

Commande adaptative floue avec mode de glissement

1. Introduction

La commande d'un système non linéaire est une tâche difficile même quand le modèle dynamique du système est disponible. Ce problème de commande est d'autant plus difficile si le modèle dynamique est inconnu ou mal connu. Les progrès enregistrés ces deux dernières décennies dans la théorie de la commande des systèmes non linéaires ont donné naissance à certaines méthodes systématiques de synthèse de lois de commande non linéaires. Parmi ces méthodes, on trouve la technique de linéarisation entrée sortie permettant l'analyse et la synthèse de la commande pour une large classe de systèmes non linéaires [28]. Cependant, cette technique ne peut être utilisée que pour les systèmes non linéaires dont le modèle dynamique est connu avec exactitude. Pour pallier ce problème, plusieurs approches de commande adaptative ont été introduites [5], [6]. Parmi ces approches, la commande adaptative floue a connu un succès considérable [45]. Dans la plus part des approches de commande adaptative floue on utilise un terme de robustification, ce terme est une loi de commande par mode de glissement [5], [6], [46].

Dans ce chapitre, nous allons étudier la synthèse d'un contrôleur adaptatif flou par mode glissant pour une classe de systèmes non linéaires. Les systèmes flous sont utilisés pour estimer en ligne la dynamique du système et la loi de commande est synthétisée en se basant sur cette estimation. Le problème des erreurs de reconstruction est traité par l'introduction d'un terme de robustification de type mode glissant. Les lois de commande et les lois d'adaptation sont obtenues en utilisant la méthode de Lyapunov.

2. Commande par mode de glissement

Considérons le système mono-entrée mono-sortie décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} , & i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = f(X) + b(X)u(t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

Avec

Où $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T = [x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)]^T$ est le vecteur d'état. $u(t)$: est l'entrée de commande du système, $f(X)$ et $b(X)$ sont des fonctions non linéaires continues incertaines.

On suppose que le gain de commande $b(X)$ est différent de zéro pour tout x et de signe connu. Sans perte de généralité, il est supposé que $b(X) \geq \underline{b} > 0$ avec \underline{b} une constante donnée.

Soit la surface de glissement :

$$S(X) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i + x_n \quad \text{avec } c_i > 0, i = 1, \dots, n-1 \quad (\text{V.2})$$

A partir de l'équation (V.2), on déduit que pour $S(X) = 0$, nous avons une équation différentielle linéaire dont la solution implique la convergence vers zéro de $x(t)$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ [28].

L'objectif de la commande se simplifie à la synthèse d'un contrôleur garantissant la convergence vers zéro du signal $S(X)$.

La dérivée de la surface de glissement est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{S} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} + f(X) + b(X)u \quad (\text{V.3})$$

On désire assurer la condition d'attractivité ($S\dot{S} < 0$) de la surface $S(X)$. En utilisant (V.3), le calcul de $S\dot{S}$ donne :

$$S\dot{S} = S \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} + f(X) + b(X)u \right) \quad (\text{V.4})$$

Si les fonctions $f(X)$ et $b(X)$ sont connues, pour atteindre les objectifs de commande, on peut utiliser la loi de commande par mode de glissement suivante :

$$u = \frac{1}{b(X)} \left(- \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} - K \text{Sign}(S) - f(X) \right) \quad (\text{V.5})$$

En utilisant (V.3), (V.5) devient

$$\dot{S} = -K \text{Sign}(S) \quad (\text{V.6})$$

ce qui implique que $S(X) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, et par conséquent $x^{(i)}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ pour $i = 1, \dots, n-1$ [28].

La loi de commande (V.5) du système (V.1) peut être facilement implantée si $f(X)$ et $b(X)$ sont parfaitement connues. Ces fonctions étant généralement incertaines, le but est alors de les approcher par des systèmes flous.

3. Commande adaptative floue par mode glissant

Dans cette partie, notre tâche est d'utiliser les systèmes flous pour approcher les fonctions non linéaires $f(X)$ et $b(X)$. En utilisant les approximations floues, nous proposons des lois de commande avec leurs lois d'adaptation pour atteindre les objectifs de commande.

Les fonctions $f(X)$ et $b(X)$, peuvent être approximées en ligne en utilisant les systèmes flous définis comme suit :

$$\hat{f}(X, \theta_f) = w_f^T(X) \theta_f \quad (\text{V.7})$$

$$\hat{b}(X, \theta_b) = w_b^T(X) \theta_b \quad (\text{V.8})$$

avec $w_f(X)$ et $w_b(X)$ sont des vecteurs de fonctions floues de base supposées convenablement fixées à l'avance par l'utilisateur, θ_f et θ_b sont les vecteurs de paramètres à ajuster par un algorithme d'adaptation.

Les fonctions réelles $f(X)$ et $b(X)$ peuvent être approchées avec des systèmes d'inférence floue de la manière suivante :

$$f(X) = \hat{f}(X, \theta_f^*) \quad (\text{V.9})$$

$$b(X) = \hat{b}(X, \theta_b^*) \quad (\text{V.10})$$

avec θ_f^* et θ_b^* sont respectivement les valeurs optimales de θ_f et θ_b

$$\theta_f^* = \arg \min_{\theta_f} \left\{ \sup_X |f(X) - \hat{f}(X, \theta_f)| \right\} \quad (\text{V.11})$$

$$\theta_b^* = \arg \min_{\theta_b} \left\{ \sup_X |b(X) - \hat{b}(X, \theta_b)| \right\} \quad (\text{V.12})$$

Notons que les valeurs optimales θ_f^* et θ_b^* sont des constantes artificielles inconnues introduites uniquement pour faire l'étude théorique de la stabilité de l'algorithme de commande. En effet, la connaissance de leurs valeurs n'est pas nécessaire pour l'implantation des lois de commande adaptatives.

A partir de l'analyse ci-dessus, on peut écrire :

$$f(X) - \hat{f}(X, \theta_f) = w_f^T(X) \tilde{\theta}_f \quad (\text{V.13})$$

$$b(X) - \hat{b}(X, \theta_b) = w_b^T(X) \tilde{\theta}_b \quad (\text{V.14})$$

avec

$\tilde{\theta}_f = \theta_f^* - \theta_f$ et $\tilde{\theta}_b = \theta_b^* - \theta_b$: les erreurs d'estimation paramétrique.

3.1. Synthèse de la loi de commande

Considérons maintenant la loi de commande suivante :

$$u = \frac{1}{\hat{b}(X, \theta_b)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} - K \text{Sign}(S) - \hat{f}(X, \theta_f) \right) \quad (\text{V.15})$$

Cette loi de commande résulte de (V.5) en remplaçant les fonctions $f(X)$ et $b(X)$ par leurs approximations floues $\hat{f}(X, \theta_f)$ et $\hat{b}(X, \theta_b)$ et elle ne peut garantir à elle seule la stabilité du système bouclé. Ceci est dû, d'une part, à l'existence des erreurs d'approximation et, d'autre part, au fait que cette loi de commande n'est pas défini lorsque $\hat{b}(X, \theta_b) = 0$. Pour traiter le problème des erreurs d'approximation, on a ajouté un terme de robustification à la loi de commande équivalente, et pour éviter la division par zéro lors du processus d'adaptation des paramètres θ_b , soit on modifie sa loi d'adaptation soit on modifie carrément la loi de commande. Dans ce qui suit, nous montrons comment modifier la loi de commande pour surmonter ces problèmes.

