

III.1. Introduction :

L'élasticité classique c'est l'étude du comportement des solides déformables, élastiques, isotropes, en petites déformations, avec une loi de comportement linéaire. On y ajoute une hypothèse simplificatrice supplémentaire : les déplacements sont petits. Le couple d'hypothèses <<petits déplacements>> et <<petites déformations>> est souvent appelé Hypothèse des petites perturbations souvent abrégées par HPP. L'élasticité classique est donc souvent appelée aussi élasticité linéaire.

Contrairement à la mécanique des fluides, on ne s'intéressera pas ici à la description du mouvement du solide pendant la déformation, mais seulement à l'état final du corps, lorsque l'application du chargement est terminée et que le solide a atteint son état d'équilibre sous la charge.

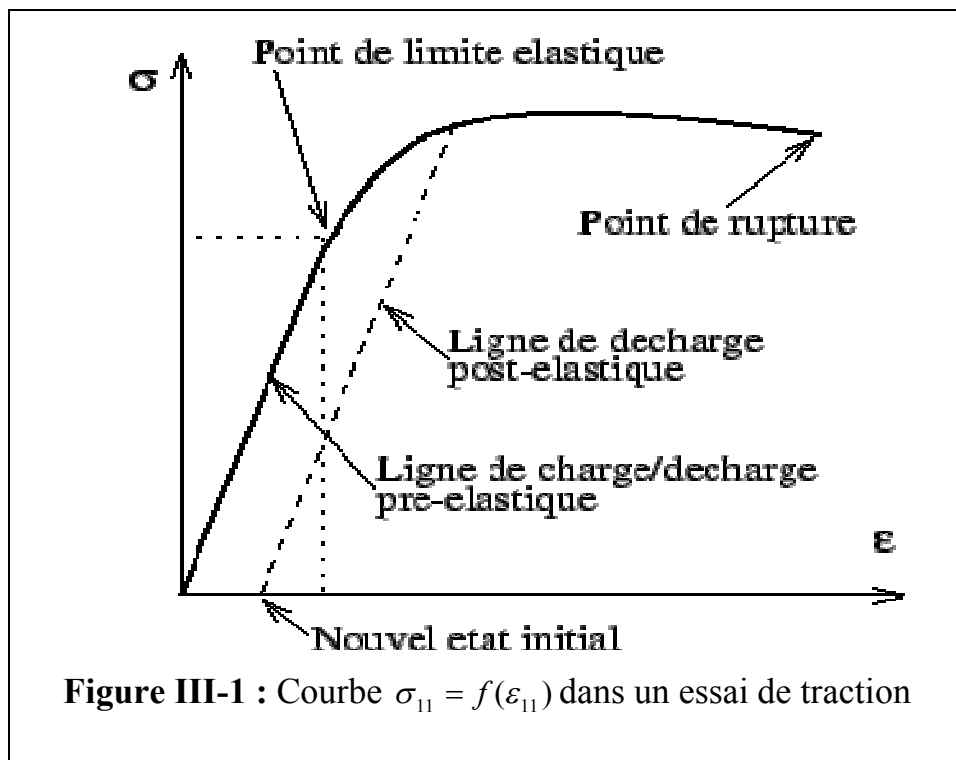
On se donne un corps de forme initiale connue, et dont la loi de comportement est supposée refléter correctement le comportement du matériau. On le soumet à un chargement mécanique (efforts appliqués sur le corps ou déplacements imposés) ou thermique (une variation de température), et on se pose les questions suivantes :

1. Sous quels chargements faut-il calculer l'objet ?
2. Quelles sont les contraintes, les déformations et les déplacements engendrés par ces chargements ?
3. Ces chargements sont-ils supportables par le matériau ?
4. Les valeurs trouvées sont-elles acceptables ?

Comme on le voit, ces questions sont en rapport direct avec les préoccupations d'un constructeur qui doit concevoir un objet ou un assemblage d'objets. La statique des corps élastiques ne permettra de répondre qu'aux questions 2 et 3. Les réponses aux questions 1 et 4 sont sous l'entière responsabilité du constructeur. Il peut parfois être guidé dans cette tâche par des normes ou des règlements.

III.2- Aperçu du comportement des matériaux réels :

Si on fait une expérience de traction sur un matériau, on constate que, tant que les efforts de traction ne dépassent pas une certaine limite, la relation contrainte déformation reste linéaire. Cependant au-delà du seuil, on constate que la linéarité et la mémoire de la configuration initiale sont perdues : le matériau a une loi de comportement différente.



