

CHAPITRE IV : ANALYSE NON-LINEAIRE DES STRUCTURES

IV.1. Introduction :

Ce chapitre passe en revue les problèmes structuraux non-linéaires en s'intéressant à la manifestation des sources physiques du comportement non-linéaire. Nous commencerons par introduire la réponse comme étant une caractérisation illustrée des non-linéarités d'un système structural. La réponse est une représentation graphique du concept fondamental du chemin d'équilibre. En conclusion, les non-linéarités sont classifiés selon leur source dans le modèle mathématique de la mécanique des milieux continus et corrélés avec le système physique. Des exemples de ces non-linéarités dans des applications pratiques de technologie sont donnés.

IV.2. Chemin d'équilibre et Diagrammes de réponse :^[FEL01b]

Le concept du chemin d'équilibre joue un rôle important car il permet d'expliquer les mystères de l'analyse structurale non-linéaire. Ce concept se prête à la représentation graphique sous forme d'un diagramme de réponse. La forme la plus largement répandue de ces représentations est le diagramme de réponse (Charge-déformation).

A travers cette représentation beaucoup de concepts principaux peuvent être illustrés et interprétés en termes physiques, mathématiques ou informatiques.

IV.2.1. Réponse charge-déformation

Le comportement statique total ou global de beaucoup de structures peut être caractérisé par un réponse charge-déformation ou force-déplacement. La réponse est habituellement tracée en deux dimensions (x,y) comme illustré sur la figure (IV.1). Dans cette figure la quantité " *représentative* " de force est tracée par rapport à la quantité " *représentative* " de déplacement. Si la courbe de réponse est non-linéaire, le comportement de la structure est non-linéaire

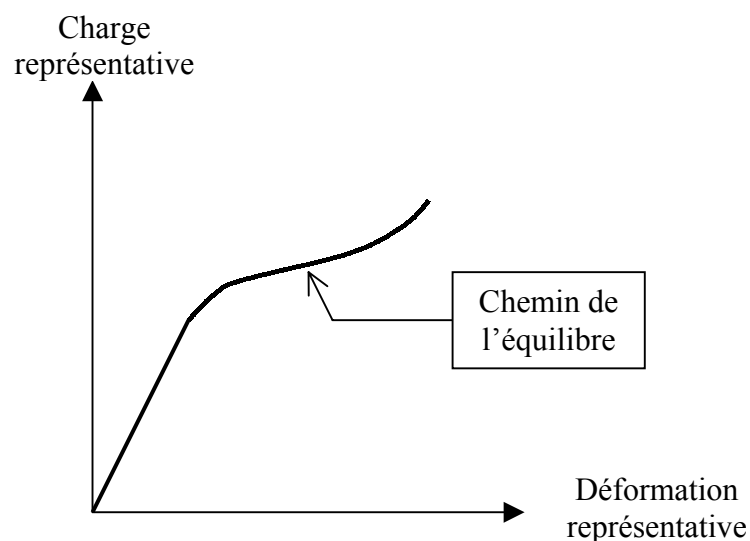


Figure (IV.1) : Diagramme de réponse Charge-déformation^[FEL01b]

Remarques :

- Le qualificateur " *représentatif* " implique un choix parmi beaucoup de candidats possibles. Pour les structures relativement simples, le choix des variables (charge, déformation) est souvent relativement évident en prenant en considération la disponibilité des données expérimentales. Pour des structures plus complexes le choix peut ne pas être évident, et beaucoup de possibilités peuvent exister.
- Ce type de réponse ne devrait pas être confondu avec ce qui dans la dynamique structurale s'appelle « le réponse temporelle ». Une histoire de réponse concerne le temps tracé habituellement le long de l'axe horizontal, des entrées ou des sorties tracées verticalement.

IV.2.2. Terminologie :

Une courbe régulière montrée dans un diagramme charge-déformation s'appelle un chemin. Chaque point sur le chemin représente une configuration ou un état possible de la structure. Si le chemin représente des configurations de l'équilibre statique, il s'appelle un chemin d'équilibre. Chaque point dans un chemin d'équilibre s'appelle point d'équilibre. Un point d'équilibre est la représentation graphique d'un état d'équilibre ou de configuration d'équilibre. L'origine du domaine de réponse (charge zéro, déformation nulle) s'appelle l'état de référence parce que c'est la configuration par rapport à laquelle les charges et les déformations ont mesuré. Cependant, l'état de référence peut être choisi plutôt arbitrairement, et cette liberté est exploitée dans quelques formulations non-linéaires et méthodes de résolution, comme nous le verrons plus tard.^[FEL01b]

