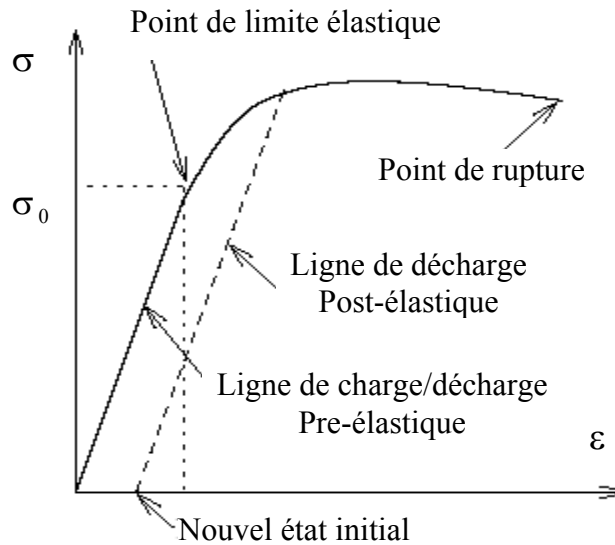


CHAPITRE III : THEORIE D'ELASTO-PLASTICITE

III.1. Introduction :

Un aperçu du comportement des matériaux réels :^[GAR01c]

Si on fait une expérience de traction sur un matériau (l'acier par exemple), on constate que, tant que les efforts de traction ne dépassent pas une certaine limite, la relation contrainte-déformation reste linéaire. Cependant au-delà du seuil, on constate que la linéarité et la mémoire de la configuration initiale sont perdues : le matériau a une loi de comportement différente.



Figure(III.1) : Courbe $\sigma_{11} = f(\varepsilon_{11})$ dans un essai de traction^[GAR01c]

La figure (III.1) Montre l'allure du comportement d'un acier dans un essai de traction sur une éprouvette, dans un plan déformation-contrainte. On y constate clairement deux comportements :

- Tant qu'on reste en dessous du point de limite élastique, le comportement reste élastique, c'est à dire que la courbe de décharge est confondue avec la courbe de charge. Quand le chargement redevient nul, l'éprouvette retrouve donc sa forme initiale.
- Par contre, si le chargement dépasse la limite élastique, et si on décharge ensuite l'éprouvette, on constate qu'on revient à un autre état : le matériau a perdu la mémoire de son état initial et se comporte comme si l'état initial était changé.

III.2. Domaines d'élasticité :^[BER87]

L'expérience est effectuée à vitesse de déformation fixée. On constate l'existence d'un seuil pour la contrainte, soit σ_0 , à partir duquel le comportement du matériaux devient irréversible, l'éprouvette ayant été chargée au-delà de A jusqu'en B , on effectue une décharge : celle-ci suit sur le diagramme le chemin BC et non le trajet BAO . En particulier, on note qu'après décharge totale, il reste une déformation de l'éprouvette représentée par OC sur la figure (III.2) : cette déformation permanente est la déformation « plastique ». On procède alors à une nouvelle

charge : tant que la contrainte reste inférieure à σ_B celle-ci s'effectue en suivant le trajet CB identique, au sens de parcours près, à celui décrit lors de la décharge ; Le comportement demeure réversible tout au long de CB . Quand σ dépasse σ_B , le point figuratif suit la courbe de première charge au-delà de B , c'est-à-dire la courbe représentant la traction sans décharge. Ainsi lors de la nouvelle charge effectuée à partir de C , σ_B apparaît comme le nouveau seuil en traction.

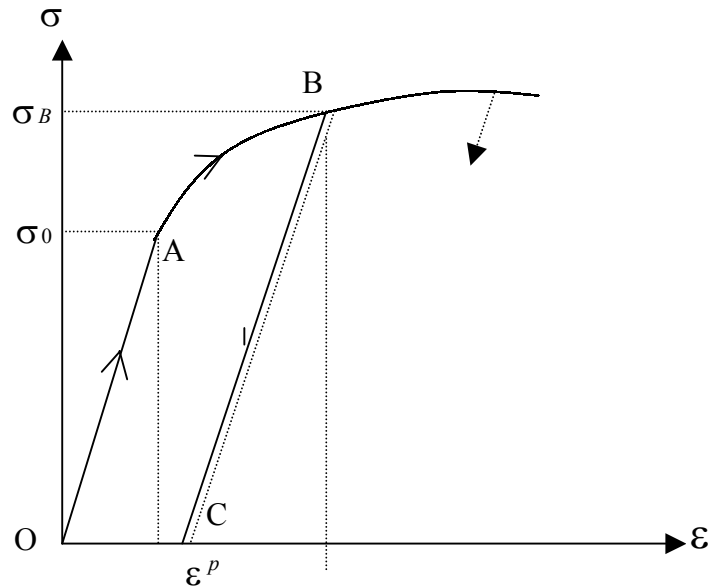


Figure (III.2) : *Expérience de traction simple pour un matériau écrouissable*^[BER87]

Le phénomène observé à la figure (III.2), où la limite actuelle d'élasticité σ_B effectivement une fonction de ϵ^p , correspond au cas du matériau dit écrouissable, on précise même dans certains cas « *matériau à écrouissage positif* » pour traduire le fait que le seuil de plasticité est une fonction croissante de ϵ^p . Ce phénomène, quoique le plus répandu, n'est pas général pour le comportement plastique. Ainsi la figure (III.3) représente le diagramme relevé dans le cas de l'expérience de traction simple effectuée sur une éprouvette d'acier doux : on constate que celui-ci présente un palier pour des déformations (palier plastique illimité) et l'on dit que le matériau correspondant est élastique et parfaitement plastique.

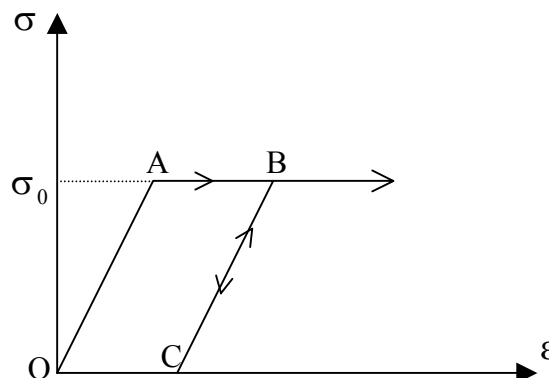


Figure (III.3) : *Matériau élastique parfaitement plastique (Acier Doux)*^[BER87]

Remarque :

Pour le modèle élastique parfaitement plastique, la contrainte ne peut dépasser la valeur σ_0 et, lorsqu'elle atteint cette valeur il y a possibilité d'allongement illimité.

On revient maintenant à l'expérience de traction simple dans le cas du matériaux écrouissable, après la décharge suivant BC on sollicite la même éprouvette en compression figure (III.4).

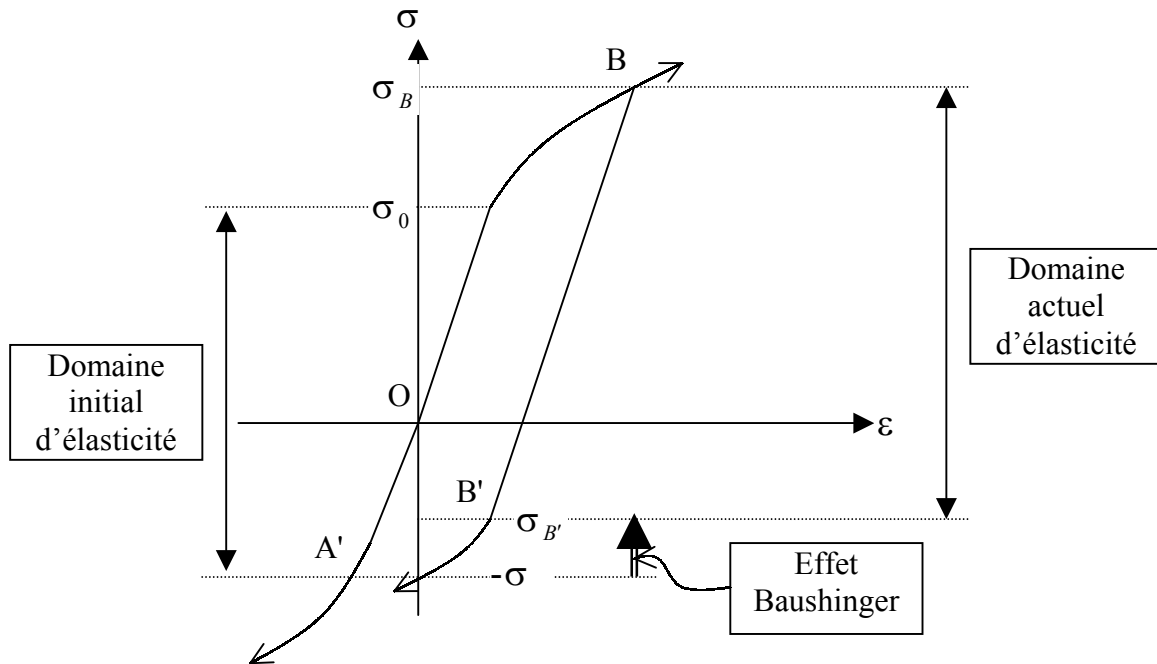


Figure (III.4) : Expérience de traction-compression : effet Baushinger^[BER87]

On constate alors que la limite d'élasticité en compression, initialement égale $-\sigma_0$, se trouve ramenée à la valeur $\sigma_{B'}$, supérieure (algébriquement) à $-\sigma_0$. Autrement dit, l'écrouissage en traction qui correspond à un relèvement de la limite d'élasticité en traction, s'accompagne d'une diminution (en valeur absolue) de la limite d'élasticité en compression. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet Bauschinger. Le segment $[-\sigma_0, \sigma_0]$ définit le domaine initial d'élasticité du matériau en traction-compression simple tandis que le segment $[-\sigma_{B'}, \sigma_B]$ définit le domaine actuel d'élasticité après écrouissage en traction simple jusqu'à la valeur $\sigma_{B'}$.

III.3. Domaine plastique :^[BER87]

La plasticité des matériaux est caractérisée par l'apparition des déformations élastiques et des déformations irréversibles, qui se manifestent lorsque la contrainte atteint un certain seuil. L'essai classique de traction sur une éprouvette d'un matériau ayant un comportement élasto-plastique avec écrouissage (Figure (III.2)) permet de mettre en évidence la non-linéarité et le phénomène d'irréversibilité caractérisant le comportement plastique. L'effet du temps est

supposé négligeable. La déformation totale est la somme des déformations élastique et plastique. Le point A est appelé le seuil de plasticité initial.

Lors d'une recharge CB , la plastification réapparaît à partir du point de décharge B , qui définit le seuil de plasticité actuel.

III.3.1. Notion de surface de charge :

Dans le cas de sollicitation multiaxiale, le seuil de plasticité est remplacé par une surface caractérisée par une fonction scalaire appelée fonction de charge.

$$F(\sigma, R) = 0 \quad (\text{III.1})$$

Avec σ : Tenseur des contraintes

R : L'ensemble des paramètres « cachés » ou « d'écrouissage ».

Cette fonction décrit dans l'espace des contraintes, une surface dite surface de charge ou d'écoulement, la position de cette surface dépend de la valeur instantanée du paramètre d'écrouissage :

Pour $F < 0$: C'est l'intérieur de la surface, ce domaine est élastique.

Pour $F = 0$: Plastification.

Pour $F > 0$: Est un état de contraintes physiquement impossibles en élasto-plasticité.

III.3.2. Modélisation du comportement élasto-plastique :^{[BER87],[LEM91],[BEN03]}

Le comportement réel est modélisé soit par la courbe élasto-plastique parfaite (sans effet Baushinger, figure (III.5.a), soit par celle avec écrouissage (linéaire ou non) et donc un module élasto-plastique tangent E^{ep} linéaire ou non (figure (III.5.b)). Ce dernier cas est plus général :

Donc si $E^{ep} = 0$ c'est le cas de l'élasto-plasticité parfaite, si $E^{ep} > 0$ c'est le durcissement (écrouissage positif) et si $E^{ep} < 0$ c'est l'adoucissement (écrouissage négatif).

