

5.1 Introduction

La complexité du problème de changement de phase visé par cette étude nécessite donc l'emploi d'une méthode enthalpique. Il faut toutefois noter que les méthodes enthalpiques n'ont pas toutes acquis le même niveau de perfectionnement et de robustesse. La méthode développée par Voller et ses collaborateurs [7] a donc été choisie. Cette technique utilise un terme source approprié dans l'équation d'énergie afin de refléter l'évolution du changement de phase. Plusieurs auteurs l'ont confrontée avec succès [19,20] à des résultats expérimentaux sur le changement de phase en présence de convection naturelle et pour divers MCP (acide caprillique, cyclohexane, étain, gallium et octadécane).

5.2 Objectifs

Les objectifs visés peuvent se résumer à:

- 1) Approfondir les connaissances actuelles du phénomène de changement de phase.
- 2) Modéliser, simuler et analyser le phénomène de changement de phase.

5.3 Problématique :

Soit un métal pur (Gallium) contenue dans une enceinte rectangulaire de hauteur a et de largeur b (Fig. 5.1). Les parois verticales de l'enceinte sont maintenues à une température uniforme alors que les parois horizontales sont considérées comme étant adiabatiques. Initialement, le métal solide et les parois verticales sont à une température uniforme T_D

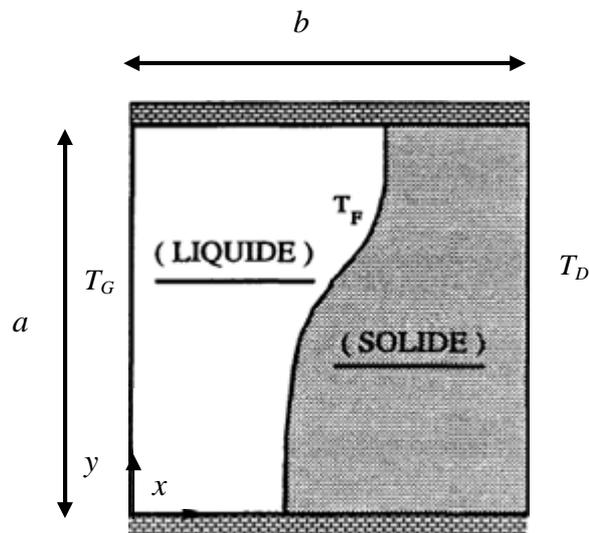


Figure 5.1 Représentation du système physique

Tel que $T_D < T_f$, T_f étant la température de fusion. Au temps $t = 0$, Le processus de fusion est initié en imposant soudainement à la paroi verticale de gauche une température T_G , où

$$T_G > T_f.$$

5.4 Hypothèses générales

Dans le présent modèle, les hypothèses suivantes sont posées:

1. Le problème est bidimensionnel et transitoire.
2. L'enceinte est parfaitement isolée.
3. La conduction dans les phases solide et liquide du MCP et dans les parois (lorsqu'elles sont présentes) est prise en compte.
4. Tout autre phénomène de transfert de chaleur (comme le rayonnement) est négligé.
5. La loi de Fourier est retenue pour décrire la conduction microscopique.
6. La dissipation visqueuse est négligée.
7. Les propriétés physiques du MCP et des parois sont constantes mais peuvent être différentes d'une phase à l'autre pour le MCP (conductivité et chaleur spécifique).

5.5 Hypothèses reliées au changement de phase

8. Une méthode enthalpique est retenue.
9. Le MCP est parfaitement pur. Il n'y a pas de bulles d'air emprisonnées dans le MCP et le changement de phase est isotherme.
10. Le MCP est homogène et isotrope.
11. Aucune parcelle de MCP solide ne se détache pour aller dans l'écoulement tant qu'elle n'est pas entièrement fondue (pas de particule en suspension).
12. Le MCP solide ne tombe jamais (immobilisé) même s'il est complètement entouré de liquide.
13. L'expansion (ou la contraction) du MCP occasionnée par sa fusion est négligée

5.6 Notes sur l'hypothèse de la constance des propriétés physiques

Il est justifié d'utiliser des propriétés constantes dans la mesure où la plage de température est relativement faible. Or, les excès de température ne sont justement pas intéressants pour les applications de dissipation de chaleur comme pour les dispositifs de stockage. Cependant, les propriétés varient parfois de façon considérable d'une phase à l'autre. C'est pourquoi le modèle permet l'usage de propriétés différentes pour chaque phase.

