

4.1 Introduction

Ce chapitre porte sur la description en 1D d'un nouveau schéma numérique de résolution des équations aux dérivées partielles, *la méthode de pas de temps variable*. Cette description est grandement inspirée du mémoire de maîtrise d'Ozisk [18] où le schéma numérique est présenté en détail pour le traitement de discontinuités en 1D. La méthode est ici présentée pour le problème particulier de la résolution de l'équation de la chaleur pour des problèmes de changement de phase de condition de type de Neumann.

4.2 Cadre générale :

Considérons la figure 2.3 ; pour un problème de solidification à *une seule phase*.

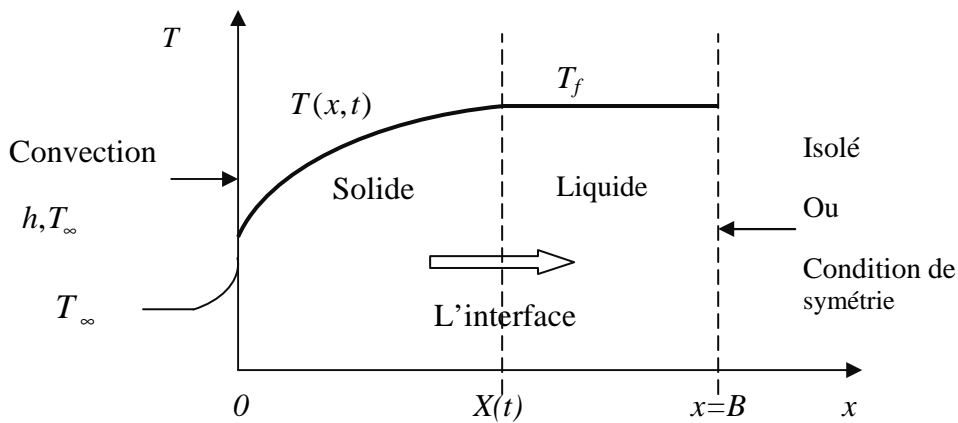


Fig. 2.3 : La géométrie pour un problème de la solidification de seule phase

La formulation mathématique pour ce problème est :

Région solide :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 \leq x \leq X(t), t > 0 \quad (4.1)$$

Condition à la limite :

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = h(T_\infty - T) \quad x=0, t > 0 \quad (4.2)$$

A l'interface :

$$T(x, t) = T_f \quad x = X(t), t > 0 \quad (4.3)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} = \rho L \frac{dX(t)}{dt} \quad x = X(t), t > 0 \quad (4.4)$$

4.3 Approximation de différences finies

L'approximation de différences finies de l'équation (4.1) à (4.4) est décrite ci-dessous.

4.3.1 Équation de chaleur (4.1): cette équation approchée avec les différences finies, nous préférons la méthode implicite et en écrive l'éq. (4.1) sous la forme :

$$\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t_n} \quad (4.5)$$

Nous sommes adoptées la notation suivante

$$T(x, t_n) = T(i\Delta x, t_n) \equiv T_i^n$$

L'équation (4.5) est réarrangée comme

$$\left[-r_n T_{i-1}^{n+1} + (1 + 2r_n) T_i^{n+1} - r_n T_{i+1}^{n+1} \right]^{(p)} = T_i^n \quad (4.6)$$

Avec l'exposant p au-dessus de la parenthèse se rapporte de p -ème itération, et le paramètre

$$r_n \text{ est définie comme } r_n = \frac{\alpha \Delta t_n}{(\Delta x)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ et } \Delta t_n = t_{n+1} - t_n$$

4.3.2 Condition à la limite à $x = 0$: condition de limite de convection l'éq. (4.2) est réarrangé

$$\frac{\partial T}{\partial x} = HT - HT_\infty \quad \text{avec } H = h/k$$

Et alors discrétisé comme: $\frac{T_1^{n+1} - T_0^{n+1}}{\Delta x} = HT_0^{n+1} - HT_\infty$

Ce résultat est réarrangé sous la forme

$$\left[T_1^{n+1} - (1 + H \Delta x T_0^{n+1}) \right]^{(p)} = -H \Delta x T_\infty \quad (4.7)$$

L'équation de différences finies (4.7) est de premier ordre de précision. Une expression d'ordre deuxième développée ou bien en utilisant un concept des nœuds fictive ou bien appliquant l'approche de volume de contrôle pour inclure la capacité de chaleur de volume de contrôle.