La courbe de la figure (III-1) montre l'allure du comportement d'un matériau dans un essai de traction sur une éprouvette, dans un plan déformation contrainte. On y constate clairement deux comportements :

- Tant qu'on reste en dessous du point de limite élastique, le comportement reste élastique, c'est à dire que la courbe de décharge est confondue avec la courbe de charge. Quand le chargement redevient nul, l'éprouvette retrouve donc sa forme initiale.
- Par contre, si le chargement dépasse la limite élastique, et si on décharge ensuite l'éprouvette, on constate qu'on revient à un autre état : le matériau a perdu la mémoire de son état initial et se comporte comme si l'état initial était changé.

Ainsi, la loi de comportement élastique linéaire présentée en mécanique des milieux continus a un domaine d'application limité par deux conditions indépendantes :

1. Les déformations doivent être petites car on utilise le tenseur des petites déformations ε et non un tenseur de déformation exact.
2. La loi de comportement élastique linéaire n'est valide que tant qu'on reste en dessous d'un certain seuil de limite élastique.

Dans la pratique on peut considérer qu'une déformation est petite lorsqu'elle est inférieure à 10^{-2} ou 10^{-3} .

Pour beaucoup de matériaux métalliques, le seuil de limite élastique est dans le domaine des petites déformations. Si bien que, dans ce cas, on peut confondre les deux limitations : Si on est en dessous du seuil de limite élastique, on est dans le domaine des petites déformations.

Mais pour d'autres matériaux, on peut avoir des comportements élastiques avec de grandes déformations, et le comportement élastique peut être non linéaire. Pour de tels matériaux, on peut utiliser l'élasticité linéaire à condition de rester dans le domaine des petites déformations.

Dans tous les cas, la vérification de la validité de ces deux conditions (HPP et limite élastique) ne peut se faire qu'a posteriori, en analysant la solution numérique complète du problème. En construction mécanique, on désire souvent qu'une pièce reprenne sa forme initiale lorsque le chargement a cessé. On doit donc rester dans le domaine élastique, et l'élasticité classique est une théorie satisfaisante.

Mais il existe un grand nombre de problèmes pratiques où elle n'est d'aucun secours :

- Dans les procédés de formage (pliage, emboutissage, forgeage, etc...), il est évident qu'on ne souhaite pas le retour à la forme initiale et qu'on doit s'intéresser au comportement non élastique au-delà de la limite élastique.

On voit donc que, bien qu'elle soit populaire et simple, la théorie de l'élasticité classique ne peut satisfaire tous les besoins.

C'est le constructeur qui a la responsabilité de choisir la théorie à utiliser pour résoudre son problème et la responsabilité de vérifier a posteriori que la solution trouvée est bien dans les limites d'application de la théorie choisie.

III.3 Constantes élastiques d'un composite Unidirectionnel :

La première étape d'un calcul composite consiste à déterminer les caractéristiques mécaniques du matériau en fonction de celles de ses composants. Dans la plupart des cas, ces calculs se réduisent uniquement au calcul du module d'Young. Il existe divers modèles d'homogénéisations pour l'obtenir.

Soit un matériau composite unidirectionnel (UD) de repère d'orthotropie (l, t), constituer de fibres noyées dans une matrice polymère. Soit une cellule élémentaire de volume unitaire $V = 1$ constituée de fibres et de matrice avec :

V_m = Volume de la matrice/Volume de la cellule: fraction volumique de matrice.

V_f = Volume des fibres/Volume de la cellule : fraction volumique de fibre.

Avec $V = V_m + V_f = 1$.

A l'échelle locale, on a les hypothèses suivantes :

- Fibres: comportement élastique linéaire fragile isotrope de coefficients E_f et V_f .
- Matrice: comportement élastique non linéaire, isotrope de coefficients E_m et V_m .

Hypothèses :

- On travaille en élasticité linéaire.
- On suppose que la liaison fibres/matrices est parfaite.

E_m et ν_m le module d'élasticité et le coefficient de poisson de la matrice .

E_f et ν_f le module d'élasticité et le coefficient de poisson des fibres.

Et soient :

A : la surface d'une section orthogonale à l'axe x .

A_m et A_f les surfaces de la section occupées par la matrice et les fibres respectivement.

Si on néglige la surface occupée par les vides, qui sont faible pour un matériau bien dégagé, on a :

$$A = A_m + A_f$$

Nous appellerons $V_f = A_f / A$ la fraction de fibres en volume, et $V_m = A_m / A$ la fraction de matrice en volume.

