

## *Concepts Fondamentaux de la Théorie des Ensembles Flous et la Logique Floue*

### **III.1 Introduction**

La théorie du flou (Fuzzy theory) est presque devenue une mode pendant les années 90. Beaucoup de chercheurs, dans différents domaines scientifiques, utilisant la théorie formulée par le professeur *Lotfi Zadeh* de l'université de *Berkeley* [61]. Elle a connu un intérêt important dans la communauté scientifique au cours des dernières années. L'une des raisons principales est l'énorme succès des équipements domestiques produits par l'industrie Japonaise, utilisant des régulateurs flous : ce marché atteignait 2 milliards de dollars en 1990 [62].

Les systèmes flous appartiennent à la classe des "systèmes à base de connaissance" [62]. Leur but principal consiste à implémenter un savoir faire humain, ou des règles heuristiques, sous forme d'un programme informatique. La logique floue fournit un formalisme mathématique pour réaliser ce but. Les régulateurs flous modélisent l'expérience humaine sous forme de règles linguistiques "**si...alors**" ; un moteur d'inférence calcule les actions de commande pour chacune des situations données. Les algorithmes basés sur la logique floue sont considérés comme une solution très intéressante pour le réglage des systèmes non linéaires pour lesquels il n'existe pas de modèle mathématique [21, 22].

Cette théorie est très attractive, parce qu'elle est basée sur le raisonnement intuitif et prend en compte la subjectivité et l'imprécision [62]. Mais ce n'est pas une théorie imprécise. C'est une théorie mathématique rigoureuse, adaptée au traitement de tout ce qui est subjectif et/ou incertain.

### **L'idée de la logique floue**

Comme La science s'appuie sur la notion de mesure, la question qui se pose est : comment représenter les valeurs non mesurables? Comment représenter ce qui est incertain ou subjectif ? Comment représenter les termes du langage humain ?. Les descriptions linguistiques

d'un système sont souvent vagues. Mais le flou n'est pas imprécis. Si une donnée n'est pas connue précisément, elle peut être exprimée par un intervalle de confiance précis [18, 61]. Cet intervalle est un ensemble de valeurs possible pour la donnée.

### **L'utilisation de la logique floue**

La logique floue est une technique de résolution de problèmes très puissants avec une large applicabilité dans le control et la prise de décision [21]. Elle est très utile lorsque le modèle mathématique du problème à traiter n'existe pas ou existe mais difficile à implémenter, ou il est trop complexe pour être évalué assez rapidement pour des opérations en temps réel [18, 21, 22]. Ou bien lorsque des experts humains sont disponibles pour fournir des descriptions subjectives du comportement du système avec des termes en langage naturel. La logique floue est aussi supposée de travailler dans les situations où il y a de large incertitude et des variations inconnues dans les paramètres et la structure du système.

### **III.2 Variables linguistiques**

L'ensemble de référence d'un mot du langage naturel s'appelle l'univers du discours. L'univers du discours d'un mot est un ensemble de termes qui évoquent le même concept mais à degrés différents. Il peut être fini ou non.

Une variable linguistique représente un état dans le système à régler. Chaque variable linguistique est caractérisée par un ensemble tel que :

$$\{x, T(x), U, G, M\}$$

Où :

$x$  : est le nom de la variable,

$T(x)$  : est l'ensemble des valeurs linguistiques que peut prendre  $x$ ,

$U$  : est l'univers du discours associé avec la valeur de base,

$G$  : est la règle syntaxique pour générer les valeurs linguistiques de  $x$ ,

$M$  : est la règle sémantique pour associer un sens à chaque valeur linguistique .