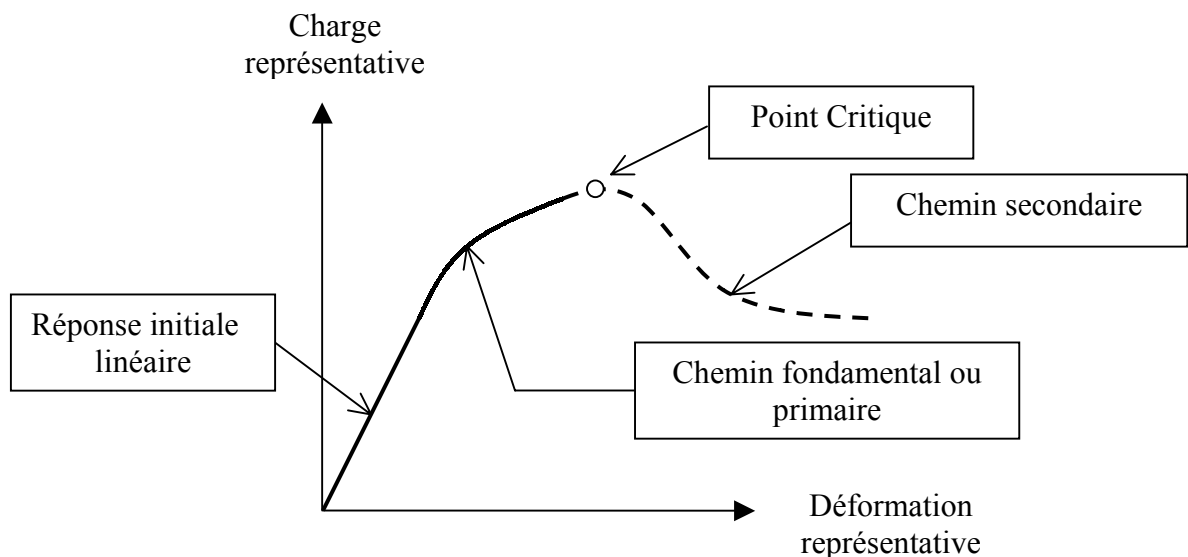


Figure (IV.2) : Chemin d'équilibre fondamental (primaire) et secondaire^[FEL01b]

Pour des problèmes concernant les structures parfaites l'état de référence est sans contraintes et non déformé, et est également un état d'équilibre. Ceci signifie qu'un chemin d'équilibre passe à travers l'état de référence, comme indiqué sur la figure (IV.1). Le chemin qui croise l'état de référence s'appelle le chemin fondamental d'équilibre (Certains auteurs^[FEL01b] appellent également ceci un chemin primaire). Le chemin fondamental s'étend de l'état de référence jusqu'aux états spéciaux appelés les points critiques. N'importe quel chemin qui n'est pas un chemin fondamental mais qui est relié à lui à un point critique s'appelle un chemin secondaire, voir la figure (IV.2).

IV.3. Points spéciaux d'équilibre : ^[FEL01b]

Certains points d'un chemin d'équilibre ont une signification spéciale dans les applications (points spéciaux). D'intérêt à notre sujet sont les points critiques, tournants et de rupture.

IV.3.1. Points critiques :

Il y a deux types:

1. Points limites : Ce sont les points où la tangente au chemin d'équilibre est horizontale, c'est à dire parallèle à l'axe de déformation.

2. Points de bifurcation : Ce sont des points où deux chemins ou plus d'équilibre se croisent.

Aux points critiques la relation entre la charge caractéristique donnée et la déformation associée n'est pas unique. Physiquement, la structure devient incontrôlable.

IV.3.2. Points tournants :

Les points où la tangente au chemin d'équilibre est verticale, c'est à dire parallèle à l'axe des charges, s'appellent points tournants. Ce ne sont pas les points critiques et ont moins de signification physique. Ils ont une certaine signification numérique, parce qu'ils peuvent affecter la performance de certaines méthodes de résolution.

IV.3.3. Points de rupture :

Les points où un chemin s'arrête soudainement ou se coupe en raison de la rupture physique s'appellent les points de rupture. Le phénomène de la rupture peut être local ou global en nature. Dans le premier cas (par exemple rupture d'un composant non critique de structure) la structure peut regagner l'équilibre fonctionnel après un saut dynamique vers un autre chemin d'équilibre. Dans le deuxième cas la rupture est catastrophique ou destructive et la structure ne retrouve pas l'équilibre fonctionnel.

IV.4. Réponse linéaire :

Une structure linéaire est un modèle mathématique caractérisé par un chemin fondamental linéaire d'équilibre pour tous les choix possibles des variables de charge et de déformation.