4.3.3 Condition de l'interface : la condition de continuité de température à l'interface, l'éq. (4.3) est écrit comme

$$T_{n+1}^{n+1} = T_f^* = \text{Température de fusion}$$

Qui est toujours valable. L'équation d'équilibre d'énergie de l'interface (4.4) est discrétisée comme :

$$\frac{T_{n+1}^{n+1} - T_n^{n+1}}{\Delta x} = \frac{\rho L}{k} \frac{\Delta x}{\Delta t_n} \quad (4.8)$$

Qui est réarrangé dans la forme :

$$\left[\Delta t_n \right]^{(p+1)} = \frac{\rho L}{k} \left[\frac{(\Delta x)^2}{T_f^* - T_n^{n+1}} \right]^{(p)} \quad (4.9)$$

Depuis $T_{n+1}^{n+1} = T_f^* =$ La température de fusion

4.3.4 L'algorithme de détermination le Pas de Temps

Nous décrivons maintenant l'algorithme pour la détermination du pas de temps Δt_n , l'interface déplace exactement une distance Δx .

4.3.5 Le pas de temps du départ Δt_0 : Une expression explicite développée pour de calcul de premier pas de temps Δt_0 comme suit :

Donne $n = 0$ dans l'éq. (4.7) et (4.9) et éliminez T_0^1 et noter que $T_1^1 = T_f^*$.

$$\Delta t_0 = \frac{\rho L \Delta x (1 + H \Delta x)}{k H (T_f^* - T_\infty)} \quad (4.10)$$

Avec $\Delta t_0 \equiv t_1 - t_0$.

4.3.6 Pas de temps Δt_1 : nous ajoutons $i=1, n=1$ dans l'éq. (4.6) et note que $T_1^1 = T_2^2 = T_f^*$ alors l'éq. (4.6) devient

$$\left[-r_1 T_0^2 + (1 + 2r_1) T_1^2 \right]^{(p)} = (1 + r_1^{(p)}) T_f^* \quad (4.12)$$

Et la condition de limite est l'éq. (4.7) pour $n=1$ nous obtenons

$$\left[-(1 + H \Delta x) T_0^2 + T_1^2 \right]^{(p)} = -H \Delta x T_\infty \quad (4.13)$$

Pour résoudre l'équation (4.12) et (4.13) pour T_0^1 et T_1^2 , La valeur de $r_1^{(p)}$ est nécessaire, mais $r_1^{(p)}$ défini par l'éq. (4.6) dépend de $\Delta t_1^{(p)}$. Donc, la solution a besoin des itérations. Pour commencer les itérations, nous avons placé

$$\Delta t_1^{(0)} = \Delta t_0$$

Alors $r_1^{(0)}$ est déterminé à partir de l'éq. (4.6), l'éq. (4.13) est résolu pour T_0^1 et T_1^2 pour connaître T_1^2 , $\Delta t_1^{(1)}$ est calculé de l'éq. (4.9). Les itérations sont continuées jusqu'à ce que la différence entre les deux étapes consécutives de temps $|\Delta t_1^{p+1} - \Delta t_1^p|$ satisfasse de critère indiquée d'une convergence.

