

Modélisation du Remplissage

III.1. INTRODUCTION :

La modélisation de l'injection des polymères thermoplastique au niveau des trois phases est un axe de recherche récent par rapport aux autres procédés de mise en forme des métaux.

De part leurs difficultés intrinsèques, les travaux scientifiques sur les phases de remplissage ont longtemps gardés un caractère de pionnier.

Plusieurs schémas de modélisation des phases de remplissage ont initialement été développés, les premiers travaux théoriques ont été effectués il y a une trentaine d'années, ils sont dans des géométries simples.

Des auteurs supposent généralement que le polymère a un comportement de type, « loi puissance » et ils résolvent à chaque pas de temps et de façon couplée une équation d'équilibre dynamique stationnaire et une équation de bilan thermique instationnaire comme WINTER, GUTFINGER et BROYER, WHITE, KAMAL. [17]

Devant les dernières années, la modélisation de la phase de remplissage contenir d'une façon bien organisée et bien perfectionnée.

En 2000, RONG-YOU CHANG et WEN-HSIEN YONG (National Tsing-Hua University, HSIN-chu TAIWAN 30043-ROC). Ont étudié la phase de remplissage d'une pièce avec la méthode de taux de présence et résolution numérique par la méthode du volume fini [15].

En 2001, l'étude faite par DAVID Garcia, GUY Gourbebaïsse et MICEL Jourlin [16]. Ont étudié la phase de remplissage d'une plaque suivant les équations de conservations.

Une étude faite par le professeur AGASSANT [23], c'est une étude très approfondie pour la modélisation de la phase de remplissage, étude d'un cas de moule de disque injection par centre, par la méthode de mise à plat.

Dans notre pays au niveau de la recherche scientifique, cette recherche est nouvelle elle n'est pas encore répandue, et il y a quelques études concernant cette modélisation qui ont été faites par *DJOUDI* tarek et *DJEMIA* hocine [12] juin 2001, et dans ce travail, il a étudié les paramètres thermiques et mécaniques par la méthode numérique (Méthode des Différences finies, Explicite).

En 2002, une étude faite par *DJELLAB* mounir et *HELLEL* yazid [18]. Il ont fait une étude sur pièce par la méthode numérique (Méthode des Différences Finies, Méthode de Résolution Explicite).

III.1.1. Spécificités de la phase de remplissage :

La phase de remplissage de la pièce est la phase dynamique de transfert de matière dans le moule.

Il y a progression du front de matière, dont il faut déterminer à chaque instant la position.

Le temps de remplissage est court, de l'ordre de quelques secondes, et donc les débits d'injection sont élevés, de l'ordre de 100 à 1 000 cm³/s. En combinaison avec la forte viscosité des polymères, la dissipation d'énergie est donc importante, et la température de la matière peut augmenter localement malgré le refroidissement du moule. De plus les pressions sont importantes, de l'ordre de plusieurs dizaines de mégapascals.

Les polymères étant peu conducteurs de la chaleur, la température à cœur est proche de la température d'injection, tandis qu'à la paroi elle est proche de la température du moule. La viscosité des polymères dépendant fortement de la température, il faut évaluer avec précision les gradients thermiques, et coupler étroitement les calculs mécaniques et thermiques.

III.1.2.Principales hypothèses :

Le polymère est supposé avoir un comportement purement visqueux. En effet, on peut négliger la composante élastique du comportement si les déformations de cisaillement sont prépondérantes. C'est le cas de nombreuses pièces dont l'épaisseur est assez régulière. Cependant, il existe toujours des régions, souvent localisées, comme les seuils, où les déformations élongationnelles sont non négligeables, et où l'approximation purement visqueuse n'est plus licite.

Les données de viscosité sont disponibles pour différents taux de cisaillement et différentes températures, mais il faut les interpoler, et surtout les extrapoler en dehors du domaine de mesure (forts taux de cisaillement). Le plus simple est d'utiliser un lissage en «loi puissance», mais il est préférable d'employer une loi permettant de rendre compte d'un plateau newtonien à bas taux de cisaillement, comme la loi de Carreau ou de Carreau-Yasuda.

La viscosité est supposée indépendante de la pression, mais ceci peut être contestable pour les grandes pièces ou pour des polymères très visqueux.

Les forces de masse et d'inertie sont le plus souvent négligées. Il est à noter que ces dernières pourront jouer un rôle dans certaines situations où l'accélération est importante, par exemple dans un seuil de petite section.

