i \delta u_i dV + \int_{S_f} f_i \delta u_i dS \quad (\text{II.37})$$

de plus, on a :

$$\delta \int_V W dV = \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV = \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV \quad (\text{II.38})$$

d'où en applique le théorème de Gauss et on obtient donc finalement :

$$\delta U = - \int_V (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i dV + \int_S (\sigma_{ij} n_j - b_i) \delta u_i dS \quad (\text{II.39})$$

la stationnarité de  $V$  implique que :

$$\delta U = 0 + 0 \quad \forall \delta u_i \neq 0 \quad (\text{II.40})$$

Donc les conditions d'équilibre dans  $V$  et sur  $S_f$  constituent les conditions d'extremum de l'énergie potentielle totale pour toute variation cinématiquement admissible des déplacements.

### II.1.6. Application au principe des travaux virtuels :

Pour un corps solide en équilibre, et pour tous champs de déplacements virtuels cinématiquement admissible et satisfaisant les conditions aux limites de déplacement le travail virtuel interne totale de déformation doit être égale au travail virtuel des forces extérieures.

$$\int_V \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \delta \{u\}^T \{f^v\} dV + \int_{S_f} \delta \{u^s\}^T \{f^s\} dS + \sum_i \delta \{u^i\}^T \{F^i\} \quad (\text{II.41})$$

$i$  : points soumis à des forces concentrées.

$\{f^s\}$  : Forces de surface.

$\{f^v\}$  : Forces de volume.

$\{F\}$  : Forces concentrée.

$\{u\}$  et  $\{u^s\}$  : Sont les déplacements correspondant aux forces  $\{f^v\}$  et  $\{f^s\}$ .

L'énergie potentielle totale  $\Pi$  est stationnaire de plus pour un équilibre stable elle est minimum :

$$\Pi = U + V \quad (\text{II.42})$$

$U$  : Energie de déformation interne

$V$  : Potentiel des forces appliquées ( opposé du travail des forces extérieures ).

$$\Pi = \frac{1}{2} \int \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \{u\}^T \{f^v\} dV - \int_{S_f} \{u^s\}^T \{f^s\} dS - \sum_i \{u_i\}^T \{F_i\} \quad (\text{II.43})$$

#### a. Interpolation de déplacement :

Elle permet d'exprimer le déplacement en tout point de l'élément en fonction du déplacement des nœuds.

$$\{u\} = [N_e] \{u_e\} \quad (\text{II.44})$$

$[N_e]$  : matrice ligne de fonction d'interpolation ou de forme.

#### b. Interpolation de la déformation :

Les déformations de l'élément « e » sont obtenus par différentiation des déplacements :

$$\{\varepsilon_e\} = [L][N_e] \{u_e\} \quad (\text{II.45})$$

$$\text{Donc :} \quad \{\varepsilon_e\} = [B_e] \{u_e\} \quad (\text{II.46})$$

avec :  $[B_e] = [L][N_e]$

où  $[L]$  : Matrice Laplacienne.

**c. Interpolation de la contrainte :**

Les contraintes sont liées aux déformations par la relation :

$$\{\sigma_e\} = [D]\{\varepsilon_e\} + \{\sigma_0^e\} \quad (\text{II.47})$$

où  $\{\sigma_0^e\}$  : les contraintes initiales.

$[D]$  : matrice d'élasticité.

**d. Matrice de rigidité élémentaire :**

D'après le théorème des travaux virtuels on a :

$$W_{int} = W_{ext} \quad (\text{II.48})$$

Donc :

$$\int_{V_e} \{\varepsilon_e\}^T \{\sigma_e\} dV = \{\tilde{u}_e\}^T \{F_e\} \quad (\text{II.49})$$

$$\int_{V_e} ([B_e]\{u_e\})^T ([D][B_e]\{u_e\}) dV = \{\tilde{u}_e\}^T \{F_e\} \quad (\text{II.50})$$

$$\{\tilde{u}_e\}^T \left[ \int_{V_e} [B]^T [D][B] dV \right] \{u_e\} = \{\tilde{u}_e\}^T \{F_e\} \quad (\text{II.51})$$

$$\left[ \int_{V_e} [B_e]^T [D][B_e] dV \right] \{u_e\} = \{F_e\} \quad (\text{II.52})$$

$\{\tilde{u}_e\}$  : déplacement virtuel.

On aura finalement la matrice de rigidité élémentaire sous la forme :

$$[K_e] = \int_{V_e} [B_e]^T [D][B_e] dV \quad (\text{II.53})$$



## II.2. Théorie des plaques en flexion :

### II.2.1. Définition de la plaque :<sup>[IMB84]</sup>

Une plaque est un solide tridimensionnel élastique dont une dimension selon l'épaisseur  $h$  est petite en comparaison des deux autres dimensions et qui comporte généralement un plan de symétrie au milieu de l'épaisseur appelé surface moyenne  $S_m$ . Par convention, cette surface moyenne sera le plan  $xy$ , l'axe  $oz$  correspondant à l'axe transverse selon l'épaisseur.

Les plaques sont classées en deux catégories:

- Plaques épaisses :  $1/20 < h/L < 1/4$
- Plaques minces :  $h/L < 1/20$

### II.2.2. Hypothèses fondamentales :<sup>[IMB84],[TOU81],[BAT90b],[LUC02]</sup>

Les théories des plaques reposent sur les hypothèses suivantes :

**H1:** L'hypothèse des contraintes planes : Les contraintes normales  $\sigma_{zz}$  sont négligeables par rapport aux autres composantes de contraintes.  $\sigma_{zz} = 0$

**H2:** Les pentes de la surface moyenne après déformation  $S'_m$  sont supposées petites par rapport à l'unité.

**H3:** On néglige l'interaction des phénomènes de membrane et de flexion due aux grands déplacements. En d'autres termes, on néglige les contraintes dans la surface moyenne membrane induites par les déformations transverses ( flexion ). Ceci correspond à une approximation du premier ordre si les déplacements transverses sont de l'ordre de l'épaisseur de la plaque.

**H4 :** La construction et les matériaux de la plaque sont tels que les phénomènes de membrane (dans le plan) et de flexion (transverses) sont découplés. Ceci est vrai pour des plaques isotropes monocoques ou multicouches symétriques. ( Exemple : sandwich nid d'abeilles symétrique ).

Ceci permet de découpler totalement l'étude des phénomènes de membrane et de flexion. En général, ces deux types de phénomènes peuvent être couplés au niveau des équations constitutives. C'est le cas de plaque à raidissage continu excentré ou de multicouches dissymétriques ( exemple : Multicouches en matériaux composites).

**H5 :** L'hypothèse dite sections droites ( ou planes ) : Les points situés sur la première normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation. Ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transverse, on a dans ce cas  $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$ . C'est à dire les déplacement  $u$  et  $v$  ( suivant  $x$  et  $y$  ) d'un point varient linéairement en  $z$  et le déplacement transversal  $w$  ( suivant  $z$  ) n'est fonction que de  $x$  et  $y$ .<sup>[IMB84]</sup>

Il existe deux théories des plaques ( les plus importantes ) pour l'analyse linéaire des structures.