4.3.7 Pas de temps Δt_n : les résultats ci-dessus sont maintenant utilisés dans l'algorithme suivant pour calculer le pas de temps Δt_n chaque niveau de temps $t_n, n = 2, 3, \dots$

a) Le pas de temps Δt_n au niveau de temps $t_n, n = 2, 3, \dots$ sont calculés par itération. Une valeur de conjecture $\Delta t_n^{(0)}$ est choisie comme

$$\Delta t_n^{(0)} = \Delta t_{n-1}, n = 2, 3, \dots \quad (4.14)$$

Le système des équations de différences finis (4.5), (4.7), ainsi que la condition (4.8) sont résolus pour $i = 2, 3, \dots, n$ en mettant $p = 0$ et une première évaluation est obtenue pour les

$$\text{températures nodales } [T_i^{n+1}]^{(0)} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.15)$$

Nous notons que le système des équations est tri-diagonal, par conséquent aisément résolu.

- b) Les valeurs de $[T_i^{n+1}]^{(0)}$ obtenu à partir de l'éq. (4.15) sont introduits dans l'éq. (4.9) pour $p = 0$ et une première évaluation pour le pas de temps $\Delta t_n^{(1)}$ est déterminée.
- c) $\Delta t_n^{(1)}$ est utilisé comme valeur de conjecture et l'étape (a), (b) sont répétées pour calculer une deuxième évaluation pour l'étape de temps $\Delta t_n^{(2)}$.
- d) Les étapes (a), (b) et (c) sont répétées jusqu'à ce que la différence entre deux pas de temps consécutives $|\Delta t_n^{(p+1)} - \Delta t_n^{(p)}|$ satisfasse le critère indiqué d'une convergence.

4.3.8 Exemple de résolution :

Considérons un problème de solidification d'une seule phase pour un liquide initialement à la température de fusion T_f^* , confiné à la région $0 \leq x \leq 1$. La solidification a lieu en raison du refroidissement convectif sur la surface de frontière $x = 0$. Tandis que la surface de frontière à $x = 1$ est isolée.

On donne la formulation mathématique de ce problème sous la forme adimensionnels comme :

Région solide :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{dans } 0 < x < S(t) \quad t > 0,$$

Conditions aux limites :

$$-\frac{\partial T}{\partial x} + 10T = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad x = 1, t > 0$$

Condition de l'Interface:

$$T(x,t) = 1 \text{ à } x = S(t), t > 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dS(t)}{dt} \text{ à } x = S(t), t > 0$$

Ce problème a été résolu par Gupta et Kumar (1981) en utilisant l'approche de variable de pas de temps. Les valeurs numériques de divers paramètres apparaissant dans cette équation sont déterminées en comparant la formulation mathématique de cet exemple à cela indiquée par éqts. (4.1) à (4.4), nous trouvons :

$$T_f^* = 1, H = 10, T_\infty = 0, \alpha = 1, \frac{\rho L}{k} = 1. \text{ Et le pas d'espace est choisi comme } \Delta x = 0.1$$

4.3.9 Résultats :

Nous écrivons un programme de Matlab de notre algorithme de ce problème qui donne les résultats suivants :