5.7 Notes sur l'hypothèse de l'immobilité de la phase solide

Il est clair ici que les prédictions du modèle seront erronées si cette condition n'est pas vérifiée. Il est raisonnable de supposer que le MCP solide adhère aux parois même si la partie inférieure de l'enceinte est complètement fondue. Cependant, lorsque la cavité est chauffée des deux côtés (symétrie), il est possible de retrouver des régions solides entre les sources de chaleur complètement entourées de liquide. Il demeure au moins possible de constater qu'une configuration donnée mène à ce genre de situation, bien que le modèle soit alors inapte à poursuivre le calcul correctement. Dans l'étude paramétrique, ces cas devront être traités spécialement s'ils sont intéressants eu égard aux objectifs fixés.

5.8 Formulation les équations :

Respectant les hypothèses présentées ci-dessus, exprimant l'équation de l'énergie se présentent sous forme enthalpique (*démonstration en Annexe A2*), dans un repère cartésien, comme suit:

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \Delta H \right) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \quad (5.1)$$

Condition initiale :

$$h(x, y, 0) = h_i \quad x \geq 0, y \geq 0 \quad t = 0 \quad (5.2)$$

Conditions aux limites:

$$h(0, y, t) = h_G \quad x = 0, y \geq 0 \quad t > 0 \quad (5.3)$$

$$h(x, 0, t) = h_D \quad x \geq 0, y = 0 \quad t > 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} h(x, 0, t) = 0 \quad x \geq 0, y = 0 \quad t > 0 \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} h(x, H, t) = 0 \quad x \geq 0, y = a \quad t > 0 \quad (5.6)$$

5.8.1 Variables adimensionnées :

La transformation des variables dépendantes et indépendantes des équations de conservation et de leurs conditions frontières en variables sans dimensions, c'est-à-dire en variables normalisées par rapport à certaines valeurs caractéristiques, permet de spécifier les conditions du problème à l'aide d'un nombre restreint de paramètres et facilite grandement la validation des résultats. Les variables sont adimensionnées de la façon suivante:

$$\xi = \frac{x}{a}, x = a.\xi$$

$$\eta = \frac{y}{b}, y = b.\eta$$

$$F_0 = \frac{\alpha t}{b^2}, t = \frac{b^2 F_0}{\alpha}$$

$$h^* = \frac{h}{H_f}, h = H_f . h^*$$

$$\Delta H^* = \frac{\Delta H}{H_f}, \Delta H = H_f . \Delta H^*$$

En substituant ces expressions dans l'équation d'énergie et leurs conditions initial et limites, on obtient alors :

$$\frac{\partial}{\partial F_0} h^* + \frac{\partial}{\partial F_0} \Delta H^* = d^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} h^* + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} h^* \quad (5.7)$$

Avec $d = \frac{a}{b}$

Conditions initial et aux limites :

$$h^*(\xi, \eta, 0) = h_i^* \quad \xi \geq 0, \eta \geq 0 \quad F_0 = 0$$

$$h^*(0, \eta, F_0) = h_G^* \quad \xi = 0, \eta \geq 0 \quad F_0 > 0 \quad (5.8)$$

$$h^*(\xi, 0, F_0) = h_D^* \quad \xi \geq 0, \eta = 0 \quad F_0 > 0 \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} h^*(\xi, 0, F_0) = 0 \quad \xi \geq 0, \eta = 0 \quad F_0 > 0 \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} h^*(\xi, 1, F_0) = 0 \quad \xi \geq 0, \eta = 1 \quad F_0 > 0 \quad (5.11)$$

5.8.2 Discrétisation :

En discrétiser notre problème de différence finis. L'approximation de différence centrée aux dérivées spatiales, et des approximations de différence en aval aux dérivées de temps sont habituées discrétise à l'équation (5.7).

