

CHAPITRE V : VALIDATION ET EXPERIMENTATION NUMERIQUE

V.1. Introduction :

Ce chapitre portera sur la simulation numérique de la propagation de la plasticité à travers la plaque en flexion sous différentes conditions.

Sachant que le programme utilise une bibliothèque d'éléments : Hétérosis à 9 nœuds, Lagrange à neuf nœuds Q9, Serendip à huit nœuds Q8, linéaire à 4 nœuds Q4 et l'élément avec cisaillement transversal constant par côté Q4 γ .

Mais pour valider le programme, une partie sera consacrée à la comparaison des résultats de notre programme avec la solution analytique Timoshenko^[TIM85] et avec le logiciel RDM6^[YVE98] (utilisant l'élément Q4 γ) dans le domaine linéaire (élasticité), puis aux résultats obtenus de programmes traitant des problèmes dans le domaine non linéaire (élasto-plasticité) notamment ceux de Hinton et Owen^[HIN80].

Lors de l'expérimentation numérique, on abordera le cœur du sujet à savoir la réponse statique des plaques (élastiques, plastiques) sous l'action d'un trajet de chargement donné, et la propagation de la plasticité au niveau de la plaque et la charge ultime pour différents cas (on fera varier le type d'élément, l'épaisseur de la plaque, les conditions aux limites, le critère de plasticité et la méthode de résolution de système non linéaire), pour mieux illustrer le phénomène étudié.

Ci après, la représentation des éléments finis plaques utilisés dans le programme ainsi que le mode de numérotation des nœuds.

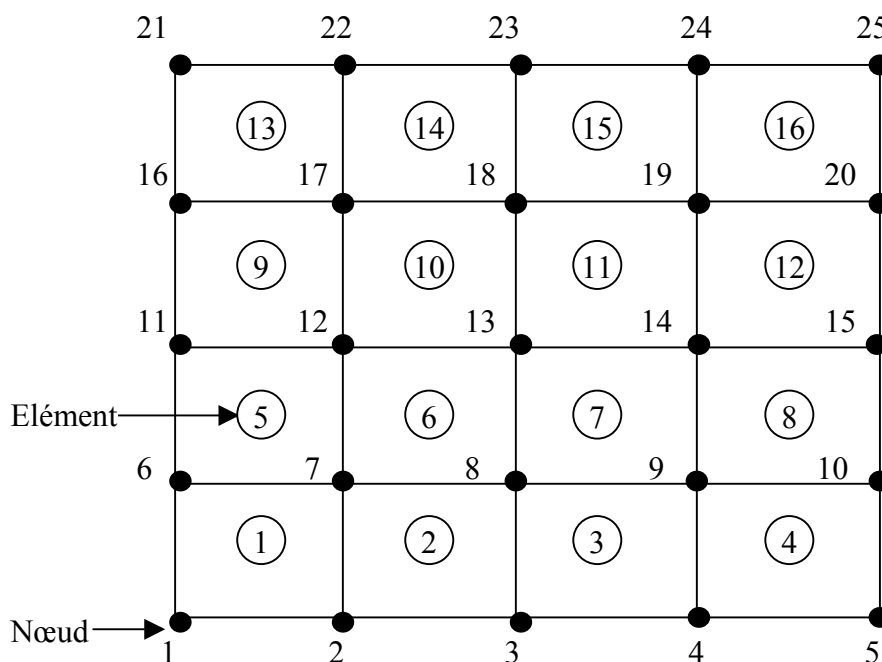


Figure (V.1) : Représentation et numérotation des éléments à 4 nœuds Q4 et Q4 γ .

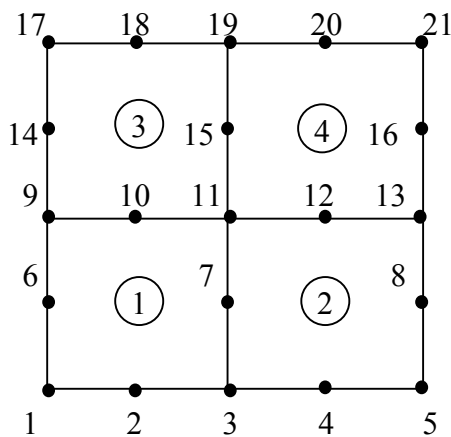


Figure (V.2) : Représentation et numérotation des éléments à 8 nœuds Q8.

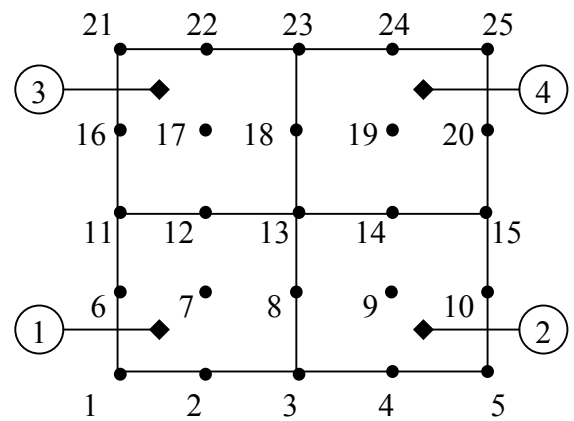


Figure (V.3) : Représentation et numérotation des éléments à 9 nœuds Q9 et HétérosisHT9

V.2. Validation :

V.2.1. Domaine linéaire :

Pour la validation dans le domaine élastique, les résultats donnés par notre programme seront comparés à ceux donnés par le logiciel RDM6 ainsi que ceux théoriques de Timoshenko.

Selon la théorie des plaques de Timoshenko^[TIM85], la flèche maximale d'une plaque carrée est donnée par la relation :

$$W_{th} = \alpha \frac{q \cdot a^4}{D} \tag{V.1}$$

Où D : la rigidité à la flexion de la plaque

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \tag{V.2}$$

α : Facteur numérique dépendant du rapport b/a (la longueur sur la largeur) ainsi que des conditions aux limites). Les valeurs de α sont dans le tableau (V.1).

q : Charge répartie sur la plaque.

a : La largeur de la plaque.

h : L'épaisseur de la plaque.

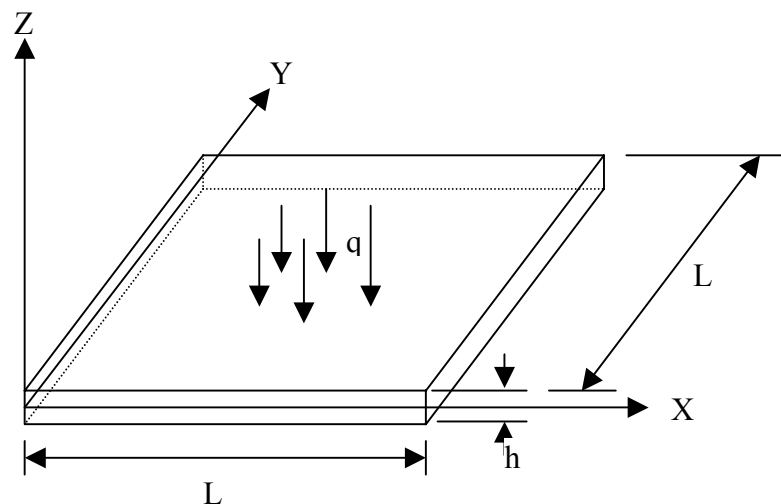


Figure (V.4) : Plaque carrée soumise a une charge répartie q

Conditions d'appui	b/a	α
Plaque Simplement appuyée.	1	0,00406
Plaque encastree.	1	0,00126
Plaque ayant un côté encastree et trois simplement appuyés.	1	0,00279
Plaque ayant un côté libre et trois simplement appuyés.	1	0,01286
Plaque à deux côtés opposés en appui simple et deux encastrés.	1	0,00192

Tableau (V.1) : Les valeurs de α ^[TIM85]

La comparaison se fera avec cinq éléments : l'élément de Lagrange à 9 nœuds (Q9), l'élément Hétérosis à 9 nœuds (HT9), l'élément Serendip à 8 nœuds (Q8), l'élément à 4 nœuds (Q4) et l'élément à 4 nœuds avec cisaillement transversal constant par côté Q4 γ .

Les données du problème sont les suivantes :

Plaque carrée : $a = b = L = 1$ m, Epaisseurs : ($h = 0.01$ m , $h = 0.1$ m et $h = 0.5$ m).

Module de Young $E = 210\,000\,000$ KN/m² , Coefficient de Poisson $\nu = 0,3$.

La charge répartie $q = 10$ KN/m².

Conditions d'appui	Plaque Simplement appuyée	Plaque encastree	Plaque ayant un côté encastree et trois simplement appuyés	Plaque ayant un côté libre et trois simplement appuyés.	Plaque à deux côtés opposés en appui simple et deux encastrés	
Déplacement Max (m)						
W_{th}	$2,111 \times 10^{-3}$	$6,552 \times 10^{-4}$	$1,450 \times 10^{-3}$	$6,687 \times 10^{-3}$	$9,984 \times 10^{-4}$	
W_{RDM6}	$2,065 \times 10^{-3}$	$6,309 \times 10^{-4}$	$1,375 \times 10^{-3}$	$6,167 \times 10^{-3}$	$9,030 \times 10^{-4}$	
Notre Programme	W_{Q4}	$2,065 \times 10^{-3}$	$6,311 \times 10^{-4}$	$1,376 \times 10^{-3}$	$6,171 \times 10^{-3}$	$9,086 \times 10^{-4}$
	$W_{Q4\gamma}$	$2,065 \times 10^{-3}$	$6,309 \times 10^{-4}$	$1,375 \times 10^{-3}$	$6,167 \times 10^{-3}$	$9,077 \times 10^{-4}$
	W_{Q8}	$2,089 \times 10^{-3}$	$6,613 \times 10^{-4}$	$1,355 \times 10^{-3}$	$6,698 \times 10^{-3}$	$9,836 \times 10^{-4}$
	W_{Q9}	$2,117 \times 10^{-3}$	$6,648 \times 10^{-4}$	$1,453 \times 10^{-3}$	$6,694 \times 10^{-3}$	$10,02 \times 10^{-4}$
	W_{HT9}	$2,101 \times 10^{-3}$	$6,442 \times 10^{-4}$	$1,431 \times 10^{-3}$	$6,698 \times 10^{-3}$	$9,791 \times 10^{-4}$

Tableau (V.2) : Les résultats obtenus par la théorie de Timoshenko, le logiciel RDM6 et notre programme (pour $h = 0.01$)