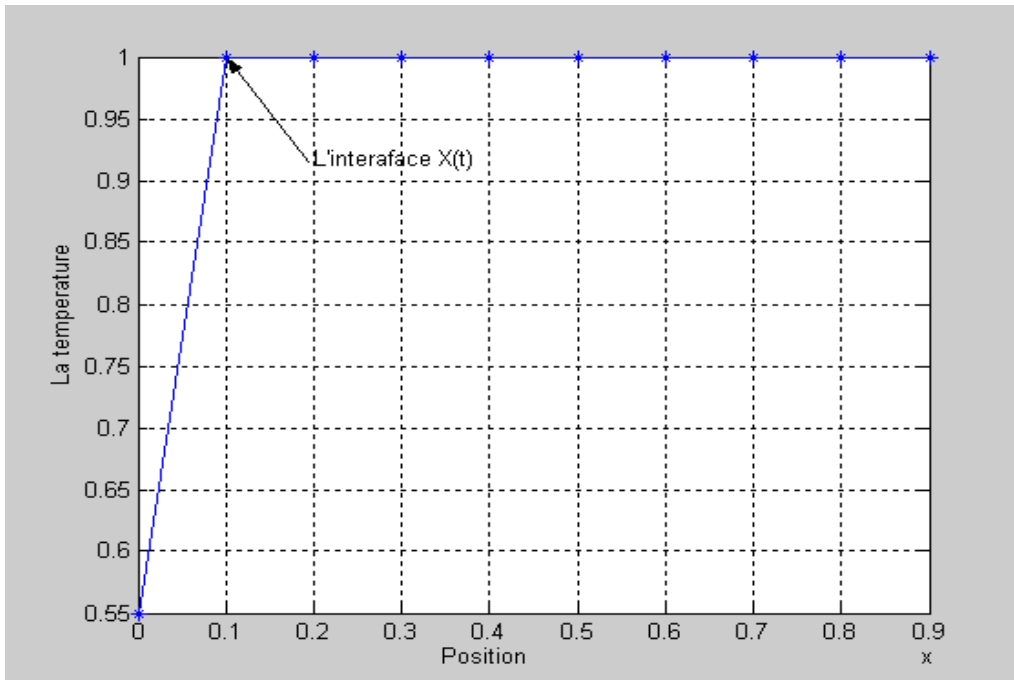


Figure 3.3 L'évolution de la température pour $X(t) = 0.1$

Par exemple, le premier pas de temps Δt_0 , l'interface mouvant de $X(t)=0$ au $X(t)=0.1$, est déterminée par l'éq. (4.10).

La solidification commence à la surface de frontière $x=0$ à cause de la convection et les mouvements de l'interface solide-liquide de $x=0$ au $x=0.5$ dans un intervalle de temps Δt_5 alors cette partie est solidifiée et l'autre partie entre $x=0.5$ et $x=1$ est liquide comme illustré dans la figure. Alors en montre dans ce simple exemple que l'interface solide-liquide et en mouvement

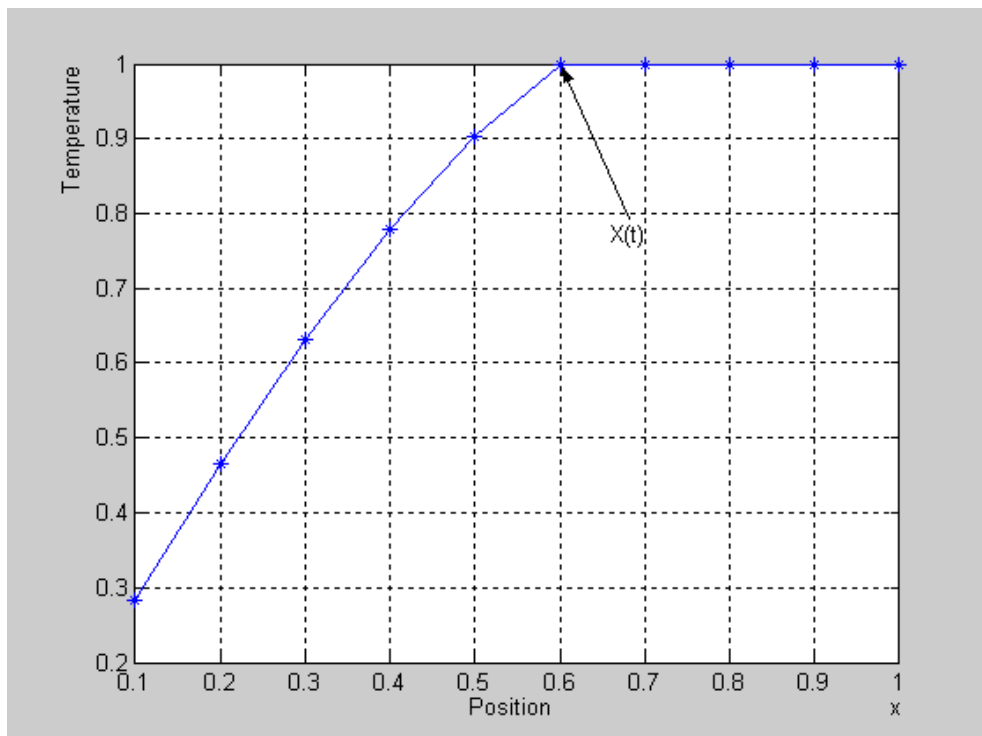


Figure 3.4 L'évolution de la température pour $X(t) = 0.5$

Et pour les autres positions d'interface $X(t)$ en introduire les résultats sur la figure suivante :