1. La théorie de Reissner-Mindlin (hypothèses H1, H2, H3) ou théorie linéaire des plaques. Dans ce cas, il faut prendre en compte les déformations de cisaillement transversal et alors les fibres normales à la surface moyenne avant déformation ne le restent pas au cours de la déformation; la rotation des sections devient distincte de la pente de la surface moyenne. On ne peut plus admettre l'hypothèse H5.

2. La théorie de Kirchoff (hypothèses H1, H2, H3 et H5) ou théorie linéaire des plaques sans cisaillement transversal. Cette théorie est valable dans le cas des plaques minces.

Par ailleurs, on adoptera l'hypothèse H4 ce qui permettra l'étude séparée des phénomènes de flexion.

### II.2.3. Théorie des plaques minces ( Kirchhoff ) :<sup>[REM02],[HIN84],[BAT90b]</sup>

Les plaques sont des structures en état plan de contraintes. Ce sont donc des structures minces et planes. Les plaques sont l'équivalent 2D des poutres : elles admettent des déplacements verticaux suivant l'axe  $z$ . On ne considère pas ici l'effet membrane c'est à dire les forces appliquées dans le plan, cet effet pourra par la suite être superposé à la flexion.

#### a. Hypothèses :

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Kirchhoff généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant.

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal  $w$  est considéré.
- La contrainte  $\sigma_z$  dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures et, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout  $z$ .

#### b. Champs de déplacement :

Les composantes des champs des déplacements pour cette théorie des plaques minces s'expriment comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} = z\theta_y \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} = -z\theta_x \\ w = w(x,y) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II.54)} \\ \text{(II.55)} \\ \text{(II.56)} \end{array}$$

**c. Champs de déformation :**

Le vecteur des déformations planes s'écrit :

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{II.57})$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{II.58})$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad (\text{II.59})$$

$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \quad (\text{II.60})$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (\text{II.61})$$

**II.2.4. Théorie des plaques épaisses ( Reissner-Midlin ) :** <sup>[HIN84],[HYO90],[YAN02]</sup>

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff, une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire.

**a. Hypothèses :**

Les hypothèses de Reissner-Mindlin, reprennent les points 1 et 4 de celles de Kirchhoff. Les points 2 et 3 des précédentes hypothèses ne sont plus retenues afin de prendre en compte les deux nouveaux effets.

**b. Champ de déplacement :**

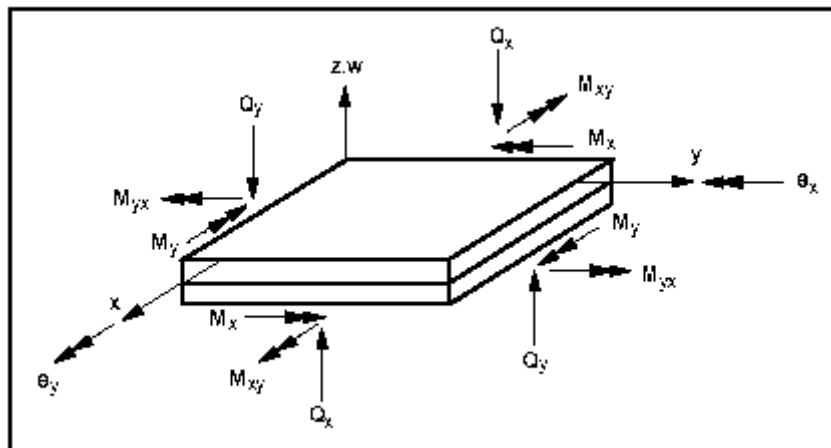
Dans la théorie de Mindlin (prise en compte du cisaillement transversal), on se donne un modèle de déplacements basé sur trois variables indépendantes : Le déplacement transversal  $w$  et les deux rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . La convention de signes est illustrée dans la figure (II.2).

Le champ des déplacements s'exprime alors en fonction de ces trois variables par la relation suivante :

$$u = -z \theta_x(x,y) \quad (\text{II.62})$$

$$v = -z \theta_y(x,y) \quad (\text{II.63})$$

$$w = w(x,y) \quad (\text{II.64})$$



Figure(II.2) : Convention de signes dans la plaque de Mindlin <sup>[HYO90]</sup>

Soient les déplacements  $u$ ,  $v$  et le déplacement transverse  $w$  et les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$ , ou  $\bar{\theta}_x$  et  $\bar{\theta}_y$ . On a évidemment :

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad (\text{II.65})$$

Pour la formulation des théories des plaques, on utilisera les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  au lieu des rotations conventionnelles  $\bar{\theta}_x$  et  $\bar{\theta}_y$ .

On peut se ramener facilement aux conventions habituelles pour les rotations  $\bar{\theta}_x$  et  $\bar{\theta}_y$  ce qui est nécessaire pour la phase d'assemblage.

Le vecteur de déplacement est  $\{d\} = \{w \ \theta_x \ \theta_y\}^T$  avec :

$$w = w(x,y) \quad (\text{II.66})$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \quad (\text{II.67})$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \quad (\text{II.68})$$

où  $\phi_x$  et  $\phi_y$  sont les rotations transversales dues au cisaillement.

### c. Champ de déformation :

L'état de déformation peut être défini en fonction des trois variables  $w$ ,  $\theta_x$  et  $\theta_y$  par les relations cinématiques suivantes :

Les déformations de flexion sont :

$$\{\varepsilon_f\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}\}^T \quad (\text{II.69})$$

$$\text{Où :} \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (\text{II.70})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (\text{II.71})$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.72})$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (\text{II.73})$$

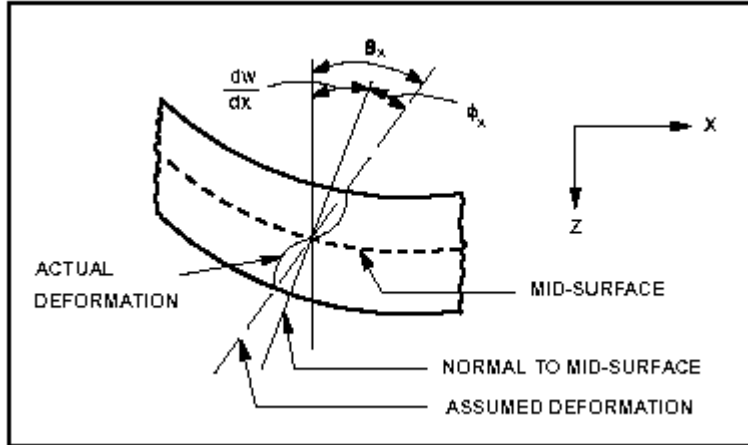
Les déformations de cisaillement sont :

$$\{\varepsilon_c\} = \{\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T \quad (II.74)$$

Où :

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \quad (II.75)$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \quad (II.76)$$



Pour raison de commodité, on suppose qu'il n'y a pas de traction sur la frontière  $\Gamma$  du domaine tridimensionnel  $\Omega$ .

$$\text{L'équation du travail virtuel peut être exprimée par : } \int_{\Omega} \{\delta\varepsilon\}^T \sigma \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \{\delta u\}^T b \cdot d\Omega = 0.$$

Où  $\delta u = \{\delta u \quad \delta v \quad \delta w\}^T$  : est le vecteur des déplacements virtuels dans les directions  $x, y, z$ .