Conditions d'appui		Plaque Simplement appuyée	Plaque encastrée	Plaque ayant un côté encastré et trois simplement appuyés	Plaque ayant un côté libre et trois simplement appuyés.	Plaque à deux côtés opposés en appui simple et deux encastrés
Déplacement Max (m)						
W_{RDM6}		$2,178 \times 10^{-6}$	$7,439 \times 10^{-7}$	$1,522 \times 10^{-6}$	$6,391 \times 10^{-6}$	$1,061 \times 10^{-6}$
Notre Programme	W_{Q4}	$2,187 \times 10^{-6}$	$7,584 \times 10^{-7}$	$1,537 \times 10^{-6}$	$6,497 \times 10^{-6}$	$1,079 \times 10^{-6}$
	$W_{Q4\gamma}$	$2,178 \times 10^{-6}$	$7,439 \times 10^{-7}$	$1,522 \times 10^{-6}$	$6,391 \times 10^{-6}$	$1,061 \times 10^{-6}$
	W_{Q8}	$2,219 \times 10^{-6}$	$7,793 \times 10^{-7}$	$1,588 \times 10^{-6}$	$7,027 \times 10^{-6}$	$1,146 \times 10^{-6}$
	W_{Q9}	$2,222 \times 10^{-6}$	$7,884 \times 10^{-7}$	$1,594 \times 10^{-6}$	$7,024 \times 10^{-6}$	$1,152 \times 10^{-6}$
	W_{HT9}	$2,219 \times 10^{-6}$	$7,809 \times 10^{-7}$	$1,588 \times 10^{-6}$	$7,027 \times 10^{-6}$	$1,146 \times 10^{-6}$

Tableau (V.3) : Les résultats obtenus par le logiciel RDM6 et notre programme (pour $h = 0.1$)

Conditions d'appui		Plaque Simplement appuyée	Plaque encastrée	Plaque ayant un côté encastré et trois simplement appuyés	Plaque ayant un côté libre et trois simplement appuyés.	Plaque à deux côtés opposés en appui simple et deux encastrés
Déplacement Max (m)						
W_{RDM6}		$3,957 \times 10^{-8}$	$2,809 \times 10^{-8}$	$3,654 \times 10^{-8}$	$8,871 \times 10^{-8}$	$3,380 \times 10^{-8}$
Notre Programme	W_{Q4}	$4,127 \times 10^{-8}$	$2,986 \times 10^{-8}$	$3,833 \times 10^{-8}$	$9,086 \times 10^{-8}$	$3,563 \times 10^{-8}$
	$W_{Q4\gamma}$	$3,957 \times 10^{-8}$	$2,809 \times 10^{-8}$	$3,654 \times 10^{-8}$	$8,871 \times 10^{-8}$	$3,380 \times 10^{-8}$
	W_{Q8}	$3,873 \times 10^{-8}$	$2,753 \times 10^{-8}$	$3,579 \times 10^{-8}$	$8,695 \times 10^{-8}$	$3,305 \times 10^{-8}$
	W_{Q9}	$3,884 \times 10^{-8}$	$2,764 \times 10^{-8}$	$3,588 \times 10^{-8}$	$8,703 \times 10^{-8}$	$3,316 \times 10^{-8}$
	W_{HT9}	$3,873 \times 10^{-8}$	$2,754 \times 10^{-8}$	$3,579 \times 10^{-8}$	$8,705 \times 10^{-8}$	$3,305 \times 10^{-8}$

Tableau (V.4) : Les résultats obtenus par le logiciel RDM6 et notre programme (pour $h = 0.5$)

Les résultats obtenus par notre programme dans le domaine linéaire (l'élasticité) sont comparables à ceux obtenus avec le logiciel et à ceux de la théorie de timoshenko.

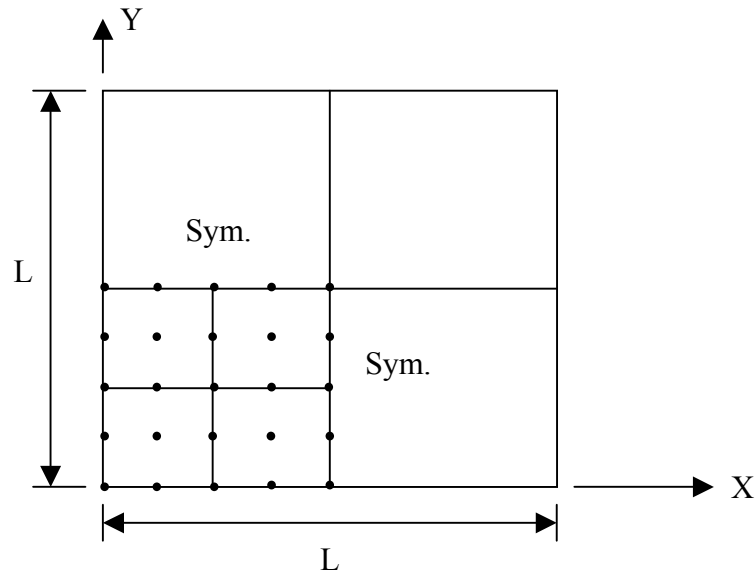
On remarque le bon comportement pour les plaques modérément épaisses ($h = 0.1$ et $h = 0.5$ respectivement) de l'élément $Q4\gamma$ et pour les plaques minces ($h = 0.01$) les éléments quadratiques ($Q8, Q9, HT9$) donnent des résultats comparables à ceux du logiciel RDM6.

V.2.2. Domaine non linéaire :

V.2.2.1. Exemple (2.1) :

Dans le domaine non-linéaire on validera les résultats donnés par notre programme par rapport à ceux de Hinton (§9-7de la référence[HIN80]).

Pour cela, on considère une plaque carrée simplement appuyée en élasto-plasticité avec le critère de Von-Mises. La structure est discrétisée avec des éléments hétérosis



Figure(V.5) : Plaque carrée simplement appuyée

Les données du problème sont les suivantes :

Plaque carrée : $a = b = L = 1$ m ; l'épaisseur : $h = 0,01$ m.

Module de Young $E = 210\,000\,000$ KN/m² , Coefficient de Poisson $\nu = 0,3$

La limite élastique : $\sigma_0 = 200\,000$ KN/m².

Par symétrie, on prend le quart de la plaque. Les conditions aux limites sont indiquées sur la figure (V.6).

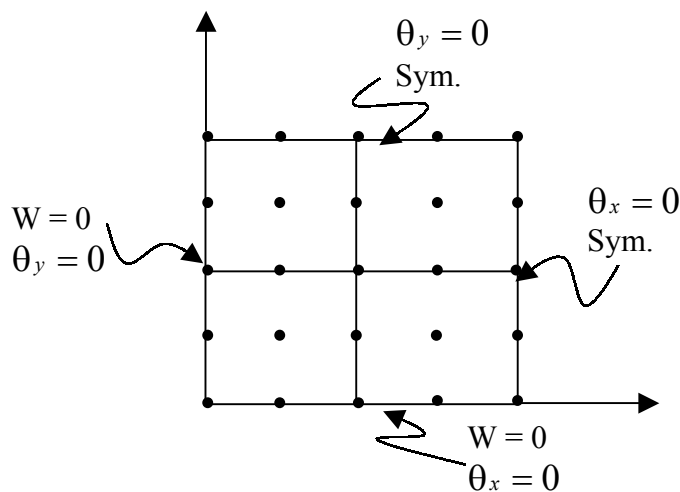


Figure (V.6) : Conditions aux limites d'un quart de la plaque (exemple (2.1))

On arrive à des résultats similaires, qu'on présente dans la figure suivante :

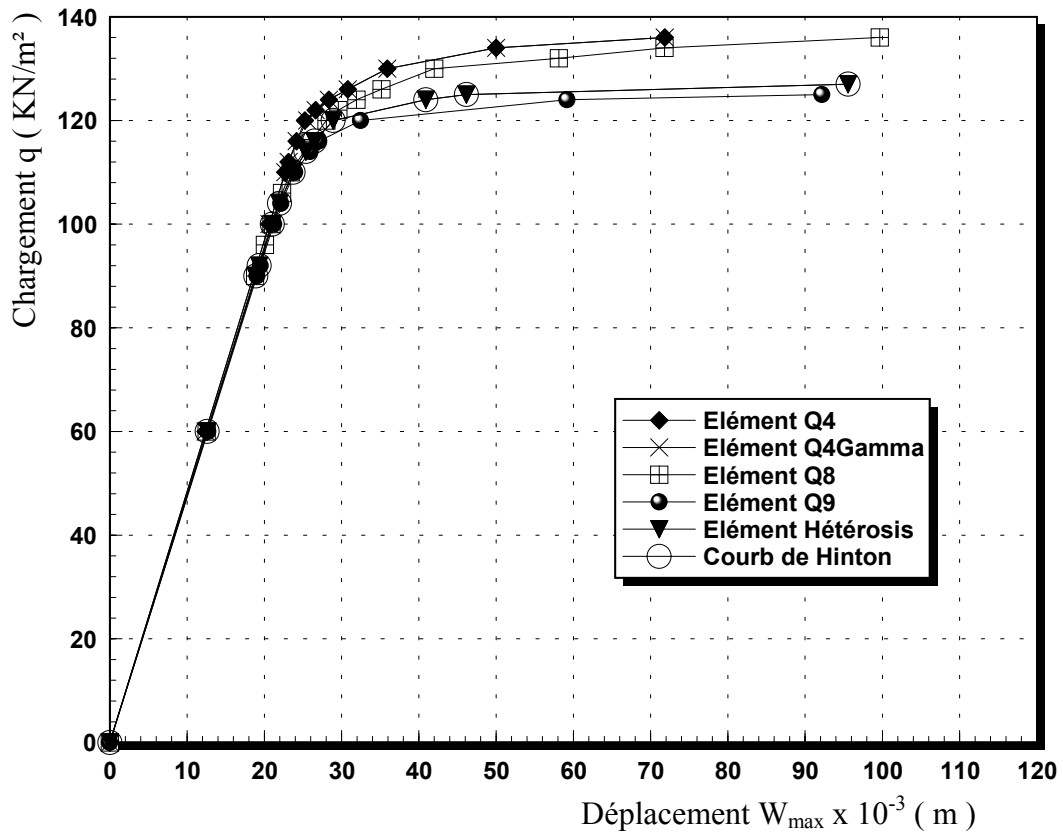


Figure (V.7) : Courbe chargement-déplacement des éléments : Hétérosis HT9, Lagrange Q9, Serendip Q8, Q4 et Q4 γ et la courbe de Hinton^[HIN80]

Analyse et interprétation :

La figure (V.7) représente la courbe du déplacement au centre de la plaque en fonction du chargement appliqué avec différents types d'éléments, on remarque que les éléments de Lagrange et l'Hétérosis à 9 nœuds sont les plus performants, leurs courbes sont confondues avec celle de Hinton et Owen^[HIN80]. Donc les résultats obtenus sont comparables à ceux donnés par le programme de Hinton.