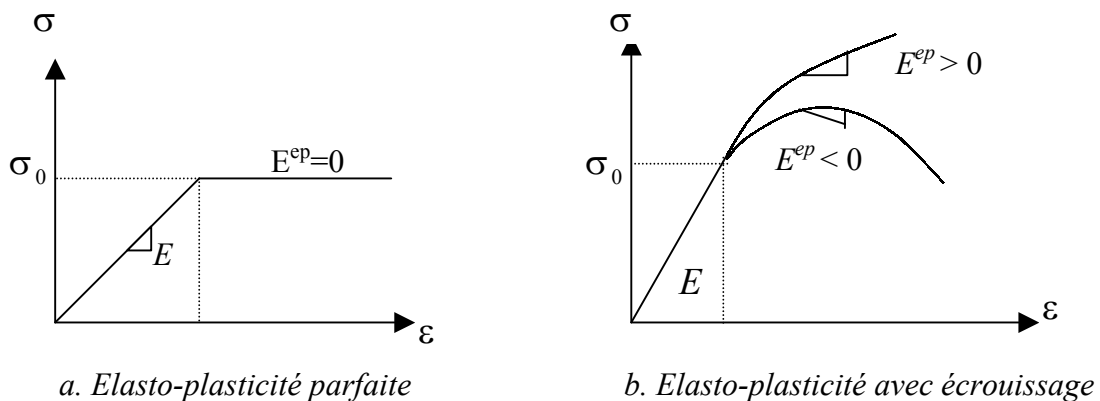


Figure (III.5) : Modélisation du comportement élasto-plastique^[BER87]

III.4. Théorie incrémentale de plasticité uniaxiale :

III.4.1. Essai de traction : ^[OUD01]

Intéressons nous à l'aspect phénoménologique de l'essai dans le cadre de l'élasto-plasticité classique (quasi-statique, petites déformations, température constante).

Considérons une éprouvette de traction, cette éprouvette est soumise à un effort de traction.

Considérons les graphes (σ, ε) obtenus pour trois essais de traction avec décharge. Selon le niveau de sollicitation appliqué lors du chargement nous obtenons les allures suivantes :

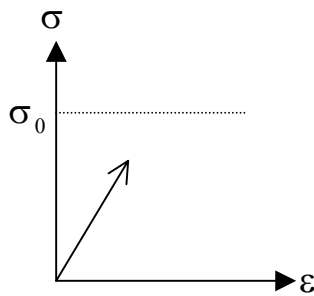


Figure (III.6.a) : Essai 1
 $\sigma < \sigma_0$

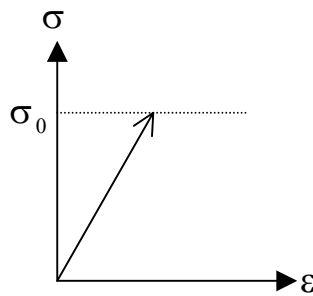


Figure (III.6.b) : Essai 2
 $\sigma = \sigma_0$

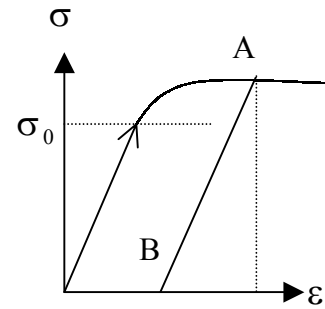


Figure (III.6.c) : Essai 3
 $\sigma > \sigma_0$

Essai 1 $\sigma < \sigma_0$: On est dans le domaine élastique, le comportement du matériau est réversible.

Nous considérons par la suite que la loi de comportement dans le domaine élastique est linéaire.

Essai 2 $\sigma = \sigma_0$: Cet essai est impossible à réaliser physiquement. La limite d'élasticité (σ_0), seuil à partir duquel il existe des déformations irréversibles, est définie de façon conventionnelle, elle correspond à un pourcentage de déformation permanente.

Essai 3 $\sigma > \sigma_0$: La décharge à partir du point *A* (chargement maximum) s'effectue parallèlement à la charge élastique, on parle de décharge élastique. En *B* (charge nulle) il ne reste que la déformation plastique ou déformation permanent ε^p .

III.4.2. Critère d'épuisement :

Le critère d'épuisement dans le cas uniaxiale (traction simple) est atteint quand la contrainte $|\sigma|$ atteint σ_0 .

Donc on peut écrire :

$$|\sigma| - \sigma_0 = F(\sigma, \sigma_0) = 0 \quad (\text{III.2})$$

Où σ_0 : la limite élastique initiale.

σ : la contrainte courante.

III.4.3. Règle d'écrouissage :

Cette règle doit donner la limite élastique actuelle σ_B et décrire l'effet Bauschinger.

Différentes idées ont été proposées pour donner l'évolution du seuil qui regroupent :

- L'écrouissage isotrope
- L'écrouissage cinématique
- L'écrouissage mixte (isotrope et cinématique)

III.4.3.1. Ecrouissage isotrope : ^{[MAR02],[LEM91]}

L'hypothèse de l'écrouissage isotrope est une expansion uniforme du domaine élastique, c'est-à-dire une modification du seuil du patin avec les déformations plastiques. Prenons un matériau avec des limites élastiques en compression et traction identique avant toute histoire de sollicitation. Appliquons maintenant au matériau une traction qui le porte dans le domaine plastique. On a vu que la limite élastique en traction se trouve augmentée. Si on décharge, la limite élastique a changé de la même valeur, on est en présence d'un écrouissage isotrope schématisé par la figure (III.7.a).

D'autre terme si on décharge et on inverse le chargement à partir du point B , l'écoulement plastique dans l'autre sens commencera à la contrainte $-\sigma_B$. Donc il y a une symétrie par rapport à l'axe $\sigma = 0$ (point O), cela s'exprime par :

$$F(\sigma, \sigma_B) = |\sigma| - \sigma_B = 0 \quad (\text{III.3})$$

où σ_B est la limite élastique actuelle (dépend de la déformation plastique ε^p (Figure (III.7.b)).

$$\sigma_B = \sigma_0 + \int |H \cdot d\varepsilon^p| \quad (\text{III.4})$$

avec :

H : caractéristique du matériau qu'on détermine expérimentalement (module d'écrouissage).

Remarques :

- Il se peut que la limite élastique soit plus faible en compression qu'en extension. Nous n'avons plus un écrouissage isotrope, c'est ce qu'on appelle l'effet Bauschinger.
- Si H est constant donc $\sigma_B = \sigma_0 + H \cdot \varepsilon^p$.
- En élasto-plasticité parfaite $H = 0$ donc $\sigma_B = \sigma_0$.

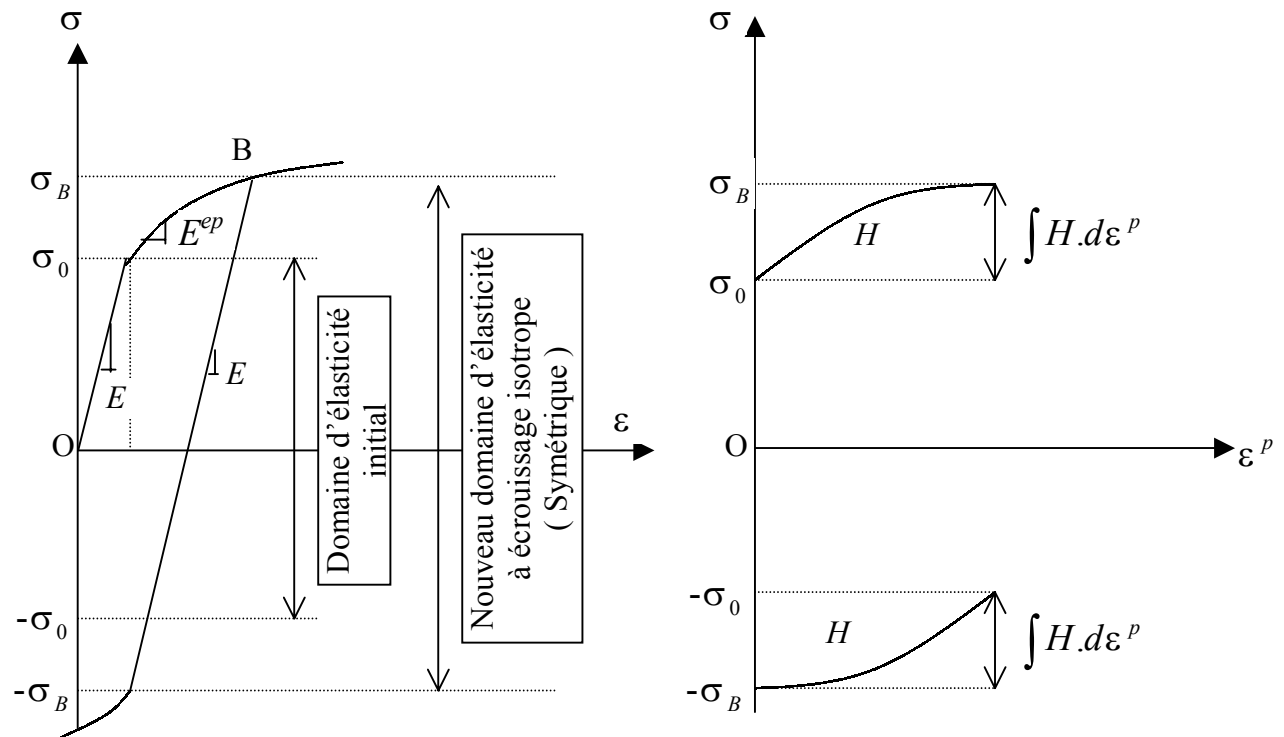


Figure (III.7.a) : Ecroissage isotope^[BEN03]

Figure (III.7.b) : Limite élastique actuelle en fonction de ϵ^p ^[BEN03]

III.4.3.2. Ecroissage cinématique :^{[MAR02],[LEM91]}

L'écroissage cinématique modifie la position du domaine élastique mais pas l'amplitude du domaine élastique ($2\sigma_0$), schématisé par la figure (III.8.a). Cela signifie que le segment entre les points limite garde la même dimension mais subit une translation et son centre se déplace d'une distance (contrainte) α , figures (III.8.b/c). ceci s'exprime par :

$$F(\sigma, \alpha, \sigma_0) = F(\sigma - \alpha, \sigma_0) = F(\bar{\sigma}, \sigma_0) = |\bar{\sigma}| - \sigma_0 = 0 \quad (III.5)$$

où α : est l'ordonné du centre du segment (back-stress)

$\bar{\sigma} = \sigma - \alpha$: est appelée contrainte réduite.

Suivant la règle de Melan-Prager, on a un écroissage cinématique linéaire. l'ordonné α peut être déterminée comme suit :

$$d\alpha = c.d\epsilon^p \text{ donc } \alpha = \int c.d\epsilon^p \quad (III.6)$$

avec c : est une caractéristique du matériau égale à H si l'écroissage est purement cinématique, figure (III.8.c).

Remarque :

Dans l'écroissage cinématique l'effet Bauschinger est maximal car l'augmentation de la limite élastique par écroissage dans un sens est totalement perdue dans l'autre sens.