$\delta\varepsilon = \{\delta\varepsilon_x \quad \delta\varepsilon_y \quad \delta\varepsilon_z \quad \delta\gamma_{xy} \quad \delta\gamma_{xz} \quad \delta\gamma_{yz}\}^T$  : est le vecteur des déformations virtuelles associées.

$\sigma = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\}^T$  : est le vecteur des contraintes.

$b = \{b_x \quad b_y \quad b_z\}^T$  : est le vecteur des forces corporelles appliquées.

L'hypothèse H1  $\sigma_{zz} = 0$  étant maintenue et éliminant  $\varepsilon_{zz}$ , le travail virtuel peut être exprimé donc par :

$$\int_{\Omega} \{\delta\varepsilon'\}^T \sigma' \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \{\delta u\}^T b \cdot d\Omega = 0 \quad (II.77)$$

$$\text{avec : } \{\delta\varepsilon'\} = \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_x \\ \delta\varepsilon_y \\ \delta\gamma_{xy} \\ \delta\gamma_{xz} \\ \delta\gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\delta\varepsilon_f\} \\ \{\delta\varepsilon_c\} \end{Bmatrix} \text{ et } \sigma' = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\sigma_f\} \\ \{\sigma_c\} \end{Bmatrix}$$

Dans la théorie des plaques de Mindlin, le domaine  $\Omega$  a une forme spéciale<sup>[HIN80]</sup> :

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in R_3 / z \in \left[ -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] (x, y) \in A \in R^2 \right\} \quad (\text{II.78})$$

Où  $h$  : est l'épaisseur de la plaque et qui peut être en fonction de  $x$  et  $y$ .

$A$  : est la surface de la plaque, ses frontières sont dénotées par  $\Gamma$ .

La forme réduite des relations constitutives est obtenue en mettant  $\sigma_z = 0$  et  $\varepsilon_z = 0$  donc :

$$\sigma' = D' \varepsilon' \quad (\text{II.79})$$

Ce qui donne : ( pour une situation d'élasticité isotrope )

$$D' = \begin{bmatrix} D'_f & 0 \\ 0 & D'_c \end{bmatrix} \quad (\text{II.80})$$

$$\text{Avec : } [D'_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ et } [D'_c] = G.k.h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Où :  $E$  : le module de Young

$\nu$  : le coefficient de Poisson

$h$  : l'épaisseur de la plaque

$G$  : le module de cisaillement

Le facteur  $k < 1$  est introduit pour corriger l'hypothèse fautive d'une contrainte en cisaillement indépendante de  $z$  ( $k = \frac{5}{6}$  dans notre cas)<sup>[HIN80]</sup>.

Par ailleurs :

$$\{\delta \varepsilon_f\} = z \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial(\delta \theta_x)}{\partial x} \\ -\frac{\partial(\delta \theta_y)}{\partial y} \\ -\left( \frac{\partial(\delta \theta_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta \theta_y)}{\partial x} \right) \end{array} \right\} = z \{\delta \hat{\varepsilon}_f\} \quad (\text{II.81})$$

$$\text{et } \{\delta \varepsilon_c\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} - \delta \theta_x \\ \frac{\partial(\delta w)}{\partial y} - \delta \theta_y \end{array} \right\} = \{\delta \hat{\varepsilon}_c\} \quad (\text{II.82})$$

Les termes symbolisés par  $\hat{\phantom{x}}$  dénotent des quantités intégrées sur l'épaisseur, l'indice  $f$  dénote la flexion et  $c$  le cisaillement ( glissement).

En utilisant les équations (II.81) et (II.82), alors (II.77) peut s'écrire ainsi :

$$\int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ z \{\delta \hat{\varepsilon}_f\}^T \cdot \sigma_f + \{\delta \hat{\varepsilon}_c\}^T \cdot \sigma_c - \{\delta u\}^T \cdot b \right] dz \cdot dA = 0 \quad (\text{II.83})$$

Après l'intégration sur l'épaisseur de la plaque on trouve :

$$\int_A \left[ \{\delta \hat{\varepsilon}_f\}^T \cdot \hat{\sigma}_f + \{\delta \hat{\varepsilon}_c\}^T \cdot \hat{\sigma}_c - \{\delta u\}^T \cdot \hat{b} \right] dA = 0 \quad (\text{II.84})$$

On peut ensuite calculer les moments et efforts tranchants résultants :

$$M_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_x dz \quad M_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_y dz \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \tau_{xy} dz \quad (\text{II.85a})$$

$$T_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad T_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (\text{II.85b})$$

Avec :  $\hat{\sigma}_f = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$  ;  $\hat{\sigma}_c = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix}$  et généralement, on prend  $\hat{b} = \begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

où  $q$  représente la distribution de charge latérale appliquée à la plaque.

#### d. Equations d'équilibre :

Les équations d'équilibre peuvent être locales suivant  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Ces équations s'écrivent de plusieurs manières, selon que sont considérés l'équilibre local en termes de contraintes, d'efforts, de déplacements ou l'équilibre global par le théorème des travaux virtuels.<sup>[FEL01a]</sup>

##### Equations d'équilibre en termes d'efforts :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.86})$$

Qui entraîne :

$$T_x = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (\text{II.87})$$

Et

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.88})$$

Qui entraîne :

$$T_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \quad (\text{II.89})$$

La dernière équation traduit l'équilibre transversal (ou vertical) :

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \tau = 0 \quad (\text{II.90})$$

### II.3. Eléments finis $C^0$ pour les plaques Reissner-Mindlin : <sup>[HIN80],[REM02],[TAY03]</sup>

Le plan moyen de la plaque se discrétise en une maille d'éléments isoparamétriques de classe  $C^0$ , l'interpolation du vecteur déplacements  $u$  a la forme :

$$u = \sum_{i=1}^n N_i \cdot d_i \quad (\text{II.91})$$

Et le déplacement virtuel :

$$\delta u = \sum_{i=1}^n N_i \cdot \delta d_i \quad (\text{II.92})$$

où le vecteur des variables nodales est :  $d_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}_i \quad (\text{II.93})$$