V.3. Expérimentation numérique :

Dans cette partie, il s'agit d'exécuter le programme pour différents cas (maillages, conditions aux limites, épaisseurs, critères de plasticité et méthodes de résolution), afin d'étudier leur influence, au fur et à mesure, on suit la propagation de la plasticité aux points de Gauss sur toute la structure. Les points de Gauss plastifiés seront présentés en couleur noire (indice **p**) dans les simulations.

V.3.1. Exemple (3.1) : Idem exemple (2.1)

On reprend l'exemple (2.1) pour savoir la réponse statique des plaques (élasto-plastique) sous l'action d'un trajet de chargement donné, simulant la propagation de la plasticité au niveau de la plaque simplement appuyée, cet exemple porte sur les éléments Hétérosis, Lagrange à 9 nœuds, Serendip à 8 nœuds et les éléments Q4 et Q4 γ . La plastification des points de Gauss est donnée par le critère de Von-Mises en combinaison avec la méthode de résolution de Newton-Raphson modifiée.

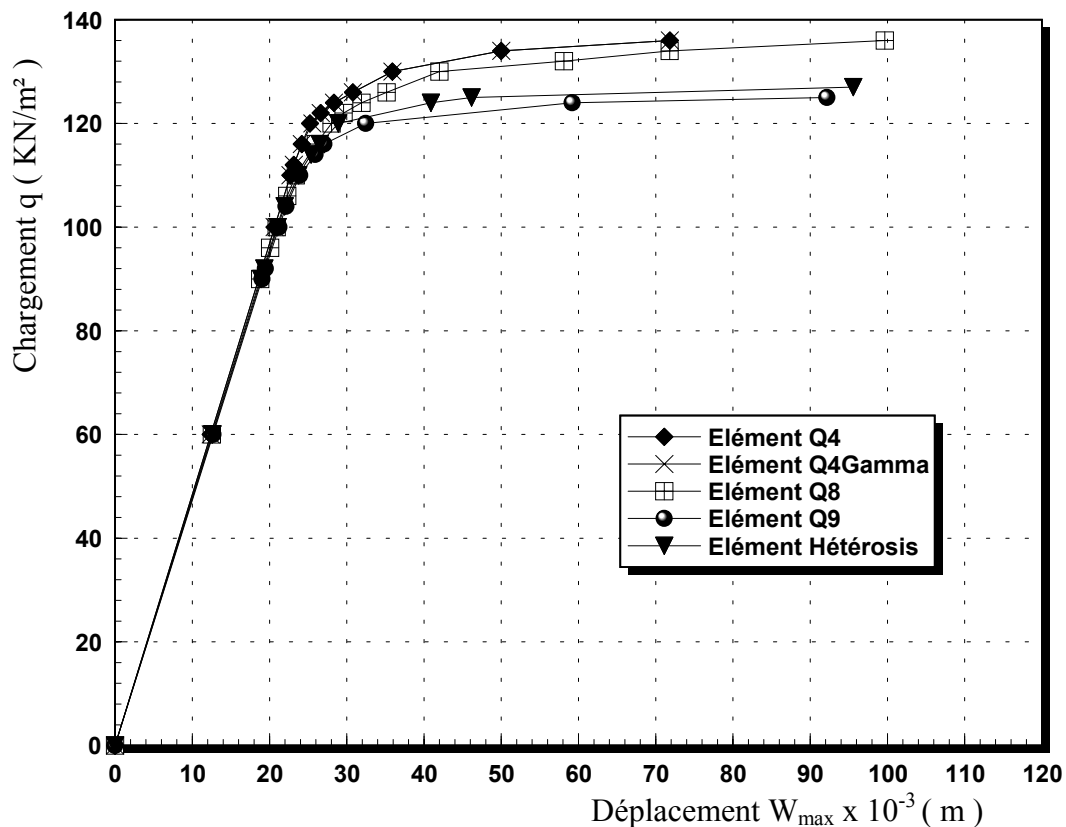


Figure (V.8) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Hétérosis, Lagrange Q9, Serendip Q8, Q4 et Q4 γ (Plaque simplement appuyée)

Simulation de la propagation de la plasticité :

Elément Q4 / Elément Q4 γ	Elément Hétérosis / Elément Q9
Un quart de la structure	Un quart de la structure

Chargement 112

x x	x p
x x	x x
x x	x x
x x	x x

116

x x	x p
x x	x x
x x	x x
p x	x x

96

x x x	x x x
x x x	x x x
x x x	x x x
x x x	x x x
x x x	x x x
x x x	x x x
p x x	x x x

102

x x x	x x x
x x x	x x x
x x x	x x x
x x x	x x x
p x x	x x x
p p x	x x x

120

x x	p p
x x	x p
x x	x x
p x	x x

122

x x	p p
x x	x p
p x	x x
p p	x x

106

x x x	x x p
x x x	x x x
x x x	x x x
x x x	x x x
p x x	x x x
p p x	x x x

110

x x x	x p p
x x x	x x p
x x x	x x x
x x x	x x x
p x x	x x x
p p x	x x x

124

x x	p p
x x	p p
p x	x x
p p	x x

126

x x	p p
x x	p p
p p	x x
p p	x x

114

x x x	x p p
x x x	x p p
x x x	x x x
x x x	x x x
p p x	x x x
p p x	x x x

116

x x x	x p p
x x x	x p p
x x x	x x x
p x x	x x x
p p x	x x x
p p p	x x x

130

x x	p p
x p	p p
p p	p x
p p	x x

136

x p	p p
p p	p p
p p	p p
p p	p x

120

x x x	p p p
x x x	x p p
x x p	x x p
p x x	p x x
p p x	x x x
p p p	x x x

124

x x x	p p p
x x p	p p p
x p p	p p p
p p p	p p x
p p p	p x x
p p p	x x x

138

p p	p p
p p	p p
p p	p p
p p	p p

128

x x p	p p p
x p p	p p p
p p p	p p p
p p p	p p p
p p p	p p x
p p p	p x x

132

p p p	p p p
p p p	p p p
p p p	p p p
p p p	p p p
p p p	p p p
p p p	p p p

Figure (V.9) : Propagation de la plasticité dans la plaque en flexion des éléments Hétérosis, Lagrange Q9, Q4 et Q4 γ (plaque carrée simplement appuyée)
 x : Point de Gauss Non Plastifié.
 p : Point de Gauss Plastifié.

Analyse et interprétation :

La figure (V.8) montre que la plasticité est détectée précocement avec les éléments Hétérosis HT9 et Lagrange Q9. En augmentant la charge, la plasticité se produit pour les éléments Q4 et Q4 γ .

Pour la plaque simplement appuyée avec un maillage par des éléments Hétérosis et Lagrange, la figure (V.9) montre que la plastification se manifeste aux points de Gauss qui sont proches des coins de la plaque à cause du blocage des rotations (θ_x, θ_y) au nœud du coin, et puis s'étend aux alentours du nœud central, jusqu'à la plastification totale du fait que les rotations sont libres.

Cependant, la charge ultime pour le cas d'un maillage avec les éléments quadratiques est approximativement égale à « 132KN/m² », tandis que celle calculée avec les éléments Q4 et Q4 γ elle est relativement supérieure, égale à « 138KN/m² ».

V.3.2. Exemple (3.2) :

Cet exemple porte sur la simulation de la propagation de la plasticité dans une plaque complètement encastree utilisant les éléments quadratiques Q8, Q9, HT9 et les éléments Q4 et Q4 γ . La plastification des points de Gauss est donnée par le critère de Von-Mises en utilisant la méthode de résolution de Newton-Raphson modifiée.

Les données du problème sont les suivantes :

Plaque carrée : $a = b = L = 1$ m ; l'épaisseur : $h = 0,01$ m.

Module de Young $E = 210\,000\,000$ KN/m² , Coefficient de Poisson $\nu = 0,3$

La limite élastique : $\sigma_0 = 200\,000$ KN/m².

Par symétrie, on prend le quart de la plaque. Les conditions aux limites sont indiquées sur la figure suivante.

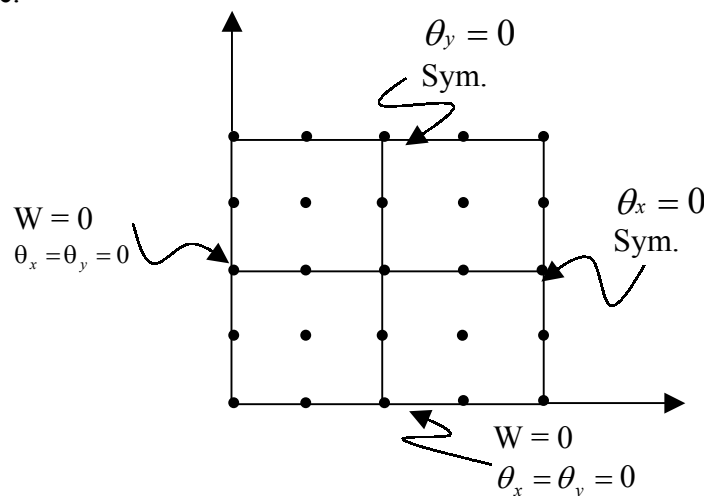


Figure (V.10) : Conditions aux limites d'un quart de la plaque (Plaque carrée complètement encastree)

On arrive à des résultats similaires, qu'on présente dans la figure suivante :