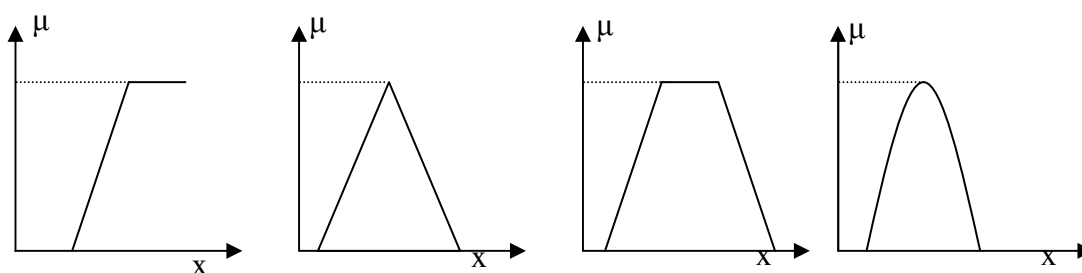
### Exemple

La variable linguistique  $x =$  température ambiante, peut être définie avec un ensemble des termes :

$T(x) = \{\text{extrêmement froide, très froide, froide, chaude, très chaude, extrêmement chaude}\}$ , qui forment son univers du discours  $U = [-20^{\circ}\text{C}, 40^{\circ}\text{C}]$ . La variable de base est la température. Le terme froid représente une valeur linguistique. On peut l'interpréter, par exemple comme « les températures plus petites que  $15^{\circ}\text{C}$  ».

### III.3 Fonctions d'appartenance

Chaque sous-ensemble flou peut être représenté par sa fonction d'appartenance. En général la forme de fonctions d'appartenance dépend de l'application, et peut être triangulaire, trapézoïdale ou en forme de cloche comme le montre la (Fig. III.1).



**Figure III.1** : Différentes formes de fonctions d'appartenance

### IV.4 Règles linguistiques

L'idée principale des systèmes basés sur la logique floue, est d'exprimer la connaissance humaine sous la forme de règles linguistiques de forme **Si...alors** ...Chaque règle a deux parties [21, 22, 61, 62]:

- partie antécédente (prémisse ou condition), exprimée par **Si...**,
- partie conséquente (conclusion) exprimée par **alors**.

La partie antécédente est la description de l'état du système. La partie conséquente exprime l'action que l'opérateur qui contrôle le système doit exécuter. Chaque règle floue est basée sur l'implication floue.

Il y a plusieurs formes de **Si .....alors** ...la forme générale est :

**Si** (un ensemble de conditions est satisfait) **alors** (un ensemble de conséquences peut être exécuté).

### III.5 Mécanisme d'inférence floue

Le principe de base de l'inférence dans la logique classique est le *modus ponens*, selon lequel on peut inférer la vérité d'une proposition B à partir de la vérité de la proposition A et de l'implication  $A \rightarrow B$ . Par exemple, si la proposition est identifiée par 'Jone est dans l'hôpital' et B par 'Jone est malade' alors si 'Jone est dans l'hôpital' est vraie 'Jone est malade' est aussi vraie. Alors que, dans la logique floue, l'inférence est basée sur le *modus ponens généralisé* (generalised modus ponens ou GMP) qui est défini dans ce qui suit :

Prémisse : x est A`

Implication : si x est A, alors y est B

Conséquence : y est B`

Où x et y sont des variables linguistiques ; A, A', B, B' sont les valeurs linguistiques définies dans les univers du discours de x et y. Si  $A' = A$  et  $B' = B$ , le **GMP** est réduit au *modus ponens*.

Afin de compléter cet exposé, on mentionne aussi le *modus tollens généralisé* (generalized modus tollens ou GMT) qui a la forme :