$n$  : nombre de nœuds de la structure

La déformation flexionnelle donnée par la relation suivante :

$$\delta \hat{\epsilon}_f = \sum_{i=1}^n B_{fi} \cdot \delta d_i \quad (\text{II.94})$$

avec :

$$B_{fi} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

La déformation de cisaillement donnée par la relation suivante :

$$\delta \hat{\epsilon}_c = \sum_{i=1}^n B_{ci} \cdot \delta d_i \quad (\text{II.95})$$

où :

$$B_{ci} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix}$$



On remplace les équations (II.92), (II.94) et (II.95) dans l'équation (II.83), on obtient l'expression suivante :

$$\sum_{i=1}^n \{\delta d_i\}^T \left\{ \int_{A-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( [B_{fi}]^T \cdot \sigma_f \cdot z + [B_{ci}]^T \cdot \sigma_c - \{N_i\}^T \cdot b \right) dz \cdot dA \right\} = 0 \quad (\text{II.96})$$

Cette équation doit être vraie pour n'importe quel déplacement virtuel, donc :

$$\int_{A-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( [B_{fi}]^T \cdot \sigma_f \cdot z + [B_{ci}]^T \cdot \sigma_c - \{N_i\}^T \cdot b \right) dz \cdot dA = 0 \quad (\text{II.97})$$

l'équation de la forme  $K \cdot u - F = 0$  qu'on écrit ainsi :  $\Psi_i(d) = 0$

Si on intègre sur l'épaisseur de la plaque, on aura l'équation suivante :

$$\int_A \left( [B_{fi}]^T \cdot \hat{\sigma}_f + [B_{ci}]^T \cdot \hat{\sigma}_c - \{N_i\}^T \cdot \hat{b} \right) dA = 0 \quad (\text{II.98})$$

où :  $\Psi_i(d) = 0$

Quand les contraintes sont non linéaires alors les équations (II.97) et (II.98) donnent un système d'équations non linéaires dont la procédure de résolution sera exposée au quatrième chapitre.

#### II.4. Transformation isoparamétrique : <sup>[IMB84],[FRA01]</sup>

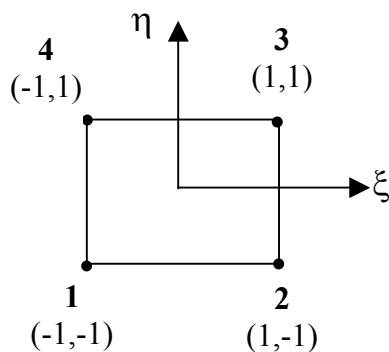
A l'intérieur de l'élément, on a les représentations suivantes pour les coordonnées  $x$  et  $y$  :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n N_i(x,y) & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n N_i(x,y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (\text{II.99})$$

On définit une transformation du domaine physique  $(x, y)$  de l'élément en un domaine géométrique simple sans dimension  $(\xi, \eta)$  par les relations :

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i \quad (\text{II.100})$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i \quad (\text{II.101})$$



**Figure (II.4) :** Elément de référence

La première transformation est obtenue par la règle de dérivation des fonctions composées, on a :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.102})$$

où  $[J]$  la matrice Jacobienne ce qui peut s'écrire :

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{II.103})$$

on obtient finalement les dérivées des  $N_i$  par rapport à  $(x, y)$  en inversant l'équation (II.102) :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.104})$$

avec :

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (\text{II.105})$$

Posons :  $[j] = [J]^{-1}$  ;  $J = \det[J]$

$$\text{Donc :} \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [j] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [j] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.106})$$

$$[j] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{II.107})$$

et  $J = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21}$

Les déformations  $\{\varepsilon_f\}$  et  $\{\varepsilon_c\}$  sont définies en fonction des variables nodales :

$$\{\varepsilon_f\} = [B_f] \cdot \{d_n\} \quad (\text{II.108})$$

$$\{\varepsilon_c\} = [B_c] \cdot \{d_n\} \quad (\text{II.109})$$

$$\text{avec : } [B_f] = \begin{bmatrix} \langle 0 \rangle & \left\langle -\frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \left\langle -\frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle \\ \langle 0 \rangle & \left\langle -\frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle & \left\langle -\frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \end{bmatrix} \text{ et } [B_c] = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle & \langle -N \rangle & 0 \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle & 0 & \langle -N \rangle \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \{d_n\} = \{w_1 \dots w_n \ ; \ \theta_{x1} \dots \theta_{xn} \ ; \ \theta_{y1} \dots \theta_{yn}\}^T .$$

Et les dérivées des fonctions de forme cartésiennes utilisées dans les matrices  $[B_f]$  et  $[B_c]$  peuvent être obtenues comme suit :

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle = j_{11} \left\langle \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\rangle + j_{12} \left\langle \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\rangle \quad (\text{II.110})$$

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle = j_{21} \left\langle \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\rangle + j_{22} \left\langle \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\rangle \quad (\text{II.111})$$

la discrétisation du volume ( la surface de plaque de Mindlin ) est donnée par :

$$d\Omega = dA = dx.dy = \text{Det}[J] d\xi.d\eta = J.d\xi.d\eta \quad (\text{II.112})$$

On aura les matrices de rigidité élémentaires de flexion et de cisaillement sous la forme :

$$[K_f^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_f^e]^T [D_f] [B_f^e] |J| d\xi.d\eta \quad (\text{II.113})$$

$$[K_c^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_c^e]^T [D_c] [B_c^e] |J| d\xi.d\eta \quad (\text{II.114})$$

Les forces nodales au nœud «  $i$  » causées par les forces appliquées s'écrivent ainsi :

$$\{f_i^e\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_i^e]^T \{b\} |J| d\xi.d\eta \quad (\text{II.115})$$

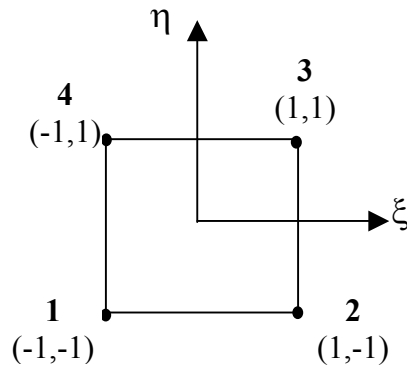
Chaque élément est caractérisé par les matrices  $[B_c]$  et  $[B_f]$ . La matrice de rigidité  $[K]$  est obtenue par intégration explicite ou, plus généralement, par intégration numérique de type de Gauss pour les quadrilatères.