La loi de commande est donnée par :

$$u = u_{af} + u_n \quad (\text{V.16})$$

La loi de commande (V.16) est la somme de deux termes : un terme de commande adaptative floue u_{af} , utilisé pour compenser les non-linéarités du système, et un terme de robustification de type mode glissant u_n , introduit pour pallier le problème des erreurs d'approximation.

Le terme adaptatif flou est défini comme suit :

$$u_{af} = \frac{1}{\hat{b}(X, \theta_b)} \left(-\hat{f}(X, \theta_f) - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} \right) \quad (\text{V.17})$$

et le terme de robustification par mode de glissement u_n est donné par :

$$u_n = -K \text{Sign}(S) \quad (\text{V.18})$$

avec K une constante positive.

Les paramètres du contrôleur flou sont adaptés par les lois d'adaptations suivantes [5] :

$$\dot{\theta}_f = -\eta_f w_f(X) S \quad (\text{V.19})$$

$$\dot{\theta}_b = -\eta_b w_b(X) u_{af} S \quad (\text{V.20})$$

avec $\eta_f > 0$ et $\eta_b > 0$.

L'inconvénient de cette loi de commande est que la loi de commande n'est pas définie pour $\hat{b}(X, \theta_b) = 0$. Pour résoudre le problème de division par zéro dans la loi de commande, nous utilisons une nouvelle loi de commande bien définie garantissant les objectifs de commande. Cette loi de commande est donnée par

$$u = u_{af} + u_n \quad (\text{V.21})$$

Le terme adaptatif flou u_{af} est donné par :

$$u_{af} = \frac{\hat{b}(X, \theta_b)}{\varepsilon_0 + \hat{b}^2(X, \theta_b)} \left(-\hat{f}(X, \theta_f) - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} - \beta \hat{b}(X, \theta_b) S \right) \quad (\text{V.22})$$

avec ε_0 une constante positive petite et $\beta > 0$.

Le terme robuste u_n est défini comme suit :

$$u_n = -\frac{1}{\underline{b}} \left(K - |\underline{u}| \right) \text{Sign}(S) \quad (\text{V.23})$$

et

$$\bar{u} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \hat{b}^2(X, \theta_b)} \left(-\hat{f}(X, \theta_f) - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} - \beta \hat{b}(X, \theta_b) S \right) \quad (\text{V.24})$$

L'estimation des paramètres est faite par les lois d'adaptation suivantes :

$$\dot{\theta}_f = \eta_f w_f(X) S \quad (\text{V.25})$$

$$\dot{\theta}_b = \eta_b w_b(X) S (u_{af} - \beta S) \quad (\text{V.26})$$

avec $\eta_f > 0$, $\eta_b > 0$.

3.2. Analyse de la stabilité

Pour étudier la stabilité du système en utilisant de la loi de commande (V.22), on utilise la méthode de Lyapunov.

A partir de (V.22) et (V.24), on obtient la relation

$$\hat{b}(X, \theta_b) u_{af} = -\hat{f}(X, \theta_f) - \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{i+1} - \beta \hat{b}(X, \theta_b) S - \bar{u} \quad (\text{V.27})$$

En utilisant les équations (V.21) et (V.22) et (V.27), la dérivée de la surface de glissement peut être réécrite sous la forme

$$\dot{S} = (f(X) - \hat{f}(X, \theta_f)) + (b(X) - \hat{b}(X, \theta_b)) u_{af} + b(X) u_n - \beta b(X, \theta_b) S - \bar{u} \quad (\text{V.28})$$

En ajoutant et en retranchant le terme $\beta \hat{b}(X, \theta_b^*) S$, l'équation (V.28) devient

$$\dot{S} = w_f^T(X) \tilde{\theta}_f + w_b^T(X) \tilde{\theta}_b (u_{af} - \beta S) + b(X) u_n - \beta \hat{b}(X, \theta_b^*) S - \bar{u} \quad (\text{V.29})$$

Considérons maintenant la fonction candidate de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} S^2 + \frac{1}{2\eta_f} \tilde{\theta}_f^T \tilde{\theta}_f + \frac{1}{2\eta_b} \tilde{\theta}_b^T \tilde{\theta}_b \quad (\text{V.30})$$

dont la dérivée temporelle est

$$\dot{V} = S \dot{S} - \frac{1}{\eta_f} \tilde{\theta}_f^T \dot{\tilde{\theta}}_f - \frac{1}{\eta_b} \tilde{\theta}_b^T \dot{\tilde{\theta}}_b \quad (\text{V.31})$$

A partir de (V.29), (V.31) devient

$$\dot{V} = Sw_f^T(X)\tilde{\theta}_f + Sw_b^T(X)\tilde{\theta}_b(u_{af} - \beta S) + Sb(X)u_n - \beta\hat{b}(X, \theta_b^*)S^2 - S\bar{u} - \frac{1}{\eta_f}\tilde{\theta}_f^T\dot{\theta}_f - \frac{1}{\eta_b}\tilde{\theta}_b^T\dot{\theta}_b$$

(V.32)

A partir de (V.25) et (V.26), on a

$$w_f^T(X)\tilde{\theta}_f S - \frac{1}{\eta_f}\tilde{\theta}_f^T\dot{\theta}_f = 0 \quad (V.33)$$

$$w_b^T(X)\tilde{\theta}_b S(u_{af} - \beta S) - \frac{1}{\eta_b}\tilde{\theta}_b^T\dot{\theta}_b = 0 \quad (V.34)$$

Ce qui implique :

$$\dot{V} = Sb(X)u_n - \beta\hat{b}(X, \theta_b^*)S^2 - S\bar{u} \quad (V.35)$$

En utilisant (V.23), (V.35) devient

$$\dot{V} = -K|S| - \beta\hat{b}(X, \theta_b^*)S^2 \quad (V.36)$$

Puisqu'on a supposé que $b(X) \geq \underline{b}$, il est alors raisonnable de supposer que $\hat{b}(X, \theta_b^*) > 0$ et, de ce fait, (V.36) peut être simplifiée à

$$\dot{V} \leq -K|S|. \quad (V.37)$$

$$\dot{V} \leq 0.$$

Remarque 5.1 : Le terme de robustification par mode de glissement donné par (V.23) peut être lissé par le remplacement de la fonction discontinue $Sign(S)$ par la fonction continue $Sat\left(\frac{S}{\Phi}\right)$, où Φ est une constante positive. Dans ce cas, on ne peut qu'assurer la convergence de l'erreur de poursuite dans un voisinage autour de zéro.

Remarque 5.2 : Pour avoir une loi de commande bien définie même lorsque $\hat{b}(X, \theta_b) = 0$,

nous avons remplacé $\hat{b}^{-1}(X, \theta_b)$ par $\frac{\hat{b}(X, \theta_b)}{\varepsilon_0 + \hat{b}^2(X, \theta_b)}$.