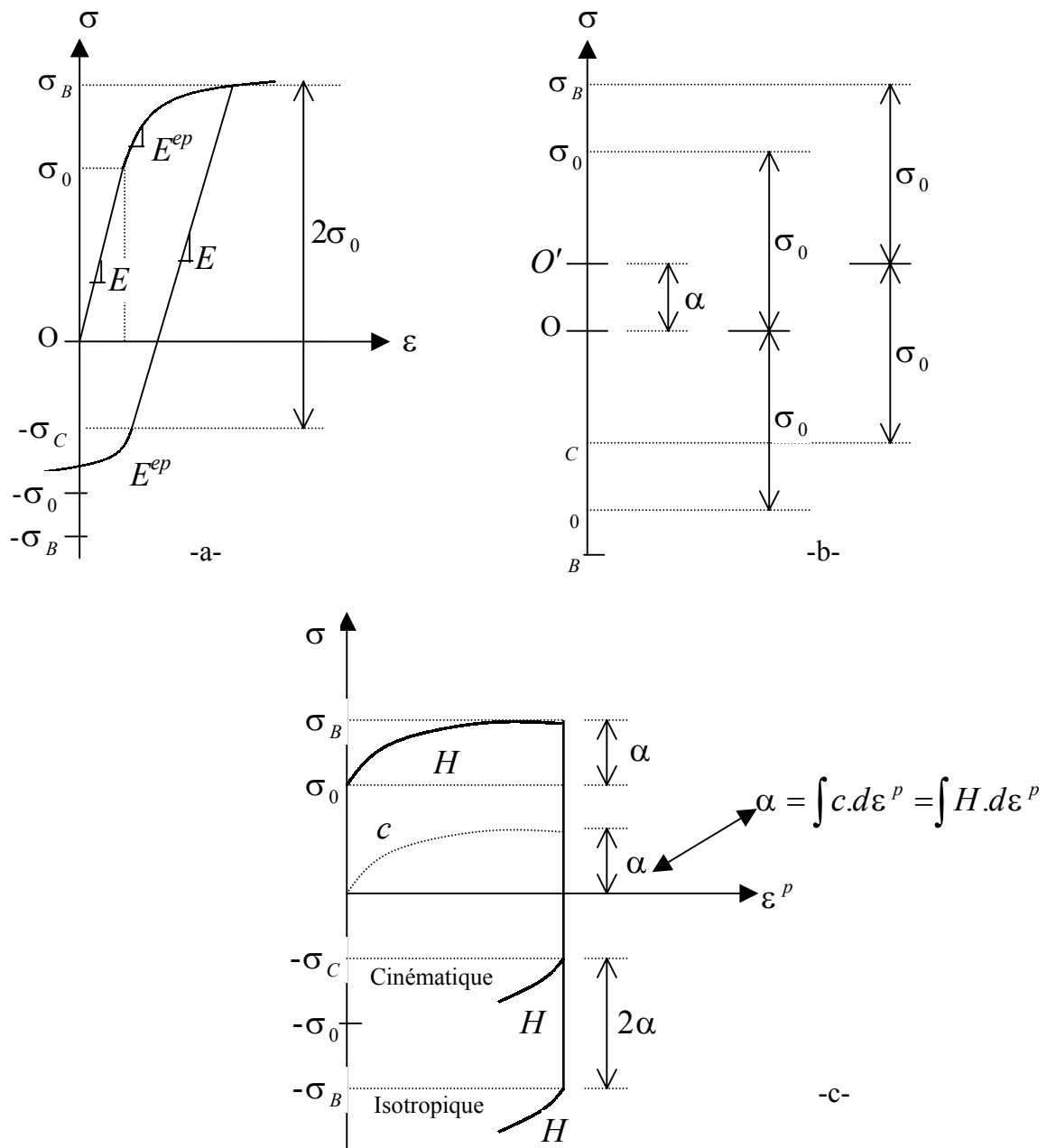


Figure (III.8) : Ecroissage cinématique^[BEN03]

III.4.3.3. Ecroissage mixte : ^{[MAR02],[LEM91]}

La combinaison d'un écroissage cinématique et isotrope permet de reproduire certaines caractéristiques rhéologiques importante des matériaux, en particulier l'effet Bauschinger. La figure (III.9) montre un chargement et déchargement obtenus en combinant ces deux effets.

L'expansion du domaine élastique est traduite par $\Delta\sigma_0$ qu'il est nécessaire de déterminer expérimentalement sur chargement cyclique.

Il est possible de définir : $p = \frac{\Delta\sigma_0}{\epsilon^p}$ qui définit l'évolution du domaine élastique.

Donc on peut dire que le segment de charge subit une expansion et une translation en même temps, ceci s'exprime par :

$$F(\sigma, \alpha, \sigma_B) = F(\bar{\sigma}, \sigma_B) = |\bar{\sigma}| - \sigma_B = 0 \quad (\text{III.7})$$

Avec :
$$\bar{\sigma} = \sigma - \alpha \quad (\text{III.8})$$

$$\alpha = (1-M) \int c.d\varepsilon^p \quad (\text{III.9})$$

Et
$$\sigma_B = \sigma_0 + M \left| \int H.d\varepsilon^p \right| \quad (\text{III.10})$$

Où M : est le coefficient de mixité tel que $0 \leq M \leq 1$ dans ce cas les modules d'érouissage cinématique et isotrope sont différents ($c \neq H$).

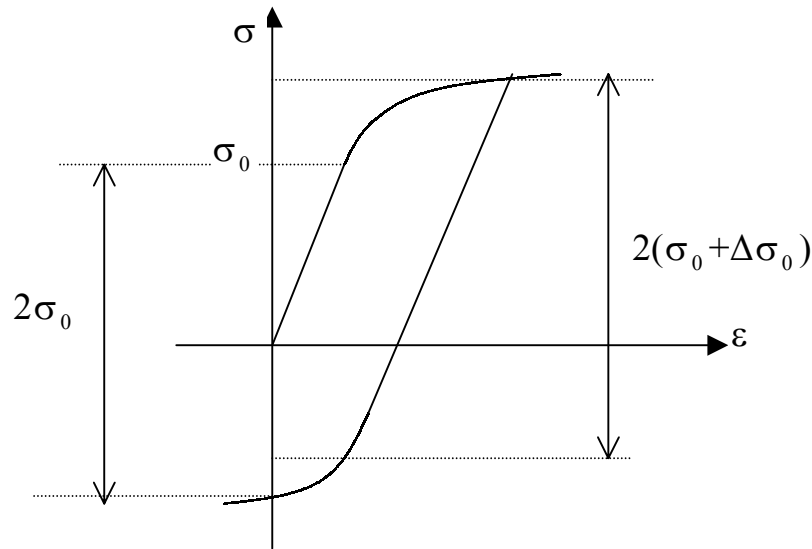


Figure (III.9) : Ecrouissage mixte

III.4.4. Règle d'écoulement : ^{[BER87],[MAR02],[LEM91]}

Il est clair que dès que la limite d'élasticité initiale a été franchie, au cours de l'histoire de charge du matériau, l'apparition des déformations permanentes fait qu'il n'y a plus, comme en élasticité, correspondance biunivoque entre σ et ε : la donnée de σ ne suffit plus à définir ε .

En revanche, si l'on connaît non seulement la contrainte actuelle σ mais tout le trajet de charge suivi pour l'atteindre à partir de l'état initial naturel, alors la donnée d'une variation de contrainte $d\sigma$ suffit à déterminer la variation correspondante de la déformation $d\varepsilon$. On dit que la loi de comportement est de type incrémental.

L'incrément total de déformation se compose en général de deux parties : un incrément élastique $d\varepsilon^e$ et un incrément plastique $d\varepsilon^p$.

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (\text{III.11})$$

L'incrément des contraintes $d\sigma$ est dû aux déformations élastiques et donc :

$$d\sigma = E.d\varepsilon^e \quad (\text{III.12})$$

Donc le module d'élasticité est défini dans chaque état (σ, ε) par : $E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^e}$.

Dans le cas où le point de charge serait à la limite d'élasticité actuelle on définit le « module élasto-plasticité tangent » par la relation :

$$E^{ep} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad \text{donc} \quad : \quad d\sigma = E^{ep} . d\varepsilon \quad (\text{III.13})$$

et le module d'écroutissement du matériau étant :

$$H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \quad \text{donc} \quad : \quad d\sigma = H . d\varepsilon^p \quad (\text{III.14})$$

on a alors la relation évidente :

$$\frac{1}{E^{ep}} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H} \quad (\text{III.15})$$

la relation (III.13) est appelée règle d'écoulement plastique.

a-La relation incrémentale générale :

L'incrément total des déformations se compose en général de deux parties : un incrément élastique $d\varepsilon^e$ et un incrément élasto-plastique $d\varepsilon^{ep}$ (Figure (III.10)).

Ce dernier se décompose lui-même en une partie élastique $d\varepsilon^{e2}$ et une partie purement plastique $d\varepsilon^p$:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^{e1} + d\varepsilon^{ep} = d\varepsilon^{e1} + d\varepsilon^{e2} + d\varepsilon^p \quad (\text{III.16})$$

L'incrément total des contraintes est dû aux déformations élastiques seulement :

$$d\sigma^e = E . d\varepsilon^{e1} \quad (\text{III.17})$$

La composante de contrainte élasto-plastique $d\sigma^{ep}$ peut être liée aux déformations élasto-plastiques $d\varepsilon^{ep}$ (Figure (III.10)) ou plastiques $d\varepsilon^p$ (Figure (III.7.b)) par :

$$d\sigma^{ep} = E^{ep} d\varepsilon^{ep} \quad (\text{III.18})$$

$$d\sigma^{ep} = H . d\varepsilon^p \quad (\text{III.19})$$

où E^{ep} : est le module tangent

H : est le module d'écroutissement

En élasto-plasticité parfaite : $E^{ep} = H = 0$

posant : $d\varepsilon^{e1} = r . d\varepsilon$ et $d\varepsilon^{ep} = (1-r)d\varepsilon$ avec $0 \leq r \leq 1$

Et nous avons : $d\sigma = d\sigma^e + d\sigma^{ep}$

$$\text{Donc} \quad : \quad d\sigma = E d\varepsilon^{e1} + E^{ep} d\varepsilon^{ep} = r E d\varepsilon + (1-r) E^{ep} d\varepsilon = [rE + (1-r)E^{ep}] . d\varepsilon \quad (\text{III.20})$$

La relation incrémentale générale est :

$$d\sigma = E_t . d\varepsilon \quad (\text{III.21})$$

Si $r = 0$; $E_t = E^{ep}$ Domaine plastique (charge après épuisement).

Si $r = 1$; $E_t = E$ Domaine élastique.

En cas de transition du domaine élastique au domaine plastique :

$$E_t = rE + (1-r)E^{ep} \quad (\text{III.22})$$

b-Algorithmme élasto-plastique uniaxial :

La méthode utilisée est incrémentale itérative avec une rigidité constante ou variable (tangente). Entre deux itérations successives $i-1$ et i quatre cas peuvent se présenter selon l'état des contraintes :

Elastique \rightarrow élastique, alors $E_t = E.$ ($r = 1$)

Elastique \rightarrow plastique, alors $E_t = rE + (1-r)E^{ep}.$ ($0 < r < 1$)

Plastique \rightarrow plastique, alors $E_t = E^{ep}.$ ($r = 0$)

Plastique \rightarrow élastique, alors $E_t = E.$

Les relations incrémentales infinitésimales précédentes se récrivent en fonction des incréments finis ($\Delta\varepsilon, \Delta\sigma, \dots$).

σ_{i-1} et ε_{i-1} : Contrainte et déformation obtenues à l'itération $i-1$ après convergence.

Y_{i-1} et $\varepsilon_{y(i-1)}$: Contrainte et déformation de limite élastique à l'itération $i-1$.

σ_i et ε_i : Contrainte et déformation à l'itération i et qui sont recherchées.

σ_i^e : Contrainte fictive à l'itération i obtenue en supposant un comportement élastique.

La contrainte élastique fictive σ_i^e est calculée systématiquement. Les contraintes à l'itération $i-1$ sont élastiques si : $Y_{i-1} > |\sigma_{i-1}|$.

$$\sigma_i^e = \sigma_{i-1} + E\Delta\varepsilon_i = \sigma_i + E\Delta\varepsilon_i^p \quad (\text{III.23})$$

Avec : $\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}$.