III.3.1 Module de l'élasticité Longitudinal E_1 :

Nous appelons module d'élasticité longitudinal, le module d'élasticité du matériau dans le sens des fibres (figure III-2).

Considérons une éprouvette de longueur l de section droite A soumise à une traction simple suivant l'axe 1.

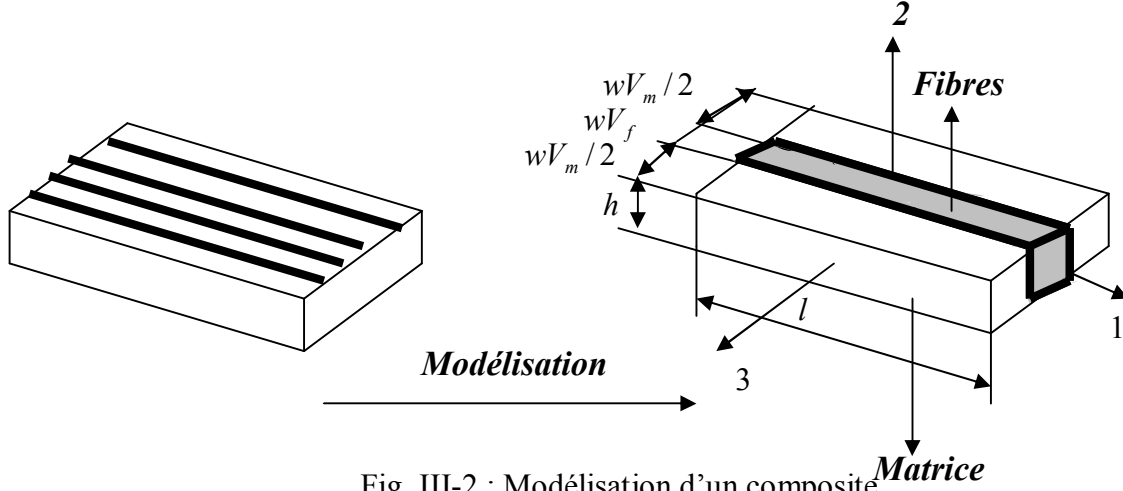


Fig. III-2 : Modélisation d'un composite

L'éprouvette subit un allongement Δl suivant l'axe 1, et donc un allongement relatif :

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{III.1}$$

Puisque les deux matériaux sont supposés linéairement élastiques et isotropes, les expressions des contraintes pour les fibres et la matrice sont :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_f &= E_f \varepsilon_1 \\ \sigma_m &= E_m \varepsilon_1 \end{aligned} \right\} \quad \text{III.2}$$

Les contraintes σ_1, σ_f et σ_m sont appliquées sur les sections d'aire A_1, A_f et A_m respectivement.

La force résultante appliquée sur le matériau est telle que :

$$F = \sigma_1 A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \quad \text{III.3}$$

En introduisant l'équation (2) dans l'équation (3), on trouve :

$$\sigma_1 A = E_f \varepsilon_1 A_f + E_m \varepsilon_1 A_m \quad \text{III.4}$$

Sachant que :

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 \quad \text{III.5}$$

L'équation (4) s'écrit alors :

$$E_1 = E_f \frac{A_f}{A} + E_m \frac{A_m}{A} \quad \text{III.6}$$

En fonction des fractions en volume des fibres et de la matrice, l'équation III.6 prend la forme finale suivante :

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad \text{III.7}$$

III.3.2 Module d'élasticité transversale E_2 :

Soit un parallélépipède de matériau composite (fibres parallèles à l'axe **1**) de largeur w suivant l'axe **2**, de hauteur h et de longueur l (figure III-3), soumis à une traction simple d'intensité F suivant l'axe **2**. Il subit un allongement relatif ε_l dans la direction **2**.