Ceci est montré schématiquement sur la figure (IV.3). Il n'est pas difficile de prévoir les conséquences d'un tel comportement :

1. Une structure linéaire peut soutenir n'importe quelle charge et subir n'importe quelle grandeur de déplacement.
2. Il n'y a aucun point critique, tournant ou de rupture.
3. La réponse à différents systèmes de charge peut être obtenue par le principe de superposition.
4. La décharge remet la structure en position d'équilibre.

Les conditions pour qu'un tel modèle soit applicable sont:

- Elasticité linéaire parfaite pour toute déformation.
- Déformations infinitésimales.
- Résistance infinie.

Ces hypothèses sont non seulement physiquement peu réalistes mais mutuellement contradictoires. Par exemple, si les déformations doivent rester infinitésimales pour n'importe quelle charge, les corps doivent être rigides plutôt qu'élastiques, ce qui contredit la première prétention. Ainsi, il y a nécessairement des limites placées sur la validité du modèle linéaire. Néanmoins, le modèle linéaire peut être une bonne approximation de parties de la réponse non-linéaire. En particulier, la réponse du chemin fondamental à proximité l'état de référence; voir par exemple la figure (IV.2). Puisque pour beaucoup des structures ce segment représente l'état de service, le modèle linéaire est largement répandu dans des calculs de conception. L'avantage principal de ceci est que la superposition des effets s'applique. ^[FEL01b]

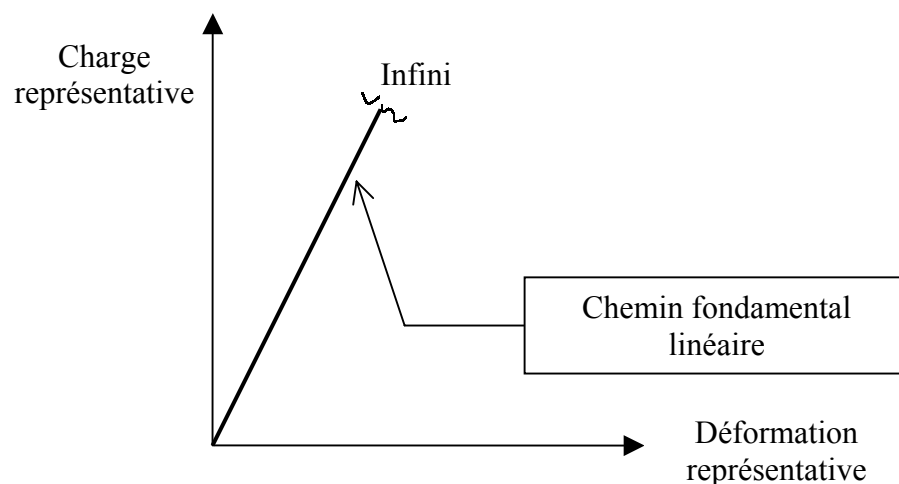


Figure (IV.3) : Diagramme de réponse pour un modèle purement linéaire ^[FEL01b]

IV.5. Rigidité tangente et stabilité :

La tangente à un chemin d'équilibre peut être considérée comme la limite du rapport :

$$\frac{\text{Incrément de force}}{\text{Incrément de déplacement}}$$

C'est par définition une rigidité ou, plus précisément, la rigidité tangente associées aux forces et déplacements représentatifs. Le rapport réciproque s'appelle flexibilité ou la souplesse. Le signe de la rigidité de tangente est étroitement associé à la question de la stabilité d'un état d'équilibre. Une rigidité négative est nécessairement associée à un équilibre instable. Une rigidité positive est nécessaire mais non suffisante pour la stabilité. Si les quantités de charge et de déplacements sont conjugués dans le sens de travail virtuel, la surface sous le diagramme charge-déformation peut être interprété comme le travail effectué par le système.

IV.6. Sources des non-linéarités : ^[FEL01b]

Un diagramme de réponse caractérise seulement le comportement grossier d'une structure, comme il pourrait être observé simplement en faisant une expérience sur une machine d'essai mécanique. Pour l'analyse structurale il y a deux sources de comportement non-linéaire. Les deux sources sont discutées dans les sections suivantes.

IV.6.1. Non-linéarité géométrique :

Source physique :

Le changement dans la géométrie au fur et à mesure que la structure se déforme est pris en considération en établissant les équations contraintes-déplacements et les équations d'équilibre.

Applications :

Structures minces dans des applications de construction aérospatiale, civile et mécanique. Structures tendues comme les câbles et les membranes gonflables. Formage des métaux et du plastique. Analyse de tous les types de stabilité.

IV.6.2. Non-linéarité matérielle :

Source physique :

Le comportement matériel ou rhéologique dépend de l'état actuel des déformations et probablement aussi de l'histoire de la déformation. D'autres variables constitutives (précontrainte, température, temps, humidité, champs électromagnétiques, etc...) peuvent être concernées.