Pour que la contrainte fictive σ_i^e soit égale à la contrainte recherchée σ_i il faut annuler $E\Delta\varepsilon_i^p$ (ce terme est considéré comme une contrainte initiale causant une force résiduelle ΔF qu'il faut éliminer).

Les forces résiduelles causées par $E\Delta\varepsilon_i^p$ sont :

$$\Delta F = \sum_e \int_0^\lambda B^T . E . \Delta\varepsilon^p . A . dx = \sum_e E . \Delta\varepsilon^p . A \quad (\text{III.24})$$

Les forces résiduelles sont égales à la première expression si l'effort normal est variable le long de l'élément et se réduisent à la deuxième expression quand l'effort normal est constant.

Le rapport r pour une transition élasto-plastique est obtenu par des interpolations :

$$r = \frac{\varepsilon_{y(i-1)} - \varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}} = \frac{Y_{i-1} - |\sigma_{i-1}|}{|\sigma_i^e - \sigma_{i-1}|} = \frac{Y_{i-1} - |\sigma_{i-1}|}{E \Delta \varepsilon_i} \quad (\text{III.25})$$

et nous avons :

$$Y_{i-1} = \sigma_0 + \int_0^{\varepsilon_{i-1}^p} H \cdot |d\varepsilon^p| = \sigma_0 + \sum_{j=0}^{i-1} H \cdot |\Delta \varepsilon_j^p| \quad (\text{III.26})$$

si H est constante alors :

$$Y_{i-1} = \sigma_0 + H \cdot |\varepsilon_{i-1}^p| \quad (\text{III.27})$$

la déformation plastique totale est calculée par cumul :

$$\varepsilon_i^p = \varepsilon_{i-1}^p + \Delta \varepsilon_i^p \quad (\text{III.28})$$

où :

$$\Delta \varepsilon_i^p = \frac{\Delta \sigma_i^{ep}}{H} = \frac{(1-r)E^{ep} \Delta \varepsilon_i}{H} = \frac{(1-r) \cdot E \cdot \Delta \varepsilon_i}{E + H} = (1-r) \left[1 - \frac{E^{ep}}{E} \right] \Delta \varepsilon_i \quad (\text{III.29})$$

ou à partir de (III.23) :

$$\Delta \varepsilon_i^p = \frac{\sigma_i^e - \sigma_i}{E} = \frac{E - E_t}{E} \Delta \varepsilon_i \quad (\text{III.30})$$

L'algorithme est valable dans le cas d'un écrouissage isotrope. En cas d'écrouissage cinématique ou mixte, il faut utiliser les contraintes réduites $\bar{\sigma} = \sigma - \alpha$.

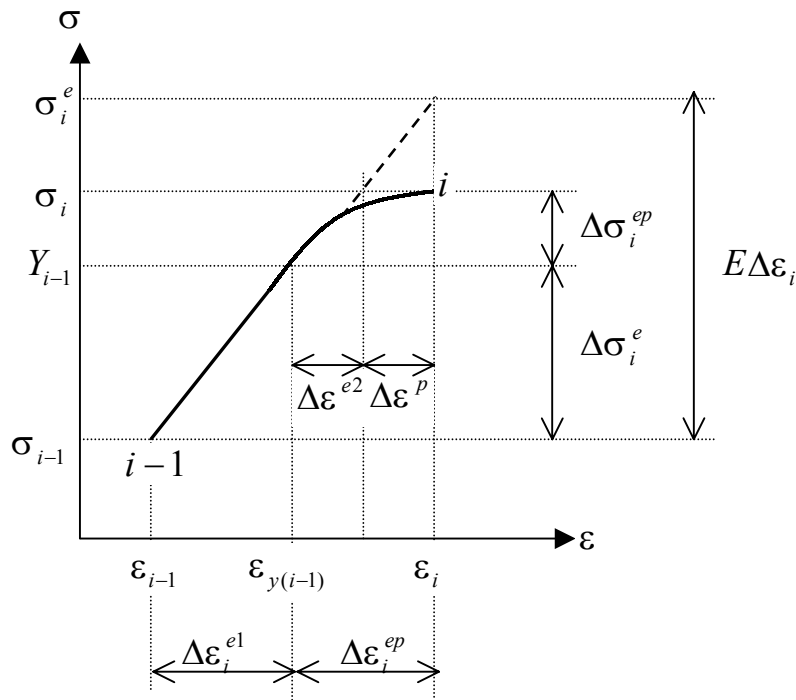


Figure (III.10) : Transition élasto-plastique^[CHA94]

III.5. Théorie incrémentale de plasticité multiaxiale :

III.5.1. Hypothèses de base :^{[GEN99],[MAR02]}

a. Sur les déformations : Les déformations étant admises petites, on peut les décomposer additivement en une partie élastique (e) et l'autre plastique (p), la partie élastique étant liée aux contraintes par la loi de Hooke-Cauchy.

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad \text{avec : } d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^e \quad (\text{III.31})$$

Où $d\varepsilon_{ij}^e$ et $d\varepsilon_{ij}^p$ sont respectivement l'accroissement des déformations élastiques et plastiques. De plus, les déformations plastiques sont supposées incompressibles : $d\varepsilon_{mm}^p = 0$.

b. Sur l'existence de surface de plasticité : L'état de contrainte peut se présenter par un point dans l'espace à neuf dimensions des contraintes, l'origine en est l'état non contraint de la configuration initiale du corps, et, en son voisinage, existe une zone où un accroissement des contraintes $d\sigma_{ij}$ ne produit qu'un accroissement élastique des déformations $d\varepsilon_{ij}^e$ ($d\varepsilon_{ij}^p = 0$). La frontière de cette zone est la surface de plasticité ou d'écoulement initial, dont on suppose qu'elle existe. Elle se représente par l'équation :

$$F_0(\sigma_{ij}) = 0 \quad (\text{III.32})$$

Un état de contrainte situé à l'intérieur de celle-ci caractérise un état élastique ($d\varepsilon_{ij}^p = 0$) tandis qu'un point situé sur cette surface définit un état élasto-plastique. Enfin, un point situé à l'extérieur de cette surface est impossible à atteindre.

Lorsque l'érouissage se produit cette surface (de plasticité) change au fur et à mesure que les déformations plastiques progressent; l'expression mathématique de ces surfaces de plasticité successives s'appelle la fonction de charge (Loading function), elle définit des régions successives dans lesquelles les points représentent des états élastiques et sur la frontière desquelles les points peuvent conduire à des états plastiques; enfin, elle dépend de l'état de contrainte atteint σ_{ij} ; de l'histoire des déformations plastiques ε_{ij}^p ; et de l'érouissage par l'intermédiaire d'un paramètre k . En résumé :

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = 0 \quad (\text{III.33})$$

cette équation existe, et est telle que (Figure (III.11)).

$F < 0$: Etat élastique, $d\sigma_{ij}$ provoque $d\varepsilon_{ij}^e$ seulement, (c'est l'intérieur de la surface).

$F = 0$: Etat plastique, $d\sigma_{ij}$ peut provoquer $d\varepsilon_{ij}^p$, (les déformations élastiques peuvent être éventuellement accompagné de déformations plastiques).

$F > 0$: Etat inadmissible (sans signification).

Lorsque le point représentatif de l'état des contraintes atteint la surface de charge $F = 0$, deux cas de comportement élasto-plastique sont possibles :

- La surface de charge n'évolue pas (modèle élasto-plastique parfait) et l'expression de la surface de charge ne contient pas de paramètres d'érouissages.
- La surface de charge s'évolue au cours du chargement (modèle élasto-plastique avec érouissage).

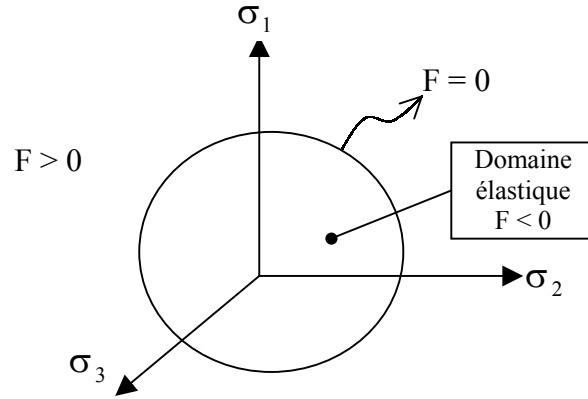


Figure (III.11) : Surface de charge

La valeur particulière $F = 0$ constitue la condition de plasticité à partir de laquelle on peut définir trois cas de chargement différents, pour un accroissement de sollicitation donné; soit dF la variation correspondante de la fonction de charge :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial F}{\partial k} dk \quad (\text{III.34})$$

a) Si $dF < 0$; alors $F + dF < 0$ et l'état atteint est élastique; donc $d\varepsilon_{ij}^p = 0$, $dk = 0$, et on a un processus de déchargement élastique (unloading)

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad (\text{III.35})$$

C'est le cas de décharge et l'incrément de contrainte est dirigé vers l'intérieur du domaine élastique actuel, (Figure (III.12.b)

b) Si $dF = 0$ et $d\varepsilon_{ij}^p = 0$ (donc $dk = 0$); Ce processus qui passe d'un état plastique à un autre sans variation des incréments des déformations plastiques est appelé chargement neutre.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad (\text{III.36})$$

c) Si $dF > 0$; $d\varepsilon_{ij}^p \neq 0$; ce processus fait passer d'un état plastique à un autre et s'appelle chargement (loading), on a pour ce cas :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \quad (\text{III.37})$$

C'est le cas de chargement et l'incrément de contrainte est dirigé vers l'extérieur du domaine élastique actuel, (Figure (III.12.a))

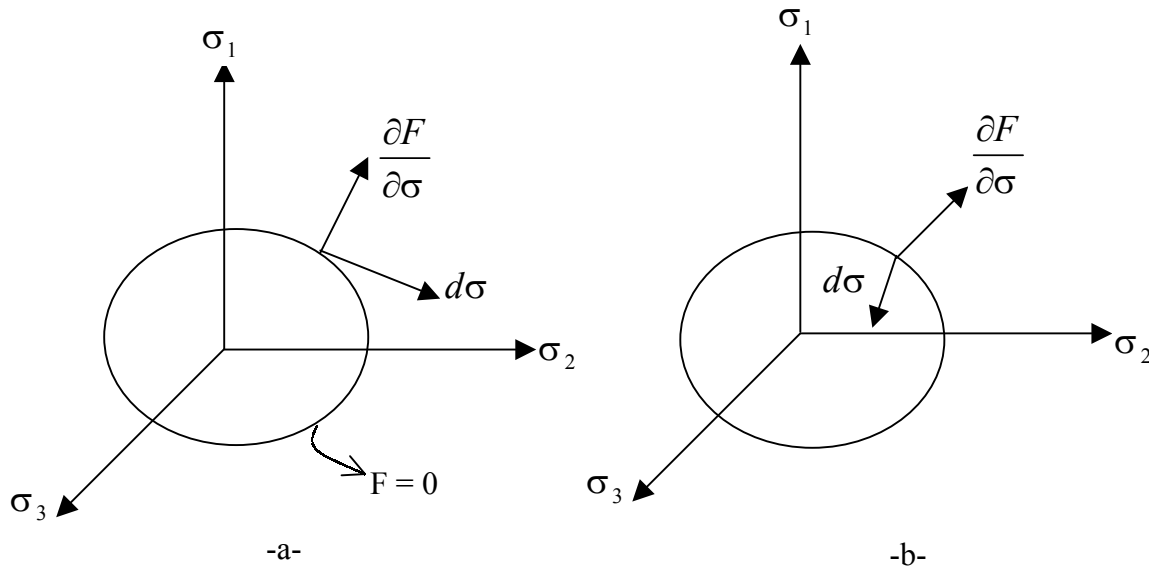


Figure (III.12) : a. Cas de charge / b. Cas de décharge

III.5.2. Postulat de stabilité de Drucker : ^[GUE99]

Il s'énonce comme suit : " *Le travail effectué pendant un cycle de charge quelconque formé dans l'espace des contraintes est non négatif*".