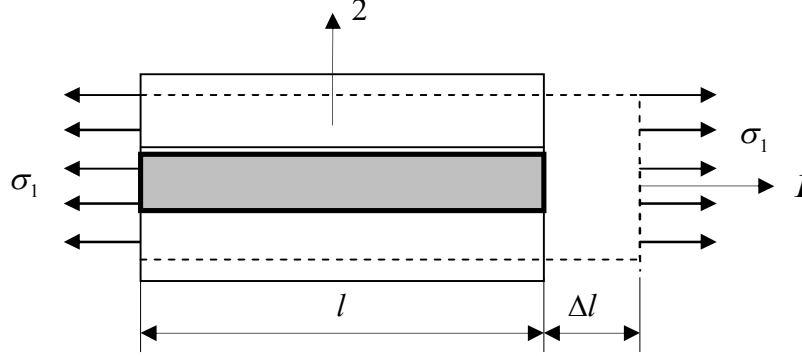


Fig. III-3 : Représentation d'un composite chargé dans la direction 1

Le module de Young transversal E_2 est tel que :

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 \quad \text{III.8}$$

Pour obtenir une approximation de E_2 le matériau est modélisé en rassemblant toutes les fibres au centre et la matrice sur les cotés. Avec cette modélisation, la contrainte normale, dans la matrice et dans les fibres, est la même et vaut :

$$\sigma_2 = \frac{F}{lh} \quad \text{III.9}$$

Les allongements relatifs ε_m et ε_f de la matrice et des fibres dans la direction **2**, valent :

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \quad \text{III.10}$$

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f} \quad \text{III.11}$$

Si Δw est l'allongement total, Δw_m et Δw_f les allongements totaux de la matrice et des fibres.

w_m : Largeur occupée par la matrice : $w_m = w V_m$

w_f : Largeur occupée par les fibres : $w_f = w V_f$

D'autre part, l'allongement total Δw est :

$$\Delta w = \Delta w_m + \Delta w_f$$

Et l'allongement relatif total ε_2 est :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_m V_m + \varepsilon_f V_f \quad \text{III.12}$$

À partir des équations III.8 et III.10, on peut écrire :

$$\sigma_2 = E_2(\varepsilon_m V_m + \varepsilon_f V_f) \quad \text{III.13}$$

En introduisant les équations III.10 et III.11 dans cette dernière équation, on trouve :

$$\sigma_2 = E_2 \left(\frac{\sigma_2}{E_m} V_m + \frac{\sigma_2}{E_f} V_f \right) \quad \text{III.14}$$

Et, en remplaçant σ_2 par sa valeur de l'équation III.10, l'équation III.14 prend la forme

finale suivante:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f} \quad \text{III.15}$$

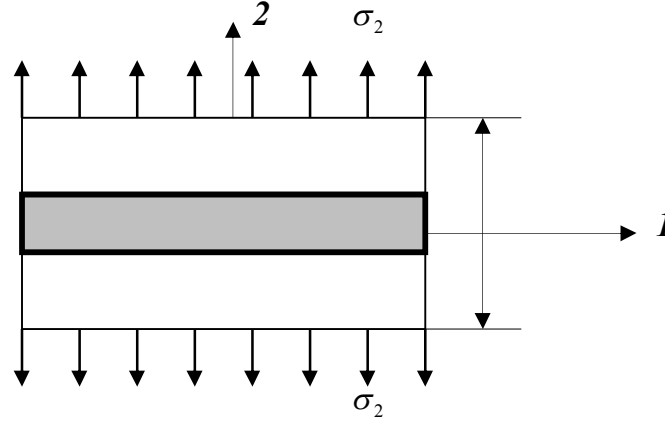


Fig. III-4: Représentation d'un composite chargé dans la direction 2

Dans la réalité, et compte tenu de la sollicitation exercée, le module E_f à prendre ici est le module d'élasticité des fibres dans la direction perpendiculaire à la direction des fibres, c'est à dire suivant leurs diamètres. Ce module peut être très différent du module E_f dans le sens des fibres, du fait de l'anisotropie de ces derniers.

III.3.3 Module de glissement G_{12} :

Réalisons la même modélisation que dans le paragraphe précédent. Le chargement est un cisaillement pur, et le champ de contrainte vaut :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La contrainte tangentielle τ est la même dans les deux composantes, on a alors :

$$\tau = G_m \gamma_m \Rightarrow \gamma_m = \frac{\tau}{G_m} \quad \text{III.16}$$

$$\tau = G_f \gamma_f \Rightarrow \gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \quad \text{III.17}$$

A l'échelle microscopique, les déformations sont représentées sur la figure III-5. La déformation tangentielle totale est définie par :

$$\Delta = \gamma w$$

Et, par approximation, on a :

$$\Delta_m = V_m w \gamma_m$$

$$\Delta_f = V_f w \gamma_f$$

Ainsi, on obtient :

$$\gamma = V_m \gamma_m + V_f \gamma_f \quad \text{III.18}$$

Et sachant que :

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{12}} \quad \text{III.19}$$

La combinaison des équations III.16, III.17, III.18 et III.19 donne :