Applications :

Structures soumises à l'élasticité non-linéaire, à plasticité, à la visco-élasticité, et aux effets de fluage.

IV.7. Résolution d'un système d'équation non linéaire :^[HIN80]

IV.7.1. Plasticité dans les plaques :

Dans l'analyse élasto-plastique de la plaque de Mindlin, on suppose que quand les moments atteignent la valeur de plastification M_0 , le point de Gauss devient plastique instantanément (en réalité l'étendu de la plasticité sur l'épaisseur est graduelle). De plus, on suppose que la fonction de plasticité F est fonction des moments de flexion $\hat{\sigma}_f$, mais non fonction des forces de cisaillement $\hat{\sigma}_c$. La fonction de plasticité est aussi considérée fonction du paramètre d'écroutissement \hat{H} .

Durant la plastification, on suppose que $\hat{\sigma}_f$ doit rester sur la surface de plasticité donc :

$$\hat{F}(\hat{\sigma}_f, \hat{H}) = 0 \quad (\text{IV.1})$$

Où en considérant les matériaux de Tresca et Von-Mises :

$$\hat{F}(\hat{\sigma}_f, \hat{H}) = \int_{-h/2}^{h/2} F(\sigma_f, H).dz \quad (\text{IV.2})$$

Remarque :

On travaille là sur toute l'épaisseur de la plaque donc :

- \hat{F} remplace F .
- $\{M_x, M_y, M_{xy}\}$ remplacent $\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$.
- $M_0 = \frac{\sigma_0 \cdot l \cdot h^2}{4}$ remplace σ_0 .

Ainsi, les relations incrémentales de résultantes de contrainte-déformation sont données par :

$$\begin{Bmatrix} d\hat{\sigma}_f \\ d\hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{D}_{ep})_f & 0 \\ 0 & \hat{D}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\hat{\varepsilon}_f \\ d\hat{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

Dans lesquelles :

$$(\hat{D}_{ep})_f = \hat{D}_f - \frac{\hat{d}_D \cdot \hat{d}_D^T}{\hat{A} + \hat{d}_D^T \cdot \hat{\alpha}} \quad (\text{IV.4})$$

$$\text{où : } \hat{\alpha} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \hat{F}}{\partial M_x} \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial M_y} \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial M_{xy}} \end{Bmatrix}$$

$$; \hat{d}_D = \hat{D}_f \cdot \hat{\alpha} ; \hat{A} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{H}} d\hat{H} \text{ et } \hat{D}_f = \int_{-h/2}^{h/2} D'_f \cdot z \cdot dz ; \hat{D}_c = \int_{-h/2}^{h/2} D'_c \cdot dz$$

Avec λ la constante de proportionnalité.

Le symbole $\hat{}$ dénote une quantité intégrée sur l'épaisseur.

Notez que \hat{D}_c reste élastique

IV.7.2. Résolution du système d'équations d'équilibre non linéaire dans le cas des plaques de Mindlin :

Pour les plaques de Mindlin, la forme incrémentale des équations d'équilibre durant l'incrément de charge est :

$$\psi(d^p) + K_T(d^p)\Delta d^p = 0 \quad (IV.5)$$

où ψ est donnée d'après l'équation (II.58).

Cependant la matrice de rigidité tangentielle est donnée par :

$$K_T = \int_A \left([B_f]^T \left[(\hat{D}_{ep})_f \right] [B_f] + [B_c]^T \left[\hat{D}_c \right] [B_c] \right) dA \quad (IV.6)$$

Elle est évaluée sur toute l'épaisseur.

Comme $[(D_{ep})_f]$ est fonction de z , la technique d'intégration numérique sera employée dans l'évaluation de l'intégral sur l'épaisseur de la plaque.

IV.7.3. Résumé des procédés de résolution :

Les procédés de résolution de l'analyse élasto-plastique des plaques de Mindlin sont résumés dans les tables : (IV.1) et (IV.2).

Table (IV.1) : Etapes de la technique de résolution pour les plaques de Mindlin multicouches et unicouches^[HIN80]

- 01 Commencer un nouvel incrément de charge $f = f + \Delta f$.
- 02 Mettre Δf égal au vecteur incrémental de charge courant.
- 03 Mettre d^0 égal à 0 pour le premier incrément ou égal au vecteur de déplacement total à la fin du dernier incrément de charge.
- 04 Mettre Ψ^0 égal au vecteur force résiduelle à la fin du dernier incrément ou à zéro 0 au premier incrément de charge.
- 05 Mettre $\Psi^0 = \Psi^0 + \Delta f$.
- 06 Résoudre $\Delta d^0 = -[K_T]^{-1} \cdot \Psi^0$
Utiliser l'ancienne valeur de $[K_T]$ ou celle mise à jour..
- 07 Mettre $d^l = d^0 + \Delta d^0$
- 08 Evaluer $\Psi^l(d^l)$
- 09 Si la solution a convergé, aller à 11, sinon continuer.
- 10 Continuer l'itération jusqu'à convergence de solution.
- 11 Si ce n'est pas le dernier incrément aller à 1. autrement arrêter.