Remarque 5.3 : Le terme $\beta\hat{b}(X, \theta_b)S$ dans (V.22), est ajouté pour avoir une nouvelle loi d'adaptation pour les paramètres θ_b (équation (V.20)). En fait, cette loi permet l'initialisation

des paramètres θ_b par zéro. Ceci est un avantage, car dans ce cas on n'a pas besoin de connaissances a priori sur les valeurs optimales de θ_b . Effectivement, on peut remarquer que si $\beta = 0$ et $\theta_b(0) = 0$, on a $u_{af} = 0$, $\dot{\theta}_b = 0$ et $\theta_b = 0, \forall t$.

4. Exemple de simulation

Pour illustrer les performances de la méthode de commande étudiée, nous considérons la commande d'un pendule inversé représenté par la figure III.12. Son modèle dynamique est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(X) + b(X)u(t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{V.38})$$

Avec

$$f(X) = \frac{g \sin x_1 - \frac{m_p L x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_p + m_c}}{L \left(\frac{4}{3} - \frac{m_p \cos x_1^2}{m_p + m_c} \right)} \quad (\text{V.39})$$

$$b(X) = \frac{\frac{\cos x_1}{m_p + m_c}}{L \left(\frac{4}{3} - \frac{m_p \cos x_1^2}{m_p + m_c} \right)} \quad (\text{V.40})$$

$x_1 = \theta$ est l'angle du pendule et x_2 la vitesse angulaire.

Notons que les fonctions non linéaires $f(X)$ et $b(X)$ sont supposées inconnues. Dans cet exemple de simulation, les valeurs suivantes sont utilisées :

$$m_p = 0.1 \text{ kg}, m_c = 1 \text{ kg}, m_t = m_c + m_p, L = 0.5 \text{ m}, g = 9.81 \text{ m/s}^2.$$

Chacune des fonctions (V.39) et (V.40) est approchée par un système flou, et chaque système flou a pour entrée les variables x_1 et x_2 . Bien que $b(X)$ est fonction seulement de x_1 , nous utilisons un système flou avec les entrées x_1 et x_2 car la forme de la fonction est supposée inconnue. Pour chaque variable d'entrée, on définit cinq fonctions d'appartenance Gaussiennes comme suit :

$$\mu_{F_i^1}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x_i \leq -1.25 \\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i + 1.25}{0.3}\right)^2\right\} & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\mu_{F_i^2}(x_i) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i + 0.625}{0.3}\right)^2\right\}, \mu_{F_i^3}(x_i) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{0.3}\right)^2\right\},$$

$$\mu_{F_i^4}(x_i) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - 0.625}{0.3}\right)^2\right\}$$

$$\mu_{F_i^5}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x_i \geq 1.25 \\ \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - 1.25}{0.3}\right)^2\right\} & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Chaque système flou a une base de règles de 25 règles.

Les paramètres de synthèse sont choisis comme suit :

$$\eta_f = 0.05, \eta_b = 0.05, \theta_f(0) = 0, \theta_b(0) = 0.5, \varepsilon_0 = 0.01, \underline{b} = 0.1, K = 10, c_1 = 3, \beta = 10, \Phi = 2.5.$$

Les résultats de simulation, la position angulaire, $y = x_1$, la vitesse angulaire, $\dot{y} = x_2$, la commande, u , la surface de glissement, S , plan de phase, sont représentées sur les figures V.1-V.5 pour la condition initiale $x(0) = [1.0, 0]^T$:

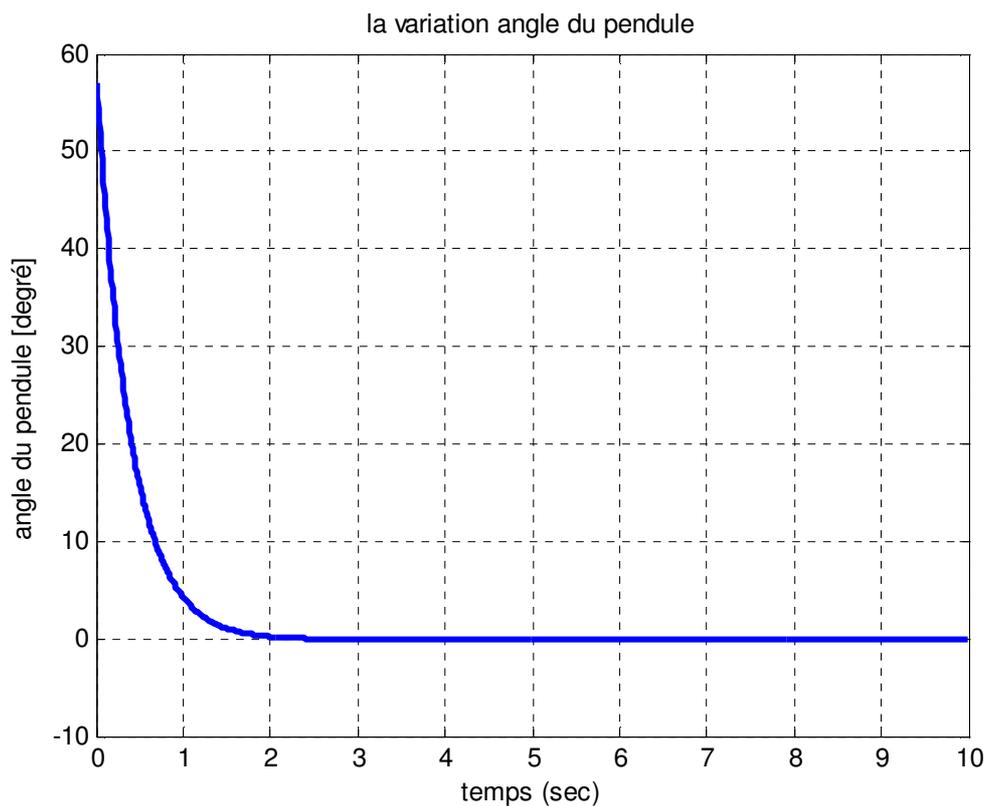


Figure V.1. Variation de la sortie (position du pendule).