prémisse : y est B`

implication : si x est A, alors y est B

conséquence : x est A`

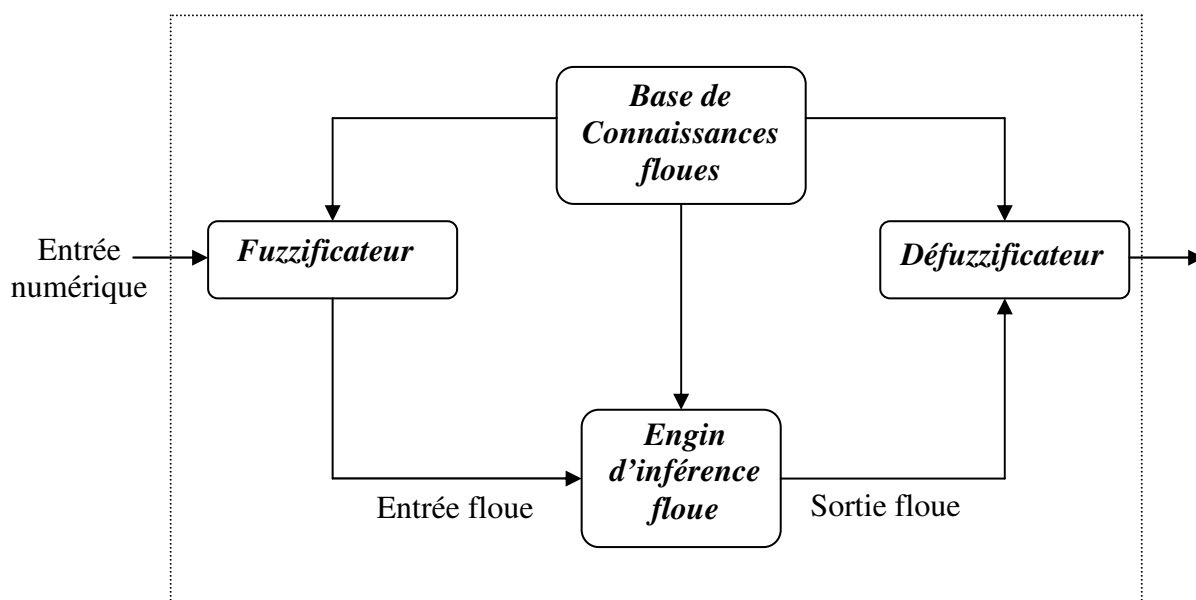
Si  $B' = \text{not } B$  et  $A' = \text{not } A$ , on peut le réduire au *modus tollens classique*.

### III.6 Structure générale d'un système flou

Le système à base de la logique floue est composé de quatre blocs principaux (Fig. III.2).

- Fuzzificateur
- Base de connaissances floues,
- Engin d'inférence floue,
- Défuzzificateur.

Chacun de ces blocs fera l'objet d'un développement détaillé.



**Figure III.2** : Structure générale d'un système basé sur la logique floue

#### a. Fuzzificateur

Le fuzzificateur effectue la conversion de l'entrée numérique observée

$u_o = (u_{o1}, u_{o2}, \dots, u_{on})^T \in U$  en un ensemble flou  $F_x = F_{x0} \times F_{x2} \times \dots \times F_{xn}$  définie dans  $U$ . Cette opération est nécessaire, car dans les applications de la logique floue, les données observées sont souvent numériques, mais dans le système flou la manipulation des données est basée sur la théorie des ensembles flous [18].

Il y'a au minimum deux choix pour cette conversion :

#### - Fuzzification singleton

Où l'opérateur de fuzzification converti l'entrée numérique  $u_0 \in U$  en un singleton flou  $F_x$  dans  $U$  tel que :

$$\mu_{F_x}(u) = 1 \quad \text{Si} \quad u = u_0$$

$$\mu_{F_x}(u) = 0 \quad \text{Si} \quad u \neq u_0$$

Cette stratégie est largement utilisée dans les applications de contrôle flou, car elle est facile à implémenter.

#### - Fuzzification non – singleton

Est une fuzzification pour laquelle  $\mu_{F_x}(u)$  est égal à l'unité si  $u = u_0$  et décroît quand on s'éloigne de  $u_0$ . Par exemple,

$$\mu_{F_x}(u) = \exp(-(u-u_0)^T \cdot (u-u_0) / \sigma^2) , \text{ où } \sigma \text{ est un paramètre caractérisant la forme de } \mu_{F_x}$$

### b. Inférence floue

Il est mentionné que les inférences floues sont basées sur l'implication floue de type *modus ponens* généralisé. Les inférences lient les grandeurs mesurées et les variables de sorties par des règles linguistiques. Ces règles sont combinées en utilisant les connections **et** et **ou**. Supposons que le système flou a deux entrées  $x$ ,  $y$  et une sortie  $z$  et que l'on a défini  $n$  règles linguistiques comme suit :

$$\text{Si } x=A_1 \text{ et } y=B_1 \text{ alors } z=C_1$$

$$\text{Si } x=A_2 \text{ et } y=B_2 \text{ alors } z=C_2$$

...