Les approximations de dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial}{\partial F_0} h^* = \frac{h_{i,j}^{*n+1} - h_{i,j}^{*n}}{\Delta F_0} \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial F_0} \Delta H^* = \frac{\Delta H_{i,j}^{*n+1} - \Delta H_{i,j}^{*n}}{\Delta F_0} \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} h^* = \frac{h_{i+1,j}^{*n+1} + h_{i-1,j}^{*n+1} - 2h_{i,j}^{*n+1}}{(\Delta \xi)^2} \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} h^* = \frac{h_{i,j+1}^{*n+1} + h_{i,j-1}^{*n+1} - 2h_{i,j}^{*n+1}}{(\Delta \eta)^2} \quad (5.15)$$

Substitution les équations (5.12), (5.13), (5.14) et (5.15) dans l'éq. (5.7) précédents:

$$\left(\frac{h_{i,j}^{*n+1} - h_{i,j}^{*n}}{\Delta F_0} + \frac{\Delta H_{i,j}^{*n+1} - \Delta H_{i,j}^{*n}}{\Delta F_0} \right) = (d)^2 \left(\frac{h_{i+1,j}^{*n+1} + h_{i-1,j}^{*n+1} - 2h_{i,j}^{*n+1}}{(\Delta \xi)^2} \right) + \left(\frac{h_{i,j+1}^{*n+1} + h_{i,j-1}^{*n+1} - 2h_{i,j}^{*n+1}}{(\Delta \eta)^2} \right) \quad (5.16)$$

Donc, la forme implicite de l'équation de différence finis pour un nœud intérieur i, j est :

$$h_{i,j}^n = \Delta H_{i,j}^{n+1} - \Delta H_{i,j}^n + \left(1 + \frac{2(d)^2 \Delta F_0}{(\Delta \xi)^2} + \frac{2\Delta F_0}{(\Delta \eta)^2} \right) h_{i,j}^{n+1} - \frac{2(d)^2 \Delta F_0}{(\Delta \xi)^2} (h_{i,j}^{n+1} - h_{i-1,j}^{n+1}) - \frac{\Delta F_0}{(\Delta \eta)^2} (h_{i,j+1}^{n+1} - h_{i,j-1}^{n+1}) \quad (5.17)$$

Les équations de différence finis pour les nœuds de frontière sont tirées d'une façon semblable.

- Nœuds de frontière à $x=0$ avec condition à limite de la première espèce (Température imposé):

$$h_{i,j}^n = h_G \quad (5.18)$$

- Nœuds de frontière à $x=b$ avec condition à limite de la première espèce (Température imposé):

$$h_{i,j}^n = h_D \quad (5.19)$$

- Nœuds de frontière à $y=0$ avec condition de limite de la deuxième espèce (isolée) :

$$h_{i,1}^n = \Delta H_{i,1}^{n+1} - \Delta H_{i,1}^n + \left(1 + \frac{2(d)^2 \Delta F_0}{(\Delta \xi)^2} + \frac{2\Delta F_0}{(\Delta \eta)^2} \right) h_{i,1}^{n+1} - \frac{2(d)^2 \Delta F_0}{(\Delta \xi)^2} (h_{i-1,2}^{n+1}) - \frac{\Delta F_0}{(\Delta \eta)^2} (h_{i+1,1}^{n+1} - h_{i-1,2}^{n+1}) \quad (5.20)$$

- Nœuds de frontière à $y=H$ avec condition de limite de la deuxième espèce (isolée) :

$$h_{i,N}^n = \Delta H_{i,N}^{n+1} - \Delta H_{i,N}^n + \left(1 + \frac{2(d)^2 \Delta F_0}{(\Delta \xi)^2} + \frac{2\Delta F_0}{(\Delta \eta)^2} \right) h_{i,N}^{n+1} - \frac{2(d)^2 \Delta F_0}{(\Delta \xi)^2} (h_{i,N-1}^{n+1}) - \frac{\Delta F_0}{(\Delta \eta)^2} (h_{i+1,N}^{n+1} - h_{i-1,N}^{n+1}) \quad (5.21)$$

Les équations de différence finis précédentes sont exprimées dans une forme commode, cependant avant le codage, ils ont été réarrangés pour résoudre de $h_{i,j}^{n+1}$.