Ce postulat est une définition de l'érouissage, il permet de montrer que toute surface de plasticité ($F = 0$) est convexe et que le tenseur des incréments des déformations plastiques est normal à la surface de plasticité (loi de normalité).

Soit σ_{ij}^* l'état de contrainte en un point d'un corps pour une sollicitation donnée; par une cause extérieure distincte de la sollicitation première, un état de contrainte additionnel est appliqué puis retiré lentement; Alors, pendant l'application seule, ou pendant le cycle complet (application, retrait), l'agent extérieur fournit un travail non négatif.

Soit σ_{ij}^* l'état de contrainte existant, l'agent extérieur amène d'abord cet état sur la surface de plasticité au point σ_{ij} en suivant un chemin élastique; puis il provoque un accroissement $d\sigma_{ij}$ des contraintes en domaine plastique, produisant des déformations tant élastiques $d\varepsilon_{ij}^e$ que plastique $d\varepsilon_{ij}^p$; enfin; il se retire, et l'état de contrainte retourne au niveau σ_{ij}^* en suivant un chemin élastique. Dans ce cycle, le travail élastique est nul, de sorte que le travail de l'agent extérieur est (produit scalaire) :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p + d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e \geq 0 \quad (\text{III.38})$$

Puisqu'on peut choisir $\sigma_{ij}^* \equiv \sigma_{ij}$, on a d'abord $d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \geq 0$ et puisque ce second terme est d'un ordre de grandeur inférieur au premier; ce dernier doit satisfaire :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{III.39})$$

les égalités ont lieu pour le chargement neutre.

Ce postulat, et les inéquations auxquelles il conduit sont particulièrement évidentes dans l'essai de traction simple.

III.5.3. Conséquences du Postulat de Drucker :^[GUE99]

Les inégalités précédentes déduites du Postulat de Drucker, ont des conséquences fondamentales sur la théorie de la plasticité. Puisque, pratiquement, on peut en déduire la forme des équations constitutives recherchées; deux propriétés principales se dégagent de ce postulat :

- a) La convexité : toute surface de plasticité $F = 0$ est convexe.
- b) La normalité : Le vecteur incrément des déformations plastiques est normal à la surface de plasticité. Cette propriété de normalité se traduit par l'équation :

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{III.40})$$

avec : $d\lambda \geq 0$

Où $d\lambda$ est un facteur de proportionnalité, qui à cause de $(d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p)$, est non négatif. Cette relation fondamentale s'appelle loi de normalité ou loi d'écoulement plastique; on dit aussi que F est la fonction potentielle plastique.

III.5.4. Surface de plasticité initiale :^[GUE99]

Soit $F_0(\sigma_{ij})$ cette surface, fonction des seules contraintes puisque aucune déformation plastique n'a encore eu lieu. En supposant :

- a- Le matériau isotrope dans sa configuration initiale.
- b- Cette surface (et les suivantes d'ailleurs) est indépendante d'un état de contraintes hydrostatique (hypothèse a).
- c- L'absence initiale d'effet Bauschinger (limites élastiques initiales égales en traction et compression, ou $F_0(\sigma_{ij}) = F_0(-\sigma_{ij})$ plus généralement); alors cette surface peut s'écrire :

$$F_0(J_2, J_3) = 0 \quad (\text{III.41})$$

avec J_2 et J_3 sont les invariants du tenseur déviateur des contraintes s_{ij} .

$$\text{où : } s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad J_2 = \frac{1}{2} (s_{ij})^2 \quad \text{et} \quad J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki}$$

III.5.5. Critère d'épuisement :^[MAR02]

Le critère d'épuisement détermine le niveau de charge auquel la déformation plastique commence, il peut être formulé en fonction de l'état de contraintes et d'autres paramètres k liés aux propriétés d'écroutissement du matériau.

$$F(\sigma, k) = 0 \quad (\text{III.42})$$

Pour les matériaux isotropes, la fonction de charge dépend des trois contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 où $(\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3)$:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k) = 0 \quad (\text{III.43})$$

Pour les métaux, l'expérience a montré que la limite élastique est indépendante de la pression hydrostatique c'est à dire de l'invariant I_1 . On peut donc exprimer la fonction de charge en fonction des invariants J_2 et J_3 du déviateur :

$$F(J_2, J_3, k) = 0 \quad (\text{III.44})$$

Les critères de Tresca et Von-Mises font partie de cette famille. Cependant pour certains matériaux les sols et les bétons l'expérience a montré que des variations de volume apparaissent pendant l'écoulement plastique (critère de Mohr-Coulomb et Druker-Pargger) le critère peut également se formuler en fonction des trois invariants de contraintes I_1, J_2 et J_3 :

$$F(I_1, J_2, J_3, k) = 0 \quad (\text{III.45})$$

où : I_1 est le premier invariant du tenseur des contraintes σ . $I_1 = \sigma_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

III.5.6. Critères de Plasticité :^{[GUE99],[GAR01c],[MAR02],[CHE88]}

On appelle critère de plasticité, une loi définit explicitement la forme de la surface de plasticité. Les critères de plasticité ont été initialement développés pour les métaux et ont ensuite été utilisés pour les sols, notamment en tant que critères de rupture.

III.5.6.1. Critère de Tresca :

Tresca [1864], après des essais sur le Plomb, conclut que la plastification arrive quand la contrainte tangentielle maximale atteinte une certaine limite. On peut écrire donc :

$$F = \sigma_1 - \sigma_3 - 2k \quad (\text{III.46})$$

où : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Si les contraintes principales sont σ_1, σ_2 et σ_3 , où $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, alors la plastification commence quand :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Y(k) \quad (\text{III.47})$$

où : Y : un paramètre matériel déterminé expérimentalement.

k : paramètre d'écroutissement.

Le seuil de la valeur de Y est habituellement la contrainte qui est déterminé de l'essai de traction simple (unidimensionnel)

Pour la condition première plastification, on a :

$$\max \left[\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \right] = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} = \frac{\sigma_y}{2} \quad (III.48)$$

σ_y : Est la contrainte d'épuisement initiale en traction simple.

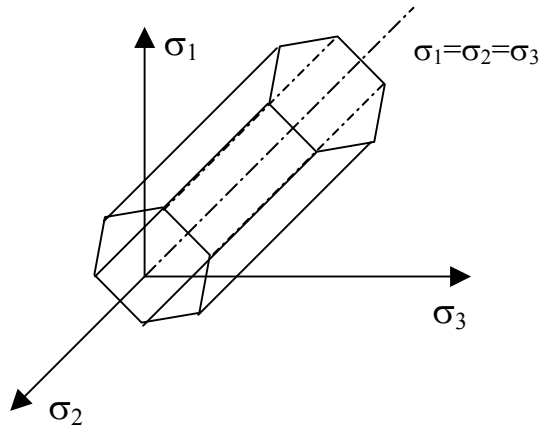


Figure (III.13) : Représentation du critère de Tresca dans l'espace $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ [CHE88]

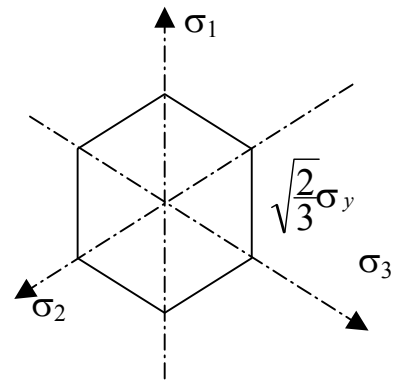


Figure (III.14) : Section du prisme par le plan $\pi : \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ [CHE88]

Dans l'espace de contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, la surface définie par la fonction de charge est un prisme parallèle à l'axe (1,1,1) à base hexagonale régulière (figure (III.13)).

Le critère de Tresca est parfois exprimé en termes des invariants du tenseur des contraintes déviatoriques sous la forme :

$$F(J_2, \theta) = 2\sqrt{J_2} \cos\theta - \sigma_y = 0 \quad (III.49)$$

ou
$$4J_2^3 - 27J_3^2 - 36k^2J_2^2 + 96k^4J_2 - 64k^6 = 0 \quad (III.50)$$

avec: J_2 et J_3 sont le deuxième et le troisième invariants du tenseur des contraintes déviatoriques.

θ : angle de similitude défini comme suit :

$$\theta = \frac{1}{3} \text{Arc sin} \left[-\frac{3J_3\sqrt{3}}{2(J_2)^{3/2}} \right] ; \quad -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} \quad (III.51)$$

III.5.6.2. Critère de Von-Mises :

Le fait que le critère précédant ne prend pas en compte la contrainte principale intermédiaire est une faiblesse et pour la surmonter, Von-Mises [1913] proposa que, la plastification ne commence que quand le deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques J_2 atteint une valeur limite, c'est-à-dire :

$$F = J_2 - k^2 = 0 \quad (III.52)$$

La plastification se produit quand :

$$\sqrt{3J_2} \geq \sigma_y \quad (\text{III.53})$$

$$\text{où } J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{2} [s_x^2 + s_y^2 + s_z^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \quad \text{avec} \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

$$\text{ou :} \quad F = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - k^2 = 0 \quad (\text{III.54})$$

$$\text{ou :} \quad F = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) - k^2 = 0 \quad (\text{III.55})$$

où k : est une constante. On peut remarquer facilement que dans le cas du cisaillement simple plan, on a :

$$J_2 = \sigma_1^2 = k^2 \quad (\text{III.56})$$

Donc la constante k représente la contrainte maximale admissible en cisaillement simple.

Dans l'espace des contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ à 3 dimensions l'équation (III.53) devient :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_y \quad (\text{III.57})$$

C'est l'équation d'un cylindre à base circulaire axé sur la trisectrice du repère $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$,

Figure (III.15). Sa section par le plan π ($\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$) est un cercle dont le rayon est $\kappa\sqrt{2}$

Figure (III.16).

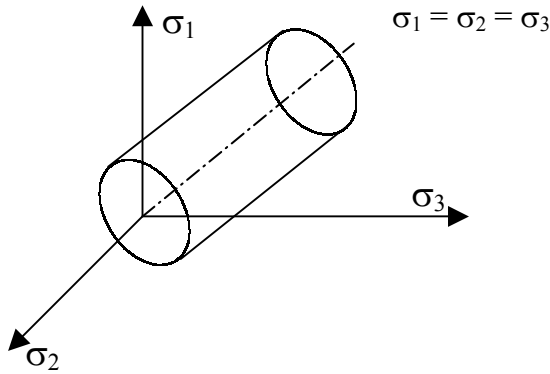


Figure (III.15) : Représentation du critère de Von-Mises dans l'espace $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ [CHE88]

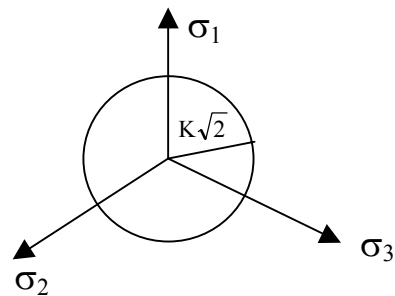


Figure (III.16) : Section du cylindre par le plan π [CHE88]

III.5.6.3. Critère de Mohr-Coulomb :

Coulomb proposa en [1773] le premier critère de plasticité en mécanique des sols (applicable aux problèmes de roches et de sols), et ce critère est encore maintenant très couramment utilisé. Ce critère est une généralisation de celui de Tresca sauf que la contrainte critique de cisaillement n'est plus constante mais dépend de la contrainte normale.

$$|\tau| = c - \sigma_n \cdot \tan(\phi) \quad (\text{III.58})$$

où $|\tau|$: la magnitude de la contrainte de cisaillement

σ_n : la contrainte normale

c : la cohésion

ϕ : l'angle interne de frottement

Si les contraintes principales sont σ_1, σ_2 et σ_3 où $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, le critère de Mohr-Coulomb peut être écrit comme suit :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 2c \cdot \cos \phi - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi \quad (\text{III.59})$$

Dans l'espace des contraintes principales l'équation (III.58) représente un cône dont la section normale à chaque point est un hexagone irrégulier (figure (III.19)).