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [K_f^e] \end{bmatrix} + [K_c^e] \quad (\text{II.116})$$

**II.5. Présentation des éléments isoparamétriques utilisés :**

**II.5.1. Élément à 4 nœuds Q4 :**<sup>[IMB84],[TOU81]</sup>

Pour l'élément isoparamétrique à quatre nœuds avec variation de déplacement linéaire ; les fonctions de forme sont :



**Figure (II.5) : Élément Q4**

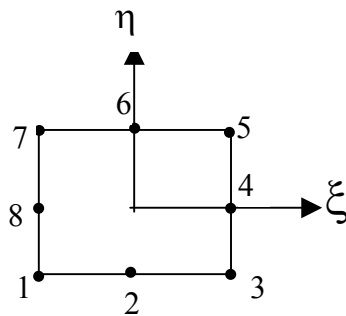
$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \tag{II.117}$$

$\langle N \rangle = \langle N_i \ i=1,4 \rangle$  avec :  $-1 \leq \eta \leq 1$  et  $-1 \leq \xi \leq 1$

où :  $\xi_i, \eta_i$  : sont les coordonnées paramétriques du nœud  $i$ .

**II.5.2. Élément de Serendip à 8 nœuds Q8 :**<sup>[MAR02],[STE99]</sup>

L'élément quadrilatéral de Serendip ( Lagrange incomplet ) à huit nœuds aux côtés courbes et avec variation quadratique du champ de déplacement à l'intérieur de l'élément ; les fonctions de formes sont les suivantes :



**Figure (II.6) : Élément Q8**

Pour les nœuds aux sommets ( coins ) :

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(-1 + \xi\xi_i + \eta\eta_i)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \tag{II.118}$$

$i = 1,3,5,7$

Pour les nœuds au milieu des côtés :

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) \quad ; \quad i = 2,6 \tag{II.119}$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i) \quad ; \quad i = 4,8 \tag{II.120}$$

Ou 
$$N_i = \frac{\xi_i^2}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2}(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2) \quad ; \quad i = 2,4,6,8 \tag{II.121}$$

**II.5.3. Élément de Lagrange à 9 nœuds Q9 :** <sup>[IMB84],[TOU81]</sup>

Pour l'élément quadrilatéral de Lagrange complet à neuf nœuds ; les fonctions de forme sont les suivantes :

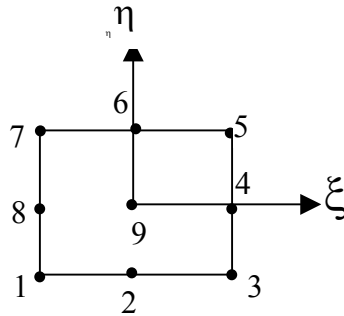


Figure (II.7) : Élément Q9

Pour les nœuds aux sommets ( coins ) :

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi\xi_i)(\eta^2 + \eta\eta_i) ; i = 1,3,5,7 \tag{II.122}$$

Pour les nœuds au milieu des côtés :

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\eta_i^2(\eta^2 - \eta\eta_i)(1 - \xi^2) + \frac{1}{2}\xi_i^2(\xi^2 - \xi\xi_i)(1 - \eta^2) ; i = 2,4,6,8 \tag{II.123}$$

Pour le nœud central :

$$N_i(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \tag{II.124}$$

**II.5.4. Élément Hétérosis HT9 :** <sup>[HIN80],[STE99],[NIK87]</sup>

Le principe de l'élément Hétérosis est de traiter séparément l'interpolation de la flèche  $w$  de celle des composantes de la rotation  $\theta_x$  et  $\theta_y$  Figure (II.8).

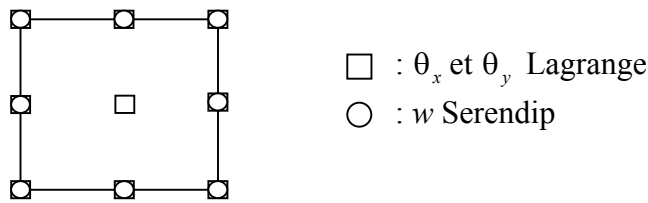


Figure (II.8) : Élément Hétérosis

La flèche est interpolée sur un élément de Serendip à 8 nœuds et les rotations sur un élément de Lagrange superposé à 9 nœuds, les deux interpolations étant quadratiques respectivement incomplète et complète :

$$w = \sum_{i=1}^8 N_i \cdot w_i \tag{II.125}$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^9 N'_i \theta_{xi} \text{ et } \theta_y = \sum_{i=1}^9 N'_i \theta_{yi} \tag{II.126}$$

Les fonctions de forme des huit premiers nœuds sont celle de l'élément de Serendip à huit nœuds.

Pour les nœuds aux sommets ( coins ) :

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(-1 + \xi\xi_i + \eta\eta_i)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) ; i = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{II.127})$$

Pour les nœuds au milieu des côtés :

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{\xi_i^2}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2}(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2) ; i = 5, 6, 7, 8 \quad (\text{II.128})$$

Pour le 9<sup>ème</sup> nœud central, la fonction de forme est :

$$N_9(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad (\text{II.129})$$

L'élément Hétérosis développé par Hughes est un élément calculé par intégration sélective, il est basé sur des fonctions d'interpolation de Serendip pour  $w$  et des fonctions d'interpolation de Lagrange pour  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . Il possède donc un nœud central avec  $\theta_x$  et  $\theta_y$  comme d.d.l, ses performances sont excellentes, il ne présente aucun mécanisme et permet la modélisation de plaques très minces ( $L/h < 10^6$ ).<sup>[NIK87]</sup>

Chacun des éléments Q8, Q9 ou Hétérosis peut être choisi ainsi :

- Pour obtenir la représentation de Serendip à 8 nœuds, on impose la valeur zéro à tous les d.d.l du nœud neuf.
- Pour obtenir un élément équivalent à la représentation de Lagrange à 9 nœuds, tous les d.d.l au nœud neuf sont laissés libres et le déplacement total en ce nœud sera calculé ainsi :

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i(0, 0) \cdot a_i + a_9 \text{ où } a_i = \{w_i \theta_{xi} \theta_{yi}\}^T \quad (\text{II.130})$$

- Pour obtenir la représentation de l'élément Hétérosis, seulement le déplacement au nœud neuf  $w_9$  est prise nul, là encore l'expression (II.130) est utilisée pour le déplacement total en ce nœud.

## II.5.5. Élément avec représentation particulière de CT :<sup>[BAT90a],[BAT90b]</sup>

### II.5.5.1. Introduction :

Les difficultés rencontrées pour obtenir des éléments finis avec cisaillement transversal, ayant un nombre réduit de nœuds et de variables nodales et sans mode parasite et libre de tous blocage en cisaillement transversal, ont conduit plusieurs chercheurs<sup>[BAT90b]</sup> à formuler des éléments très satisfaisants ( par exemple l'élément Q4 $\gamma$  ).