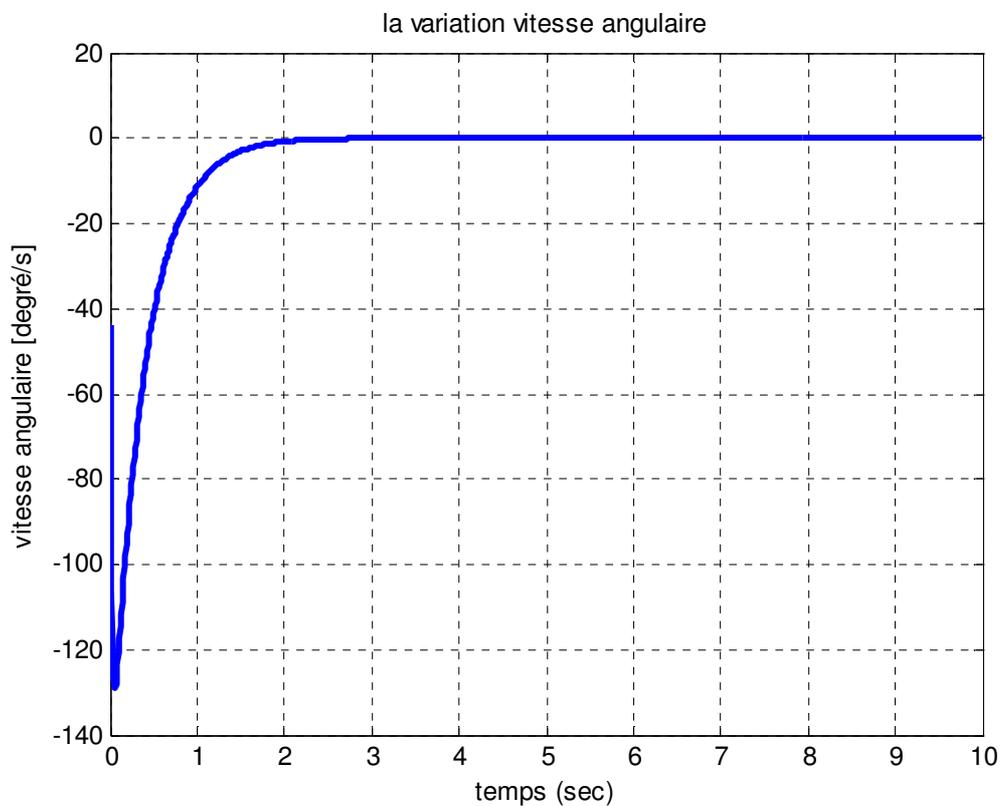


Figure V.2. Variation de la vitesse angulaire.

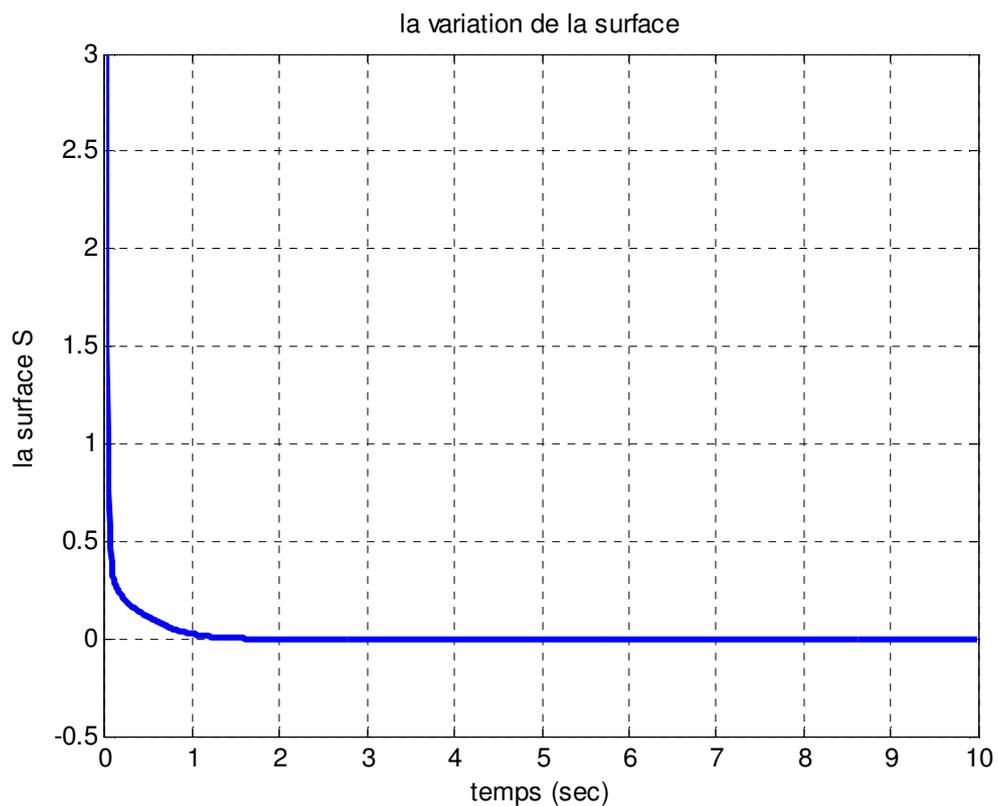


Figure V.3. Variation de la surface de glissement.

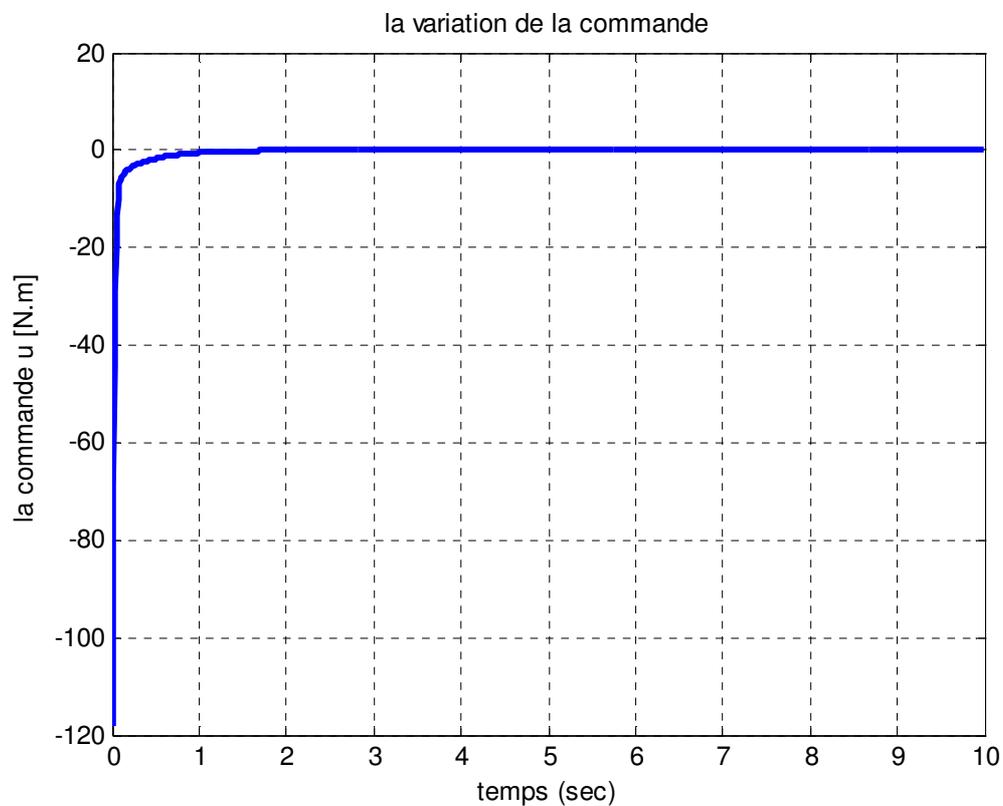


Figure . V.4. Variation de la commande.