Remarque :

On a un cône plutôt qu'un cylindre car il y a l'influence de la contrainte hydrostatique indiquée par le dernier terme de l'équation (III.58).

L'équation (III.58) peut écrire en fonction des invariants, on aura :

$$F(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3} I_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{J_2}}{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \sin \phi - c \cdot \cos \phi = 0 \quad (\text{III.60})$$

Où I_1 : est le premier invariant du tenseur des contraintes σ

J_2 : le deuxième invariant du tenseur déviateur S .

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \quad \text{Avec : } S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

Le paramètre θ appelé angle de similitude est en fonction de J_2 et J_3 :

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad (\text{III.61})$$

J_3 : le troisième invariant du tenseur déviateur S .

$$J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = \text{Det}(S) \quad \text{ou} \quad J_3 = \frac{1}{27} (2I_1^3 + 9I_1 I_2 + 27I_3)$$

avec I_2 : est le deuxième invariant du tenseur des contraintes σ .

$I_3 = \text{Det}(\sigma)$: est le troisième invariant du tenseur des contraintes σ .

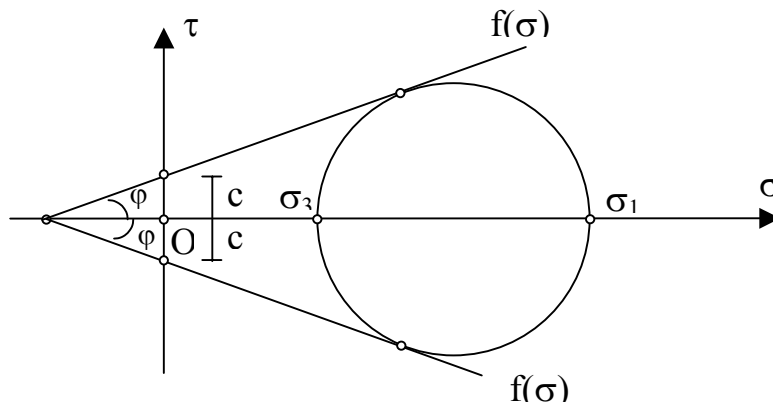


Figure (III.17) : Critère de Mohr-Coulomb.^[GUE99]

III.5.6.4. Critère de Drucker et Prager :

Drucker et Prager [1952] ont présenté un critère qui prend en compte le premier invariant du tenseur des contraintes I_1 et le deuxième invariant du tenseur déviatorique des contraintes (J_2), ce critère est une extension de celui de Von-Mises et de celui de Mohr-Coulomb. Sa fonction de charge est donnée par l'expression :

$$F(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (\text{III.62})$$

α et k définissent en fonction de la cohésion c et de l'angle de frottement interne ϕ .

L'équation (III.62) représente graphiquement un cône circulaire :

- Pour coïncider le cercle de Drucker-Prager avec les sommets extérieurs de l'hexagone de Mohr-Coulomb à chaque section, on a :

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad \text{et} \quad k = \frac{6c \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (\text{III.63})$$

- Pour faire coïncider avec les sommets intérieurs, on aura :

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad \text{et} \quad k = \frac{6c \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad (\text{III.64})$$

La surface représentative du critère dans l'espace $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ est un cône dont le sommet se trouve sur l'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Figure (III.18)

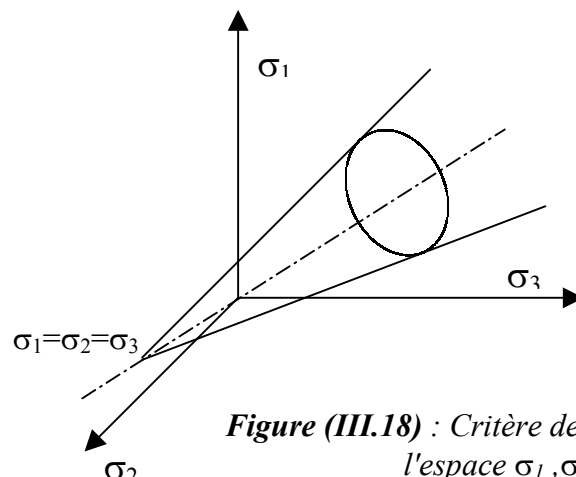


Figure (III.18) : Critère de Drucker et Prager dans l'espace $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ^[CHE88]

Nelson et Baron ont proposé une modification du critère de Drucker-Prager pour le rendre indépendant de I_1 aux grandes sollicitations, ce qui est parfois le cas pour les sols. Cette version modifiée du critère s'exprime par les équations suivantes :

$$F = \sqrt{J_2} - k - \alpha J_1 \left(1 - \frac{I_1}{2C}\right) = 0 \quad \text{quand} \quad -I_1 + C \geq 0 \quad (\text{III.65})$$

$$F = \sqrt{J_2} - k - \frac{\alpha C}{2} = 0 \quad \text{quand} \quad -I_1 + C < 0 \quad (\text{III.66})$$

Où C : Est la pression isotrope de transition.

Remarques sur les paramètres :^[CHE88]

- Le critère de Mohr-Colomb est caractérisé par deux paramètres (cohésion c et l'angle de frottement ϕ), le cas particulier $\phi = 0$ donne le critère de Tresca (Figure (III.19)).
- Le critère de Drucker-Prager est décrit au moyen des deux paramètres α et k , le cas particulier $\alpha = 0$ et $k = 2c/\sqrt{3}$ donne le critère de Von-Mises (Figure (III.20)).

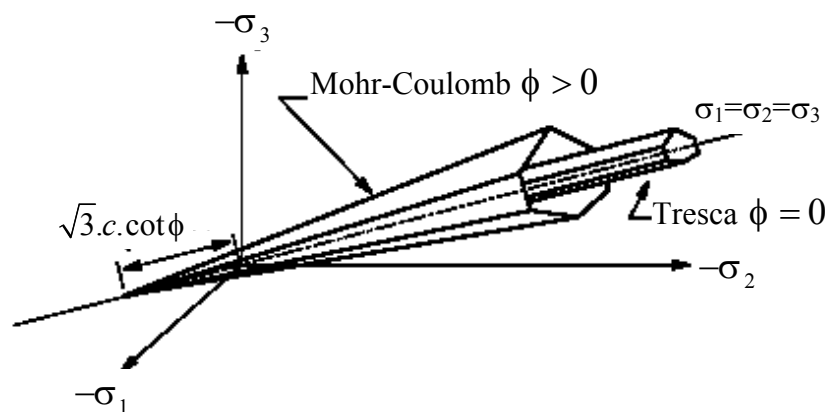


Figure (III.19): Critères de Mohr-Colomb et Tresca dans l'espace des contraintes principales^[CHE88]

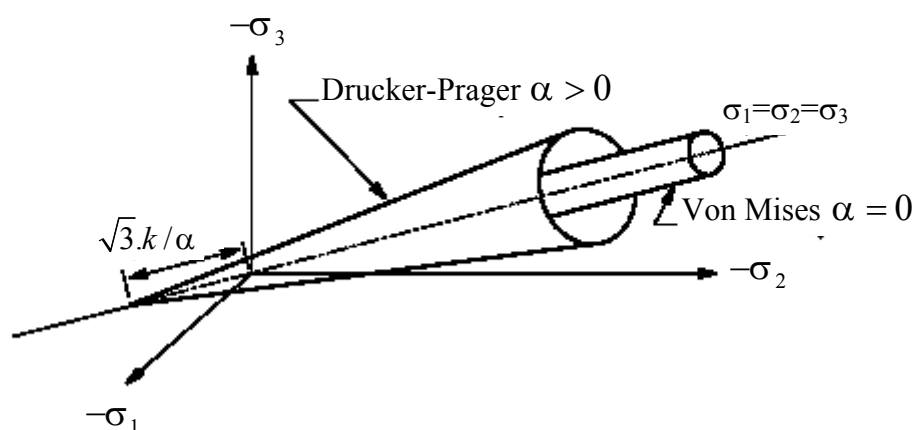


Figure (III.20): Critères de Drucker-Prager et Von-Mises dans l'espace des contraintes principales^[CHE88]

III.5.7. Loi d'écrouissage : ^[MAR02,CHE88,HIN80]

On appelle loi d'écrouissage une loi qui décrit explicitement la forme de la fonction de charge ou qui définit l'évolution des surfaces de plasticité successives. Les deux lois pratiquement utilisables sont :

a) Loi d'écrouissage isotrope :

Qui postule essentiellement que la fonction de charge est obtenue par une expansion uniforme de la surface de plasticité initiale dans tous les sens. Cette loi est en contradiction directe avec l'effet Bauschinger, et conserve l'isotropie (d'où son nom) Taylor[1931], Hill [1950].

b) Loi d'écrouissage cinématique :

Qui suppose essentiellement que la fonction de charge garde la même forme que la surface de plasticité initiale, mais qu'elle se déplace par translation dans l'espace des contraintes. Cette loi introduit partiellement l'effet Bauschinger, ainsi que l'anisotropie produite par les déformations plastiques.

III.5.7.1. Ecrouissage isotrope :

Les hypothèses de l'écrouissage isotrope sont :

- a- L'isotropie est conservé.
- b- Quel que soit le chemin suivi dans l'espace des déformations pour atteindre un état de contrainte; la fonction de charge finale est la même.

On déduit de ces hypothèses que la fonction de charge a la même forme que le critère de plasticité initial, que seul la constante qui y apparaît devient fonction d'une certaine mesure de l'écrouissage (paramètre k), et que la détermination expérimentale de cette fonction est indépendante de la sollicitation.

Ces hypothèses conduisent bien, géométriquement, à une expansion (homothétie) de la surface initiale, et se traduisent, mathématiquement, par la formule suivante :

$$F(\sigma_{ij}; \alpha; k) = 0 \quad (\text{III.67})$$

$$F(\sigma, k) = f(\sigma) - \sigma_y(k) = 0 \quad (\text{III.68})$$

où $f(\sigma_{ij})$: est la contrainte de comparaison.

$\sigma_y(k)$: la limite élastique courante en traction simple et où la dépendance fondamentale de F par rapport à α , qui semble avoir disparu, est en fait maintenue par l'intermédiaire de k .

Pour mesurer l'écrouissage et en tirer la forme explicite de $\sigma_y(k)$, on peut faire deux hypothèses :

a) hypothèse du travail de déformation plastique, on définit :

$$dk \equiv dw^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad \text{avec} \quad W^p = \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (\text{III.69})$$

et on pose que la contrainte $\sigma_y(k)$ est une fonction uniforme du travail plastique total :

$$\sigma_y(k) = f_1\left(\int dW^p\right) \quad (\text{III.70})$$

b) hypothèse de l'incrément de déformation plastique de comparaison. On définit :

$$dk \equiv d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p \quad (\text{III.71})$$

avec :

$$\bar{\varepsilon}^p = \int_0^{\varepsilon_{ij}} d\bar{\varepsilon}^p \quad (\text{III.72})$$

et on pose qu'il existe une courbe contrainte-déformation reliant la contrainte $\sigma_y(k)$ et l'intégrale de l'incrément de déformation plastique de comparaison :

$$\sigma_y(k) = f_2\left(\int d\bar{\varepsilon}^p\right) \quad (\text{III.73})$$

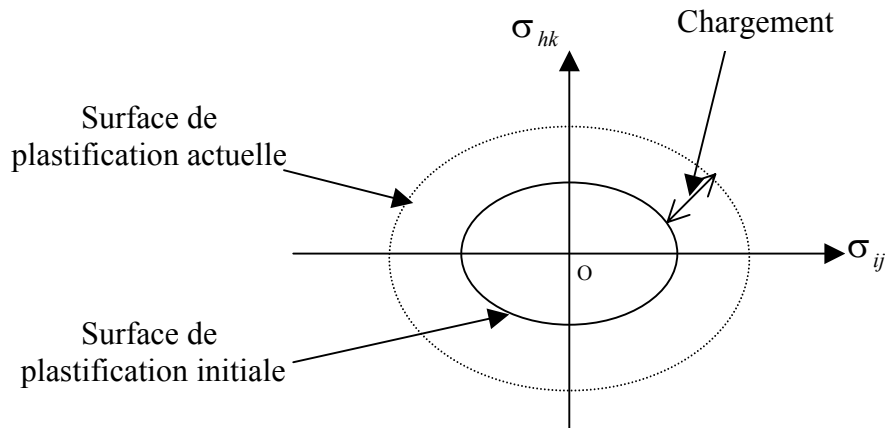


Figure (III.21) : Ecrouissage isotrope^[HIN80]

le cas le plus simple d'écrouissage isotrope est une charge linéaire :

$$\sigma_y = \sigma_0 + H d\bar{\varepsilon}^p \quad (\text{III.74})$$

σ_0 : la contrainte initiale.

