Généralités sur la commande des systèmes non linéaires

1. Introduction

Un système non linéaire commandé est un ensemble d'équations (différentielles par exemple) non linéaires décrivant l'évolution temporelle des variables constitutives du système sous l'action d'un nombre fini de variables indépendantes appelées entrées ou variables de commande, ou simplement commandes, que l'on peut choisir librement pour réaliser certains objectifs.

On en connaît de nombreux exemples parmi les systèmes mécaniques ou chimiques : satellites, avions, automobiles, grues, machines-outils, régulateurs thermiques, réacteurs chimiques, procédés biotechnologiques ou agro-alimentaires, etc.

Les entrées peuvent être choisies en boucle ouverte, c'est-à-dire ne dépendant que du temps, ou en boucle fermée, c'est-à-dire comme des fonctions des variables mesurées, appelées observations, qui tiennent compte de l'état du système à chaque instant.

Un tel système est non linéaire s'il n'est pas équivalent à un système linéaire dans un sens à préciser. Plusieurs relations d'équivalence peuvent être introduites, donnant des classifications très différentes si le système est commandé ou non. Dans le cas non commandé on classe les comportements par rapport à la stabilité et l'instabilité linéaires et on fait apparaître les dynamiques centres (ni linéairement stable ni linéairement instable) au voisinage d'un point d'équilibre ou d'une orbite périodique. Dans le cas commandé, beaucoup plus compliqué, l'équivalence à un système linéaire décrit une propriété de l'ensemble des trajectoires du système que l'on appellera platitude.

Au-delà de l'analyse des types de comportement des systèmes, se pose le problème de leur utilisation. Un objectif de commande se traduit par la donnée d'une ou plusieurs trajectoires de référence à suivre (boucle ouverte) et, en boucle fermée, par certaines exigences sur la vitesse de poursuite, l'atténuation des perturbations, l'insensibilité aux erreurs et variations paramétriques et la précision du suivi. Bien sur, les réglages de la boucle ouverte et de la boucle fermée interagissent de façon complexe, surtout dans le contexte non linéaire, mais on peut, dans certains cas, arriver à rendre ces deux aspects aussi indépendants que possible pour en faciliter la mise au point. Dans de nombreux cas, en outre, le nombre, la technologie et l'emplacement des capteurs devant permettre de fermer la boucle ne sont pas donnés a priori et entrent dans la conception de la boucle fermée.

2. Les systèmes non linéaires

Un système est non linéaire s'il ne vérifie pas le principe de superposition. Les conditions de proportionnalité et d'additivité ne s'appliquent plus aux systèmes non linéaires.

Lors de l'étude des systèmes non linéaires on se heurte à plusieurs difficultés.

-L'analyse par des fonctions de transfert est impossible,

-La notion des pôles disparaît,

-Un système non linéaire possède en général plusieurs points d'équilibre et l'étude de leur stabilité est plus complexe que dans le cas linéaire pour le quel le concept de stabilité est global.

La non linéarité d'un système peut être intrinsèque ou peut être isolée, c'est-à-dire que l'on peut avoir une association d'éléments à caractéristiques non linéaires à un système linéaire.

Comme pour les systèmes linéaires, il est possible de distinguer, aussi les modèles non linéaires par les caractères suivants [1] :

-à temps continu / à temps discret,

-invariants dans le temps / variants dans le temps,

-monovariables / multivariables,

-déterministes / stochastiques.

3. Représentation des systèmes non linéaire

La forme la plus utilisée pour la représentation des systèmes non linéaires est la suivante :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \qquad \forall t \geq 0 \tag{I.1}$$

Ou t est le temps, $x(t) \in R^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in R^m$ est le vecteur de commande ou d'entrée.

$f : R^n \times R^m \times R_+ \to R^n$ est une fonction non linéaire.

3.1. Système autonome

Le système non linéaire (I.1) est dit autonome si la fonction f ne dépend pas explicitement du temps t, c'est-à-dire le système peut être écrit sous la forme :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \qquad \forall t \geq 0 \tag{I.2}$$

Si non, le système (I.1) est dit non autonome.