$$\text{Si } x=A_n \text{ et } y=B_n \text{ alors } z=C_n$$

Où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des variables linguistiques qui représentent les variables d'état de processus et variables de contrôle ;  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C_i$  ( $i=1, n$ ) sont les sous-ensembles flous définis dans les ensembles de référence pour  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement. en toute généralité, n'importe quelle combinaison des opérateurs ou, **et** et **non** peut apparaître dans la condition d'une règle, suivant les conditions imposées par le système à régler.

### c. Type d'inférences floues

Il y a plusieurs sortes d'inférences floues [61] parmi lesquels :

#### c.1. Max-prod méthode

Cette méthode utilise les représentations standard pour les sous-ensembles d'entrée et de sortie. Le poids d'activation d'une règle est utilisé pour multiplier la fonction d'appartenance du sous-ensemble de sortie imposée par cette règle. L'action globale (ou la valeur de commande) est l'union des actions produites par chaque sous-ensemble individuellement. Elle est graphiquement expliquée sur la (Fig. III.3a).

#### c.2. Min-max méthode

Elle utilise les mêmes descriptions pour les sous-ensembles de sortie que pour les sous-ensembles d'entrée à la condition de chaque règle  $R_i$  est attribué un poids d'activation  $W_i$ , qui dépend de la condition elle même et des valeurs d'entrée. Pour l'opération **et**, on utilise l'opérateur **min**, le poids d'activation est utilisé comme la constante d'écrêtage pour le sous-ensemble de sortie imposé par la partie conséquente de la règle  $R_i$ . La réunion des sous-ensembles écrêtés forme le sous-ensemble de sortie (Fig. III.3b).

#### c.3. Méthode de Tsukamoto

Les fonctions d'appartenances des sortie doivent être monotone et non décroissantes (Fig. III.3c). La sortie de chaque règle est une valeur de la fonction de poids d'activation. La valeur de commande est la moyenne pondérée des poids d'activation et de sorties de fonctions d'appartenances.

#### c.4. Méthode de Takagi et sugeno

Chaque fonction d'appartenance de la sortie est une combinaison linéaire de valeurs d'entrée (Fig. III.3.d). La sortie précise est la moyenne pondérée des poids d'activation et des sorties de fonctions d'appartenance. La méthode de **Sugeno**, où les fonctions d'appartenance sont des valeurs précises, constitue un cas particulier de cette méthode.