Table (IV.2) : Boucle itérative de l'analyse élasto-plastiques des plaques de Mindlin unicouche^[HIN80]

- 01 Mettre le numéro d'itération $i = 1$.
- 02 Résoudre $\Delta d^i = -[K_T]^{-1} \cdot \Psi^i$ (Utiliser l'ancien K_T ou celui mis à jour)
- 03 Mettre $d^{i+1} = d^i + \Delta d^i$.
- 04 Pour chaque point de Gauss, évaluer les incréments de déformation :
- $$\Delta \hat{\varepsilon}_f^i = B_f \cdot \Delta d^i$$
- $$\Delta \hat{\varepsilon}_c^i = B_c \cdot \Delta d^i$$
- 05 Utilisant les rigidités élastiques, estimer, à chaque point de Gauss, les incréments de contraintes et les contraintes résultantes :
- $$\Delta \hat{\sigma}_f^i = \hat{D}_f \cdot \Delta \hat{\varepsilon}_f^i \quad \text{d'où} \quad \hat{\sigma}_f^{i+1} = \hat{\sigma}_f^i + \Delta \hat{\sigma}_f^i$$
- $$\Delta \hat{\sigma}_c^i = \hat{D}_c \cdot \Delta \hat{\varepsilon}_c^i \quad \text{d'où} \quad \hat{\sigma}_c^{i+1} = \hat{\sigma}_c^i + \Delta \hat{\sigma}_c^i$$
- 06 A chaque point de Gauss dépendant de l'état de $\hat{\sigma}_f^i$ et de $\hat{\sigma}_c^i$, ajuster $\hat{\sigma}_f^{i+1}$ pour satisfaire le critère de plasticité et préserver la condition de normalité.
- 07 Evaluer le vecteur force résiduelle :
- $$\Psi^{i+1} = \int_A \left([B_f]^T \cdot \hat{\sigma}_f + [B_c]^T \cdot \hat{\sigma}_c \right) \cdot dA - f$$
- 08 Si la solution a convergé, continuer, sinon mettre $i = i+1$ et aller à 2.
- 09 Aller à l'incrément de charge suivant.

IV.8. Méthodes de résolution :

Les algorithmes de résolution des problèmes non linéaires sont devenus une nécessité face au développement de modèles théoriques à comportement complexe. Il devient indispensable de disposer d'algorithmes de résolution fiables et efficaces. Les algorithmes de résolution classiques utilisés dans la méthode des éléments finis sont des algorithmes incrémentaux et itératifs, qui présentent souvent des difficultés de convergence liées essentiellement à l'existence de points limites en charges, en déplacements ou les deux en même temps.^[TAY03]

Cependant, les algorithmes de résolution dépendent d'une manière générale du type de problème non linéaire que l'on souhaite traiter.

Notre objectif est d'exposer ces algorithmes d'une part, et d'autre part de déterminer celui qui est le plus performant en matière de la qualité de la solution trouvée et du temps de calcul numérique mis pour décrire tout le chemin d'équilibre avec les éventuels points limites en charges ou en déplacements.^[GUE99]

Les méthodes de résolution que nous présentons dans ce qui suit, sont basées sur des processus incrémentaux. Elles consistent à appliquer par incrément successif un niveau de charge et à trouver pour chaque incrément la réponse de la structure. Cette dernière est obtenue après avoir linéarisé en chaque incrément les équations d'équilibre.

Ces méthodes incrémentales se divisent en deux types :

- Méthode incrémentale pure.
- Méthode incrémentale itérative.

Le choix d'une méthode de résolution doit tenir compte de plusieurs facteurs :

- Le type de non-linéarité : prépondérante ou non.
- La précision et la rapidité de convergence désirée.
- Le risque de divergence.

IV.8.1. Méthode incrémentale pure :^[HYO90]

Dans la méthode incrémentales pure, un incrément de charge est imposé, la matrice de rigidité tangente permet d'avoir l'accroissement du déplacement correspondant. En effet, l'équilibre n'est pas corrigé dans ce cas; entraînant souvent une divergence de la solution recherchée, Figure(IV.1). Ce problème peut être évité en utilisant des incréments très petits, ce qui rend la méthode lourde, donc faiblement utilisée.