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_m}{G_m} + \frac{V_f}{G_f} \quad \text{III.20}$$

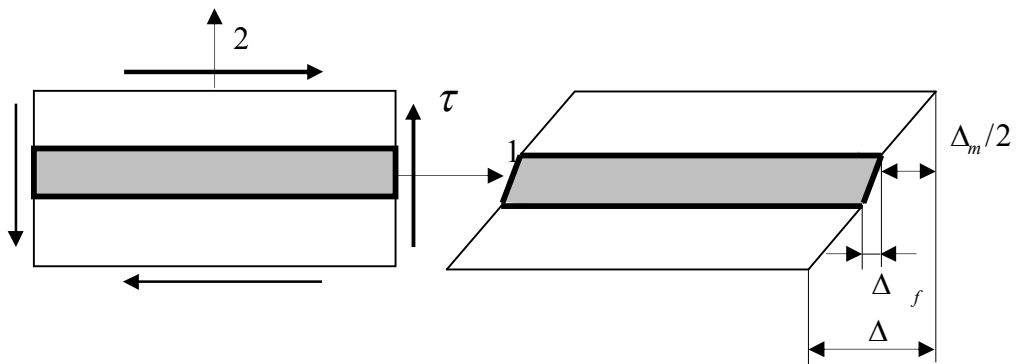


Fig. III-5 : représentation d'un composite en cisaillement.

III.3.4 Coefficient de Poisson ν_{12} :

En utilisant toujours la même modélisation, considérons un état de traction simple suivant l'axe 1. Les fibres et la matrice subissent le même allongement relatif ε_1 suivant

l'axe 1, les allongements relatifs dans la direction transversale de la matrice ε_m et ε_f des fibres sont :

$$\varepsilon_m = \nu_m \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_f = \nu_f \varepsilon_1$$

La variation de la largeur Δw vaut :

$$\Delta w = -\nu_m \varepsilon_1 V_m w - \nu_f \varepsilon_1 V_f w \quad \text{III.21}$$

Le coefficient de poisson ν_{12} du matériau est égal à :

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad \text{III.22}$$

Et puisque :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta w}{w} \quad \text{III.23}$$

On obtient alors :

$$\nu_{12} = \nu_m V_m + \nu_f V_f \quad \text{III.24}$$

L'isotropie transversale entraîne :

$$\nu_{12} = \nu_{13} \quad \text{III.25}$$

III.4 Etude des lois de comportement

III.4.1 Hypothèses de travail

Dans notre étude on va tenir en compte des hypothèses suivantes :

- Milieu élastique entraînant la réversibilité des phénomènes.
- HPP : petites déformations: théorie du premier gradient. Petits déplacements par rapport aux dimensions de la pièce.
- Actions appliquées progressivement: chargement quasi-statique.
- Pas de couplage des phénomènes: hygrothermiques et mécaniques.
- Relations de comportements linéaires.
- Existence d'un potentiel élastique $W(\varepsilon)$

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Forme quadratique définie positive des composantes du tenseur des déformations :

$$C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}}$$

Alors la relation de comportement sous forme matricielle on fonction de ε_{ij} , S_{ijkl} et σ_{kl} est la suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix}$$

Symétrie des contraintes $\Rightarrow \sigma_{kl} = \sigma_{lk} \Rightarrow S_{ijkl} = S_{ijlk}$

Symétrie des déformations $\Rightarrow \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \Rightarrow S_{ijkl} = S_{jikl}$

Seule la connaissance des connaissances des coefficients de la sous matrice 6*6 est nécessaire.

Application du théorème des travaux virtuels pour un σ particulier $\Rightarrow S_{ijkl} = S_{klij}$

$\Rightarrow S_{ijkl}$ est symétrique $\Rightarrow 21$ coefficients à déterminer.

Alors la relation de comportement s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1113} & 2S_{1112} \\ & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2213} & 2S_{2212} \\ & & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3313} & 2S_{3312} \\ & & & 4S_{2323} & 4S_{2313} & 4S_{2312} \\ & & & & 4S_{1313} & 4S_{1312} \\ & & & & & 4S_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

Symetrie

Remarque : pour que la matrice S_{ijkl} soit symétrique, on travaillera avec les distorsions angulaires.