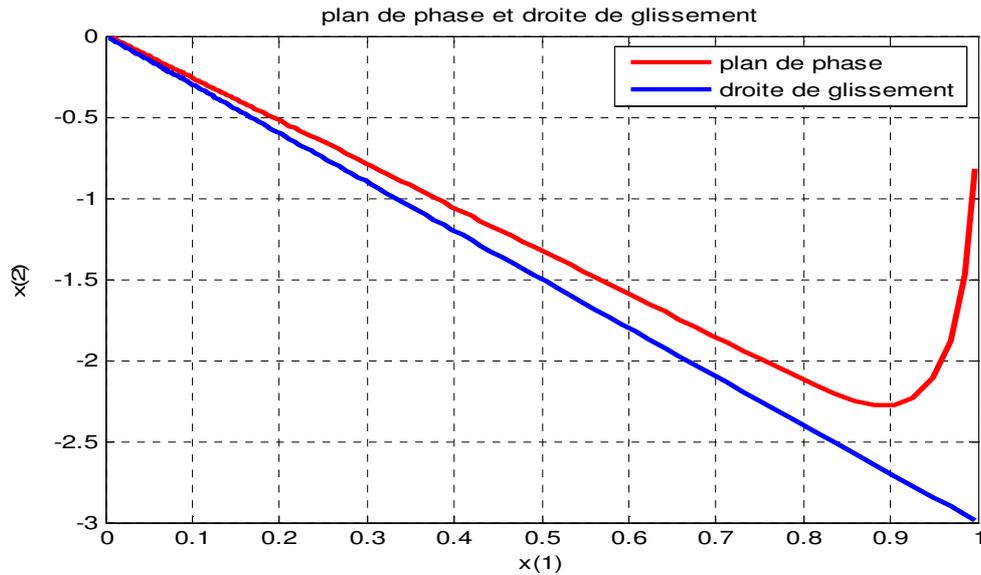


Figure . V.5. plan de phase et la droite de glissement.

Les résultats de simulation de la position, θ , et de la vitesse, $\dot{\theta}$, sont donnés respectivement Figures V.1 et V.2. La surface de glissement, S , et la commande u sont montrés sur les Figures V.3. et V.4., le plan de phase dans la Figure V.5. On remarque que les trajectoires réelles convergent vers leurs point d'équilibre, la surface de glissement tendre vers zéro, la commande c'est une commande continue et réelle et le plan de phase à l'origine dans le régime permanent.

Les figures V.6- V.10 représentent les résultats obtenus pour une variation paramétrique de 50% et de perturbation externe $d(t) = \sin(t)$ à partir à l'instant $t = 2s$

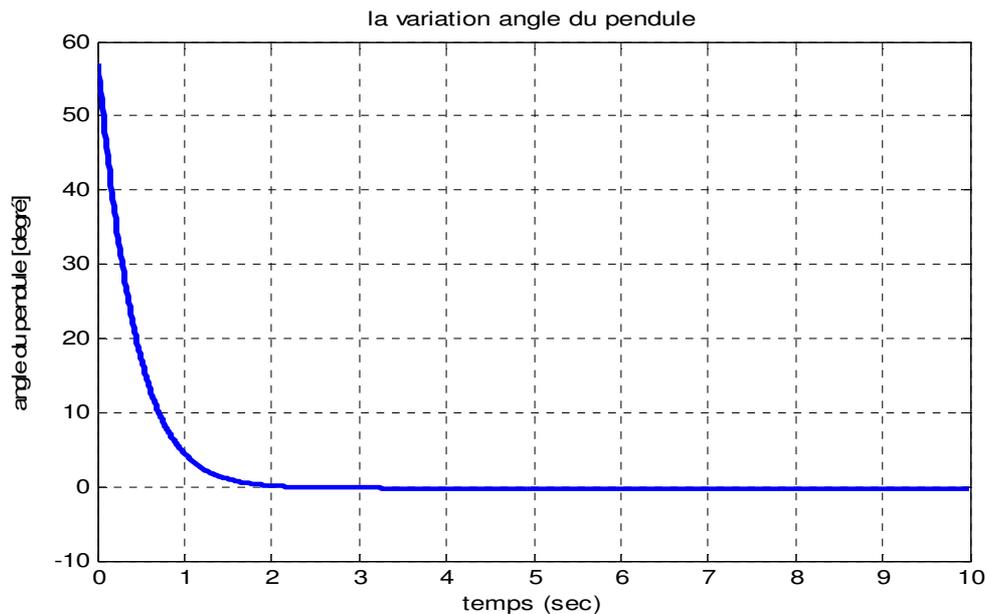


Figure V.6. Variation de la sortie (position du pendule).

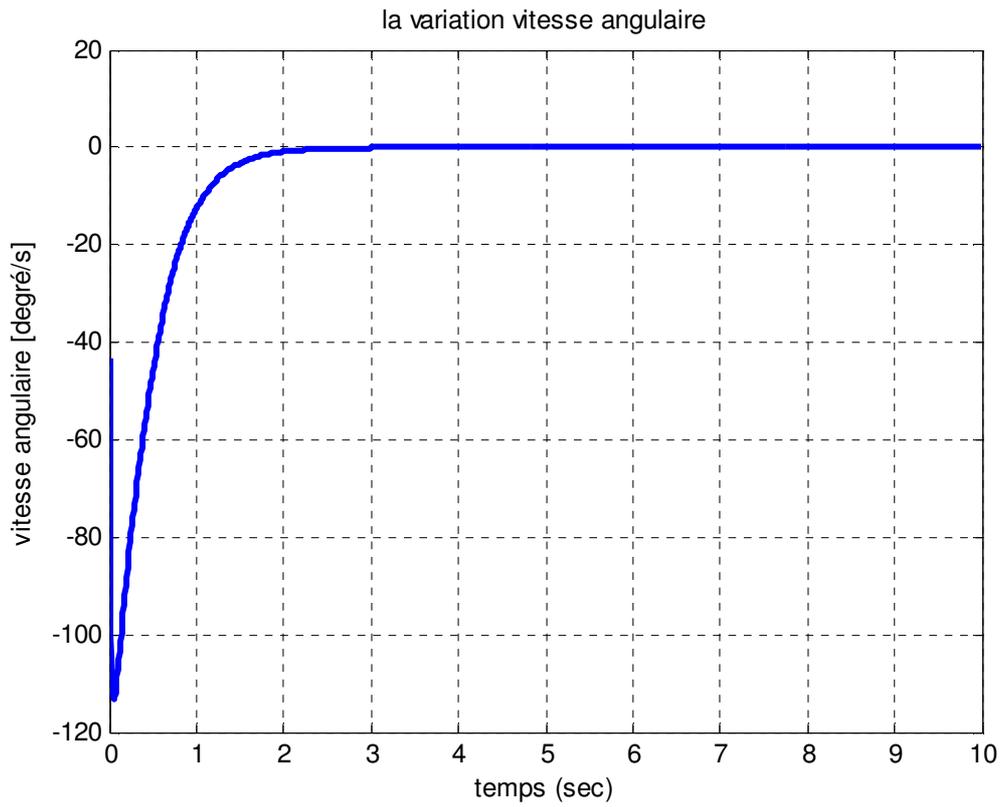


Figure V.7. Variation de la vitesse angulaire.