On peut supposer le polymère incompressible. Cela est réaliste dans de nombreuses circonstances, car les niveaux de pression atteints pendant le remplissage ne sont pas trop élevés. Cela devient moins vrai vers la fin de cette phase et à la transition avec la phase de compactage. De plus, on néglige également la variation de masse volumique avec la température.

La conduction de chaleur dans le sens de l'écoulement est négligée devant la convection, ce qui est justifié par la faible conductivité thermique des polymères.

En première approximation, nous considérerons que la conductivité thermique du polymère est indépendante de la pression et de la température.

III.2. MODELISATION DE LA PHASE DU REMPLISSAGE : [18]

III.2.1. Plastification :

La modélisation de la phase de remplissage doit donner l'état de la matière au cours et à la fin du remplissage.

- **Paramètres d'entrée de la modélisation:**

- La géométrie
- Conditions d'injection (température d'injection, le temps de remplissage ou le débit).
- Caractéristiques de la matière.
- Conditions de refroidissement.

- **Paramètres de sortie de la modélisation:**

- Pression.
- Vitesse.
- Taux de cisaillement.
- Position du front à un instant donné.
- Température.

III.2.2 Formulations Mathématiques :

Le modèle simulant le remplissage s'appuie sur trois principes de la physique des milieux continus :

- La conservation de la masse qui se traduit par l'équation de continuité:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}[\rho \cdot v] = 0$$

- La conservation de la quantité de mouvement qui se traduit par l'équation de l'équilibre dynamique:

$$\text{div}[\sigma] + \rho(\vec{F} - \vec{g}) = 0$$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 \sum_{i,j} \dot{\epsilon}_{ij}^2}$$

σ (Pa) : tenseur des contraintes.

u (m/s) : vecteur vitesse.

η (Pa.s) : viscosité dynamique.

T (°C) : température.

ρ (kg/m³) : masse volumique.

\vec{F} : force d'inertie.

\vec{g} : force de masse.

$\dot{\varepsilon}_{ij}$ (s^{-1}) : composantes du tenseur des vitesses de déformation.

$\dot{\gamma}$ (s^{-1}) : vitesse de déformation généralisée .

- La conservation de l'énergie qui se traduit par l'équation de la chaleur:

$$\rho \cdot c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \text{grad} T \right) = K \Delta T + \dot{W}$$

$$\dot{W} = \sum \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$$

c ($J \cdot ^\circ C^{-1} \cdot kg^{-1}$) : capacité calorifique.

t (s) : temps.

K ($W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$) : conductivité thermique.

\dot{W} ($W \cdot m^{-3}$) : puissance dissipée par unité de volume.

A ces équations de conservation peut s'ajouter l'équation du comportement du fluide qui s'écrit :

$$\sigma = -pI + 2\eta(T, \dot{\gamma})\dot{\varepsilon}$$

p (Pa) : pression hydrostatique.

I : tenseur identité.

La modélisation du remplissage consiste à résoudre numériquement les quatre équations précédentes en tenant compte des hypothèses indiquées auparavant. Ainsi cette résolution doit comporter deux parties de calcul :

- **La première partie** : Calcul Mécanique

Cette partie consiste à résoudre les équations de continuité et l'équation de l'équilibre dynamique pour les différents modèles de viscosité (Newtonien, Pseudo-Plastique et Pseudo-Plastique Thermo-Dépendant). Pour déterminer les paramètres mécaniques en tout point de la pièce et à chaque instant (Pression, Vitesse, Taux de cisaillement ...).

- **La deuxième partie** : Calcul Thermique

Dans cette partie, on doit étudier l'échange thermique entre la matière qui coule et le moule froid et pour ce la on utilise plusieurs méthodes numériques du calcul pour résoudre l'équation de la chaleur (La Méthode des Différences Finies et La Méthode des Volumes Finis). Avec les différents types de schémas (Explicite, Implicite, Crank-Nicholson).

Chaque méthode de calcul numérique donne la température à chaque instant au cours du l'écoulement de la matière suivant l'équation de la conservation de l'énergie .

La modélisation de remplissage se fait avec le couplage des deux parties autrement dit les calculs Mécaniques et les calculs Thermiques sont couplés par le biais de la dépendance de la viscosité avec la température.