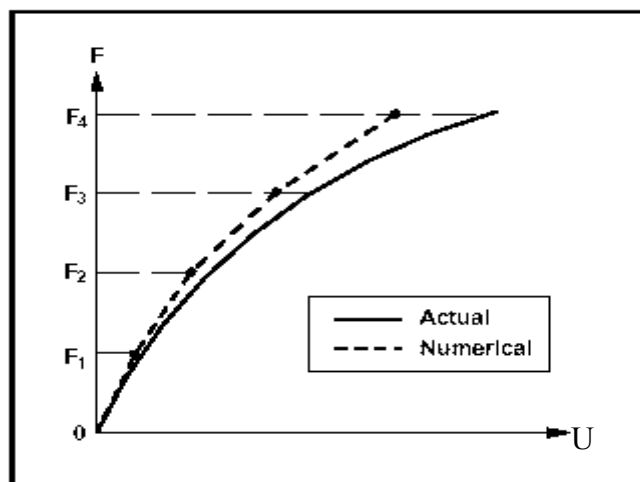


Figure (IV.4) : Méthode incrémentale^[HYO90]

IV.8.2. Méthode incrémentale itérative :^{[CHR00],[QUO00],[CHE88]}

La méthode incrémentale itérative utilise le même processus incrémental que la méthode précédant seulement, une correction de l'équilibre est introduite sur chaque incrément en utilisant un processus itératif. Cette correction peut se faire de plusieurs manières suivant le type de matrice de rigidité utilisée (initiale, tangente) définissant ainsi plusieurs méthodes incrémentales itératives dont la plus connue est celle de Newton-Raphson.

Dans l'analyse incrémental, la charge totale $\{F\}$ agissant sur une structure est appliquée incrémentalement par pas. à l'étape $m+1$, la charge peut être exprimée par :

$${}^{m+1}\{F\} = {}^m\{F\} + {}^{m+1}\{\Delta F\} \quad (\text{IV.7})$$

Là où l'indice supérieur gauche m a été employé pour indiquer le m^{eme} pas incrémental.

Supposant que les solutions au m^{eme} pas ${}^m\{U\}$, ${}^m\{\sigma\}$, ${}^m\{\varepsilon\}$ sont connues, et à l'étape ($m+1$) nous avons correspondant à la charge incrémentale $\{\Delta F\}$:

$${}^{m+1}\{U\} = {}^m\{U\} + \{\Delta U\} \quad (\text{IV.8})$$

$${}^{m+1}\{\sigma\} = {}^m\{\sigma\} + \{\Delta \sigma\} \quad (\text{IV.9})$$

Nous avons :

$${}^{m+1}\{F\} = {}^{m+1}\{R\} \quad (\text{IV.10})$$

L'équation (IV.10) représente l'équilibre des forces nodales extérieures ${}^{m+1}\{F\}$ et des forces nodales internes ${}^{m+1}\{R\}$.

Mais généralement les deux systèmes de forces ne sont pas égaux et la différence entre les deux est appelée (Forces résiduelles) :^[CHE88]

$$\Delta F = {}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\} \quad (\text{IV.11})$$

Pour assurer l'équilibre, ces résidus doivent être minimisés.

IV.8.2.1 Méthode de Newton-Raphson (Rigidité tangente) :^{[CHE88],[COF01],[COF03]}

La méthode de Newton-Raphson utilise la matrice de rigidité tangente recalculée à chaque itération pour la correction de l'équilibre, voir Figure (IV.5).

Cette méthode a une convergence très rapide, mais son inconvénient principal réside dans le temps de calcul de l'actualisation de la matrice de rigidité tangente à chaque itération.

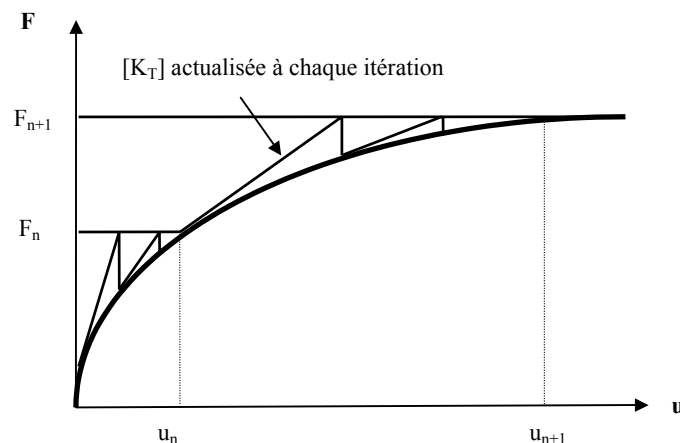


Figure (IV.5) : Méthode de Newton-Raphson^[CHE88]