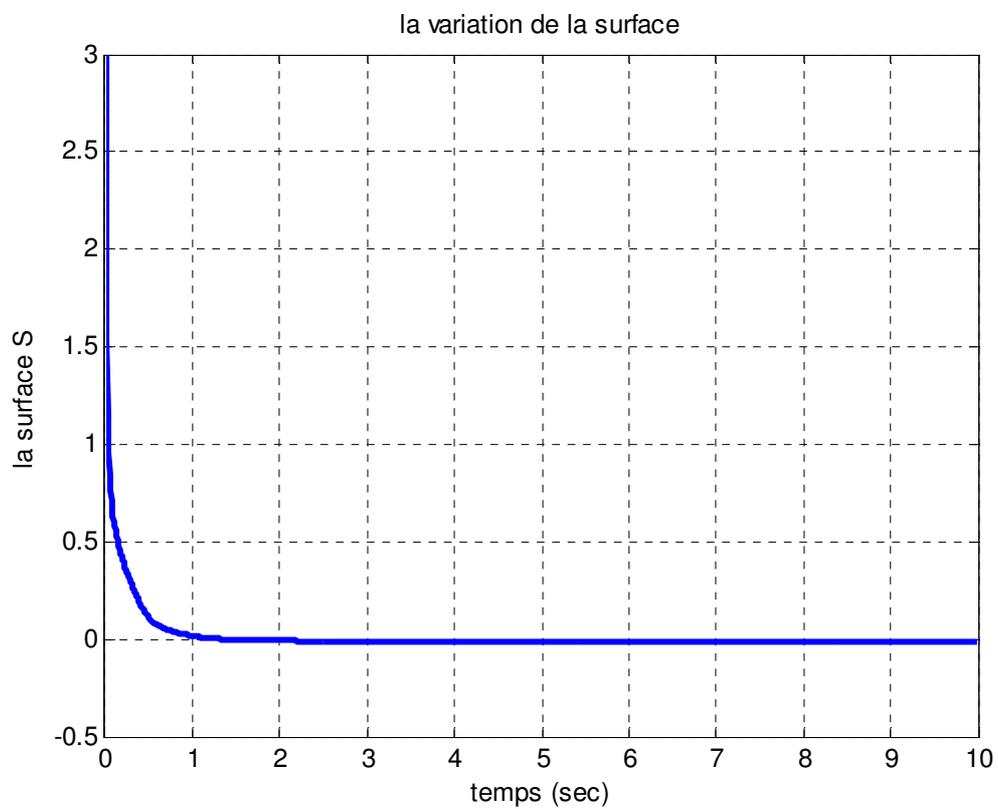


Figure V.8. Variation de la surface de glissement.

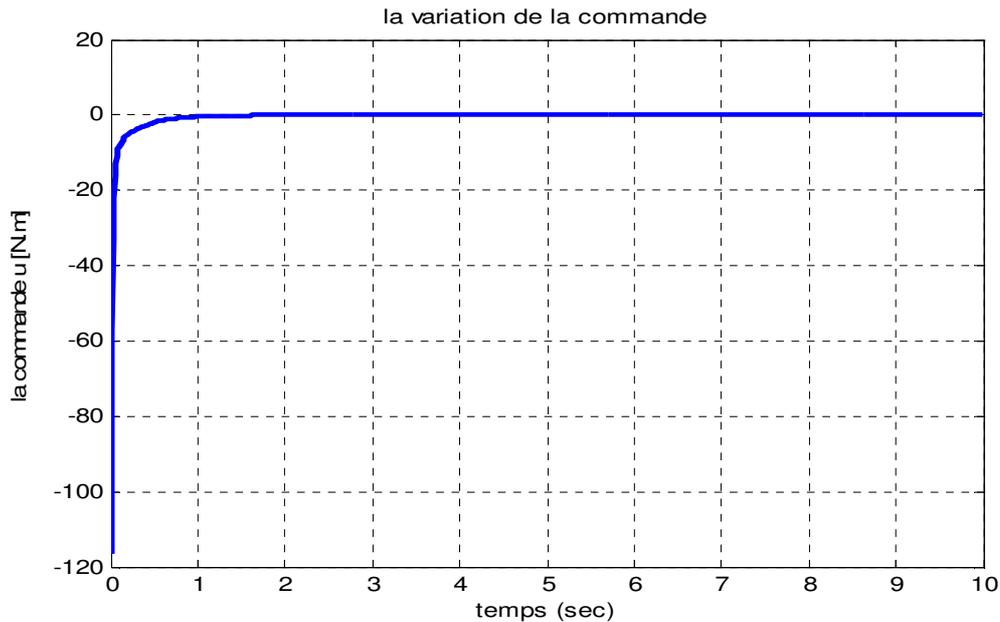


Figure V.9. Variation de la commande.

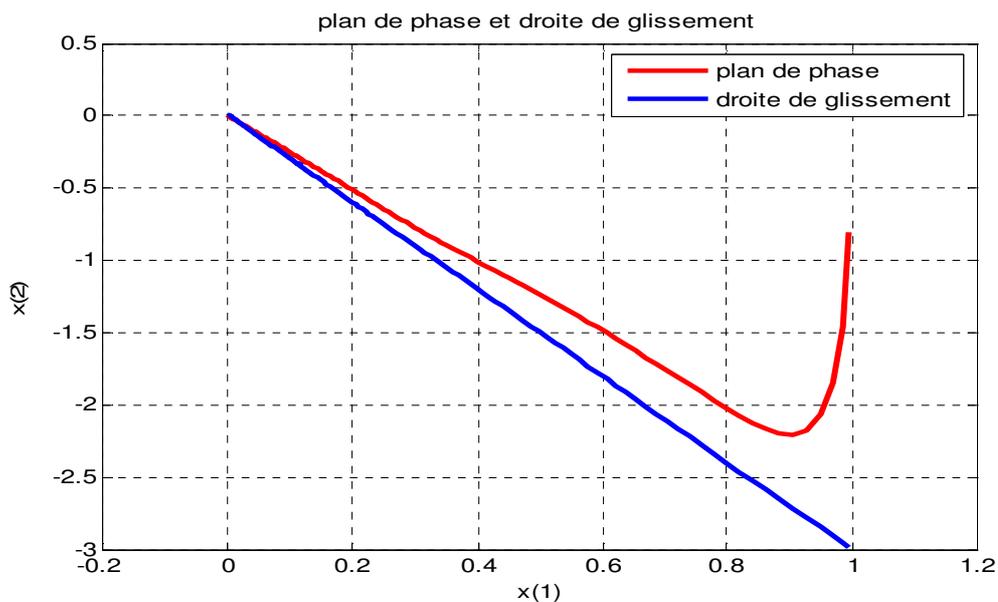


Figure V.10. plan de phase et la droite de glissement.

Les résultats de simulation de la position, θ , et de la vitesse, $\dot{\theta}$, sont donnés respectivement Figures V.6 et V.7. La surface de glissement, S , et la commande u sont montrés sur les Figures V.8. et V.9., le plan de phase dans la Figure V.10. On remarque que les trajectoires réelles convergent vers leurs point d'équilibre, la surface de glissement tendre vers zéro, la commande c'est une commande continue et réelle, plan de phase à l'origine dans le régime permanent et montrent l'efficacité de cette technique et la robustesse vis -à-vis des perturbations et des incertitudes du modèle.