La méthode utilisée dans cette étude est la méthode de mise à plat. La pièce considérée étant décomposée en éléments de géométrie simple (plaque, secteur et canal) puis ils seraient assemblés suivant un réseau décrivant l'écoulement dans le moule.

Ainsi nous sommes amenés à modéliser le remplissage dans les différents éléments simples.

III.3. MODELISATION DE L'ÉCOULEMENT DANS UN MOULE PLAQUE : [18]

Cette situation d'écoulement est fréquemment rencontrée lorsque l'on injecte en moule nous allons d'abord considérer un écoulement en condition isotherme et non isotherme. Et pour cela, on va étudier les trois modèles de viscosité.

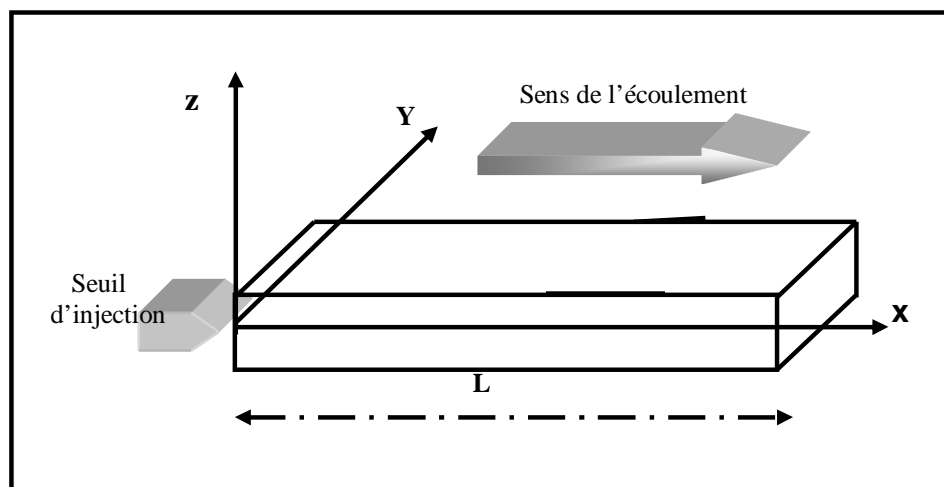


Fig.III.2. Schéma du moule en forme de plaque

Au temps $t=0$, nous supposons que le polymère entre à débit constant dans le moule.

En dehors du voisinage du point d'injection, on pourra supposer que l'écoulement est unidirectionnel (Figure.III.2) .

$$U = \begin{cases} u(x, y, z); \\ v = 0; \\ w = 0; \end{cases}$$

III.3.1.MODELE NEWTONIEN :

Dans ce cas η : constant.

III.3.1.1.Le champ de vitesse[11] :

III.3.1.2.Tenseur de vitesse de déformation :

$$[\dot{\varepsilon}] = \frac{1}{2} \times (\text{grad}\vec{U} + \text{grad}'\vec{U})$$

$[\text{grad}\vec{U}]$: le gradient de \vec{U} . $[\text{grad}'\vec{U}]$: le gradient transposé de \vec{U} .

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Puisque $v=0$ et $w=0$

$$[\dot{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & \frac{1}{2} \times \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \times \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\text{Trace}[\dot{\varepsilon}] = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \text{ Ce qui nous donne } u = A(z) ;$$

III.3.1.3. Le déviateur de contrainte :

$$[S] = 2 \eta [\varepsilon] ;$$

$$[S] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ \eta \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III.3.1.4. Le tenseur de contrainte :

$$[\sigma] = -P[I] + [S]$$

P : pression hydrostatique .

[I] :matrice identité.

Si nous adoptons une loi de comportement newtonienne, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} -P & 0 & \eta \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} \\ 0 & -P & 0 \\ \eta \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} & 0 & -P \end{pmatrix}$$

Les équations de l'équilibre dynamique nous conduisent à :

$$\vec{f} + div[\sigma] = 0 .$$

f : forces volumiques.(négligeables devant les forces de viscosité)

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \times \frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2} = 0; \end{array} \right. \quad \text{(III.5)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial P}{\partial y} = 0; \end{array} \right. \quad \text{(III.6)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial P}{\partial z} = 0; \end{array} \right. \quad \text{(III.7)}$$

L'équation (III.6), (III.7) montre que la pression ne dépendant que de x

L'équation (III.5) donne :

$$\frac{1}{\eta} \times \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 A(z)}{\partial^2 z} = C \quad (\text{III.8})$$