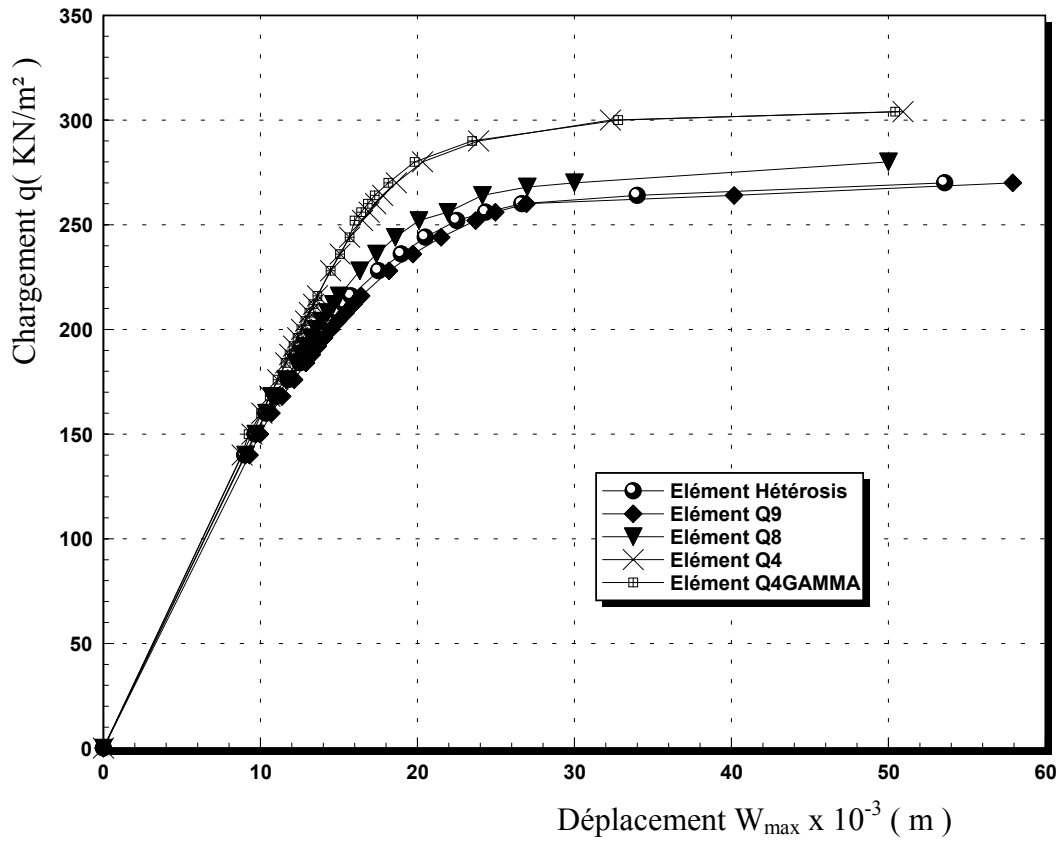
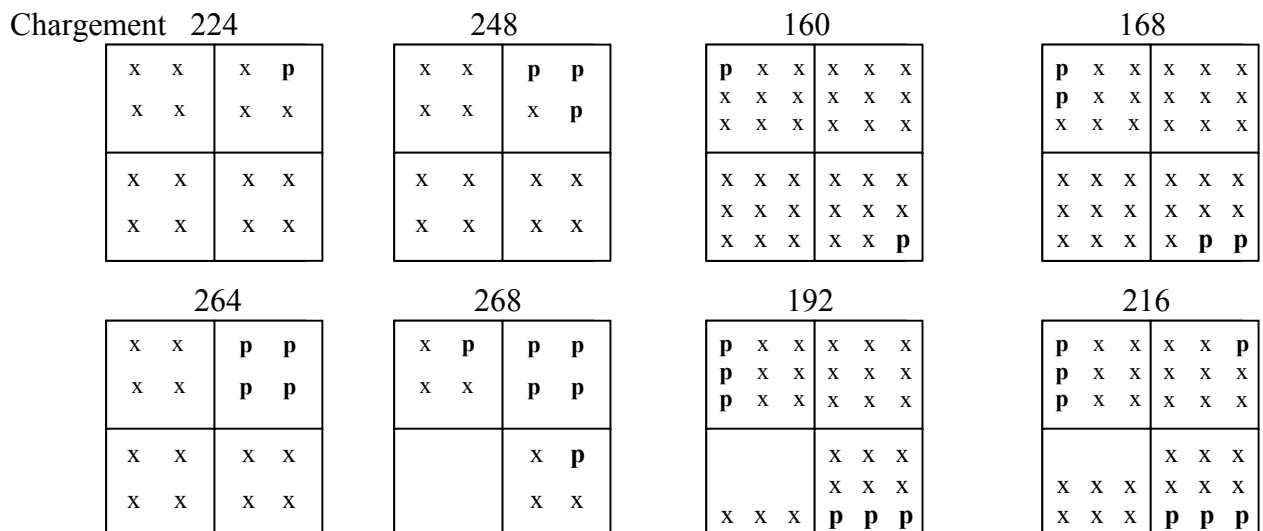


Figure (V.11) : Courbe chargement-déplacement des éléments Hétérosis, Lagrange Q9, Serendip Q8, Q4 et Q4 γ (Plaque carrée complètement encastree)

Simulation de la propagation de la plasticité :

Elément Q4 / Elément Q4 γ Un quart de la structure	Elément Hétérosis / Elément Q9 Un quart de la structure
--------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------



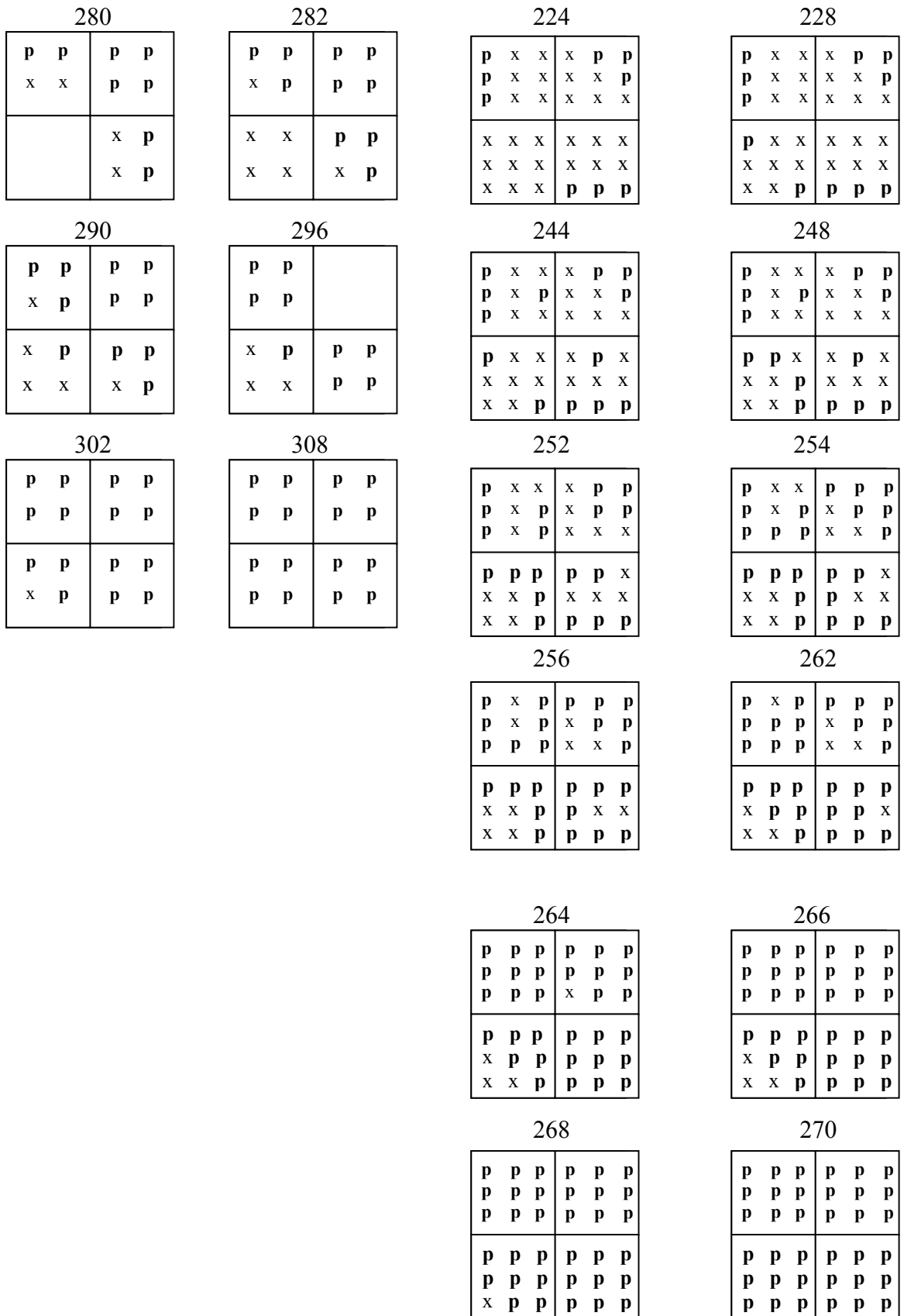


Figure (V.12) : Propagation de la plasticité dans la plaque en flexion des éléments Hétérosis, Lagrange $Q9$, $Q4$ et $Q4\gamma$ (plaque carrée encastree)
 x : Point de Gauss Non Plastifié.
 p : Point de Gauss Plastifié.

Analyse et interprétation :

La figure (V.11) représente la courbe du déplacement du nœud central suivant l'axe z en fonction de la charge. Dans cet exemple (plaque carrée complètement encastree) on remarque que la plasticité commence d'abord au niveau des éléments Hétérosis et Lagrange Q9 puis en augmentant la charge, la plasticité se produit pour les éléments Q4 et Q4 γ , donc les éléments de Lagrange et Hétérosis à 9 nœuds sont plus performants.

La figure (V.12) montre la propagation de la plasticité dans la plaque pour les différents éléments. Elle débute aux points de Gauss proches des côtés encastres (du fait que les rotations sont bloquées suivant les deux directions), puis se propage vers le milieu de la plaque et ensuite elle englobe toute la plaque.

D'après les courbes, figure (V.11), nous voyons que la charge ultime obtenue par les éléments Q9 et HT9 est 270KN/m², cependant elle est au niveau de 308KN/m² pour les éléments Q4 γ .

Par conséquent, on constate une grande différence entre la valeur de la charge ultime prédite par l'élément Hétérosis pour la plaque complètement encastree, et celle calculée pour la plaque simplement appuyée. Ce qui montre l'influence des conditions aux limites sur le phénomène de la plastification.