Parfois on utilise le terme de « invariant dans le temps ou stationnaire » au lieu « d'autonome » et « variant dans le temps » à la place de « non autonome ».

Dans le cas non autonome, si les variations des caractéristiques sont lentes dans le temps, on pourra approximer le système par une séquence de systèmes autonomes [1].

3.2. Systèmes à structure variables

Lorsque la structure du système ou du correcteur utilisé prend d'une façon discontinue deux ou plusieurs expressions, la notion de système à structures variables intervient .Il en découle les définitions suivantes :

-**Un système à structure variable (VSS)** est un système dont la structure change pendant son fonctionnement, il est caractérisé par le choix d'une structure et d'une logique de commutation. Ce choix permet au système de commuter d'une structure à l'autre à tout instant. De plus un tel système peut avoir de nouvelles propriétés qui n'existent pas dans chaque structure [2].

-**Un système est dit à structure variable** s'il admet une représentation par des équations différentielles du type :

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x) & \text{si la condition } 1 \text{ est vérifie} \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ f_n(x) & \text{si la condition n est vérifie} \end{cases} \tag{I.3}$$

Où f_i, $i = 1, \ldots, n$ sont des fonctions appartenant à un ensemble de sous systèmes de classe C^k.

Par conséquence, les systèmes à structures variables sont caractérisés par le choix d'une fonction et d'une logique de commutation [2].

3.3. Points d'équilibre

Le point $x_e \in R^n$ est dit point d'équilibre du système non linéaire non forcé :

$$\dot{x} = f(x(t),t), \qquad \forall t \geq 0 \tag{I.4}$$

si

$$\dot{x} = f(x_e,t) = 0 \qquad \forall t \geq 0 \tag{I.5}$$

Si x_e est un point d'équilibre du système (I.4) alors l'équation différentielle :

$$\dot{x} = f(x(t),t), \qquad \forall t \geq t_e \ , \qquad x(t_e) = x_e \tag{I.6}$$

admet une solution unique :

$$x(t) = x_e \ , \qquad \forall t \geq t_e \tag{I.7}$$

4. Stabilité des systèmes non linéaires

Dans les études mathématiques de la stabilité on procède généralement avec un modèle mathématique de la dynamique du système et on étudie si le système possède la propriété de stabilité. Avec cette approche, on peut s'assurer que le modèle est stable ou non. Les conclusions concernant la stabilité du modèle ne s'appliquent pas au système physique réel que si le modèle utilisé est assez précis. La théorie de la stabilité joue un rôle central en théorie des systèmes ; différents types de problèmes de stabilité peuvent être rencontrés dans l'étude des systèmes dynamiques.

La stabilité d'un point d'équilibre est généralement étudiée à l'aide du concept de stabilité au sens de Lyapunov. Par définition, si un système est dans un état d'équilibre, il restera dans cet état pour t variant dans le temps. L'étude de la stabilité au sens de Lyapunov consiste en l'étude des trajectoires du système quand l'état initial est « près » d'un état d'équilibre. Cela reflète la possibilité de perturbations affectant le système, sous forme de conditions initiales non nulles.

L'objet de la théorie de la stabilité est de tirer des conclusions quant au comportement du système sans calculer explicitement ses trajectoires. La contribution majeure fut apportée par A.M. Lyapunov, en 1892, dont les travaux n'ont été connus qu'à partir des années 60. Il a introduit la majorité des concepts et définitions de base concernant la stabilité des systèmes représentés par des systèmes différentiels arbitraires mais a aussi fourni les principaux résultats théoriques [1].

4.1. Fonction candidate de Lyapunov

Soit $V : R^n \to R^+$ une fonction telle que :

1. V est continûment différentiable en tous ces arguments,
2. V est définie positive,
3. Il existe a et b deux fonctions scalaires de R^+ dans R^+, continues, monotones, non décroissantes telles que :

$a(0) = b(0) = 0$

$\forall x \in R^n : a(\|x\|) \le V(x) \le b(\|x\|)$

Alors V est une fonction candidate de Lyapunov.