C : est une constante

En remarquant que les deux membres de l'équation (III.8) ne peuvent être égaux l'un à l'autre que s'ils sont indépendants de x et de z et égaux à une constante C, on peut déduire de (III.8) la fonction A(z)

IV.3.1.5. Calcul du champ des vitesses dans le moule :

Pour déterminer le champ du vitesse dans le moule on intègre l'équation (III.8) :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\eta} \times \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) z + c_1$$

le cisaillement est maximale au milieu de la plaque

$$z=0 \Rightarrow \dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow c_1=0.$$

En intégrant encore par rapport à (z) on trouve

$$u(z) = \frac{1}{2\eta} \times \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) z^2 + c_2; \quad (\text{III.9})$$

Il est a note que pour cet écoulement simple le gradient de pression, $\frac{\partial P}{\partial x}$ est traité en tant que constante par rapport à z. Le constante c_2 doivent être déterminée à partir des conditions de frontière. Si le fluide visqueux s'écoule entre deux plaques fixes ;la vitesse au contact de plaque est nulle à cause de la condition de non glissement ; donc $u=0$ pour $z = \pm h$.

$$c_2 = -\frac{C \times h^2}{2}$$

Ainsi, la distribution de vitesse devient :

$$u(z) = \frac{C}{2} \times (z^2 - h^2) \quad (\text{III.10})$$

Nous supposons que le débit est connu et constant, tout au long du cycle d'injection (en réalité, sur les presses à injecter modernes, on peut faire varier de façon discrète le débit pendant le remplissage, afin, en particulier, de conserver une vitesse du front de matière constante, quelle que soit la section de passage rencontrée).

- Le débit est connu et constant

$$Q = \int_{-h}^h u(z) \times w \times dz \quad \text{ou} \quad Q = \frac{-2 \times C \times h^3 \times w}{3} \quad (\text{III.11})$$

En écrivant l'expression du débit Q, qui est une donnée dans la phase de remplissage, et que l'on supposera constant, on peut calculer la valeur de C :

$$C = -\frac{3 \times Q}{2 \times h^3 \times w}$$

- Le champ des vitesses sera :

$$u(z) = \frac{3Q}{4hw} \times \left(1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$$

La vitesse moyenne :
$$u_m = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{w \times 2h}$$

- L'évolution de la pression dans le moule:

Le premier membre de l'équation (III.6) conduit à :

$$P(x) = \frac{3 \times Q \times \eta \times (L - x)}{2 \times h^3 \times w}$$

En tenant compte de la condition aux limites , la pression est nulle au front de la matière correspondant à $x=L$, ou L est le longueur du front de matière à l'instant t.

$$P(L) = 0 ;$$

La pression d'injection correspond à $x = 0$:

$$P_{inj} = \frac{3 \times Q \times \eta \times L}{2 \times h^3 \times w} \quad (\text{III.12})$$

- Le temps du passage du front en un point :

A une distance x du seuil correspond un volume V_t de matière présente dans le moule; le temps d'arrivé de front à cette position s'écrit :

$$t = \frac{V_t}{Q} = \frac{2.h.x.w}{Q}$$

avec :

$$V_t = 2.h.x.w$$

Le temps de remplissage s'écrit en particulier

$$t_r = \frac{2 \times h \times L \times w}{Q}$$

III.3.2.MODELE PSEUDO-PLASTIQUE :

Dans ce cas $\eta = k|\dot{\gamma}|^{m-1}$

On effectue le même type d'hypothèse cinématique que dans le cas Newtonien:

III.3.2.1.Le tenseur des contraintes

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} -P & 0 & k|\dot{\gamma}|^{m-1} \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} \\ 0 & -P & 0 \\ k|\dot{\gamma}|^{m-1} \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} & 0 & -P \end{pmatrix}$$

Avec:

Le taux de cisaillement généralisé est alors définit par :

$$\dot{\gamma} = \frac{dA}{dz}$$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 \times \sum_{i,j} \dot{\epsilon}_{i,j}^2}$$

L'équation (III.5) devient comme suite :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + k \times \frac{d}{dz} \left(\frac{dA(z)}{dz} \right)^m = 0$$

$$\frac{1}{k} \frac{dP}{dx} = \frac{d}{dz} \left(\frac{dA}{dz} \right)^m = C \tag{III.13}$$