V.3.3. Exemple (3.3) :

Dans cet exemple on fait varier l'épaisseur ($h = 0.01$, $h = 0.1$ et $h = 0.5$) de la plaque pour les plaques simplement appuyée et complètement encastree , et on trace les courbes chargement-déplacement pour chaque épaisseur et on utilise différents types de maillages (M1 (2x2) , M2 (4x4)) pour les éléments Hétérosis, Serendip Q8, Lagrange Q9, Q4 et Q4 γ .
(les mêmes données physiques de l'exemple (2.1))

• Plaque simplement appuyée :

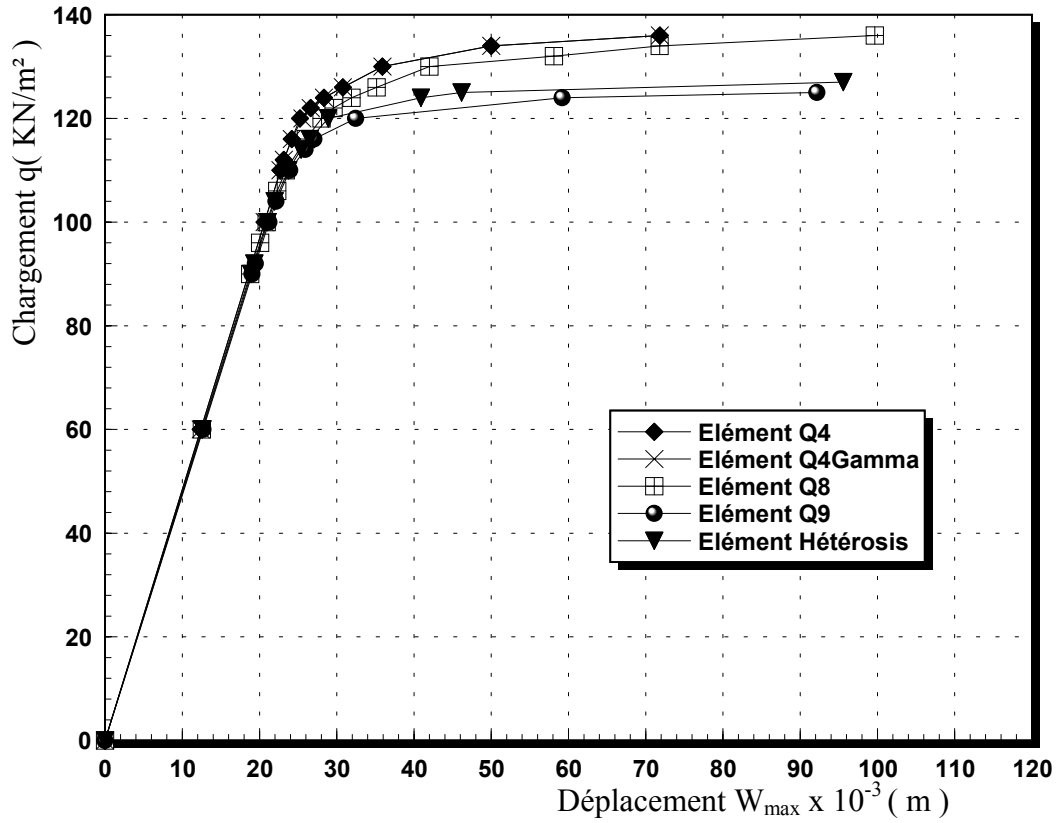


Figure (V.13) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec $h = 0.01$ et $M1 = 2 \times 2$ (Plaque simplement appuyée)

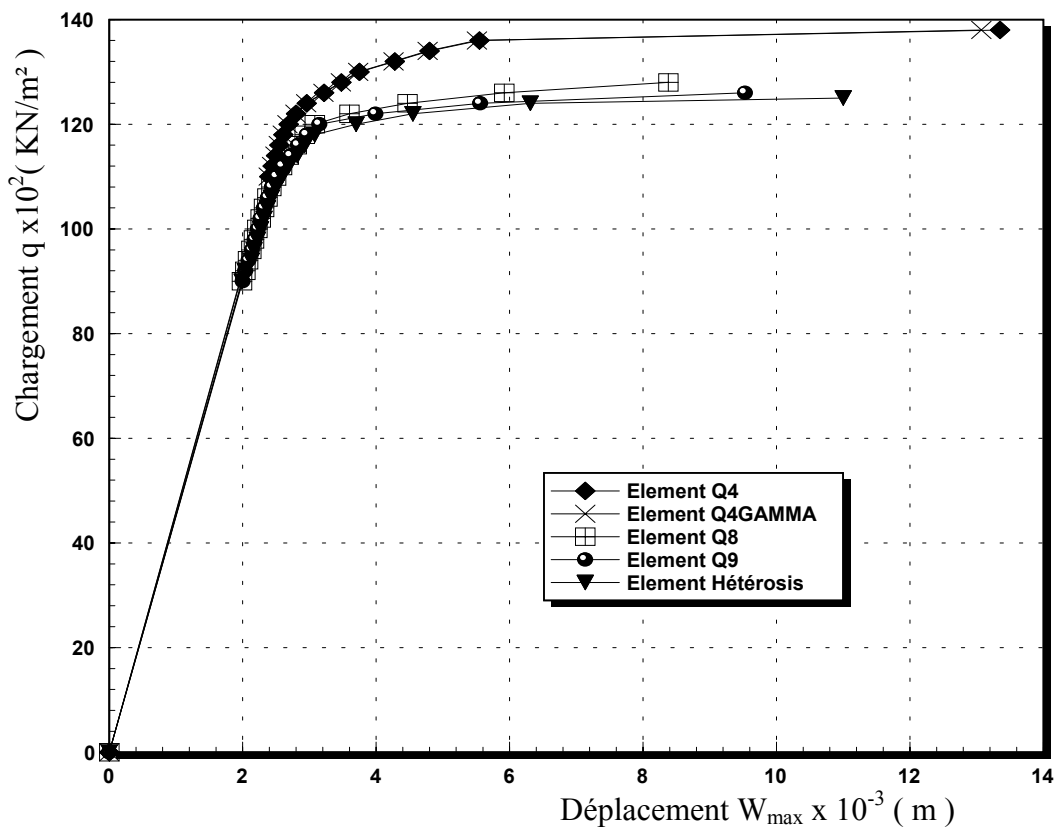


Figure (V.14) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec $h = 0.1$ et $M1 = 2 \times 2$ (Plaque simplement appuyée)

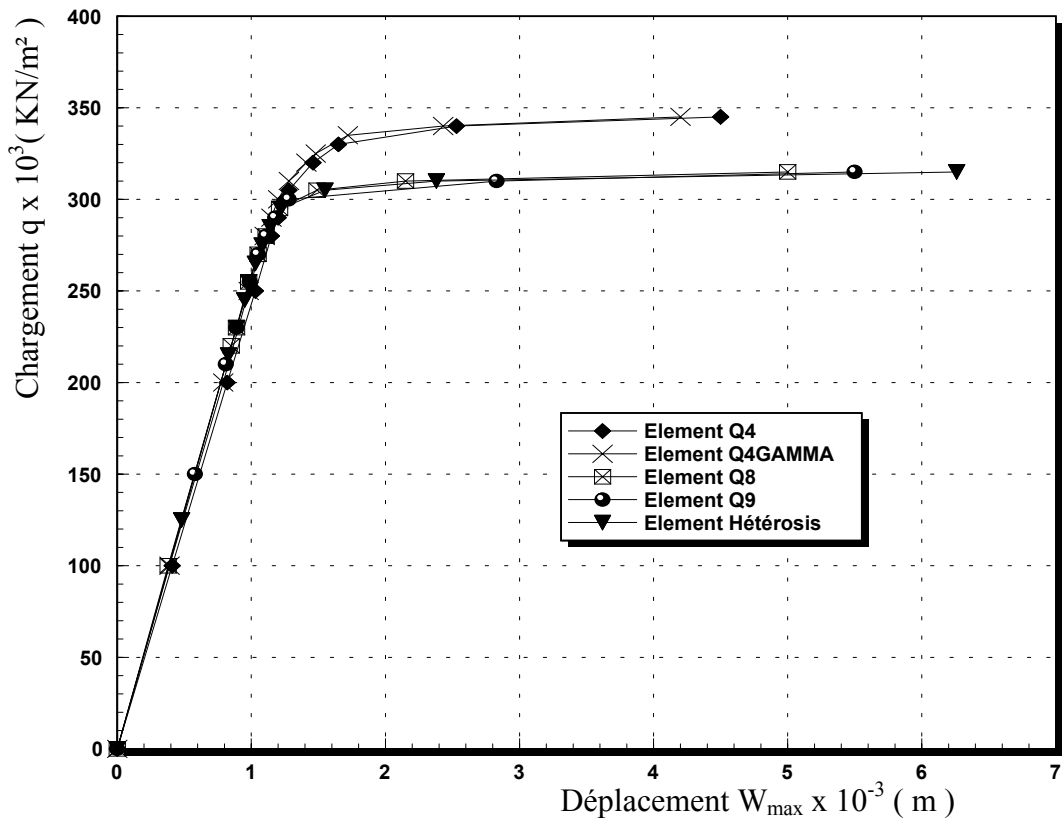


Figure (V.15) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec $h = 0.5$ et $M1 = 2 \times 2$ (Plaque simplement appuyée)

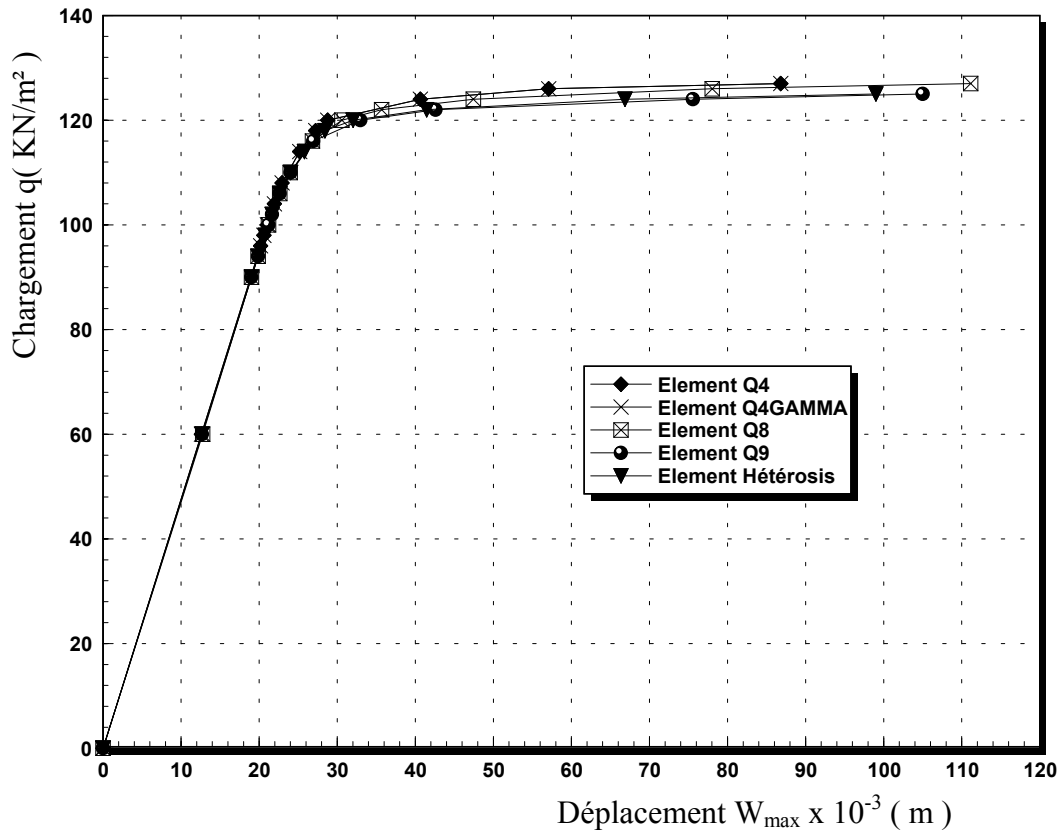


Figure (V.16) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec $h = 0.01$ et $M2 = 4 \times 4$ (Plaque simplement appuyée)