H : module de plasticité avec :

$$H = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^p} \quad (\text{III.75})$$

Où $d\bar{\sigma}$: contrainte effective.

$d\bar{\varepsilon}^p$: déformation plastique effective.

Si $H > 0$ l'écrouissage se produit (la contrainte augmente « durcissement »)

Si $H = 0$ plasticité parfaite.

Si $H < 0$ l'adoucissement (il y a une baisse dans la contrainte).

Pour l'uniaxial, le module de plasticité est :

$$H = \frac{E_t}{1 - \frac{E_t}{E}} \quad (\text{III.76})$$

avec E : module d'élasticité

$$E_t : \text{module élasto-plastique tangent, } E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad \text{où } \sigma > \sigma_0$$

III.5.7.2. Ecrouissage cinématique :

Dans l'écrouissage cinématique, la surface de la charge n'étend pas contracter, mais se déplace comme un corps rigide.

L'équation de la surface de charge est :

$$F(\sigma, \alpha, k) = F(\sigma - \alpha, k) = F(\bar{\sigma}, k) = 0 \quad (\text{III.77})$$

$\bar{\sigma}$: Vecteur des contraintes réduites.

α : Est de nature tensorielle ; elle indique la position de centre de la surface de charge, égale zéro dans l'état initial.

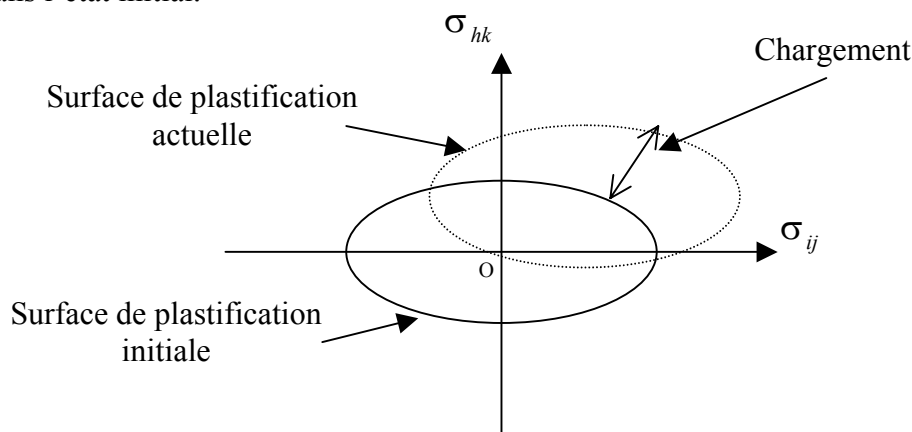


Figure (III.22) : Ecrouissage cinématique^[HIN80]

- Règle d'écrouissage de Prager-Melan :

La règle d'écrouissage cinématique de Prager-Melan définit les coordonnées α par un déplacement linéaire du centre de la surface :

$$d\alpha = c.d\varepsilon^p \quad \text{donc } \alpha = \int c.d\varepsilon^p \quad (\text{III.78})$$

c : Le facteur de la proportionnalité est constant lier directement du module de plasticité. Si c est négative : c 'est l'adoucissement. Dans le cas uniaxial $c = H$.

- Règle d'écrouissage de Prager-Zieler :

Dans la règle d'écrouissage de Prager-Zieler la translation de la surface de charge a lieu dans la direction du vecteur des contraintes réduites^[LEM91] :

$$d\alpha = (\sigma - \alpha) d\mu \quad (\text{III.79})$$

L'emploi du tenseur $(\sigma - \alpha)$ à la place de son déviateur permet de rendre compte de l'influence d'une contrainte hydrostatique sur l'évolution de la variable interne cinématique. Sous chargement complexe, on obtient donc des écoulements différents de ceux du modèle de Prager mais les deux formulations sont identiques dans le cas de l'incompressibilité plastique.

Le multiplicateur $d\mu$ est déterminé par la condition de consistance :

$$dF = 0 \quad (\text{III.80})$$

$$d\mu = \frac{\{a\}^T \{d\sigma\}}{\{a\}^T \{\sigma - \alpha\}} \quad (\text{III.81})$$

où le paramètre c a la même signification comme dans la règle de Melan-Prager

$\{a\}$: est le vecteur d'écoulement.

$$\{a\}^T = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{zx}} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right] \quad (\text{III.82})$$

Ce vecteur d'écoulement $\{a\}$ dépend du critère choisi.

Si le vecteur $\{a\}$ écrit comme suit :

$$\{a\} = C_1 \{a_1\} + C_2 \{a_2\} + C_3 \{a_3\} \quad (\text{III.83})$$

avec :

$$\{a_1\}^T = \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} = \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \quad (\text{III.84})$$

$$\{a_2\}^T = \frac{\partial (J_2)^{1/2}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{S_x \quad S_y \quad S_z \quad 2\tau_{xy} \quad 2\tau_{yz} \quad 2\tau_{zx}\} \quad (\text{III.85})$$

et

$$\{a_3\}^T = \frac{\partial I_3}{\partial \sigma} = \left\{ \left(S_y S_z - \tau_{yz}^2 + \frac{J_2}{3} \right) \quad \left(S_x S_z - \tau_{xz}^2 + \frac{J_2}{3} \right) \quad \left(S_x S_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \right) \right. \\ \left. 2(\tau_{xz} \tau_{xy} - S_x \tau_{yz}) \quad 2(\tau_{xy} \tau_{yz} - S_y \tau_{xz}) \quad 2(\tau_{yz} \tau_{xz} - S_z \tau_{xy}) \right\} \quad (\text{III.86})$$

Et nous avons :

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1} \quad (\text{III.87})$$

$$C_2 = \frac{\partial F}{\partial (J_2)^{1/2}} - \frac{\tan 3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (\text{III.88})$$

$$C_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} - \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (\text{III.89})$$

Alors les différents critères utilisés sont définis par une constante C_i , qui sont résumés dans le tableau suivant :

Critère	C_1	C_2	C_3
Tresca	0	$2 \cos \theta (1 + \tan \theta \tan 3\theta)$	$\frac{\sqrt{3} \sin \theta}{J_2 \cos 3\theta}$
Von-Mises	0	$\sqrt{3}$	0
Mohr-Coulomb	$\frac{1}{3} \sin \phi$	$\cos \theta \left[(1 + \tan \theta \tan 3\theta) + \sin \phi (\tan 3\theta - \tan \theta) / \sqrt{3} \right]$	$\frac{\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta \sin \phi}{2J_2 \cos 3\theta}$
Drucker-Prager	α	1	0

Tableau III.1 : Dérivées de F par rapport aux invariants des contraintes^[HIN80]

- **L'écroissage cinématique non-linéaire** :^[LEM91]

Les modèles réels exigent souvent des lois du durcissement non-linéaire. Pour l'écroissage isotrope non linéaire peut être constitué facilement à partir de la fonction $\sigma_y(k)$, mais pour l'écroissage cinématique ceci n'est pas simple, la règle d'écroissage cinématique non-linéaire est donnée comme suit :

$$d\alpha = c.d\varepsilon^p - \gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \|d\varepsilon^p\| \alpha \quad (\text{III.90})$$

c et γ étant des coefficients caractéristiques de chaque matériau.

$\|d\varepsilon^p\|$: l'incrément de déformation plastique cumulée.

III.5.7.3. L'écroissage Mixte :

Il s'agit de superposer ou combinaison des écroissages cinématique et isotrope : le domaine donc se modifier par translation et par dilatation. Celui-ci s'exprime par :

$$F(\sigma, \alpha, k) = F(\sigma - \alpha, k) = F(\bar{\sigma}, k) = 0 \quad (\text{III.91})$$

Le centre de la surface subit une translation définie par les coordonnées α et la surface de charge en gardant sa forme subit une expansion définie par k :

$$dk = (\sigma - \alpha).d\varepsilon^p = \bar{\sigma}.d\varepsilon^p \quad \text{donc} : k = \int \bar{\sigma}.d\varepsilon^p \quad (\text{III.92})$$

III.5.8. Règle d'écoulement plastique :^{[CHE88],[HIN80],[STE99]}

Dans la théorie classique de plasticité l'incrément de déformation aura une composante élastique et une autre plastique :

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (\text{III.93})$$

- Le tenseur de déformation élastique incrémental donné par la relation suivante :

$$d\varepsilon_{ij}^e = D_{ijkl} \cdot d\sigma_{kl} \quad (\text{III.94})$$

où D_{ijkl} : la matrice des constants élastique

- Le tenseur de déformation plastique incrémentale donné par la règle d'écoulement suivante :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (\text{III.95})$$

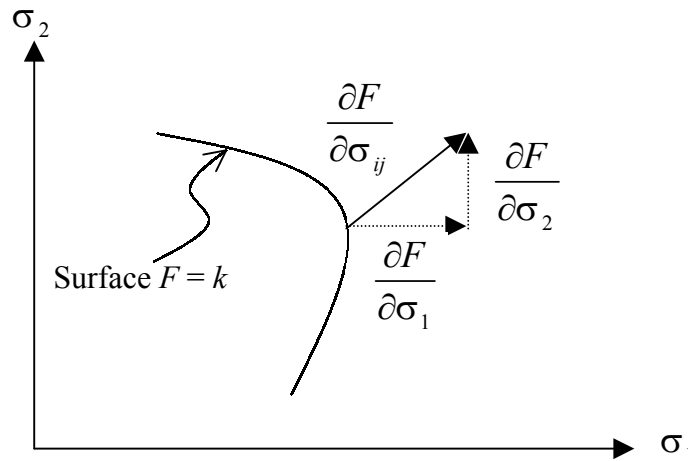
où Q : Une fonction scalaire des contraintes, appelée potentiel plastique.

$d\lambda$: Est un facteur scalaire constant appelé le multiplicateur plastique (il est positif ou nul), il n'est positif qu'en présence d'écoulement plastique.

La règle d'écoulement est appelée « associée » si la fonction potentielle plastique Q égale à la fonction de charge F ($Q = F$), dans ce cas on peut écrire^[HIN80] :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (\text{III.96})$$

Cette règle s'appelle aussi règle de normalité parce que le vecteur $d\varepsilon^p$ est normal à la surface de charge (figure (III.23)).



Figure(III.23) : Représentation géométrique de la règle de normalité de la plasticité associée^[HIN80]

III.6. Formulation matricielle en élasto-plasticité :^{[MAR02],[LEM91],[HIN80],[STE99]}

III.6.1. Pour un écrouissage simple :

Un écrouissage simple est un écrouissage soit isotrope, soit cinématique mais pas mixte, on a donc soit $dk = 0$ ou $d\alpha = 0$.

En différentiant la fonction F , on obtient sous forme matricielle : $F(\sigma, \alpha, k) = 0$ donc $dF = 0$.

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \{d\alpha\} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad (\text{III.97})$$

où k et α sont les paramètres d'écrouissage isotrope et cinématique respectivement.