Toutes les équations précédentes doivent être satisfaites.

Cependant, on a empiriquement montré qu'un certain temps doit s'écouler avant que les courants de convection ne soient établis pour dominer le transfert de chaleur par conduction. Bénard, Gobin et Martinez [21] déterminer par expériences que le temps de transition , t_0 , Pour le régime de la couche limite pour établir dans la région liquide pour le début de convection donner:

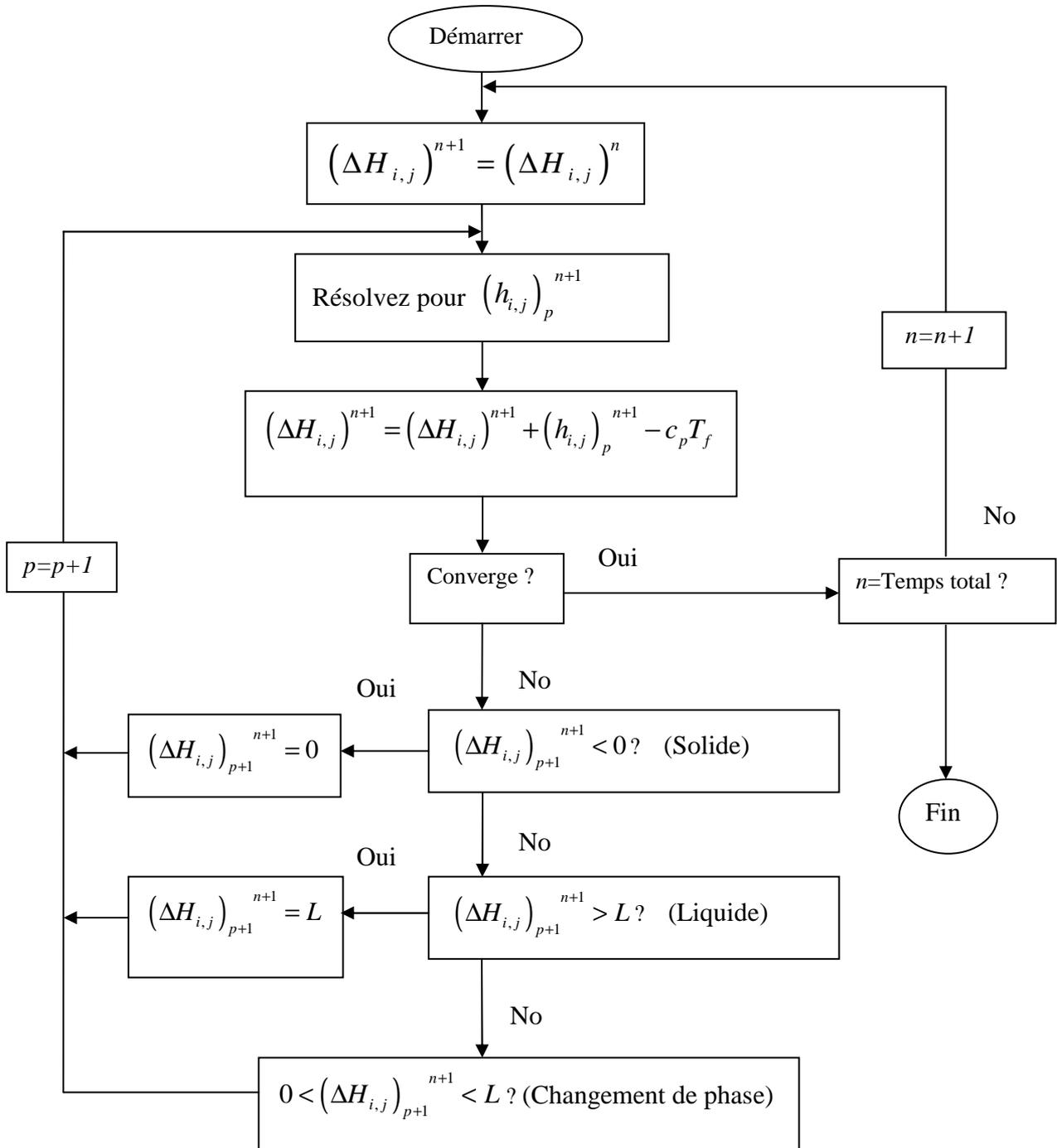
$$t_0 = 4.59 \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Ste}} \cdot \frac{\rho_s}{\rho_L} \cdot \text{Ra}^{-\frac{1}{2}} \right)$$