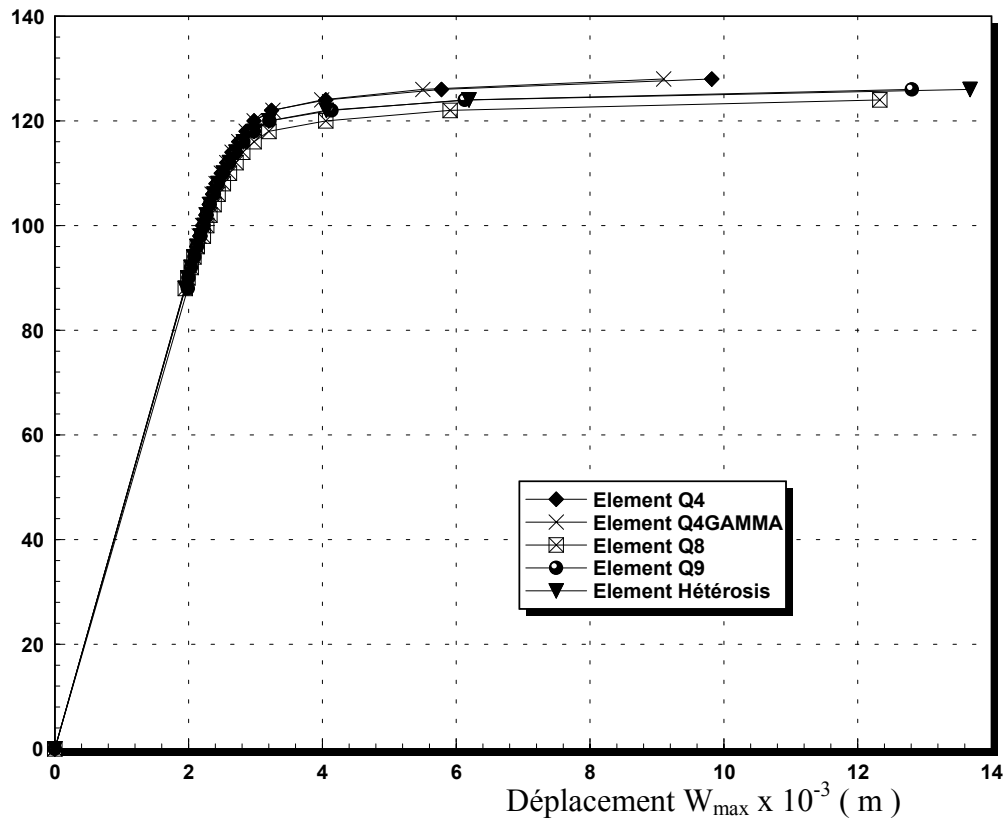


Figure (V.17) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec $h = 0.1$ et $M2 = 4 \times 4$ (Plaque simplement appuyée)

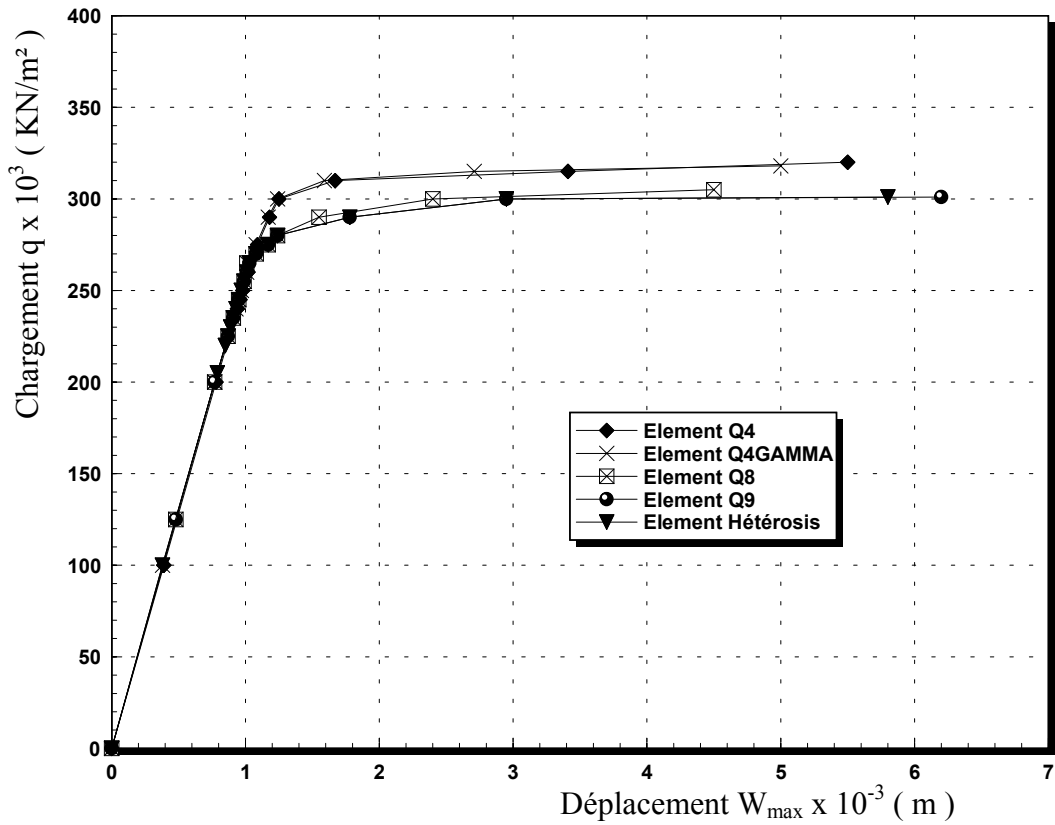


Figure (V.18) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec $h = 0.5$ et $M2 = 4 \times 4$ (Plaque simplement appuyée)

• Plaque encadrée :

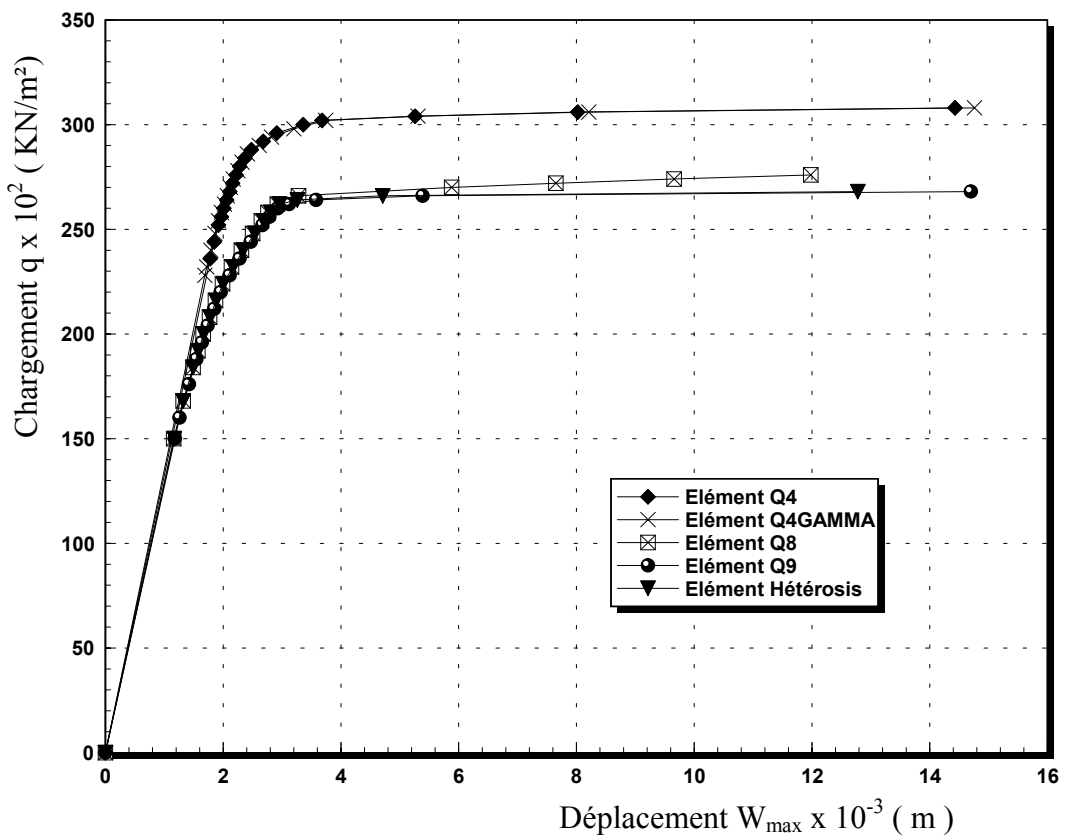
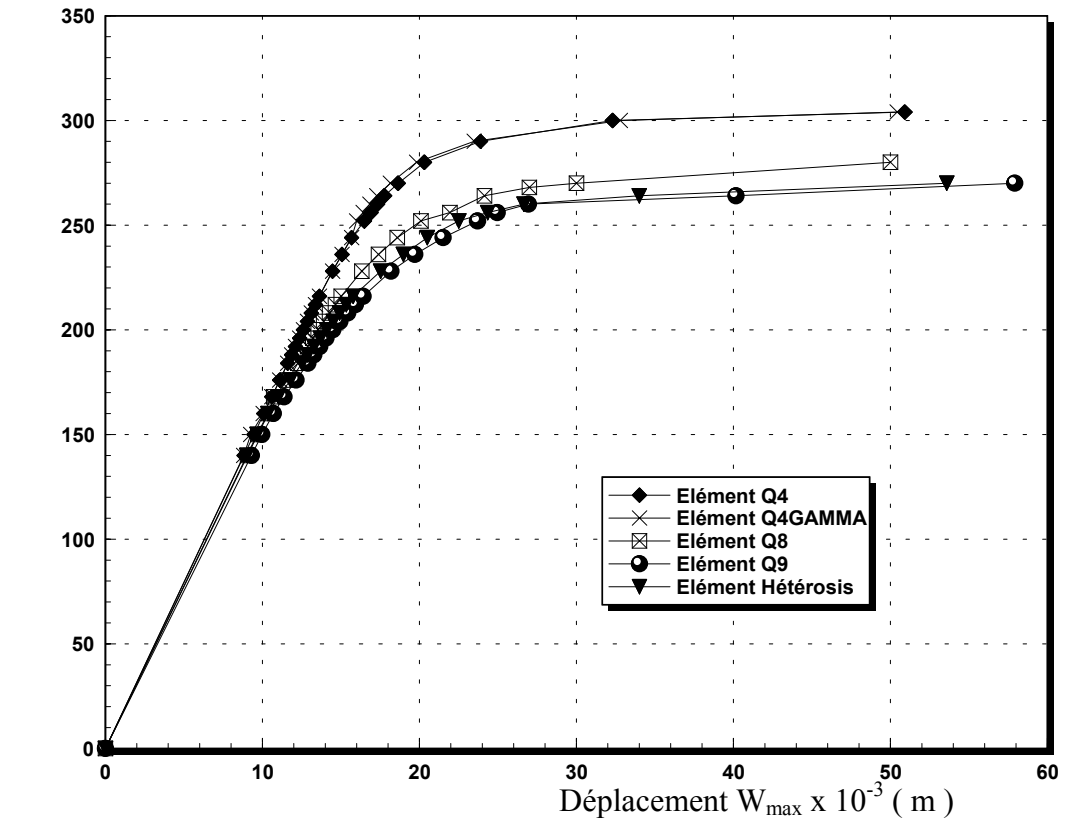