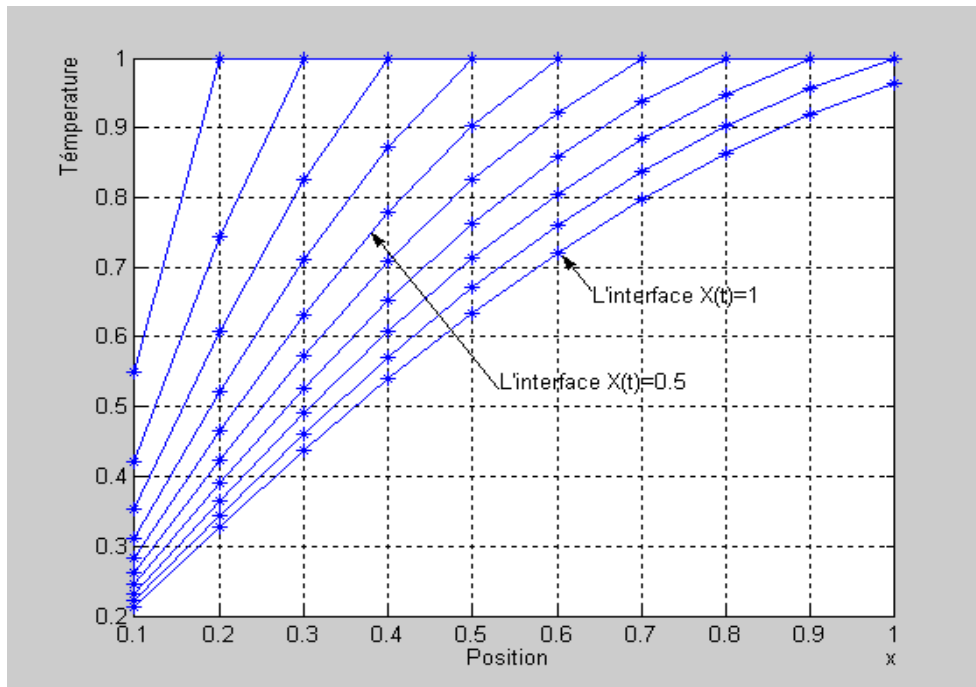


Figure 3.5 L'évolution de la température pour $X(t)$

La figure 3.6 présente l'évolution de la température au cours de temps

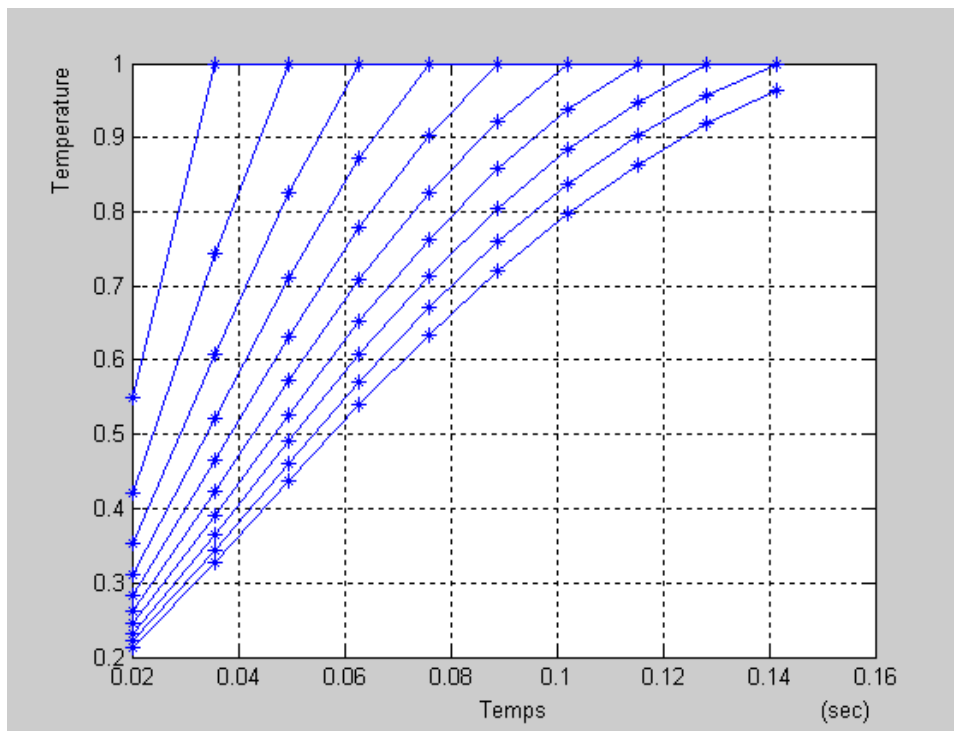