4.2. Théorèmes de stabilité

4.2.1. Stabilité locale

Si dans une boule $B(\rho)$ il existe une fonction scalaire $V(x)$, dont les dérivées partielles d'ordre un sont continues, et telle que :

1. $V(x)$ est définie positive dans $B(\rho)$.
2. $\dot{V}(x)$ est semi-définie négative dans $B(\rho)$.

alors **l'origine est stable**.

Si $\dot{V}(x)$ est localement définie négative dans $B(\rho)$, alors **l'origine est asymptotiquement stable.**

4.2.2. Stabilité globale

S'il existe une fonction scalaire $V(x)$, dont les dérivées partielles d'ordre un sont continues, et telle que :

1. $V(x)$ est définie positive.
2. $\dot{V}(x)$ est définie négative.
3. $\lim_{\|x\|\to\infty} V(x) \to \infty$ ($V(x)$ est radialement non-bornée).

alors **l'origine est globalement asymptotiquement stable**.

4.3. Stabilité d'une trajectoire

Dans certains cas les systèmes n'admettent pas de points d'équilibre, ou alors le point d'équilibre n'est pas stable. Divers cas peuvent alors ce produire.

-Le système admet un domaine stable : Il existe un domaine de conditions initiales tel que toutes les trajectoires restent comprises à l'intérieur du domaine stable.

-Le système admet un domaine attractif : Il existe un domaine de conditions initiales tel que toutes les trajectoires sont comprises dans le domaine attractif au bout d'un certain temps.

-Le système admet une trajectoire stable f_e : Quelque soit $\varepsilon \succ 0$ il existe $\alpha \succ 0$ tels que :

$$\|f(0)-f_e(0)\| \prec \alpha \Rightarrow \|f(t)-f_e\| \prec \varepsilon\,, \qquad \forall t \succ 0 \tag{I.8}$$

-De la même manière on peut définir une trajectoire attractive.

-La stabilité asymptotique et exponentielle (globale ou non) peuvent être définies également pour les domaines et les trajectoires.

4.4. Stabilité entrée-sortie

Jusqu'a présent on a définit la stabilité des systèmes à partir de la stabilité de l'état d'équilibre autour d'un point, dans un domaine ou autour d'une trajectoire. Il est également possible de considérer la stabilité entrée / sortie.

Soit le système non linéaire :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t),u(t)) \\ y(t) &= g(x(t),u(t)) \end{aligned} \tag{I.9}$$

Ou u est l'entrée du système et y sa sortie. La stabilité entrée /sortie d'un point d'équilibre (u_e, y_e) se définie par :

Quelque soit $\varepsilon \succ 0$ il existe $\alpha \succ 0$ et un domaine de conditions initiales de l'état du système tels que si $\|u(t)-u_e\| \prec \alpha$ pour tout t et que $x(0)$ appartient au domaine de condition initiales alors $\|y(t)-y_e\| \prec \varepsilon$ pour tout t.

Il est à noter que la stabilité entrée /sortie est très rarement utilisée. Il est en effet primordial de connaitre l'évolution de tout l'état du système. Il n'est pas rare en effet, pour des systèmes non observables, que la sortie ait un comportement stable et que pour autant l'état du système diverge [1].

5. Commande de procédés non linéaires

Parmi les nombreuses techniques de commande non linéaires, certaines ont fait l'objet de théories poussées mais néanmoins relativement complexes. Notre objectif dans ce paragraphe n'est pas de traiter en profondeur chacune d'elles, ni d'apporter un quelconque complément à ces dernières, mais de faire un exposé rapide sur ces techniques en présentant leurs avantages et leurs inconvénients. Certaines techniques, bien qu'ayant fait l'objet de nombreuses recherches, sont volontairement oubliées dans ce rappel (commande optimale par exemple).