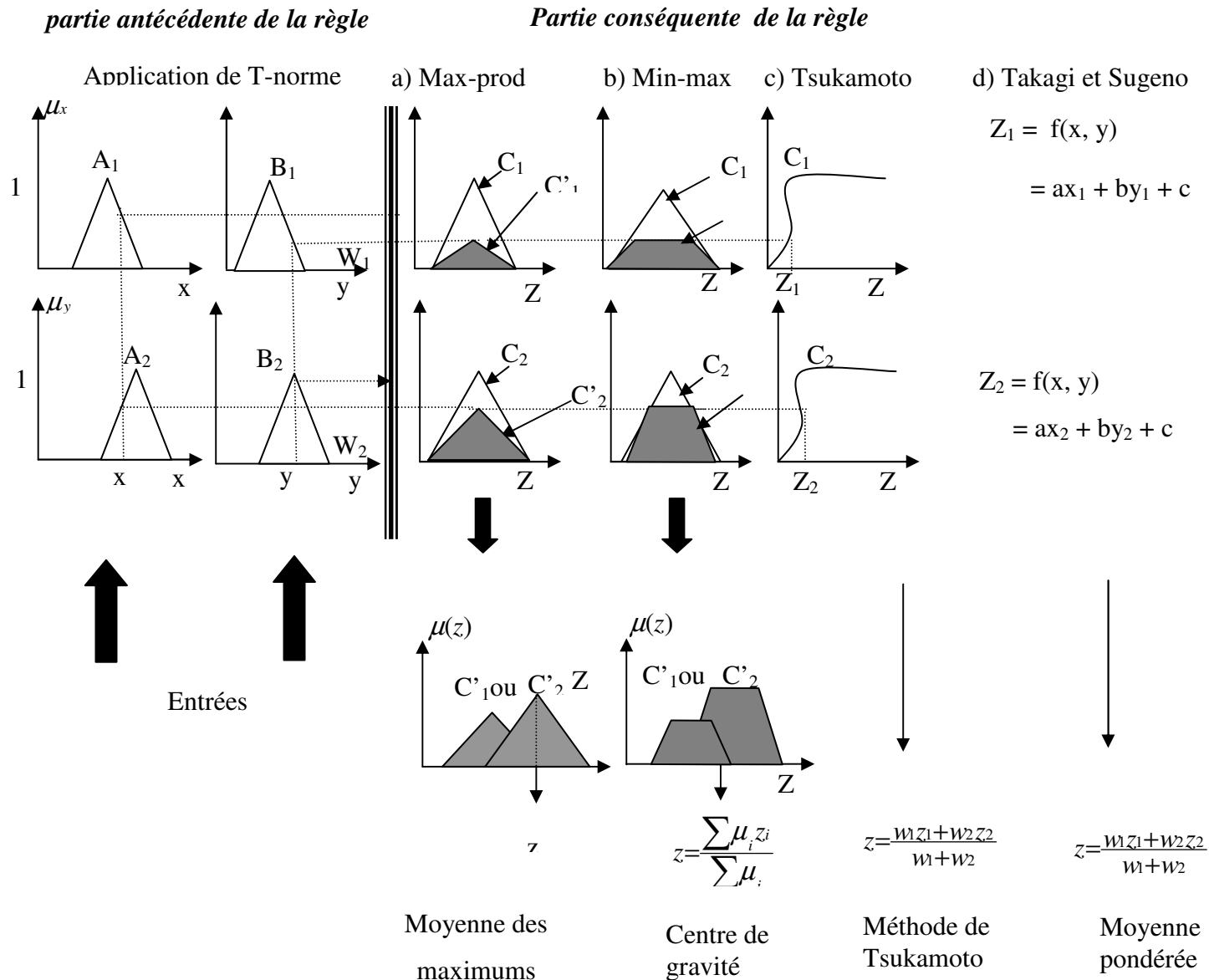
#### c.5. Méthode somme –prod

Par opposition aux méthodes d'inférence précédentes, la méthode d'inférence **somme-prod** réalise, au niveau de la condition, l'opérateur **OU** par la formation de la somme, plus précisément par la valeur moyenne, tandis que l'opérateur **ET** est réalisé par la formation du produit. La conclusion de chaque règle, précédée par **ALORS**, liant le facteur d'appartenance de la condition avec la fonction d'appartenance de la variable de sortie par l'opérateur **ET**, est réalisé par la formation du produit. L'opérateur **OU** qui lie les différentes règles est réalisé par la formation de la somme, donc de la valeur moyenne.

Dans ce cas, le **OU** liant les règles est réalisé par la formation de la somme et le **ALORS** est réalisé par la formation du produit, ainsi s'explique la désignation par **somme-prod** de cette méthode d'inférence.

La méthode d'inférence **somme-prod** est représentée graphiquement à la (Fig. III.4) .