Figure 3.6 l'évolution de la température Δt_i

Pour illustré les résultats des températures en fonction de t et x en même plan

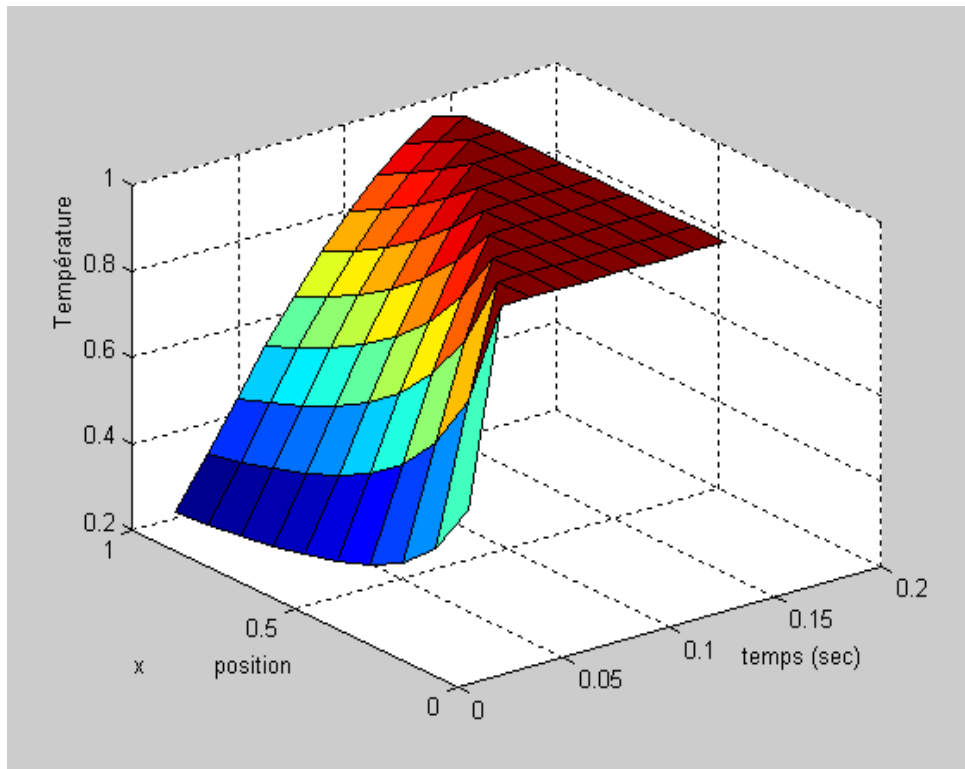


Figure 3.7 l'évolution de $T(x,t)$