Les figures V.11-V.15 représentent les résultats obtenus pour la poursuite du vecteur d'état désiré suivant :

$$\theta_d(t) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)t\right) \text{ et } \dot{\theta}_d(t) = \left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)t\right)$$

Les résultats de simulation, la position du pendule réelle et consigne, θ et θ_d , la vitesse du pendule réelle et consigne, $\dot{\theta}$ et $\dot{\theta}_d$, la commande, u et u_r , la surface de glissement, S , plan de phase, sont représentées sur les figures V.11-V.15 pour la condition initiale $x(0) = [1.0, 0]^T$. Les paramètres de synthèse sont choisis comme suit :

$\eta_f = 0.001$, $\eta_b = 0.001$, $\theta_f(0) = 0$, $\theta_b(0) = 0.5$, $\varepsilon_0 = 0.1$, $\underline{b} = 0.1$, $K = 10$, $c_1 = 10$, $\beta = 20$, $\Phi = 2.5$.

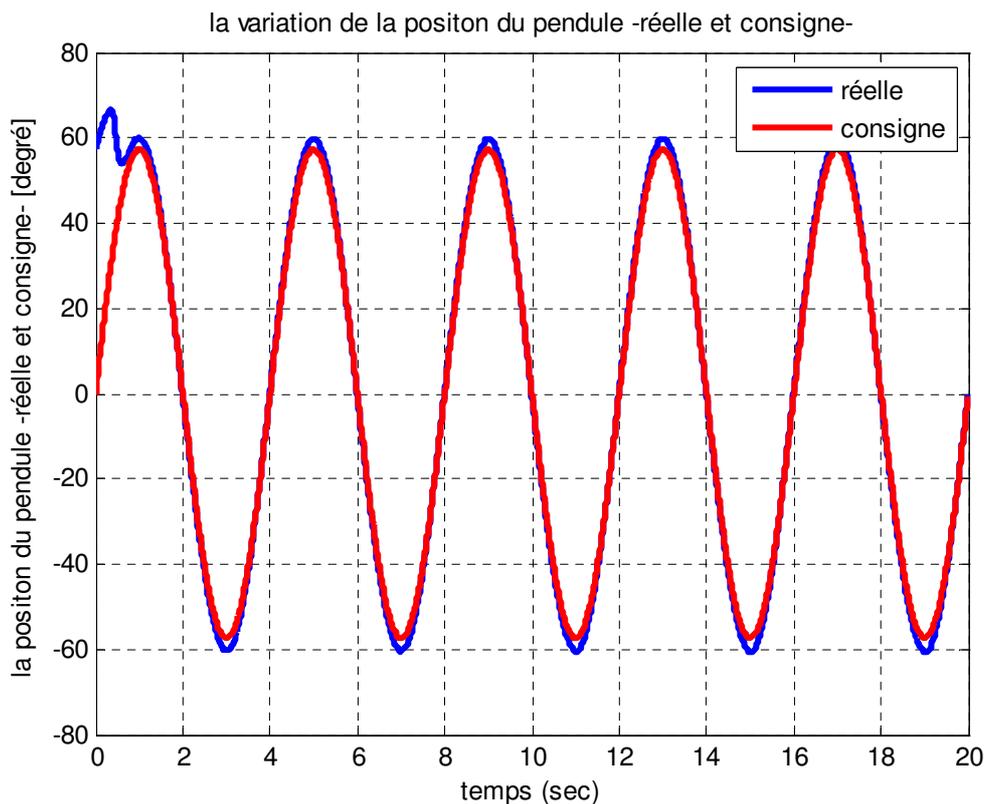


Figure V.11. Variation de la position du pendule (réelle et consigne).

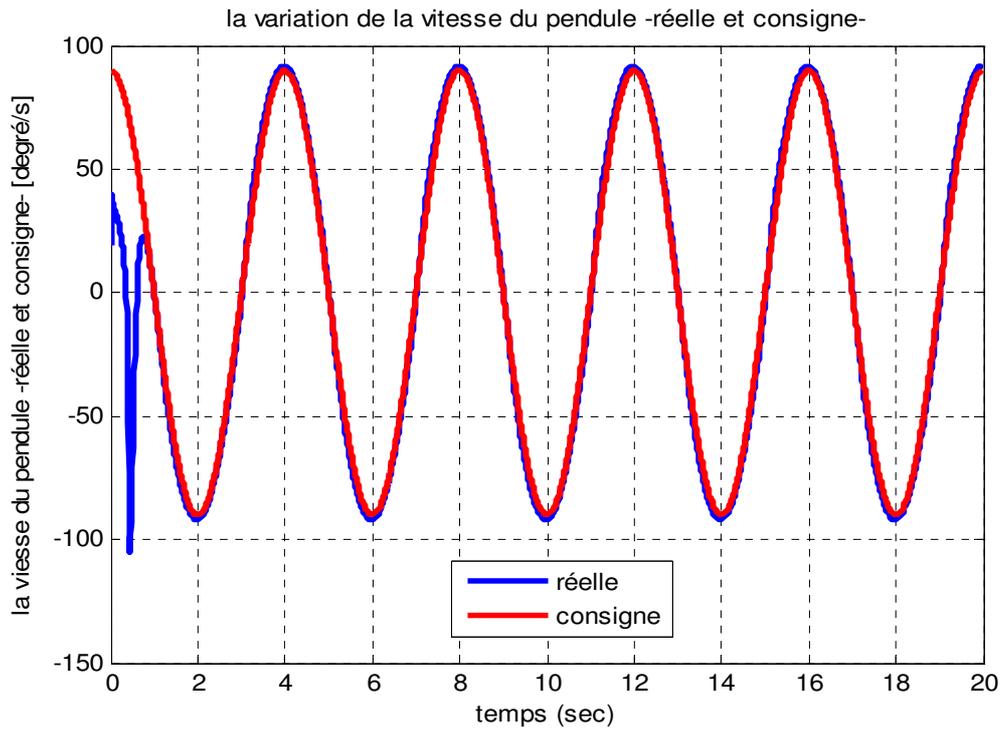


Figure V.12. Variation de la vitesse du pendule (réelle et consigne).