5.1. Linéarisation par bouclage entrée-état ou entrée-sortie

La linéarisation par bouclage a fait son apparition dans les années 1980 avec les travaux d'Isidori [3] et les apports bénéfiques de la géométrie différentielle. Un grand nombre de systèmes non linéaires peuvent être partiellement ou complètement transformés en systèmes possédant un comportement entrée-sortie ou entrée-état linéaire à travers le choix approprié d'une loi de commande par retour d'état non linéaire endogène. Lorsque les dynamiques des zéros sont stables, il est possible de transformer le système non linéaire en une chaîne d'intégrateurs. Après linéarisation, les techniques classiques des systèmes linéaires peuvent être appliquées. Cette approche a souvent été employée pour résoudre des problèmes pratiques de commande mais cette technique impose que le vecteur d'état soit mesuré et demande un modèle précis du procédé à commander. De plus, les propriétés de robustesse ne sont pas garanties face aux incertitudes paramétriques du modèle. En effet, cette technique est basée sur l'annulation exacte des termes non linéaires. Par conséquent, la présence d'incertitudes de modélisation sur les termes non linéaires rend l'annulation inexacte et l'équation entrée-sortie résultante non linéaire [1].

5.2. Backstepping

La technique du backstepping a fait son apparition dans les années 1990 par P. Kokotovic. L'historique du backstepping est résumé dans Krstic [4] et l'approche y est largement approfondie. La commande non linéaire avec linéarisation entrée-états ou entrée-sortie mène à l'annulation de non linéarités qui pourraient s'avérer utiles. Le backstepping est moins restrictif et n'oblige pas le système à devenir linéaire. L'idée fondamentale du backstepping est de synthétiser la loi de commande d'une manière récursive. Certaines composantes du vecteur d'état sont considérées comme des «commandes virtuelles» et des lois de commande intermédiaires sont élaborées. Le backstepping s'applique aux systèmes non linéaires triangulaires (strict feedback systems en anglais) [4].

5.3. La commande adaptative

L'origine de la commande adaptative remonte aux années 1950 : les automaticiens se sont vite aperçus en effet qu'un contrôleur avec des paramètres fixes n'était pas toujours capable d'assurer les performances voulues, par exemple dans le cas où les paramètres du système variaient avec le temps.

Parmi les stratégies de commande adaptative on distingue les méthodes directes comme par exemple la commande adaptative à modèle de référence (MRAC), dont l'objectif est de concevoir un modèle de référence dont les performances coïncident avec ceux du système en boucle fermée, la fonction de la commande est d'éliminer toute divergence entre la réponse du modèle et celle du système quelque soient le signal d'entrée et les conditions de perturbation (internes ou externes).

Les méthodes indirectes sont basées sur l'identification en temps réels du processus puis le placement de pôles.

Chaque méthode utilise des techniques différentes mais pour le même but l'annulation de l'erreur entre la consigne et la sortie de modèle [5] [6].

5.4. La commande prédictive

Le principe de la commande prédictive la rend séduisante pour de nombreuses applications que ce soit comme une commande linéaire ou non linéaire.

La commande prédictive à base de modèle a joué un rôle très important dans le domaine de contrôle de processus, elle est basée sur l'utilisation d'un modèle pour prédire le comportement future du système sur un horizon du temps fini.

Une séquence optimale des signaux de commande sur l'horizon de prédiction est obtenue par la minimisation d'un certain coût, le premier signal de la séquence de commande est transmis au processus et l'opération entière de « prédiction-optimisation » est répétée à chaque période d'échantillonnage.

Pour les systèmes non linéaires, cette approche implique un intervalle de temps considérable entre les actions de commande pour permettre la minimisation de la fonction du coût.

Différents algorithmes ont été proposés pour permettre une optimisation plus rapide, par exemple: la Programmation Dynamique (DP) et la Programmation séquentielle quadratique (SQP) [7].

5.5. La commande robuste

L'obtention d'un modèle exact du procédé n'est pas une tâche facile. Les imprécisions du modèle proviennent entre autre des incertitudes liées au procédé lui-même (paramètres mal connus ou difficilement identifiables) ou de l'oubli de certaines dynamiques du système ou même du choix de modélisation trop simplifié de certaines dynamiques. Les imprécisions sont classées en deux catégories: incertitudes paramétriques et dynamiques négligées. Le premier type entrera directement en jeu dans le modèle tandis que le second type porte sur l'ordre sous-estimé du système.