Figure (V.20) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec $h = 0.1$ et $M1 = 2 \times 2$ (Plaque encadrée)

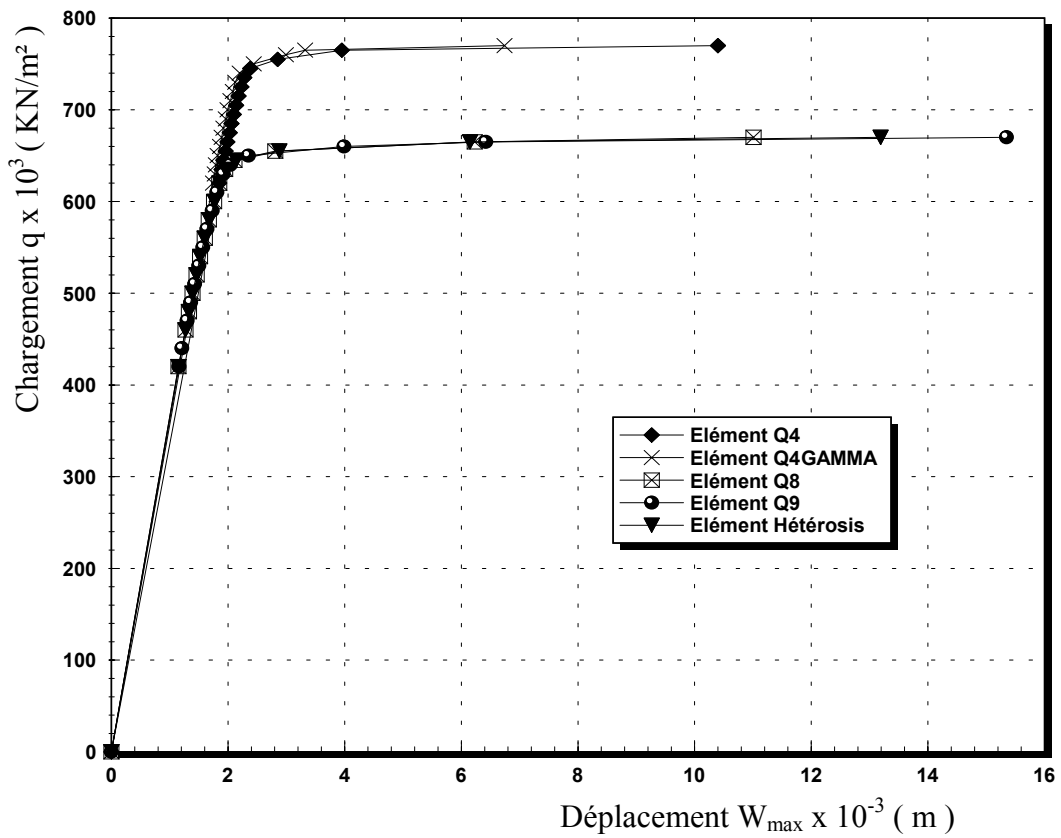


Figure (V.21) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec $h = 0.5$ et $M1 = 2 \times 2$ (Plaque encastree)

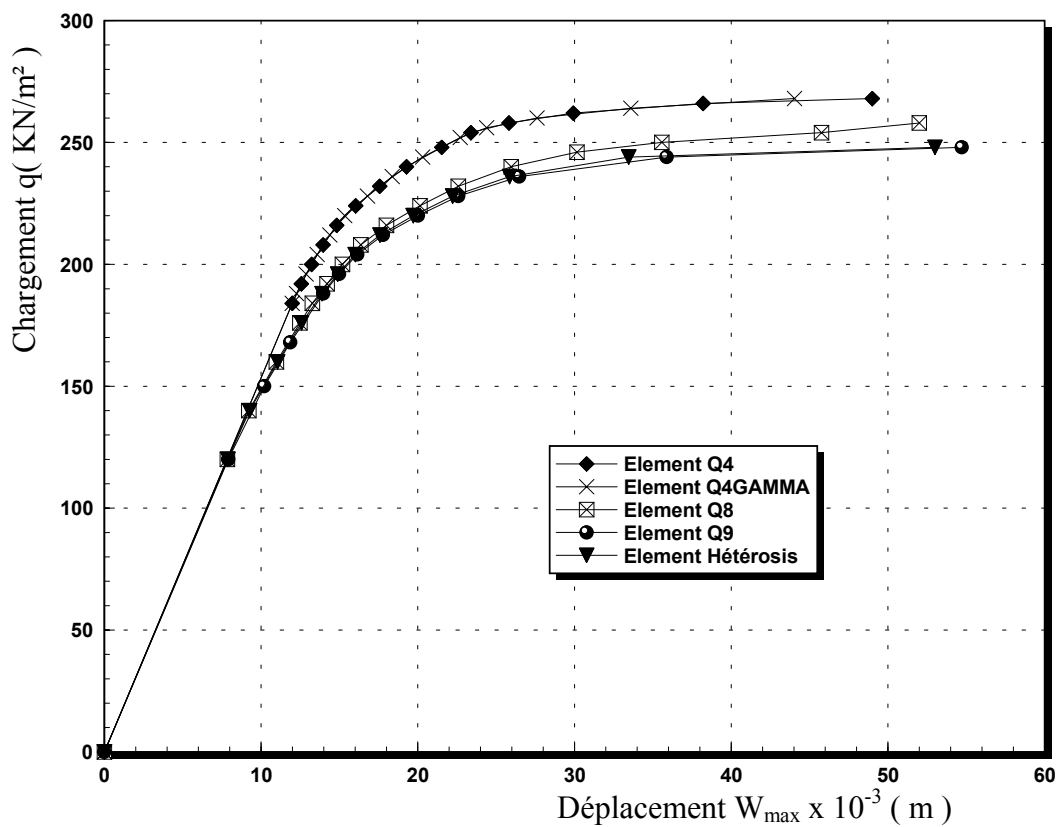


Figure (V.22) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec $h = 0.01$ et $M2 = 4 \times 4$ (Plaque encastree)

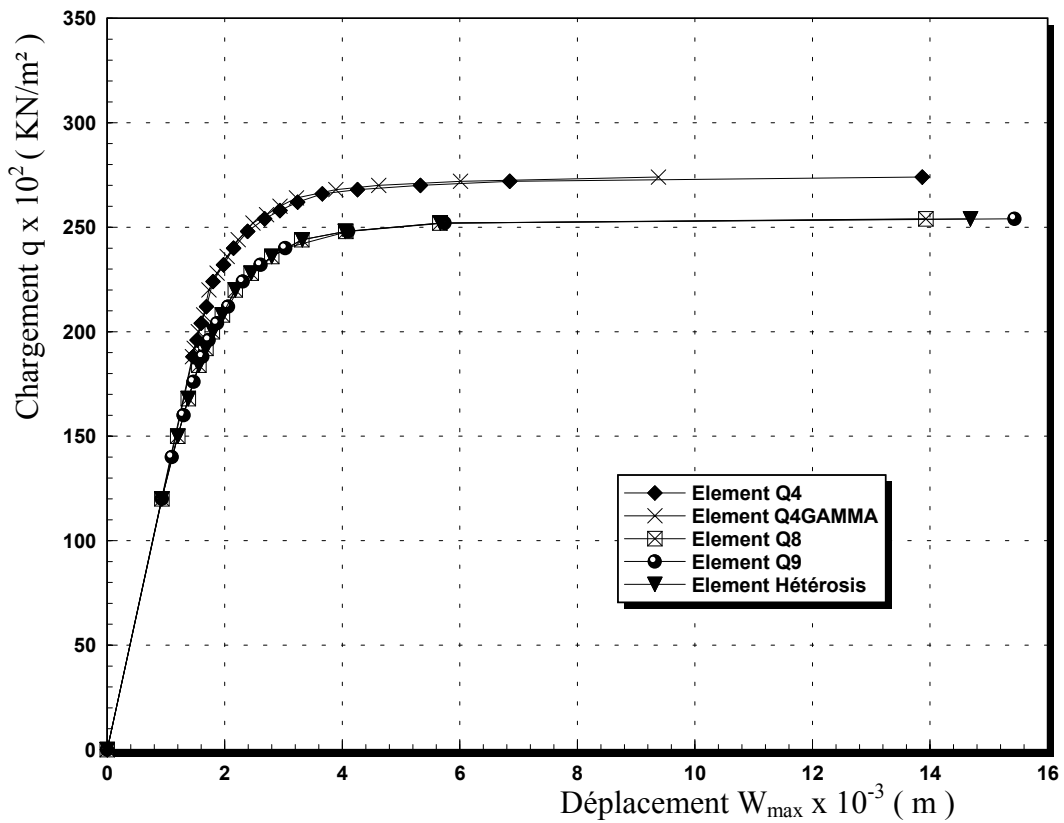


Figure (V.23) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec $h = 0.1$ et $M2 = 4 \times 4$ (Plaque encastrée)

