

## IV.1 Introduction

Durant les deux dernières dizaines d'années la méthode d'éléments finis a été établie comme un outil très performant pour la résolution des systèmes d'analyse des structures et les sciences d'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermiques...) permettent de décrire le comportement de système physique grâce à des équations aux dérivées partielles, la méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations.

Elle constitue un outil de travail efficace, ce qui permet de traiter les équations différentielles les plus compliquées pour des formes géométriques et conditions limites délicates.

## IV.2 Éléments utilisés

Pour effectuer nos études du flambage mécanique après la formulation en élément fini de ces plaques nous avons choisi comme élément rectangulaire de 24 degrés de liberté.

La figure (IV-1) montre la géométrie de élément rectangulaire utilisé, de les dimensions a et b, et l'épaisseur t.

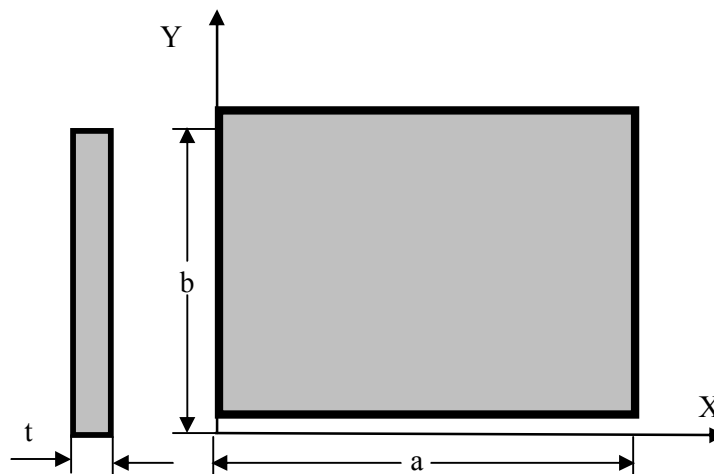


Fig. IV-1 Élément Plaque rectangulaire.

## IV.3 Fonctions des déplacements des éléments

L'élément possède quatre (4) nœuds de 6 degrés de liberté chacun, ces degrés de liberté sont

- Deux degrés dans le plan (X, Y) qui sont u et v.
- Quatre hors plan qui sont  $w, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$ , ces déplacements sont montrés sur la

figure (IV-2). Les fonctions des déplacements pour les déplacements dans le plan sont bilinéaires et pour les déplacements hors plan sont cubiques.

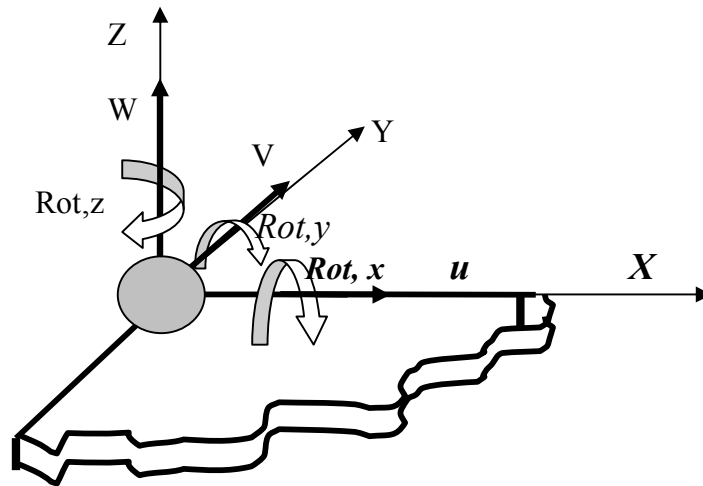


Fig.IV-2 : Les déplacements possible de chaque nœud de l'élément.

Les fonctions des déplacements sont données en fonction des coordonnées généralisées par les relations suivantes [2] :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\ v(x, y) &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \end{aligned} \quad \text{IV.1}$$

Et

$$\begin{aligned} w(x, y) &= c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 xy + c_6 y^2 + c_7 x^3 \\ &+ c_8 x^2 y + c_9 xy^2 + c_{10} y^3 + c_{11} x^3 y + c_{12} x^2 y^2 \\ &+ c_{13} xy^3 + c_{14} x^3 y^2 + c_{15} x^2 y^3 + c_{16} x^3 y^3 \end{aligned} \quad \text{IV.2}$$