L'énergie potentielle intérieure est :

$$\Pi_{\text{int}}^e = U_f^e + U_c^e \quad (\text{II.131})$$

avec 
$$U_f^e = \frac{1}{2} \int_A \{\varepsilon_f\}^T [D_f] \{\varepsilon_f\} dA \quad (\text{II.132})$$

où : 
$$\{\varepsilon_f\}^T = \left\{ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right\}$$

et 
$$U_c^e = \frac{1}{2} \int_A \{\underline{\gamma}\}^T [D_c] \{\underline{\gamma}\} dA \quad (\text{II.133})$$

où : 
$$\{\underline{\gamma}\}^T = \left\{ \underline{\gamma}_{xz} \quad \underline{\gamma}_{yz} \right\}$$

$\underline{\gamma}_{xz}$  et  $\underline{\gamma}_{yz}$  : Sont les déformations indépendantes ou de substitution. Les relations habituelles. :

$\underline{\gamma}_{xz} = \gamma_{xz}$  et  $\underline{\gamma}_{yz} = \gamma_{yz}$  avec  $\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x$  et  $\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y$ , sont exprimées sous forme discrète

(collocation ou intégrale) pour obtenir  $U_c^e$  en fonction des variables nodales  $\{u_n\}$  :

#### a. Collocation :

- En un point «  $s_i$  » :  $\gamma_{sz} \equiv \underline{\gamma}_{sz}$  avec  $\gamma_{sz} = \frac{\partial w}{\partial s} + \theta_s$
- En un point  $(\xi_i, \eta_j)$  situé à l'intérieur de l'élément :  $\gamma_{\xi z} \equiv \underline{\gamma}_{\xi z}$  et  $\gamma_{\eta z} \equiv \underline{\gamma}_{\eta z}$  avec  $\gamma_{\xi z} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \theta_\xi$  et  $\gamma_{\eta z} = \frac{\partial w}{\partial \eta} + \theta_\eta$

#### b. Forme intégrale :

- Sur les côtés  $ij$  ( où à l'intérieur des éléments suivant une direction ) :

$$\int_i^j (\gamma_{sz} - \underline{\gamma}_{sz}) ds = 0 \quad (\text{II.134})$$

- Sur l'élément :

$$\int_A (\gamma_{\xi z} - \underline{\gamma}_{\xi z}) dA = \int_A (\gamma_{\eta z} - \underline{\gamma}_{\eta z}) dA = 0 \quad (\text{II.135})$$

**II.5.5.2. Indicateur de blocage :**<sup>[AYA93],[BAT90b]</sup>

Le blocage c'est un phénomène selon lequel le modèle élément fini devient sur-rigide, quand le rapport d'épaisseur ou un autre paramètre approche une valeur limite. Il faut le faire disparaître si on veut obtenir un élément de plaque incluant les effets de cisaillement transverse.

Si  $[K_c]$  est singulière, l'importance du cisaillement diminue. Cependant le rang de  $[K_c]$  devra être suffisant pour assurer une représentation acceptable des relations du modèle de Kirchhoff :

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y = 0 \quad (\text{II.136})$$

On peut introduire un indicateur de blocage, noté ici  $C_b$  :

$$C_b = \frac{N_{eq}}{\text{Rang}[K_c]} \quad (C_b \geq 1) \quad (\text{II.137})$$

$N_{eq}$  : est le nombre d'équations de la matrice globale  $[K]$  du problème à résoudre.

- Si  $C_b = 3/2$ , il ne semble pas y avoir de risque de blocage en cisaillement transversal. (Une explication heuristique est qu'en chaque point du milieu il y a trois variables cinématiques  $w, \theta_x$  et  $\theta_y$  pour deux variables de cisaillement transversal, soit  $Q_x, Q_y$  ou  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ ).

- Si  $C_b = 1$  il y a blocage.

**Remarque :**

- $N_{eq}$  et le Rang $[K_c]$  sont définis après la prise en compte des conditions aux limites (encastrement).
- Il n'est pas nécessaire que  $C_b$  soit égal à 3/2 pour que l'élément soit acceptable.
- Quelques exemples de la valeur de l'indicateur de blocage et le mode parasite situés dans le tableau suivant :

		Q4	Q8	Q9	Hétérosis
Intégration Exacte	Modes parasites	0	0	0	3
	$C_b$	1	1	12/11	/
Intégration réduite	Modes parasites	4	1	4	/
	$C_b$	3/2	9/8	12/8	/
Intégration sélective	Modes parasites	2	0	1	0
	$C_b$	3/2	9/8	12/8	/

**Tableau(II.1) :** Indicateur  $C_b$  pour différents éléments<sup>[BAT90b]</sup>



### II.5.5.3. Élément à quatre nœuds avec CT constant par côté ( $Q4\gamma$ ) : <sup>[BAT90b]</sup>

Considérons un élément quadrilatéral à 4 nœuds avec une approximation bilinéaire de la géométrie (  $x$  et  $y$  ) et de  $w$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ . Qui tient compte l'influence des déformations de cisaillement transversal constant par côté.

L'idée de base pour la formulation de cet élément est de transformer la matrice des déformations de CT  $[B_c]$  de telle façon à avoir la même approximation pour les rotations que pour le déplacement transversal.

La matrice de rigidité de flexion est définie sous la forme :

$$[K_f] = \int_A [B_f]^T [D_f] [B_f] dA \quad (\text{II.138})$$

et celle de cisaillement transversal est définie par :

$$[K_c] = \int_A [B_c]^T [D_c] [B_c] dA \quad (\text{II.139})$$

Où la matrice  $[B_c]$  est définie de manière que les approximations de  $\gamma_{\xi z}$  et  $\gamma_{\eta z}$  soient les mêmes

que celles de  $\frac{\partial w}{\partial \xi}$  et de  $\frac{\partial w}{\partial \eta}$  donc :

$$\{\gamma_\xi\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \theta_\xi \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} + \theta_\eta \end{Bmatrix} = [B'_\xi] \{u_{n\xi}\} \quad (\text{II.140})$$

$$\langle u_{n\xi} \rangle = \langle \dots w_i \quad \theta_{\xi i} \quad \theta_{\eta i} \dots \rangle \quad i = 1, 4$$

Considérons  $\gamma_\xi$  ( $\equiv \gamma_{\xi z}$ ) et  $\gamma_\eta$  ( $\equiv \gamma_{\eta z}$ ) constants sur chaque côté de l'élément ( ou  $\gamma_\xi$  et  $\gamma_\eta$  évalués aux milieux des côtés ) :

On prend par exemple sur le Coté 1-2, d'après l'équation (II.134) nous avons :

$$\int_{-1}^{+1} \gamma_{\xi z} d\xi = \int_{-1}^{+1} (w_{,\xi} + \theta_\xi) d\xi \quad (\text{II.141})$$

En supposant que, l'interpolation du déplacement est linéaire suivant la direction  $\xi$  et suivant  $\eta$  :

- Pour la direction  $\xi$  :

$$w = \frac{1-\xi}{2} w_i + \frac{1+\xi}{2} w_j \quad \text{donc} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{1}{2} (w_j - w_i) \quad \text{et} \quad \theta_\xi = \frac{1-\xi}{2} \theta_{\xi i} + \frac{1+\xi}{2} \theta_{\xi j}$$

Et pour la direction  $\eta$  c'est la même chose.