III.3.2.2. Calcul du champs de vitesse dans le moule :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^m = C \times z + c_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (C \times z + c_1)^{\frac{1}{m}}$$

Les conditions aux limites $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$; lorsque $z = 0$ le cisaillement est maximale au milieu de la plaque => $c_1 = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (C \times z)^{\frac{1}{m}}$$

$$u(z) = \frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times z^{\frac{1+m}{m}} + c_2;$$

$$c_2 = -\frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times h^{\frac{1+m}{m}};$$

$$u(z) = -\frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times \left(1 - \left(\frac{|z|}{h} \right)^{\frac{1+m}{m}} \right) \times h^{\frac{1+m}{m}} \tag{III.14}$$

Le débit est calcule par la formule :

$$Q = 2 \times \int_0^h u(z) \times w \times dz; \tag{III.15}$$

$$Q = 2 \times \int_0^h -\frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times \left(1 - \left(\frac{|z|}{h} \right)^{\frac{1+m}{m}} \right) \times h^{\frac{1+m}{m}} \times w \times dz;$$

$$Q = 2 \times \int_0^h -\frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times \left(h^{\frac{1+m}{m}} - (|z|)^{\frac{1+m}{m}} \right) \times w \times dz$$

$$Q = -2 \times \frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times \left(h^{\frac{1+m}{m}} \times z - \frac{1}{\frac{1+m}{m} + 1} (|z|)^{\frac{1+m}{m} + 1} \right) \times w \Big|_0^h$$

$$Q = -2 \times \frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times \left(h^{\frac{1+m}{m}} \times h - \frac{m}{1+2m} (h)^{\frac{1+m}{m} + 1} \right) \times w$$

$$Q = -2 \times \frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times \left(h^{\frac{1+2m}{m}} - \frac{m}{1+2m} (h)^{\frac{1+m}{m} + 1} \right) \times w$$

$$Q = -2 \times \frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times \left(1 - \frac{m}{1+2m} \right) \times h^{\frac{1+2m}{m}} \times w$$

$$Q = -2 \times \frac{m}{1+m} \times c_m^{\frac{1}{m}} \times \left(\frac{m+1}{1+2m} \right) \times h^{\frac{1+2m}{m}} \times w$$

La forme générale de débit volumique s'écrit par :

$$Q = -2 \times \frac{m}{1+2m} \times c_m^{\frac{1}{m}} \times h^{\frac{1+2m}{m}} \times w \quad (\text{III.16})$$

La vitesse moyenne :

$$u_m = \frac{Q}{h \times w} ;$$

$$u_m = -2 \times \frac{m}{1+2m} \times c_m^{\frac{1}{m}} \times h^{\frac{1+m}{m}} ; \quad (\text{III.17})$$

On tenant compte que le débit est constant, L'expression du champ des vitesses s'écrit :

$$u(z) = \frac{2m+1}{1+m} \times u_m \times \left(1 - \left(\frac{|z|}{h} \right)^{\frac{1+m}{m}} \right) \times h^{\frac{1+m}{m}} \quad (\text{III.18})$$

III.3.2.3. Calcul de l'évolution de la pression dans le moule :

L'intégration du premier membre de l'équation (III.13) conduit dans ce cas à l'expression suivante de la pression dans le moule:

$$P(x) = C \times k \times (L - x)$$

avec

$$C = \sqrt[m]{\frac{(2m+1) \times Q}{2m \times h^{\frac{1+2m}{m}} \times w}}$$

L'expression de pression devient :

$$P(x) = \sqrt[m]{\frac{(2m+1) \times Q}{2m \times h^{\frac{1+2m}{m}} \times w}} \times k \times (L - x) \quad (\text{III.19})$$

$$P_{inj} = \sqrt[m]{\frac{(2m+1) \times Q}{2m \times h^{\frac{1+2m}{m}} \times w}} \times k \times L \quad (\text{III.20})$$

III.3.3. MODELE PSEUDO-PLASTIQUE THERMO-DEPENDANT:

Le modèle pseudo-plastique thermo-dépendant tient compte de la variation de la viscosité en fonction de la température ainsi que du taux de cisaillement

Pour exprimer cette dépendance on considère que la consistance k dépend de la température:

$$\eta(\dot{\gamma}) = k(T) |\dot{\gamma}|^{m-1} \quad (\text{III.21})$$

La consistance du liquide k peut être donnée par différentes méthodes. $k = k(T)$