La commande robuste est une première technique de commande de l'automatique traitant ce genre de problème. Dans la synthèse de la loi de commande sont pris en compte un modèle nominal du procédé à contrôler mais aussi les incertitudes paramétriques liées au modèle. La structure du contrôleur robuste est finalement composée d'une partie «nominale» mais aussi de termes additionnels permettant de compenser au mieux les incertitudes liées au modèle [8].

5.6. La commande par mode glissant

La commande par mode glissant est une technique particulièrement intéressante. Elle remonte aux années 1970 avec les travaux d'Utkin [9]. Le principe consiste à amener, quelles que soient les conditions initiales, le point représentatif de l'évolution du système sur une hypersurface de l'espace de phase par l'intégration d'éléments de commutation dans la loi de commande. De plus, la commande garantit que le point représentatif du système atteint l'hypersurface en un temps fini. Le système se met en régime glissant lorsque ce point a atteint l'hypersurface, dite surface de glissement. Son comportement devient alors insensible aux perturbations sur la sortie et aux variations paramétriques. Néanmoins, les problèmes de «broutement» ou chattering inhérents à ce type de commande discontinue apparaissent rapidement. Notons que le chattering peut exciter des dynamiques haute-fréquence négligées menant parfois à l'instabilité. Des méthodes permettant de réduire ce phénomène ont été développées [8].

5.7. La commande floue

La logique floue, introduite par Lotfi Zadeh [10], a connu un succès considérable non seulement dans la modélisation mais aussi dans la commande de systèmes complexes non linéaires. Des applications utilisant les systèmes flous ont été développées dans des domaines variés : traitement d'images où la logique floue est utilisée pour améliorer les caractéristiques d'images numériques couleur (luminosité, teinte, brillance), robotique mobile….

Les modèles flous ont la propriété d'approximer n'importe quelle fonction non linéaire. L'avantage principal de la commande par logique floue est qu'il est possible de "se passer" d'un modèle explicite du procédé [8]. Cette approche est basée sur deux concepts : celui de la décomposition d'un univers de discours d'une ou de plusieurs variables mesurées sous forme de symboles linguistiques : «petit», «moyen», «grand»... et des règles provenant de l'expertise de l'opérateur humain, qui expriment, là aussi, sous forme d'un langage, comment doivent évoluer les commandes du système en fonction de la ou des variables observées :

«**Si** l'*erreur* **est** *positivement grande* **et** *la variation de l'erreur* **est** *positivement grande*

Alors la *variation de la commande* **est** *très négative*».

Les systèmes flous peuvent être classés en trois groupes : les systèmes flous linguistiques ou systèmes de Mamdani, les systèmes flous relationnels et les systèmes à conséquence fonctionnelle ou encore connus sous le nom de systèmes flous de type Takagi-Sugeno-Kang (TSK). Les contrôleurs flous de type TSK sont quasiment omniprésents dans la littérature relative à la commande floue mais nous retrouvons aussi les systèmes flous de Mamdani avec l'introduction des régulateurs flous à structure PID. Dans [11], Procyk et Mamdani introduisent le SOC : Self-Organized Controller, capable de contrôler une large variété de systèmes non linéaires.

6. Conclusion

Ce chapitre a été consacré d'une part à quelques rappels sur les propriétés générales des systèmes non linéaires, les éléments de base de la théorie de stabilité des systèmes non linéaires, et des différentes méthodes les plus utilisées pour la commande des systèmes non linéaires.

Parmis ces commandes, Nous nous intéressons dans ce mémoire à deux classes de commande. La première classe de commandes est développée en ex.Union soviétique par l'équipe du professeur S.V.Emelyanov (Utkin, Taran,Kosteyleva etc.) appelée commande par mode glissant. La seconde classe de commandes est plus récente, appelée commande à base de logique floue, elle est apparue en 1969 grâce aux travaux du mathématicien Lotfi Zadeh.