On trouve après la substitution dans l'équation (II.141) :  $\int_{-1}^{+1} \gamma_{\xi z} d\xi = 2\gamma_{\xi z}^{A1}$

(  $\gamma_{\xi z}, \gamma_{\eta z}$  sont constantes sur les côtés )

$$\int_{-1}^{+1} (w_{,\xi} + \theta_{\xi}) d\xi = (w_2 - w_1) + \theta_{\xi 1} + \theta_{\xi 2} \quad (\text{II.142})$$

Donc dans la base  $\xi$  la longueur du côté 12 est égale à 2.

$$\gamma_{\xi}^{A1} = \frac{1}{2}(w_2 - w_1 + \theta_{\xi 1} + \theta_{\xi 2}) \text{ côté 1-2} \quad (\text{II.143})$$

$$\gamma_{\xi}^{A2} = \frac{1}{2}(w_3 - w_4 + \theta_{\xi 3} + \theta_{\xi 4}) \text{ côté 3-4} \quad (\text{II.144})$$

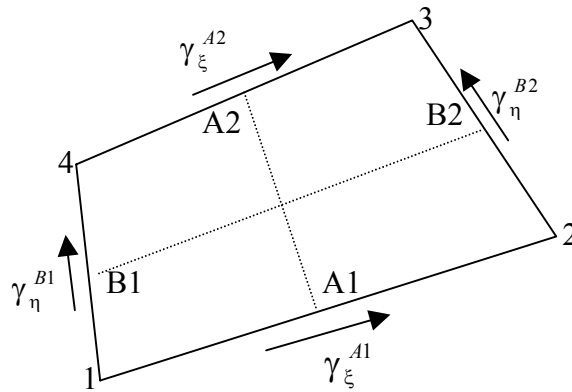
$$\gamma_{\eta}^{B1} = \frac{1}{2}(w_4 - w_1 + \theta_{\eta 1} + \theta_{\eta 4}) \text{ côté 1-4} \quad (\text{II.145})$$

$$\gamma_{\eta}^{B2} = \frac{1}{2}(w_3 - w_2 + \theta_{\eta 2} + \theta_{\eta 3}) \text{ côté 2-3} \quad (\text{II.146})$$

Dans cet élément l'énergie de déformation de cisaillement transversal sous la forme :

$$U_c^e = \frac{1}{2} \int \{\underline{\gamma}\}^T [D_c] \{\underline{\gamma}\} dA \quad (\text{II.147})$$

avec  $\{\underline{\gamma}\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \{\underline{\gamma}_{\xi}\}$



**Figure (II.9) :** Elément  $Q4\gamma$  [BAT90b]

Et on définit les déformations  $\{\underline{\gamma}_{\xi}\}$  en un point  $\xi, \eta$  par :

$$\{\underline{\gamma}_{\xi}\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1-\eta}{2} \gamma_{\xi}^{A1} + \frac{1+\eta}{2} \gamma_{\xi}^{A2} \\ \frac{1-\xi}{2} \gamma_{\eta}^{B1} + \frac{1+\xi}{2} \gamma_{\eta}^{B2} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.148})$$

Et on relie  $\left\{ \underline{\gamma}_{-\xi} \right\}$  à  $\left\{ \gamma_{\xi} \right\}$  le long de chaque côté sous la forme :

$$\int_{-1}^{+1} \left( \underline{\gamma}_{-\xi z} - \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} + \theta_{\xi} \right) \right) d\xi = 0 \text{ côtés 12 et 34} \quad (\text{II.149})$$

$$\int_{-1}^{+1} \left( \underline{\gamma}_{-\eta z} - \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} + \theta_{\eta} \right) \right) d\eta = 0 \text{ côtés 23 et 41} \quad (\text{II.150})$$

En trouve finalement :

$$\underline{\gamma}_{-\xi z} = \frac{1-\eta}{2} \left[ \frac{1}{2}(w_2 - w_1) + \theta_{\xi 2} + \theta_{\xi 1} \right] + \frac{1+\eta}{2} \left[ \frac{1}{2}(w_3 - w_4) + \theta_{\xi 3} + \theta_{\xi 4} \right] \quad (\text{II.151})$$

$$\underline{\gamma}_{-\eta z} = \frac{1-\xi}{2} \left[ \frac{1}{2}(w_4 - w_1) + \theta_{\eta 4} + \theta_{\eta 1} \right] + \frac{1+\xi}{2} \left[ \frac{1}{2}(w_3 - w_2) + \theta_{\eta 3} + \theta_{\eta 2} \right] \quad (\text{II.152})$$

donc :

$$\underline{\gamma}_{-\xi z} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} w_1 - \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \theta_{\xi 1} + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} w_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \theta_{\xi 2} + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} w_3 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \theta_{\xi 3} + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} w_4 - \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \theta_{\xi 4} \quad (\text{II.153})$$

$$\underline{\gamma}_{-\eta z} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} w_1 - \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \theta_{\eta 1} + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} w_2 - \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \theta_{\eta 2} + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} w_3 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \theta_{\eta 3} + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} w_4 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \theta_{\eta 4} \quad (\text{II.154})$$

$$\text{où :} \quad N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) \quad (\text{II.155})$$

$$\text{donc :} \quad \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(\xi_i)(1 + \eta \eta_i) \quad \text{et} \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(\eta_i)(1 + \xi \xi_i)$$

$$\text{Pour } i = 1 \quad \xi_i = -1 \text{ et } \eta_i = -1 : \quad \frac{\partial N_1}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(\eta - 1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(\xi - 1) \quad (\text{II.156})$$

$$\text{Pour } i = 2 \quad \xi_i = +1 \text{ et } \eta_i = -1 : \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 - \eta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 + \xi) \quad (\text{II.157})$$

$$\text{Pour } i = 3 \quad \xi_i = +1 \text{ et } \eta_i = +1 : \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(\eta + 1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(\xi + 1) \quad (\text{II.158})$$

$$\text{Pour } i = 4 \quad \xi_i = -1 \text{ et } \eta_i = +1 : \quad \frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1 + \eta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi) \quad (\text{II.159})$$

Donc on peut écrire les équations ((II.153) et (II.154)) sous la forme matricielle comme suit :

$$\left\{ \gamma_{\xi} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \xi_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & \eta_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array} \right] \dots \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ w_i \\ \theta_{\xi i} \\ \theta_{\eta i} \\ \vdots \end{array} \right\} \quad (\text{II.160})$$

$$\text{donc : } \quad \{\gamma_\xi\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = [B'_\xi] \{u_{n\xi}\} \quad (\text{II.161})$$

$$\text{où } \quad [B'_\xi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \xi_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & \dots \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & \eta_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \dots \end{bmatrix} \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1 \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \theta_{\xi i} \\ \theta_{\eta i} \end{Bmatrix} = [J^i] \begin{Bmatrix} \theta_{x i} \\ \theta_{y i} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.162})$$

$$\text{Ainsi } \quad \{\gamma_\xi\} = [B_\xi] \{u_n\} \quad \langle u_n \rangle = \langle \dots \quad w_i \quad \theta_{x i} \quad \theta_{y i} \quad \dots \rangle \quad (\text{II.163})$$

$$[B_\xi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \xi_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} J_{11}^i & \xi_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} J_{12}^i & \dots \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \eta_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} J_{21}^i & \eta_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} J_{22}^i & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{II.164})$$

d'où finalement :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \{\gamma_\xi\} = [B_c] \{u_n\} \quad (\text{II.165})$$

$$\text{avec } [B_c] = [J]^{-1} [B_\xi]$$

La matrice  $[K_c]$  est évaluée par un schéma de Gauss de type 2x2. le rang de  $[K]$  est 9, il n'y a pas de mode parasite et ainsi pas de risque de blocage en cisaillement transversal.