III.3.3.1 Le tenseur des contraintes

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} -P & 0 & k(T) |\dot{\gamma}|^{m-1} \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} \\ 0 & -P & 0 \\ k(T) |\dot{\gamma}|^{m-1} \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} & 0 & -P \end{pmatrix}$$

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} -P & 0 & k(T) \left| \frac{\partial A(z)}{\partial z} \right|^{m-1} \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} \\ 0 & -P & 0 \\ k(T) \left| \frac{\partial A(z)}{\partial z} \right|^{m-1} \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} & 0 & -P \end{pmatrix}$$

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} -P & 0 & k(T) \times \left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} \right)^m \\ 0 & -P & 0 \\ k(T) \times \left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} \right)^m & 0 & -P \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} (k(T) \times \left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} \right)^m) = 0; \end{cases} \quad \text{(III.22)}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial y} = 0; \end{cases} \quad \text{(III.23)}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{(III.24)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} (k(T) \times \left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} \right)^m) = C;$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k(T) \times \left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} \right)^m \right) = C$$

$$\partial (k(T) \times \left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} \right)^m) = C \times \partial z$$

$$k(T) \times \left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} \right)^m = C \times z$$

$$\left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} \right) = \left(\frac{C \times z}{k(T)} \right)^{\frac{1}{m}};$$

La température dépendante de z et k=k(T) on obtient k=k(z).

on a : A(z) =u(z)

$$u(z) = C^{\frac{1}{m}} \times \int_z^h \left(\frac{z}{k(z)} \right)^{\frac{1}{m}} \times \partial z$$

Le débit est constant

$$Q = 2 \times \int_0^h u(z) \times w \times dz;$$

$$Q = 2 \times \int_0^h \left(C^{\frac{1}{m}} \times \int_z^h \left(\frac{z}{k(z)} \right)^{\frac{1}{m}} \times \partial z \right) \times w \times \partial z$$

$$Q = 2 \times C^{\frac{1}{m}} \times w \times \int_0^h \left(\int_z^h \left(\frac{z}{k(z)} \right)^{\frac{1}{m}} \times \partial z \right) \times \partial z$$

$$Q = 2 \times C^{\frac{1}{m}} \times w \times \int_z^{\frac{1}{m}+1} \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} \times \partial z$$

$$C^{\frac{1}{m}} = \frac{Q}{2 \times w \times \int_0^h \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} \partial z}$$

$$u(z) = \frac{Q}{2 \times w \times \int_0^h \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} \partial z} \times \int_z^h \left(\frac{z}{k(z)} \right)^{\frac{1}{m}} \times \partial z \tag{III.25}$$

III.3.3.2. Calcul de l'évolution de la pression dans le moule [2]:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = C ;$$

$$C = \left(\frac{Q}{2 \times \int_0^h \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} \partial z} \right)^m ;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{Q}{2 \times \int_0^h \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} \partial z} \right)^m ;$$

$$P(x) = \left(\frac{Q}{2 \times \int_0^h \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} \partial z} \right)^m (L-x)$$

$$P(x) = \left(\frac{Q}{2 \times \int_0^h \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} \partial z} \right)^m (L-x) \quad (\text{III.26})$$

Pression d'injection :

$$P_{inj} = \left(\frac{Q}{2 \times \int_0^h \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} \partial z} \right)^m L \quad (\text{III.27})$$

Par la suite de la même méthode de calcul d'auparavant, on obtient la forme des équations de calcul mécanique (Pression et Pression d'injection, Vitesse..) pour les autres formes géométriques élémentaires (Canal et secteur).

Le tableau ci-dessous présente les équations de calcul mécanique pour chaque élément (Canal, Plaque et Secteur).

Avec :

$$DEH = \int_0^R \frac{r^{\frac{2m+1}{m}}}{2k(z)^{\frac{1}{m}}} dr$$

$$F = \frac{-Q}{2\alpha \int_0^h \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} dz} \frac{1}{1-m}$$

V : la vitesse moyenne

$$V = -\frac{1}{8} \frac{\Delta P}{\eta L} R^2$$

$$V^* = \frac{m}{3m+1} \left[\frac{-\Delta P}{2kL} \right]^{\frac{1}{m}} R^{\frac{1}{m}+1}$$