Ou à l'aide des variables nodales par :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=1}^4 L_i(x, y) u_i = \frac{1}{ab} [ (a-x)(b-y)u_1 + x(b-y)u_2 + xyu_3 + (a-x)yu_4 ] \\ v(x, y) &= \sum_{i=1}^4 L_i(x, y) v_i = \frac{1}{ab} [ (a-x)(b-y)v_1 + x(b-y)v_2 + xyv_3 + (a-x)yv_4 ] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= \sum_{i=4}^{20} L_i(x, y) \\
&= \frac{1}{a^3 b^3} \left[ (a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(b^3 + 2y^3 - 3by^2)w_1 + ax(x-a)^2(b^3 + 2y^3 - 3by^2) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 \right. \\
&\quad \left. + by(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(y-b)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_1 + abxy(x-a)^2(y-b)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_1 \right. \\
&\quad \left. + (3ax^2 - 2x^3)(b^3 + 2y^3 - 3by^2)w_2 + a(x^3 - ax^2)(b^3 + 2y^3 - 3by^2) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_2 \right. \\
&\quad \left. + by(3ax^2 - ax^3)(y-b)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_2 + abxy(x^2 - ax)(y-b)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_2 \right. \\
&\quad \left. + (3ax^2 - 2x^3)(3by^2 - 2y^3)w_3 + a(x^3 - ax^2)(3by^2 - 2y^3) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_3 \right. \\
&\quad \left. + b(3ax^2 - 2x^3)(y^3 - by^2) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_3 + abxy(x^2 - ax)(y^2 - by) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_3 \right. \\
&\quad \left. + (a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(3by^2 - 2y^3)w_4 + ax(x-a)^2(3by^2 - 2y^3) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_4 \right. \\
&\quad \left. + b(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(y^3 - by^2) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_4 + abxy(x-a)^2(y^2 - by) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_4 \right]
\end{aligned}$$

Ou sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_u] & 0 \\ [L_v] & 0 \\ 0 & [L_w] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_m \\ a_f \end{Bmatrix} = [L_{uvw}] \{q\} \quad \text{IV.3}$$

$$[a_m] = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]$$

$$[a_b] = [w_1 \quad \dots \quad w_4 \quad w_{,x1} \quad \dots \quad w_{,x4} \quad w_{,y1} \quad \dots \quad w_{,y4} \quad w_{,xy1} \quad \dots \quad w_{,xy4}]$$

En outre, les fonctions de forme de déplacement ont été rassemblées dans des vecteurs :

$$\begin{aligned}
[L_u] &= [L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\
[L_v] &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4] \\
[L_w] &= [L_5 \quad L_6 \quad L_7 \quad \dots \quad L_{19} \quad L_{20}]
\end{aligned}$$

### IV.3.1 Vecteurs des déformations

Les déformations de membrane et de flexion peuvent être écrites en termes de déplacements nodaux et des fonctions d'interpolation de déplacements:

$$\{\varepsilon_L^0\} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [L_{u,x}] \\ [L_{v,y}] \\ [L_{u,y}] + [L_{v,x}] \end{Bmatrix} \{q\} = [S_\varepsilon] \{q\} \quad \text{IV.4}$$

$$\{k\} = - \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} [L_{w,xx}] \\ [L_{w,yy}] \\ 2[L_{w,xy}] \end{Bmatrix} \{q\} = [S_K] \{q\} \quad \text{IV.5}$$

Où  $[S_\varepsilon]$  et  $[S_K]$  sont deux matrices de dimensions (3x24), avec  $[S_\varepsilon]$  est la matrice qui relie les déformations dans le plan au vecteur des déplacements.

On a aussi :

$$\{\varepsilon_{nL}^0\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_{,x}^2 \\ w_{,y}^2 \\ 2w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 \\ 0 & w_{,y} \\ w_{,y} & w_{,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} \quad \text{IV.6}$$

Avec :

$$\begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = [G] \{q\}$$

$$\{G\} = \begin{Bmatrix} [L_{w,x}] \\ [L_{w,y}] \end{Bmatrix}$$

Où  $\{G\}$  est de dimension (2x24) et qui relie les déformations ou vecteur déplacements.