Tout cette théorie illustrant l'élément  $Q4\gamma$  est traduite en un sous-programme, dit ELEM08 pour calculé la matrice de rigidité et RESMPAQ pour calculé les efforts résultants.

## II.6. Intégration numérique :<sup>[IMB84],[TOU81],[FRA01],[COF01]</sup>

Dans la solution numérique des problèmes de la mécanique des solides et structures, on est fréquemment amené à devoir évaluer des intégrales, telles que :  $\int_{x1}^{x2} f(x)dx$ ,  $\int_{y1}^{y2} \int_{x1}^{x2} f(x,y)dxdy$  ...etc

Souvent il est difficile ou impossible pour certains types de problème (c'est le cas des problèmes axisymétriques au voisinage de l'axe de révolution, ou dans le cas d'élément d'ordre élevé, ou isoparamétriques courbés) de trouver les expressions exactes de ces intégrales. On peut alors les évaluer de manière approchée par une intégration numérique.

Pour cela, réitérons dans cette partie la notion d'intégration numérique par la méthode de Gauss adoptée dans le programme et sui est la plus utilisée vu ses avantages.

Dans le cas d'une seule dimension d'espace, on souhaite intégrer une fonction  $f(r)$  sur un intervalle de référence, par exemple  $[-1, 1]$  :

$$I = \int_{-1}^1 f(r) dr = \sum_{i=1}^n w_i \cdot f(r_i) \quad (\text{II.166})$$

Où  $w_i$  représente les coefficients de pondération et  $r_i$  les positions des points d'intégration.

Pour des problèmes bidimensionnels, la formule de Gauss est la suivante (sur un intervalle de référence, par exemple  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ ) :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) dr ds = \sum_i \sum_j w_i w_j \cdot f(r_i, s_j) \quad (\text{II.167})$$

Le tableau (II.2) donne la position des points d'intégration et les coefficients de pondération des cinq premiers points de Gauss-Legendre.

N <sub>br</sub>	$\pm \xi_i$	$w_i$
2	0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
3	0.00000 00000 00000 0.77459 66692 41483	0.88888 88888 88888 0.55555 55555 55555
4	0.33998 10435 84856 0.86113 63115 94053	0.65214 51548 62546 0.34785 48451 37454
5	0.00000 00000 00000 0.53846 93101 05683 0.90617 98459 38664	0.56888 88888 88889 0.47862 86704 99366 0.23692 68850 56189

**Tableau (II.2) :** Points d'intégration et coefficients de pondération de Gauss<sup>[FRA01]</sup>

### Ordre d'intégration :<sup>[IMB84]</sup>

Le choix de point d'intégration est d'une importance en pratique, car d'une part, le coût d'analyse augmente si un ordre d'intégration élevé est utilisé et d'autre part, en utilisant un ordre d'intégration réduit, les résultats obtenus peuvent être sérieusement affectés.

Il y a par ailleurs pour chaque type d'élément un ordre d'intégration minimal nécessaire pour assurer la convergence. On peut, en effet, montrer que la convergence des éléments calculés par intégration numérique est satisfaisante si l'ordre d'intégration est suffisant pour calculer de façon exacte le volume de l'élément.

Le choix d'un nombre minimal de points d'intégration peut être recommandé, d'où la terminologie intégration réduite ( par rapport à l'ordre maximal ), pour justifier cette assertion, il faut noter que l'utilisation de l'intégration réduite évite le phénomène de blocage ( verrouillage ) apparaît quand on utilise l'intégration numérique exacte, l'intégration réduite permet d'obtenir des éléments isoparamétriques simples et performants dans le cas de plaques avec cisaillement transverse et évite le blocage observé avec l'intégration exacte pour la plupart des éléments. Pour

améliorer encore les éléments, on pourra utiliser une technique d'intégration sélective qui consiste à utiliser l'intégration réduite pour évaluer la matrice de rigidité associée à l'énergie de cisaillement afin de soulager ses effets contraignants et pour le reste des termes, l'intégration exacte sera employée pour tenter de conserver les exigences d'ensemble des matrices de rigidité (Tableau (II.3)). Pour notre problème de flexion avec cisaillement transversal on utilisera l'intégration exacte pour une énergie de flexion pure et l'intégration réduite pour l'énergie de cisaillement.


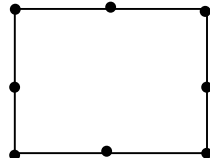
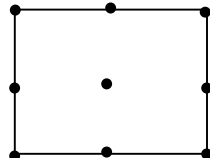
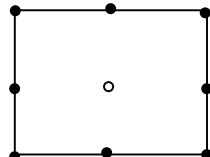
Type d'élément	La règle d'intégration			Contraintes de cisaillement	Nombre de mécanisme
	Type	$K_f$	$K_c$		
 Linéaire 4 Nœuds 12 d.d.l	Réduite :	1x1	1x1	2	4
	Sélective :	2x2	1x1	2	2
	Exacte :	2x2	2x2	8	0
 Serendip Quadratique 8 Nœuds 24 d.d.l	Réduite :	2x2	2x2	8	1
	Sélective :	3x3	2x2	8	0
	Exacte :	3x3	3x3	18	0
 Lagrange Quadratique 9 Nœuds 27 d.d.l	Réduite :	2x2	2x2	8	4
	Sélective :	3x3	2x2	8	1
	Exacte :	3x3	3x3	18	0
 Hétérosis Quadratique 9 Nœuds 26 d.d.l	Sélective :	3x3	2x2	8	0

Tableau (II.3) : Lois d'intégration pour les plaques de Mindlin<sup>[IMB84]</sup>

**Remarque :**

L'élément Hétérosis avec intégration sélective ne présente aucun mécanisme (mode parasite).

En général on peut dire que les éléments de Mindlin sont applicables pour les plaques épaisses et minces mais quand traiter l'élément mince de la plaque de Mindlin peut être moins précis que des éléments de Kirchhoff, ce qui ne permet pas la déformation transversale de cisaillement.