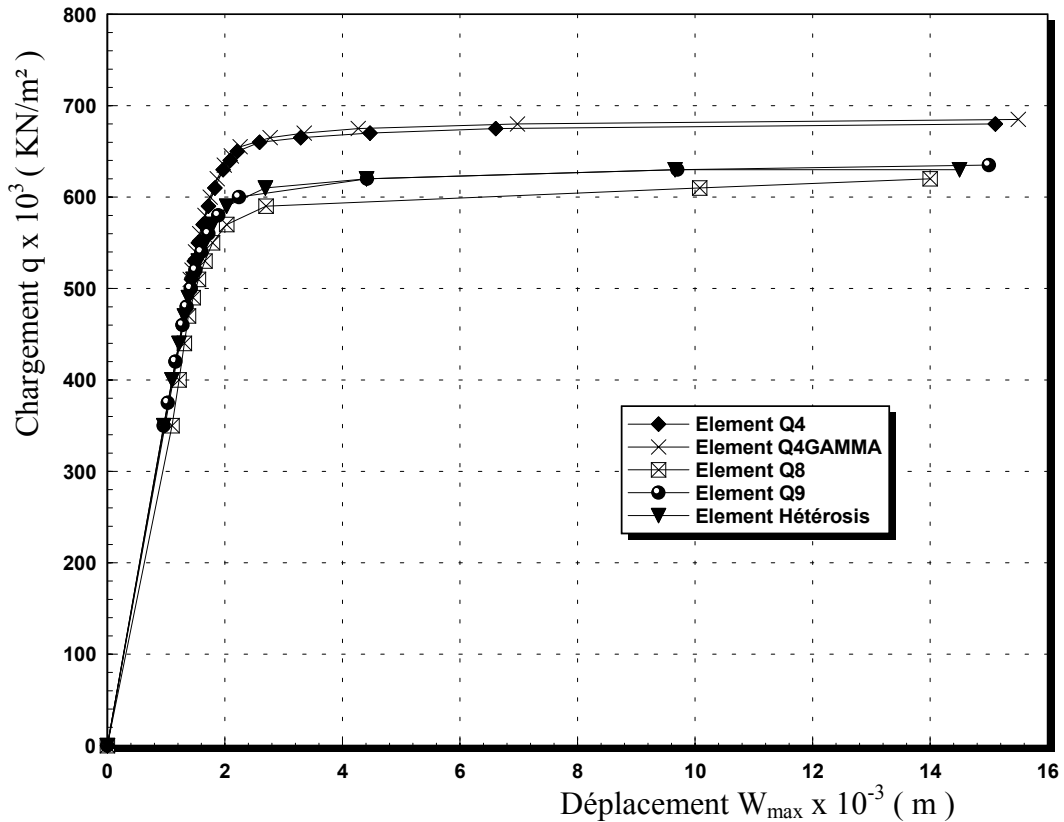


Figure (V.24) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec $h = 0.5$ et $M2 = 4 \times 4$ (Plaque encastrée)

Analyse et interprétation :

Les figures précédentes confirment encore la performance des éléments quadratiques (HT9, Q9, Q8) par rapport aux éléments linéaires (Q4, Q4 γ).

On constate le comportement décevant de l'élément Q4 γ qui peut être expliqué par le fait que la formulation élasto-plastique adoptée concerne uniquement les contraintes de flexion, les contraintes de cisaillement sont supposées élastiques.

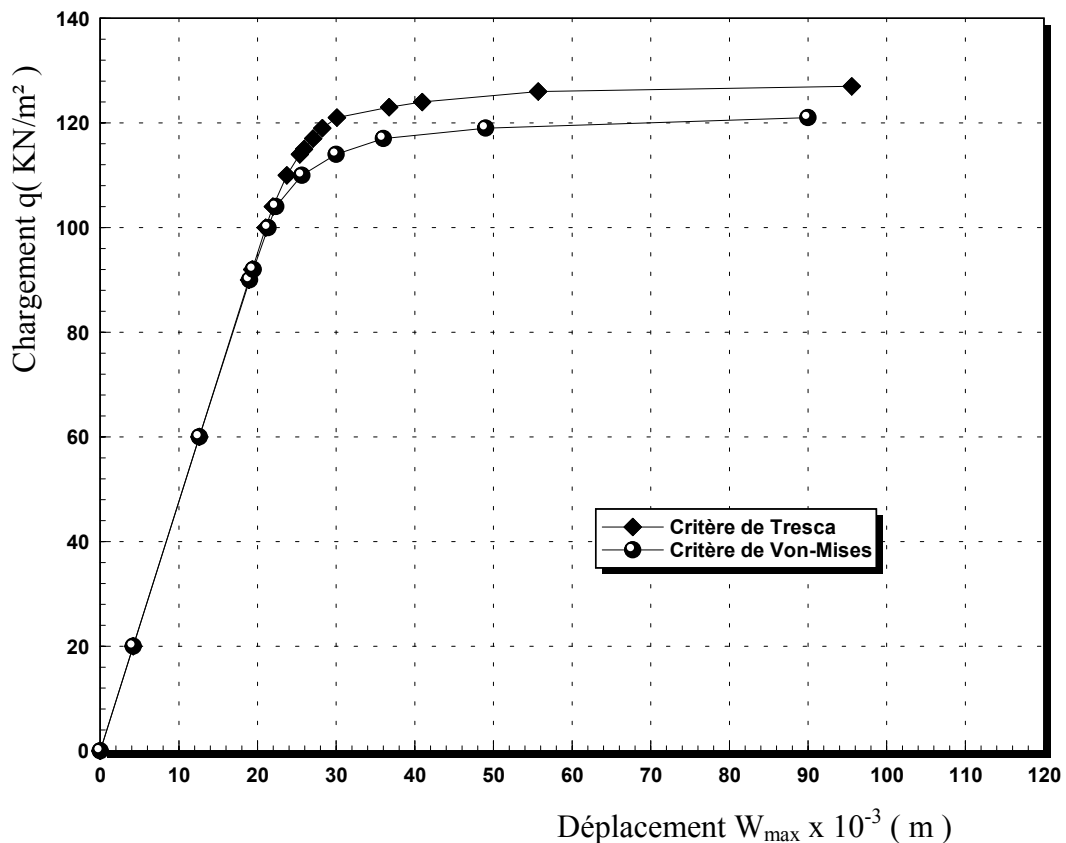
Le raffinement du maillage donne des résultats qui garantissent une convergence rapide vers la solution adéquate, par une allure semblable à celle dans l'analyse linéaire.

L'épaisseur de la plaque a une influence remarquable sur le phénomène de plastification, où la limite élastique et la charge ultime d'autant petites que l'épaisseur est faible.

V.4. Comparaison entre les critères de Von-Mises et Tresca :

V.4.1. Exemple (4.1) :

On reprend l'exemple (2.1) en utilisant la méthode de résolution de Newton Raphson modifiée et les deux critères de plasticité Von-Mises et Tresca



*Figure (V.25) : Courbe chargement- déplacement pour l'élément Hétérosis
Comparaison ente les critères de Von-mises et Tresca*

Analyse et interprétation :

La figure (V.25) montre l'influence du critère de plasticité sur la limite élastique et la charge ultime. On remarque que la plastification se déclenche d'abord pour le cas du critère de Von-Mises puis, après l'augmentation de charge, pour celui de Tresca.

Par ailleurs, pour la plupart des métaux, le critère de Von-Mises donne des résultats plus proches de l'expérimentation que celui de Tresca.

V.5. Comparaison entre les méthodes de résolution :

V.5.1. Exemple (5.1) :

On reprend l'exemple (2.1) avec trois méthodes de résolution différentes. Il s'agit de la méthode de rigidité initiale, la méthode de Newton-Raphson (rigidité tangentielle) et la méthode de Newton-Raphson modifiée.

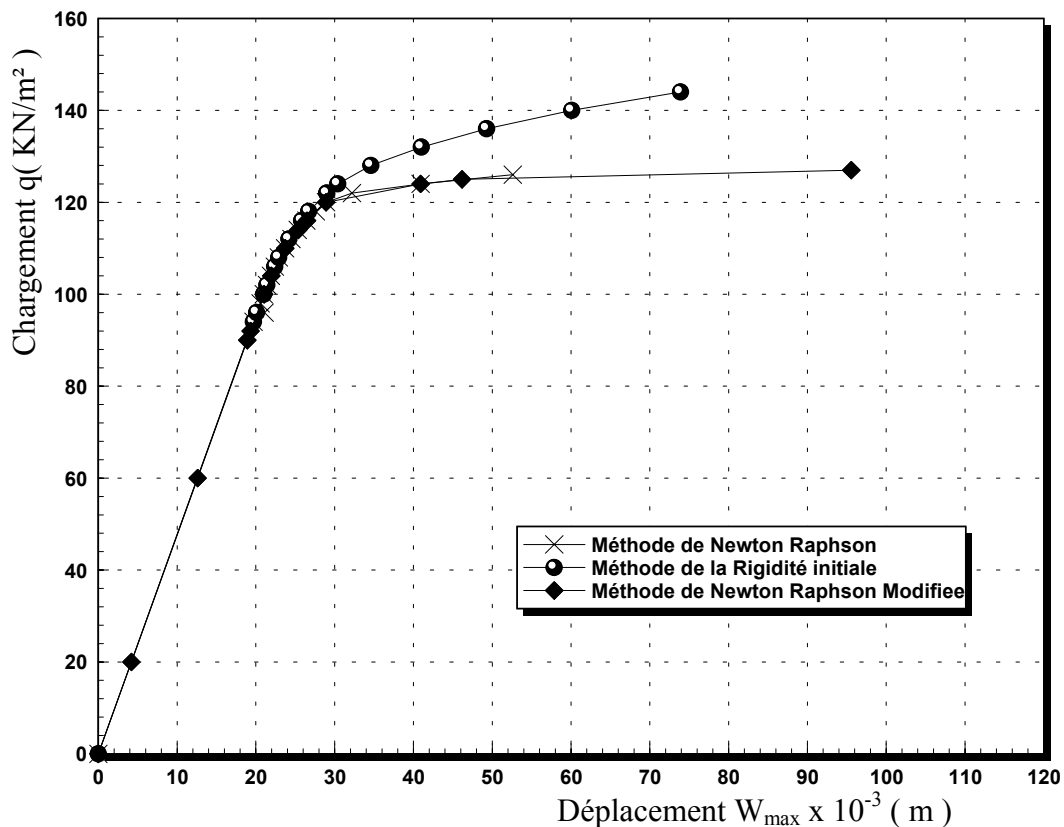


Figure (V.26) : Courbe chargement-déplacement de l'élément Hétérosis avec des différentes méthodes de résolution (critère de Von-Mises) (plaque carrée simplement appuyée)

Analyse et interprétation :

La figure (V.26) donne le déplacement du nœud central en fonction du chargement avec différentes méthodes de résolution de système non linéaire (la méthode de rigidité initiale, la méthode de Newton-Raphson et la méthode de Newton-Raphson modifiée) pour l'élément Hétérosis.

On remarque que les résultats de la méthode de rigidité tangentielle (Newton-Raphson) et de la méthode de Newton-Raphson modifiée (avec actualisation de la matrice de rigidité lors de la 2^{ème} itération) sont plus précis que ceux de la rigidité initiale puisque la courbe est légèrement plus inclinée, la plastification de la plaque plus immédiate.

Toutefois, dans les deux méthodes de Newton-Raphson (rigidité tangentielle et modifiée) il faut à chaque incrément et à chaque itération recalculer la matrice de rigidité (l'actualiser) alors que pour la rigidité initiale la matrice de rigidité reste invariable durant l'incrément ceci permis d'éviter les coûteuses actualisations de [K].