Ainsi, la déformation non linéaire de flexion peut être écrite comme suit:

$$\{\varepsilon_{nL}^0\} = \frac{1}{2} [G] \{q\} \quad \text{IV.7}$$

En fin

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{k\} \quad \text{IV.8}$$

$$\{\varepsilon^0\} = \{\varepsilon_L^0\} + \{\varepsilon_{nl}^0\} \quad \text{IV.9}$$

### IV.3.3 Vecteurs des efforts et moments résultants

Il est utile d'écrire les efforts résultantes au niveau du plan moyen d'un stratifié et qui sont données comme suit :

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{IV.10}$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \tag{IV.11}$$

En fin nous pouvons écrire la relation sous forme matricielle qu'elle nous donne la relation qui relie les efforts aux déformations :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ K \end{Bmatrix} \tag{IV.11}$$

### IV.4.1 Calcul des matrices de rigidité [K]<sup>e</sup> et [K]<sub>g</sub>

On appliquons le théorème de l'énergie potentielle U, pour un élément de dimensions a et b et l'épaisseur t on a [13] :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a ([\varepsilon_L^0]^T [A][\varepsilon_L^0] + [\varepsilon_L^0]^T [B][K] + [K]^T [B][\varepsilon_L^0] + [K]^T [D][K]) dx dy - \int_0^b \int_0^a [\varepsilon_L^0]^T [N] dx dy + \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a [\varepsilon_{nL}^0]^T [N] dx dy \tag{IV.12}$$

En substituant les relations (IV.4),( IV.5), (IV.7) dans l'équation (IV.12) on obtient :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \{q\}^T ([S_\varepsilon]^T [A][S_\varepsilon] + [S_\varepsilon]^T [B][S_K] + [S_K]^T [B][S_\varepsilon] + [S_K]^T [D][S_K]) [q] dx dy - \int_0^b \int_0^a ([q]^T [S_\varepsilon]^T [N]) dx dy + \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a [q]^T [G]^T [N][G][q] dx dy \tag{IV.13}$$

En se basant sur le principe de minimum d'énergie potentiel on obtient :

$$[K]\{q\} = [F] \tag{IV.14}$$

Ou :

$$[K]^e = [K_1] + [K_2] + [K_3] + [K_4] \tag{IV.15}$$

Avec:

$$[K_1] = \int_0^b \int_0^a [S_\varepsilon]^T [A][S_\varepsilon] dx dy \quad \text{Membrane} \quad \text{IV.16}$$

$$[K_2] = \int_0^b \int_0^a [S_\varepsilon]^T [B][S_k] dx dy \quad \text{Couplage} \quad \text{IV.17}$$

$$[K_3] = \int_0^b \int_0^a [S_k]^T [B][S_\varepsilon] dx dy$$

$$[K_4] = \int_0^b \int_0^a [S_k]^T [D][S_k] dx dy \quad \text{Flexion} \quad \text{IV.18}$$

$$[F] = [S_\varepsilon][N]$$

Avec :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}$$

Tel que :

$[K_1]$ ,  $[K_2]$ ,  $[K_3]$  et  $[K_4]$  sont les sous matrices de la matrice de rigidité élémentaire  $[K]^e$ .

La matrice de rigidité globale  $[K]_g$  s'obtient en assemblant les matrices de rigidités élémentaires.

#### IV.4.1 Calcul de la matrice géométrique $[K^G]$

L'élimination de la 2<sup>ème</sup> variation de l'équation de l'énergie potentiel totale nous permet d'avoir l'équation standard du problème de valeur propre suivante.

$$([K_g] + \lambda [K^G])\{q\} = 0 \quad \text{IV.19}$$

Avec :

$$[K^G]^e = [G]^T [N][G] \quad \text{Matrice géométrique élémentaire}$$

Pour le calcul de la matrice géométrique globale  $[K^G]$  on fait la somme des matrices géométriques élémentaires.

#### IV.4.3 Les charges critiques $N_{cr}$ :

La résolution de l'équation

$$[K]\{q\} = [F]$$

Pour le calcul des charges critiques minimales nous dérivons deux fois l'équation de l'énergie du potentielle minimale et nous l'égalisons à zéro elle nous donne l'équation suivante :

$$([K] - \lambda [K^G])q = 0$$

Le calcul des charges critiques se fait en deux étapes :

La première étape consiste à la résolution de l'équation (IV.14) pour la détermination de la distribution des efforts à travers la plaque.

Dans le cas générale d'une plaque sans ouvertures on a pas recourt à la détermination des efforts car la distribution est uniforme.

Par contre dans notre cas, l'existence des ouvertures fait que la distribution sera non uniforme notamment au tour de l'ouverture. Le calcul sera fait avec le programme en élément fini, avec le quel on calcule les matrices de rigidité  $[K_g]$  et la matrice géométriques  $[K^G]$  globales.

La deuxième étape consiste en la résolution de l'équation (IV.19) pour nous permet de déterminer le vecteur  $\{\lambda\}$ .

La charge critique en question est la valeur minimale des composantes de  $\{\lambda\}$