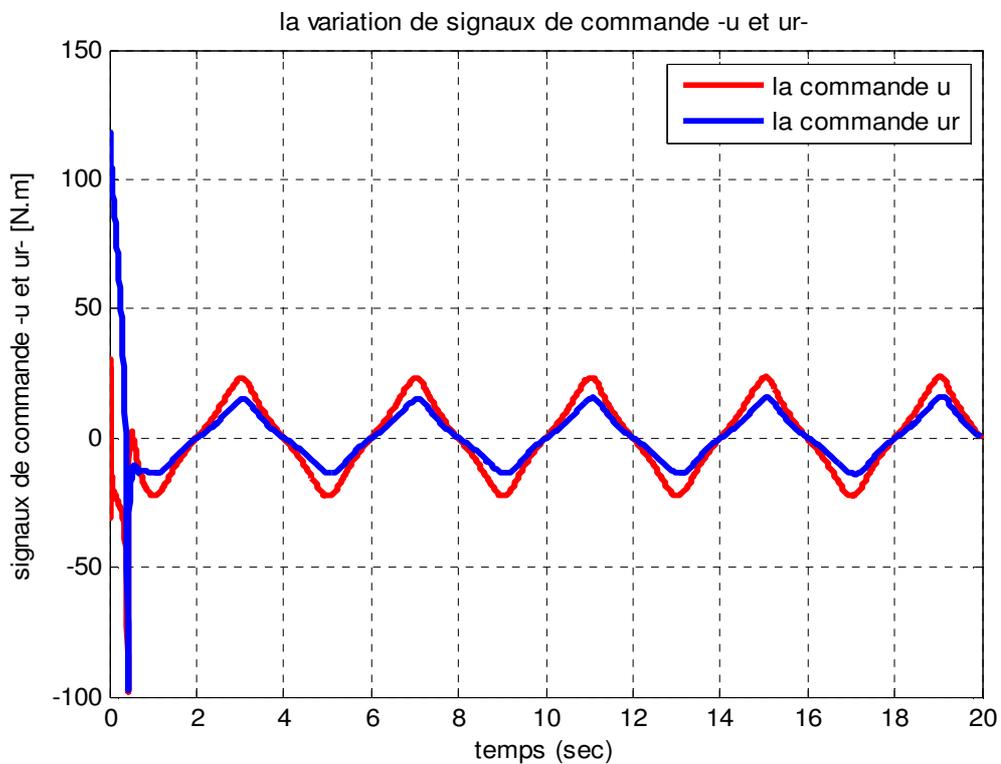


Figure V.13. Variation de la commande (u et u_r).

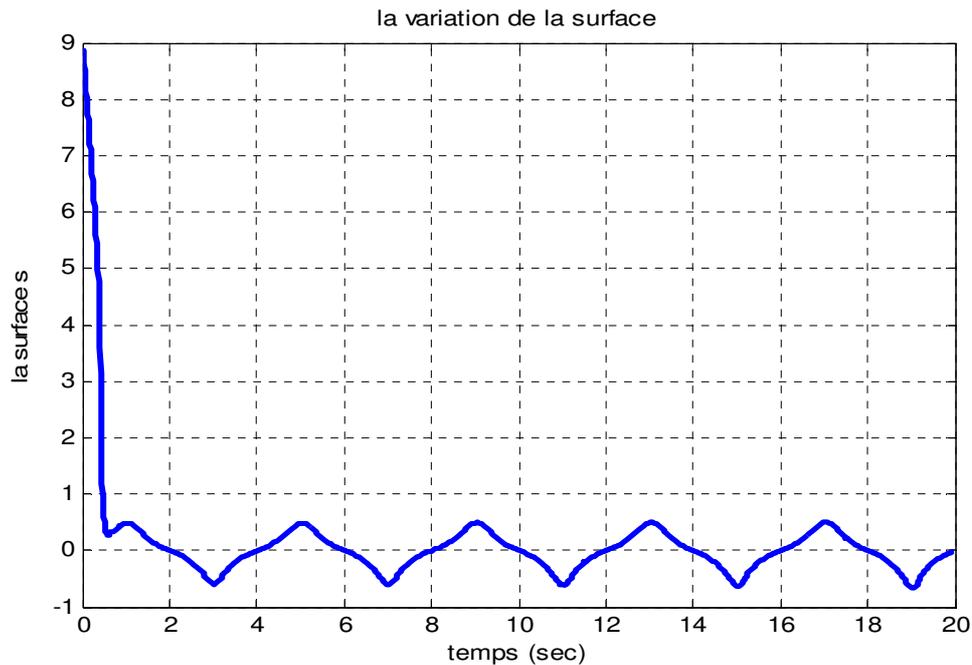


Figure V.14. Variation de la surface de glissement.

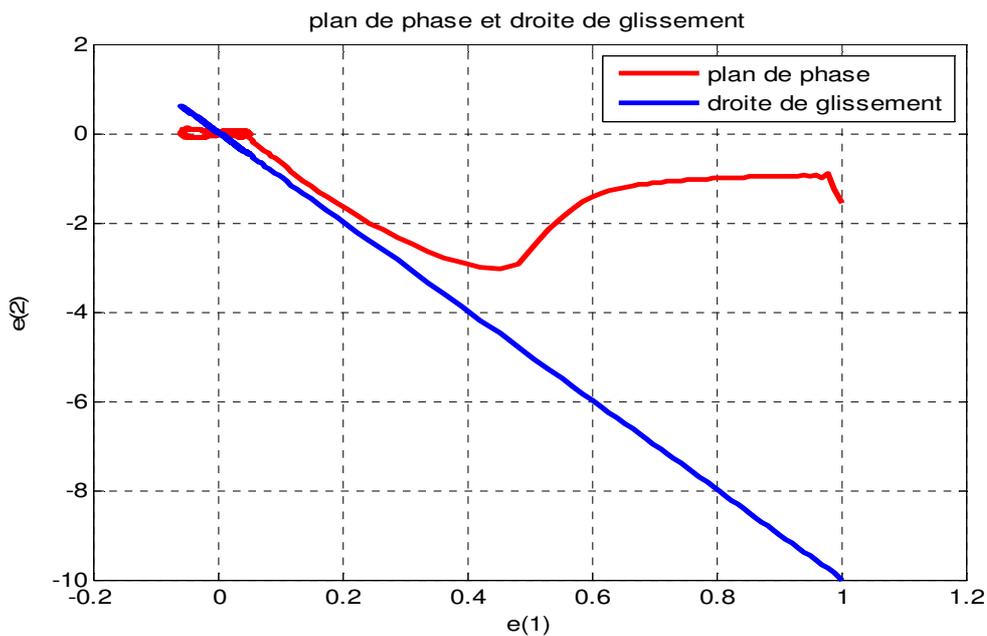


Figure V.15. plan de phase et la droite de glissement.

Les résultats de simulation de la position (réelle et consigne), θ et θ_d , et de la vitesse (réelle et consigne), $\dot{\theta}$ et $\dot{\theta}_d$, sont donnés respectivement Figures V.1 et V.2. La surface de glissement, S , et la commande, u et u_r , sont montrés sur les Figures V.3. et V.4., le plan de phase dans la Figure V.5. On remarque que les trajectoires réelles convergent vers les trajectoires désirées.

5. Conclusion

Une approche de commande adaptative floue par mode de glissement pour une classe de systèmes non linéaires a été étudiée. Le principe de cette approche est l'utilisation des systèmes flous adaptatifs pour l'approximation de la dynamique inconnue des systèmes non linéaires. Ces approximations sont utilisées ensuite dans une loi de commande par mode glissant. Les lois d'adaptation des paramètres des systèmes flous sont obtenus en utilisant la méthode de Lyapunov.

La stabilité du système en boucle fermée est assurée en utilisant l'approche de Lyapunov. L'avantage de cette approche est sa simplicité de mise en oeuvre car, aucune information sur le comportement dynamique du système n'est nécessaire pour l'implantation de la loi de commande.

Les résultats de simulations obtenus montrent l'efficacité de cette technique et la robustesse vis -à-vis des perturbations et des incertitudes du modèle.