**Figure III.3 :** Méthodes de raisonnement dans les systèmes flous

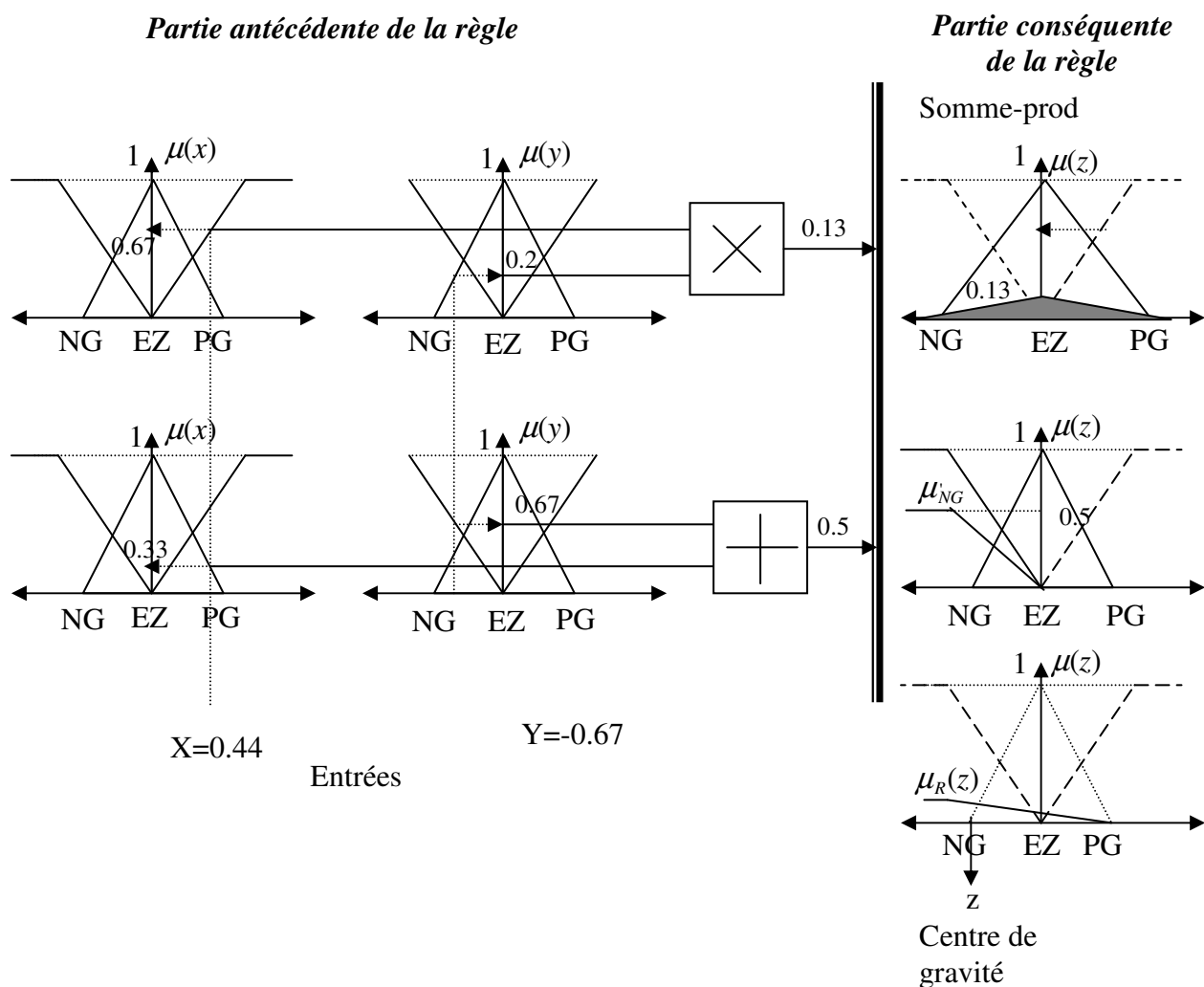


Figure III.4 Méthode d'inférence somme-prod

#### d. Activation de règles linguistiques

On considère un système flou avec  $n$  règles linguistiques :