Algorithme de la méthode de Newton-Raphson : ^[CHE88]

$${}^{m+1}[K]^{(i-1)} \{\Delta U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\}^{(i-1)} \quad (\text{IV.12})$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{U\}^{(i-1)} + \{\Delta U\}^{(i)} \quad (\text{IV.13})$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(0)} = {}^m\{U\} \quad (\text{IV.14})$$

$${}^{m+1}[K]^{(0)} = {}^m[K] \quad (\text{IV.15})$$

$${}^{m+1}\{F\}^{(0)} = {}^m\{F\} \quad (\text{IV.16})$$

($i = 1, 2, \dots$)

IV.8.2.2. Méthode de Newton-Raphson modifiée : ^{[CHE88],[COF01],[COF03],[ZIE77]}

La méthode de Newton-Raphson modifiée est identique à la précédente mais, utilise la matrice de rigidité tangente recalculée au début de chaque incrément et gardée constante pour toutes les itération pour la correction de l'équilibre, voir Figure (IV.6). Cette méthode a une convergence moins rapide que la précédente, mais elle a l'avantage de garder la matrice de rigidité constante pour chaque incrément ce qui permet d'avoir un gain sensible dans le temps de calcul.

En effet, dans la méthode de résolution de Newton-Raphson modifiée, nous pouvons éviter au début le calcul systématique de la matrice de rigidité tangente, en la remplaçant par une matrice de rigidité initiale dans le but de vérifier la fiabilité des forces internes correspondant aux contraintes dans la structure. Ou bien, pour résoudre les problèmes de faibles non-linéarité ou de non-linéarité matérielle. Cependant, la lenteur de convergence liée à cette méthode peut être améliorée en la couplant avec des méthodes d'accélération de convergence de type "line-search".

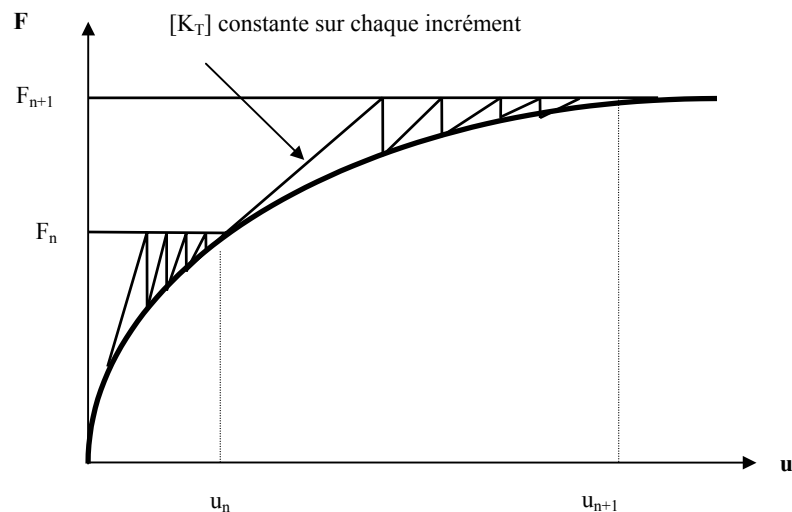


Figure (IV.6) : Méthode de Newton-Raphson modifiée ^[CHE88]

Actuellement, la méthode de résolution de Newton-Raphson standard constitue la base d'algorithmes de résolutions la plus répandue pour résoudre les problèmes de structures non linéaires. Signalons tout de même qu'on reste toujours gagnant en terme de nombre d'itérations par incrément avec l'utilisation de la méthode de résolution de Newton-Raphson. Par contre le temps de calcul reste coûteux, car pour une modélisation de taille importante et des degrés de liberté élevés, à cause de l'assemblage et de l'actualisation de sa matrice de rigidité tangente à chaque incrément.

Algorithme de la méthode de Newton-Raphson modifiée.^[CHE88]

En remplace la matrice de rigidité tangente ${}^{m+1}[K]^{(i-1)}$ de l'équation (IV.12) par ${}^n[K]$ la matrice de rigidité tangente évaluée a l'étape n de charge ($n < m+1$).

Si ${}^n[K]$ est évaluée seulement au début de la première étape de charge donc la matrice élastique initiale ${}^n[K] = [K]_0$ est employée pour toutes les étapes de charge : Souvent, la matrice de la rigidité est évaluée au début de chaque pas de la charge ou pour le $m+1$ pas, la matrice de rigidité utilisée est :

$${}^n[K] = {}^{m+1}[K]^{(0)} = {}^m[K] \quad (\text{IV.17})$$

Donc l'algorithme est :

$${}^n[K]\{\Delta U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\}^{(i-1)} \quad (\text{IV.18})$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{U\}^{(i-1)} + \{\Delta U\}^{(i)} \quad (\text{IV.19})$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(0)} = {}^m\{U\} \quad (\text{IV.20})$$

$${}^{m+1}\{F\}^{(0)} = {}^m\{F\} \quad (\text{IV.21})$$

$$(i = 1, 2, \dots)$$

IV.8.2.3. Méthode de la rigidité initiale :

La méthode de la rigidité initiale utilise une matrice de rigidité élastique constante pour éviter les coûteuses actualisations de $[K]$, cette méthode assure toujours la convergence vers la solution désirée.