L'incrément des contraintes-déformations élasto-plastique donné comme suit :

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon^e\} = [D]\{d\varepsilon - d\varepsilon^p\} \quad (\text{III.98})$$

$[D]$: est la matrice des constantes élastiques.

$$\text{En remplaçant : } \left. \begin{array}{l} dk = \sigma^T . d\varepsilon^p \\ d\alpha = c . d\varepsilon^p \\ d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \\ \{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon - d\varepsilon^p\} \end{array} \right\} \text{ dans } \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \{d\alpha\} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0$$

On trouve :

$$d\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \right\} - c \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} - \frac{\partial F}{\partial k} \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}} \{d\varepsilon\} \quad (\text{III.99})$$

$$\text{Posons : } A = -\frac{1}{d\lambda} \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T d\alpha + \frac{\partial F}{\partial k} dk \right] \quad (\text{III.100})$$

D'après le travail plastique : $dk = \sigma^T . d\varepsilon^p$ et selon la règle de Prager : $d\alpha = c . d\varepsilon^p$ donc :

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \left[c \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T + \frac{\partial F}{\partial k} \sigma^T \right] d\varepsilon^p \quad (\text{III.101})$$

Or selon la règle de plasticité : $d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$

$$A = - \left[c \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \frac{\partial Q}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial k} \sigma^T \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right] \quad (\text{III.102})$$

finalement en remplace l'équation (III.95) dans l'équation (III.98) en trouve :

$$\{d\sigma\} = [D^{ep}] \{d\varepsilon\} \quad (\text{III.103})$$

$$\text{Donc : } [D^{ep}] = [D] - \frac{[D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} - c \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} - \frac{\partial F}{\partial k} \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}} \quad (\text{III.104})$$

où $[D^{ep}]$: est la matrice élasto-plastique pour un écrouissage simple ($\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial k} = 0$), et c'est la généralisation du module E^{ep} de l'élasto-plasticité uniaxiale.

Si $F = Q$ (élasto-plasticité associée) la matrice $[D^{ep}]$ est symétrique.

III.6.2. Pour un écrouissage mixte :

Pour un écrouissage mixte, la fonction de charge est donnée par la relation :

$$F(\sigma - \alpha, k) = F(\bar{\sigma}, k) = 0 \quad (\text{III.102})$$

l'incrément des déformations plastique se décompose en deux :

$$d\varepsilon^p = d\varepsilon^{pi} + d\varepsilon^{pc} \quad (\text{III.103})$$

$d\varepsilon^{pi}$ et $d\varepsilon^{pc}$ sont les composantes dues à l'écrouissage isotrope et cinématique respectivement,

on peut les exprimer sous la forme :

$$d\varepsilon^{pi} = M.d\varepsilon^p \text{ et } d\varepsilon^{pc} = (1-M).d\varepsilon^p \quad (\text{III.104})$$

avec M coefficient de mixité : $0 \leq M \leq 1$

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T d\alpha + \frac{\partial F}{\partial k} dk \right] \quad (\text{III.105})$$

donc :

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma - Ad\lambda \quad (\text{III.106})$$

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \left[D.d\varepsilon - D \frac{\partial Q}{\partial \sigma} d\lambda \right] - Ad\lambda = 0 \quad (\text{III.107})$$

D'où :

$$d\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \right\} + A} \{d\varepsilon\} \quad (\text{III.108})$$

Et on obtient :

$$d\sigma = \left[[D] - \frac{[D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \right\} + A} \right] d\varepsilon = [D^{ep}] . d\varepsilon \quad (\text{III.109})$$

la règle du travail plastique pour le paramètre k d'écrouissage isotrope donne :

$$dk = \bar{\sigma}^{-T} . d\varepsilon^{pi} = \bar{\sigma}^{-T} . M . d\varepsilon^p \quad (\text{III.110})$$

de même, la règle de Prager pour un écrouissage cinématique sera :

$$d\alpha = c . d\varepsilon^{pc} = c . (1-M) . d\varepsilon^p \quad (\text{III.111})$$

avec : $\bar{\sigma} = \sigma - \alpha$

$$\text{donc :} \quad A = -\frac{1}{d\lambda} \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T (1-M).c + \frac{\partial F}{\partial k} (\sigma - \alpha)^T .M \right] .d\varepsilon^p \quad (\text{III.112})$$

Or d'après l'équation (III.95) $d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$ en trouve :

$$A = -(1-M).c. \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \frac{\partial Q}{\partial \sigma} - M \frac{\partial F}{\partial k} (\sigma - \alpha)^T \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (\text{III.113})$$

et donc :

$$[D^{ep}] = [D] - \frac{[D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} - (1-M).c \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} - M \frac{\partial F}{\partial k} \{ \sigma - \alpha \}^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}} \quad (\text{III.114})$$

Où $[D^{ep}]$ est la matrice élasto-plastique pour un écrouissage mixte en appliquant le travail plastique pour écrouissage isotrope et la règle de Prager pour l'écrouissage cinématique.

A partir de $[D^{ep}]$, on déduit la matrice de rigidité tangente $[K_t]$ en élasto-plasticité :

$$[K_t] = \int_V [B]^T [D^{ep}] [B] .dV \quad (\text{III.115})$$

III.7. Grandeurs effectives :

La fonction de charge F est en général une combinaison unidimensionnelle des différentes composantes des contraintes. Cette combinaison est appelée contrainte effective se réduisant à la contrainte uniaxiale pour un problème unidimensionnel. Ainsi les résultats expérimentaux uniaxiaux serviront à l'étude des problèmes multidimensionnels.

$$F(\sigma) = \sigma_{ef} \quad (\text{III.116})$$

Cette contrainte effective sera comparée à la limite élastique courante Y ou σ_B ($Y = \sigma_B$) obtenue par un essai uniaxial.

Le paramètre d'écrouissage k dépend de la déformation plastique effective (il est égal au travail plastique) :

$$dk = \sigma .d\varepsilon^p = Y .d\hat{\varepsilon}^p = \hat{\sigma} .d\hat{\varepsilon}^p = F(\sigma) .d\hat{\varepsilon}^p \quad (\text{III.117})$$

$$\text{donc :} \quad d\hat{\varepsilon}^p = \frac{\sigma .d\varepsilon^p}{F(\sigma)} \quad (\text{III.118})$$

La définition de la déformation plastique effective est alors :

$$\hat{\varepsilon}^p = \frac{2}{3} [(e^p)^T (e^p)]^{1/2} \quad (\text{III.119})$$

où e^p : est le tenseur déviateur des déformations plastique ε^p .

La définition correspondante de la contrainte effective est :

$$\varepsilon^p \sigma = \hat{\varepsilon}^p \hat{\sigma} \quad (\text{III.120})$$

$$\hat{\sigma} = \left[\frac{3}{2} (S)^T (S) \right]^{1/2} = \sqrt{3} \sqrt{J_2} \quad (\text{III.121})$$

où S : est le tenseur déviateur des contraintes.

$$S_{ij} = \sigma_{ii} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{ij}}{3} = \sigma_{ii} - \delta_{ij} \frac{I_1}{3} \quad (\text{III.122})$$

δ_{ij} : est le symbole de Kronecker défini par : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

III.8. Organigramme élasto-plastique général :^{[HIN80],[CHA94]}

L'incrément des déformations dans le cas d'une transition élasto-plastique doit être décomposé en une partie élastique $\Delta \varepsilon^e = r \Delta \varepsilon$ et une partie élasto-plastique $\Delta \varepsilon^{ep} = (1-r) \Delta \varepsilon$.

Nous avons :

$$\Delta \varepsilon = r \Delta \varepsilon + (1-r) \Delta \varepsilon \quad ; \quad d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^{ep} \quad (\text{III.123})$$

Et
$$d\sigma = d\sigma^e + d\sigma^{ep} \Rightarrow d\sigma = D d\varepsilon^e + D^{ep} d\varepsilon^{ep} \quad (\text{III.124})$$

L'incrément des contraintes entre les itérations $i-1$ et i est :

$$\Delta \sigma = \int_{\varepsilon^{i-1}}^{\varepsilon^i} D(d\varepsilon - d\varepsilon^p) = \int_{\varepsilon^{i-1}}^{\varepsilon^{i-1}+r\Delta\varepsilon} D.d\varepsilon + \int_{\varepsilon^{i-1}}^{\varepsilon^{i-1}+\Delta\varepsilon} D^{ep}.d\varepsilon \quad (\text{III.125})$$

$$\Delta \sigma = r \Delta \sigma^e + \int_{\varepsilon^{i-1}+r\Delta\varepsilon}^{\varepsilon^{i-1}+\Delta\varepsilon} D^{ep}.d\varepsilon \Rightarrow r \Delta \sigma^e + \int_{\varepsilon^{i-1}+r\Delta\varepsilon}^{\varepsilon^{i-1}+\Delta\varepsilon} D^{ep}(d\varepsilon - d\varepsilon^p) \quad (\text{III.126})$$

Le facteur r doit être tel que le point revient sur la surface de charge :

$$F(\sigma + r \Delta \sigma^e) = 0 \quad (\text{III.127})$$

L'expression de Taylor donne une approximation d'ordre 1 :

$$r = \frac{-F(\sigma^i)}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \Delta \sigma^e} \quad (\text{III.128})$$

On peut également calculer une valeur approchée de r comme dans le cas uniaxial en utilisant les grandeurs effectives :

$$r = \frac{Y_{i-1} - \hat{\sigma}_{i-1}}{\hat{\sigma}_i^e - \hat{\sigma}_{i-1}} \quad (\text{III.129})$$

$\hat{\sigma}_i^e$: est la contrainte effective calculée élastiquement.

La valeur de r pour les autres cas est :

Transition élastique – élastique : $r = 1$.

Transition plastique – plastique : $r = 0$.

Transition plastique – élastique : $r = 1$.

Pour les éléments en charge ($r \neq 1$), l'intégrale est calculée numériquement par des algorithmes explicites ou implicites. Les premiers sont les plus utilisés (méthode d'Euler et Runge-Kutta). Dans la méthode d'Euler explicite l'intégrale est calculée par sous-incrémentation en m pas :

$$\int_{\varepsilon^{i-1} + r\Delta\varepsilon}^{\varepsilon^{i-1} + \Delta\varepsilon} D^{ep} . d\varepsilon = \sum_{j=1}^m D_{j-1}^{ep} \frac{(1-r)\Delta\varepsilon}{m} \quad (\text{III.130})$$

D_{j-1}^{ep} : signifie que la matrice élasto-plastique D^{ep} est calculée au sous-incrément précédent.

Le nombre de sous incréments m doit être suffisant pour obtenir une bonne précision. La valeur idéale de m dépend de l'excès de contrainte. Hinton^[HIN80] propose l'entier immédiatement

supérieur à : $\frac{8(\hat{\sigma}_i^e - Y_{i-1})}{\sigma_0}$

Donc :

$$m = \frac{8(\hat{\sigma}_i^e - Y_{i-1})}{\sigma_0} + 1 \quad (\text{III.131})$$

Dans la méthode de Runge-Kutta, la matrice tangente D^{ep} est déterminée au milieu de l'incrément avant d'être utilisée pour la totalité de l'incrément. Cela donne une meilleure précision et permet en plus d'apprécier l'erreur commise. Ces intégrations aboutissent en général à des contraintes qui ne sont pas exactement sur la surface de charge, et des corrections peuvent être effectuées par des réductions.

Une des réductions simples consiste à multiplier les composantes du vecteur de contrainte par le rapport des contraintes effectives :

$$\sigma_i = \sigma_i \frac{\sigma_0 + H\hat{\varepsilon}_i^p}{F(\sigma_i)} = \sigma_i \frac{Y_i}{F(\sigma_i)} \quad (\text{III.132})$$

$\hat{\varepsilon}_i^p$: est la déformation plastique effective.

Cette dernière réduction peut être effectuée à l'intérieur, ou l'extérieur de la boucle de sous incrémentation.

Le calcul de toutes les composantes des déformations plastiques n'est pas indispensable. On se limite à la valeur effective.