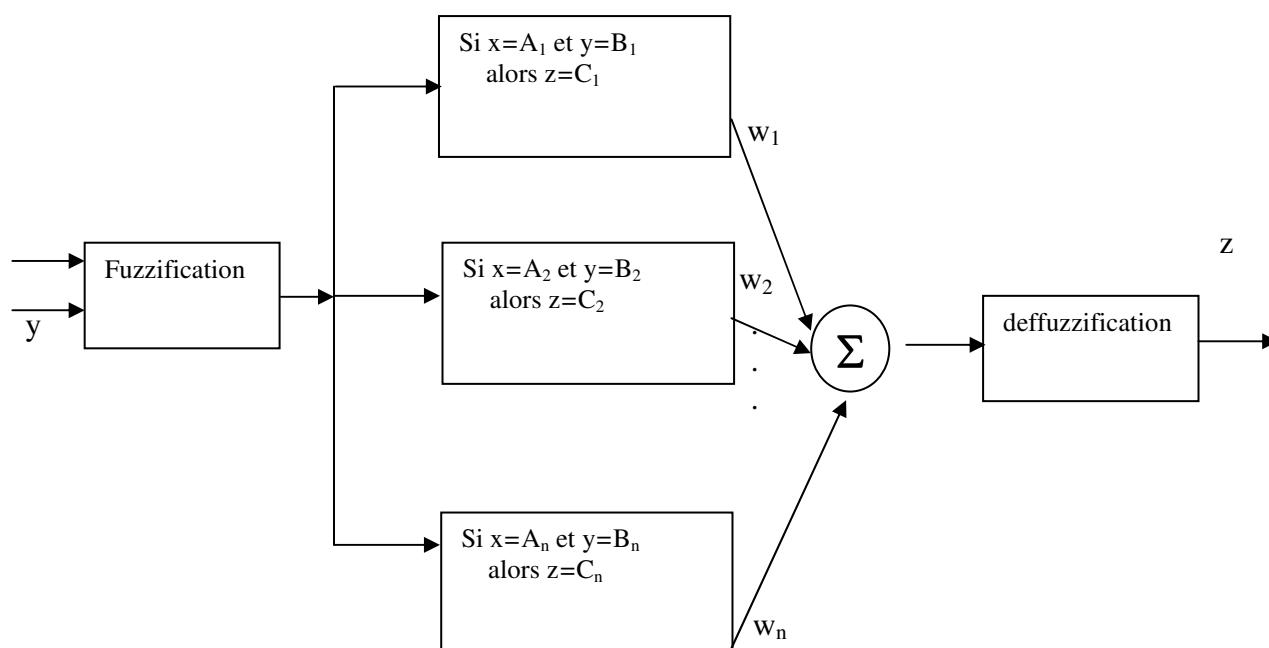
Si  $x=A_1$  et  $y=B_1$  alors  $z=C_1$

Si  $x=A_2$  et  $y=B_2$  alors  $z=C_2$

...

Si  $x=A_n$  et  $y=B_n$  alors  $z=C_n$

Où  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont des variables linguistiques qui représente les variables d'état du processus et la variable de contrôle ;  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C_i$  ( $i=1, n$ ) sont les sous-ensemble flous définis dans les ensembles de référence pour  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement. Le schéma de ce système est représenté sur la (Fig. III.5).



**Figure III.5** : Structure générale de la partie floue du système

Dans le sens mathématique, l'activation de règles est l'application de **T-normes** pour obtenir le poids d'activation de chaque règle. D'habitude, cela veut dire que l'on applique l'opérateur **min** ou le **produit** sur les valeurs d'appartenance.

Dans le cas du système de la Fig. (III.5), le poids  $\mathbf{W}_i$  obtenu de la i-ème règle est :

$$w_i = \mu_{A_i}(x) \text{ et } \mu_{B_i}(y)$$

où  $\mu_{A_i}(x)$  et  $\mu_{B_i}(y)$  sont des valeurs d'appartenance de x et y respectivement aux sous-ensembles  $A_i$  et  $B_i$ . Cela veut dire que la partie conséquente de la i-ème règle ( $z=C_i$ ) doit être activée avec un niveau de vérité  $\mathbf{W}_i$  (poids d'activation, niveau d'activation).

### e. Defuzzification

Le résultat d'une inférence floue est une fonction d'appartenance. C'est un sous-ensemble flou. Un organe de commande nécessite un signal de commande précis. la transformation floue en une information déterminée est la defuzzification (concrétisation). De plus, on doit souvent prévoir un traitement du signal et la conversion digitale/analogique. Il y a plusieurs méthodes de defuzzification proposée dans la littérature. Il n'y a pas de stratégie systématique pour choisir parmi l'une de ces méthodes [61].