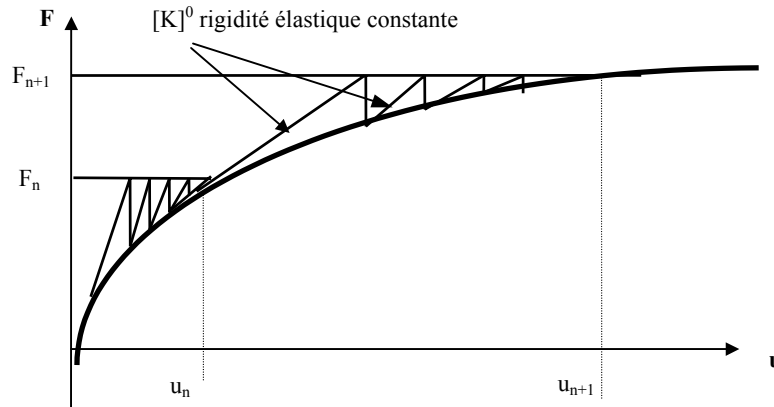


Figure (IV.6) : Méthode de la rigidité initiale^[CHE88]

Algorithme de la méthode de la rigidité initiale :^[CHE88]

$$[K]^0 \{\Delta U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\}^{(i-1)} \quad (\text{IV.22})$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{U\}^{(i-1)} + \{\Delta U\}^{(i)} \quad (\text{IV.23})$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(0)} = {}^m\{U\} \quad (\text{IV.24})$$

$${}^{m+1}\{F\}^{(0)} = {}^m\{F\} \quad (\text{IV.25})$$

($i = 1, 2, \dots$)

IV.9. Critères de convergence :

^[CHE88]

Un critère de convergence défini correctement pour terminer l'itération d'équilibre est une partie essentielle d'une stratégie incrémentale efficace de solution.

A la fin de chaque itération, la solution obtenue doit être vérifiée en utilisant une tolérance choisie, pour voir si la convergence a eu lieu. Pour une analyse par éléments finis en déplacement, le calcul du déplacement devrait approcher le déplacement exact, car le déplacement exact n'est pas connu à l'avance, une approximation de ce critère peut être exprimée comme suit :

$$\frac{\|\{\Delta U\}^{(i)}\|_2}{\|{}^{m+1}\{U\}^{(i)} - {}^m\{U\}\|_2} \leq \varepsilon_D \quad (\text{IV.26})$$

Avec : $\{\Delta U\}^{(i)}$ le déplacement incrémental de $i^{\text{ème}}$ itération.

$\| \cdot \|_2$: est utilisé pour dénoter la norme Euclidienne d'un vecteur.

ε_D : est la tolérance prescrite pour le déplacement $\{U\}$.

Ce critère est donc appelé le critère du déplacement.

Pour une itération de l'équilibre, nous cherchons une solution $\{U\}$ pour assurer la condition d'équilibre (IV.10). A cette fin, un deuxième critère de la convergence est exigé pour les forces résiduelles, où la différence entre la force interne et la force externe $\Delta F = {}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\}$ doit être nul.

Cependant, il est impossible et inutile que les forces résiduelles atteignent zéro dans un processus numérique. Donc, nous introduisons une approximation de la forme :

$$\frac{\| {}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\}^{(i)} \|_2}{\| {}^{m+1}\{F\} - {}^m\{R\} \|_2} \leq \varepsilon_F \quad (\text{IV.27})$$

avec ε_F : est une tolérance prescrite pour la force.

Ce critère est donc appelé le critère de force.

Dans certains cas de discontinuité (fissuration par exemple) les forces peuvent augmenter alors que les déplacements diminuent donc un troisième critère doit fournir une mesure de la façon que les déplacements et les forces sont à leurs valeurs d'équilibre. Ce critère est appelé critère d'énergie interne.

$$\frac{\{\Delta U\}^{(i)T} \left({}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\}^{(i)} \right)}{\{\Delta U\}^{(i)T} \left({}^{m+1}\{F\} - {}^m\{R\} \right)} \leq \varepsilon_E \quad (\text{IV.28})$$

ε_E : est une tolérance prescrite pour l'énergie interne.

N'importe quel critère de ces trois critères ou de leurs combinaisons peuvent être employées pour terminer une itération, mais la tolérance doit être soigneusement choisie. Une tolérance trop grande mènera à un résultat imprécis, alors qu'une tolérance trop serrée peut mener à des calculs laborieux et inutiles.