5.8.3 L'Algorithme :

Pour programmer cette discrétisation alors nous écrivons l'algorithme, au début de l'algorithme, *Sur un pas de temps*, La position des chaleurs latentes prend la valeur de pas le temps précédent. Pour chaque itération de *Gauss-Seidel*, les équations de position pour la chaleur sensible sont résolues. Après résolution, l'enthalpie sensible de chaque position est ajoutée à la chaleur latente de cette position tandis que l'enthalpie sensible pour amorcer la fusion, $c_p T_f$ est soustraite $\Delta H_{i+1,j} = \Delta H_{i,j} + h_{i,j} - c_p T_f$.

Un volume de contrôle est dans la phase solide, si $h_{i,j} < c_p T_f$ et $\Delta H_{i,j} = 0$, et est dans la phase liquide si $h_{i,j} > c_p T_f$. Et $\Delta H_{i,j} = L$, alors les corrections suivantes sont faites avant l'itération suivante. Si $\Delta H_{i,j} < 0$, donner $\Delta H_{i,j} = 0$, et si $\Delta H_{i,j} > L$, donner $\Delta H_{i,j} = L$. Si le volume de contrôle est changé la phase, ΔL pour ce nœud reste comme déterminé par l'équation ci-dessus, c'est continué jusqu'à la convergence, la convergence est réalisée quand $h_{i+1,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n+1}$ est moins d'un numéro indiqué. Sur les processus itératifs de la convergence de Gauss-Seidel, *Sur un pas de temps*, Les nodales des enthalpies sensibles pour ces volumes de contrôle subissant un changement de phase seront égales à $c_p T_f$ avec la chaleur latente dans la gamme $0 < \Delta H < L$.

5.8.4 L'organigramme :



5.8.5 Simulation du modèle:

Le modèle que nous venons de présenter est utilisé pour simuler la fusion du gallium. Ce métal pur a été choisi parce que des expériences de fusion en laboratoire ont déjà été faites et sont présentées par Beckermann et Viskanta [22]. Cette expérience a été réalisée pour une cellule rectangulaire d'une hauteur b et d'une largeur a de 10 cm , Les parois nord et sud sont parfaitement isolées, la température de la paroi ouest est de 31° et une température initiale $T_0 = 27.8^\circ\text{C}$. Les propriétés physiques de gallium sont présentées dans le tableau 5.1.

Propriétés	Solide	Liquide
$k\text{ (W/m.K)}$	41.0	25.5
$c_p\text{ (J/kg.K)}$	377	398
$\rho\text{ (kg/m}^3\text{)}$	5910	6090
$L\text{ (J/kg)}$	559400	
$T_f\text{ (}^\circ\text{C)}$	29.7646	29.7646

Tableau 5.1: Propriétés physiques de Gallium [23]

Nous écrivons un programme sous *Matlab* de ce problème, En utilisant un pas de temps $\Delta t = 1\text{ sec}$. Le temps total simulé est de 500 secs . Maillage de nœuds 21×21 .