#### e.1. Méthode du centre du gravité

L'abscisse du centre de gravité peut être déterminée en utilisant la formule générale :

(III.1)

L'intégrale au dénominateur donne la surface, tandis que L'intégrale au numérateur correspond au moment de la surface .

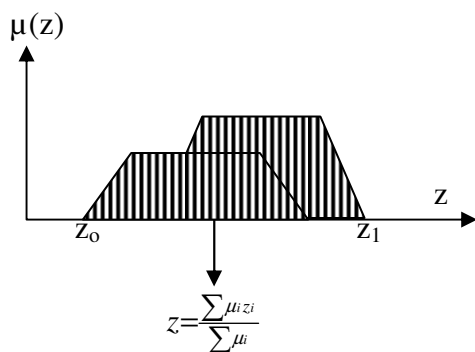
Lorsque la fonction  $\mu(z)$  est discrétisée (Fig. III.6), le centre de gravité est donné par :

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i z_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i} \quad (\text{III.2})$$

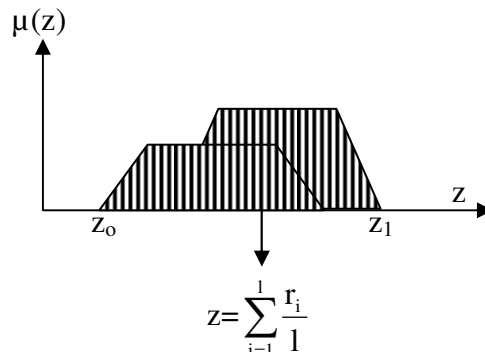
où n est le nombre le niveaux de quantisation,  $z_i$  la valeur de sortie pour le niveau i et  $\mu_i$  sa valeur d'appartenance.

**e.2. Méthode de moyenne de maximum**

Cette méthode génère une commande précise en calculant la moyenne des valeurs pour lesquelles l'appartenance est maximale.



**Figure III.6 :** Défuzzification par le centre de gravité.



**Figure III.7 :** Defuzzification par la Méthode moyenne de maximum.

Si la fonction est discrétisée, comme montré à la (Fig. III.7), la valeur défuzzifiée est donnée par :

$$Z = \sum_{i=1}^l \frac{r_i}{l} \tag{III.3}$$

Ou l est le nombre de valeurs quantifiées r pour lesquelles l'appartenance est maximale.

**e.3. Méthode de Tsukamoto**

Si l'on utilise les fonctions d'appartenances monotones et non décroissantes pour la sortie , (Fig. III.3.c), la valeur précise de la commande est calculée comme :

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^n w_i z_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \tag{III.4}$$

Où  $n$  est le nombre de règles activées avec le poids  $W_i > 0$  et  $Z_i$  la valeur de la fonction de sortie pour la règle  $i$ .

#### e.4. Méthode de moyenne pondérée

Cette méthode est utilisée lorsque les sorties sont définies comme fonctions linéairement dépendantes d'entrées, comme montré sur la (Fig. III.3.d). En général, la partie conséquente de la règle est :

$$Z=f(x, y) \tag{III.5}$$

Si  $W_i$  est le poids d'activation de la règle  $i$ , la valeur précise de la commande est :

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n w_i f(x_i, y_i)}{\sum_{i=1}^n w_i} \tag{III.6}$$

Où  $n$  est le nombre de règles activées.

### IV.7 Avantages et inconvénients de réglage par logique floue

#### a- Avantages

Les avantages principaux des régulateurs flous sont les suivants :

- L'incorporation directe des informations floues et linguistiques, provenant d'un expert humain, dans le système flou.
- Il n'y a pas nécessaire de faire un modèle mathématique du système à régler.
- Le système flou est un approximateur universel, c'est-à-dire, il est suffisamment générale pour générer n'importe quelle action.
- La logique floue est facile à comprendre par ceux qui ne sont pas des spécialistes, car elle imite la stratégie du raisonnement humain.
- On peut maîtriser les systèmes non linéaires et difficiles à modéliser.

**b- Inconvénients**

- Manque de directives précises pour la conception d'un régulateur,
- Précision de réglage en général peu élevée.