5.8.6 Résultats et discussions

Les figures (5.2-3-4) représentent le déplacement de l'interface solide-liquide en fonction du temps, l'interface solide-liquide étant une ligne isotherme,

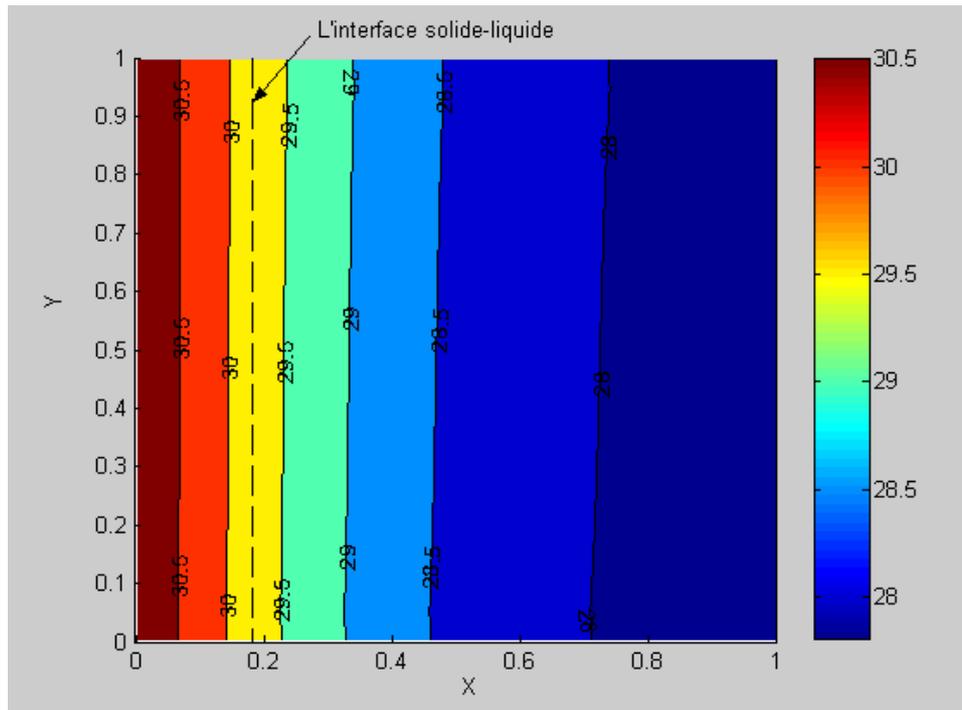


Fig.5.2 L'évolution de la température à $t=50$ sec

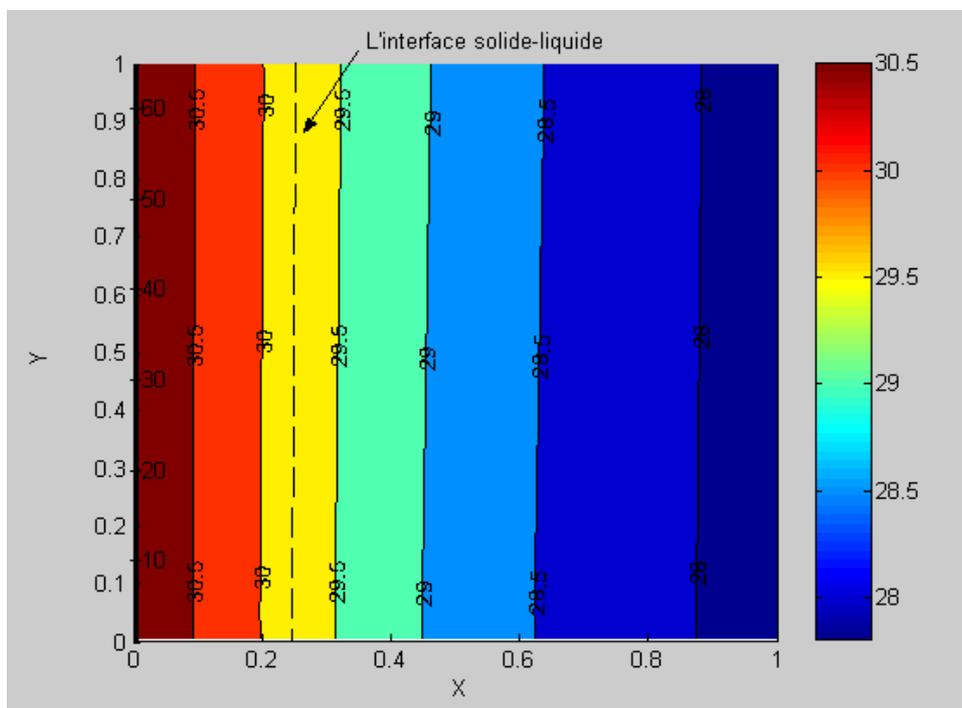


Fig.5.3 L'évolution de la température à $t=100$ sec

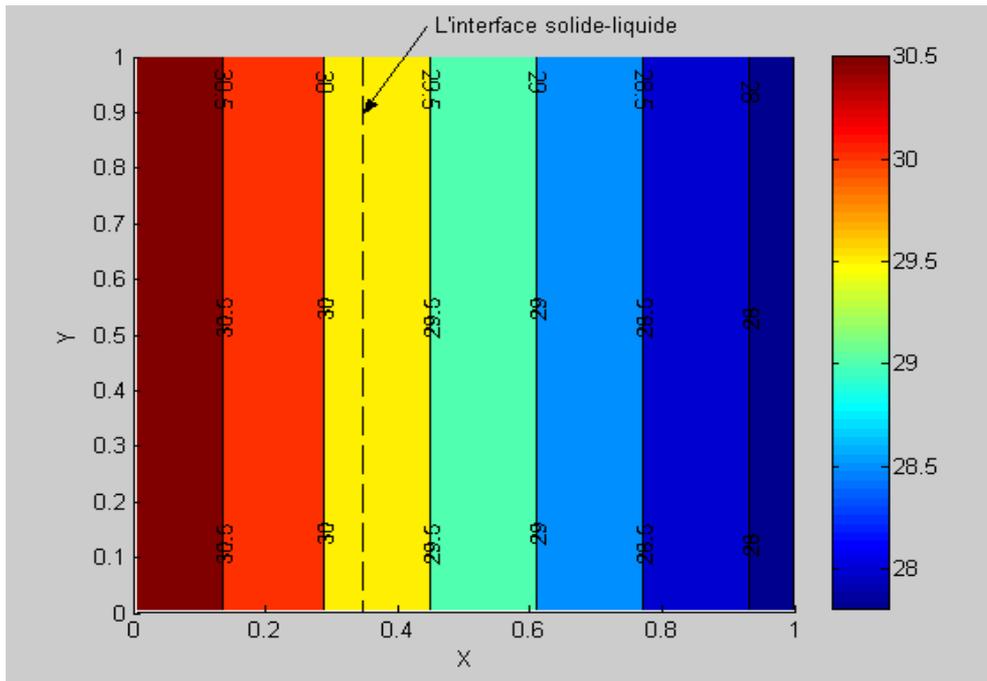


Fig.5.4 L'évolution de la température à $t=300\text{ sec}$

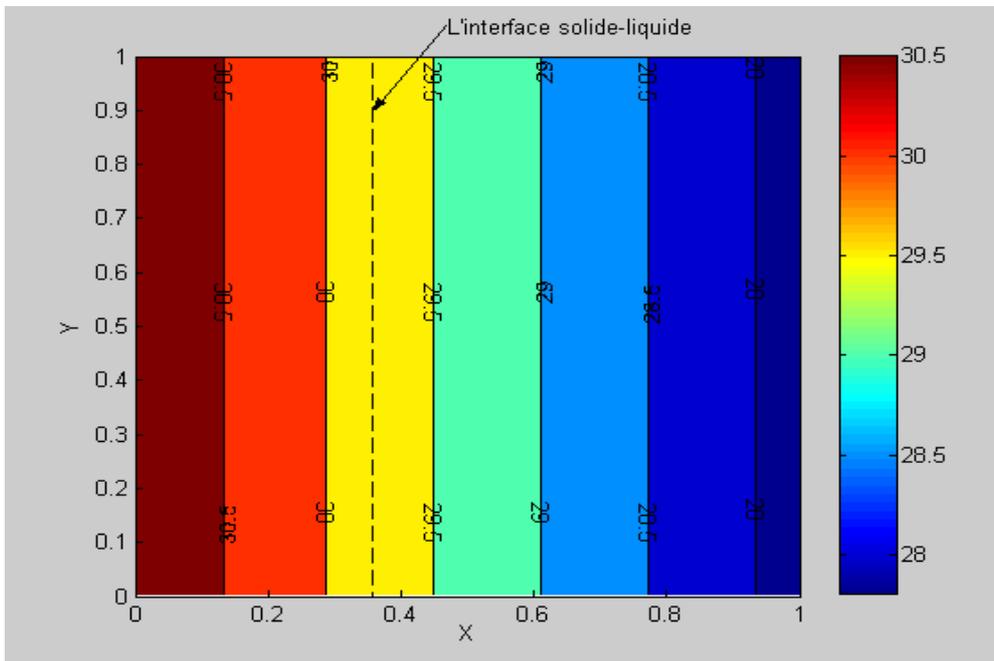


Fig.5.4 L'évolution de la température à $t=500\text{ sec}$

La figure 5.5 illustré la vitesse de l'interface solide-liquide au cours de temps, la vitesse commence par une valeur de 3.5 mm/sec et diminué au cours le temps jusqu'à 0.05 mm/sec à un temps finale 500 sec .

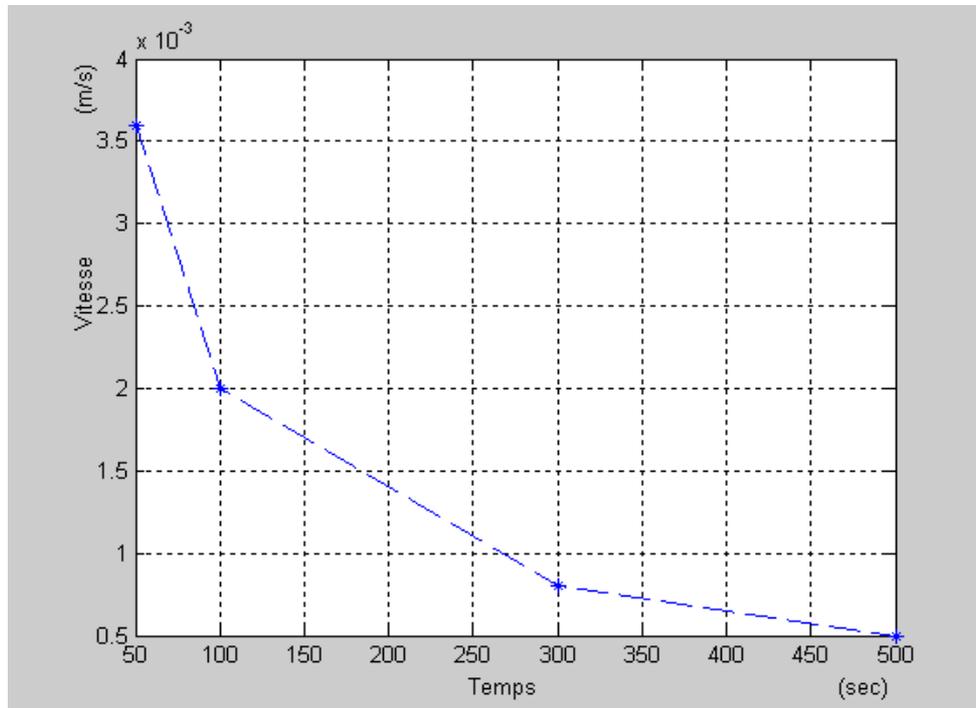


Fig.5.5 La vitesse de l'interface solide-liquide

D'un point de vue transfert de chaleur, la dynamique de transfert est régie par les phénomènes de conduction dans la phase liquide et solide. Les phénomènes de transfert étant surtout orientés de gauche à droite (dimension horizontale), ils se caractériseront principalement par rapport aux dimensions physiques prises dans cette direction. Dans les premiers instants du processus de fusion, le système dans la phase liquide est caractérisé par une petite dimension horizontale de longueur qui crée de forts gradients de températures.

Par conséquent ces gradients de températures favorisent la dominance du transfert de chaleur par conduction. Les isothermes demeurent verticales et parallèles.