Les coefficients du tenseur de souplesse s'expriment à l'aide de constantes mécaniques.

$$\text{Pour } i = (1, 2, 3), S_{iiii} = \frac{1}{E_i}$$

$$\text{Pour } i, j = (23, 31, 12), S_{ijij} = \frac{1}{4G_{ij}}$$

$$\text{Pour } i \neq j \text{ et } k \neq 1, S_{ijkk} = \frac{\eta_{ij,k}}{2E_i} = \frac{\eta_{i,kl}}{2G_{kl}} = S_{iikl}$$

$$\text{Pour } i \neq j, S_{iijj} = \frac{-\nu_{ij}}{E_i} = \frac{-\nu_{ji}}{E_j}$$

$$\text{Pour } i \neq j \text{ et } ij \neq lk, S_{ijkl} = \frac{\mu_{kl,ij}}{4G_{ij}} = \frac{\mu_{ij,kl}}{4G_{kl}}$$

Avec :

E_i : module de tensions

$\eta_{ij,k}$: coefficients d'influence de 1^{ère} espèce.

G_{ij} : module de cisaillement

$\eta_{i,kl}$: coefficients d'influence de 2nde espèce.

ν_{ij} : coefficients de contraction

$\mu_{ij,kl}$: coefficients de CHENTSOV

Dans le paragraphe qui suit, nous allons introduire des symétries matérielles qu'elles nous permettant de simplifier la matrice de souplesse S_{ijkl}

III.4.2 Matériau orthotrope (orthogonal+anisotrope) :

Définition : matériau élastique homogène présentant en tout point **2** symétries du comportement mécanique chacune par rapport à **1** plan, les **2** plans étant orthogonaux.

Remarque : Les composantes S_{mnpq} d'un tenseur exprimées dans un repère **(1, 2, 3)** s'écrivent $\underline{S}_{ijkl}$ dans un repère **(I, II, III)** :

$$\underline{S}_{ijkl} = \cos_i^m \cos_j^n \cos_k^p \cos_l^q S_{mnpk}$$

Avec $\cos_i^m$: cos de l'angle formé par les deux vecteurs unitaires m et i .

Après simplification de S_{ijkl} (élimination des termes nuls), il ne reste que 9 coefficients distincts qui sont:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

Avec

- E_1, E_2, E_3 : modules d'élasticité longitudinaux.
- G_{23}, G_{13}, G_{12} : modules de cisaillement.
- $\nu_{23}, \nu_{13}, \nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{32}, \nu_{31}$: coefficients de Poisson.

Symétrie de la loi de comportement :

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}, \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$$

III.4.3 Matériau isotrope transverse

Définition [13]: c'est un matériau macroscopiquement homogène, c'est un orthotrope mais avec une seule direction différente, c'est donc la même loi de comportement avec :

$$E_2 = E_3, \nu_{12} = \nu_{13}$$

Si on suppose que la direction 3 est axe de symétrie, la relation de comportement s'écrit alors:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_1} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

III.5. Matériau composite mono couche:

Pour étudier le comportement d'un stratifié constitué de plusieurs plis d'orientation différents, il est nécessaire de connaître le comportement de chacun des plis qui le composent, et ce dans des directions autres que les directions d'orthotropie du pli.

III.5.1 Coefficient de Souplesse

Soit l, t, z les axes d'orthotropie du pli représentés sur la figure (III.05). Pour un stratifié mince constitué par une superposition de plis, nous supposons que les contraintes σ_{zz} sont nulles. Il en résulte que pour un matériau orthotrope la loi de comportement dans le plan $l-t$, est décrite comme suite :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_l} & -\frac{\nu_{lt}}{E_t} & 0 \\ -\frac{\nu_{lt}}{E_l} & \frac{1}{E_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{lt}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} \quad \text{III.26}$$

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad \text{III.27}$$

- La contrainte $\vec{\sigma}$ s'exerçant sur une facette de normale $\vec{n}$ est donnée par :

$$\{\sigma\} = [\sigma_{ij}]\{n\}$$

$\{\sigma\}$: Matrice colonne des composantes de : σ .

$[\sigma_{ij}]$: Matrice des contraintes.

$\{n\}$: Matrice colonne des cosinus directeurs de : $\vec{n}$.

- Coordonnées d'un même vecteur $\vec{V}$ dans deux repères distincts x, y et l, t tels que $(\vec{x}, \vec{y}) = \theta$

On a :

$$\vec{V} = V_l \vec{l} + V_t \vec{t} = V_x \vec{x} + V_y \vec{y}$$

Avec la relation :

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_l \\ V_t \end{Bmatrix} \quad \text{III.28}$$

$$C = \cos \theta$$

$$S = \sin \theta$$

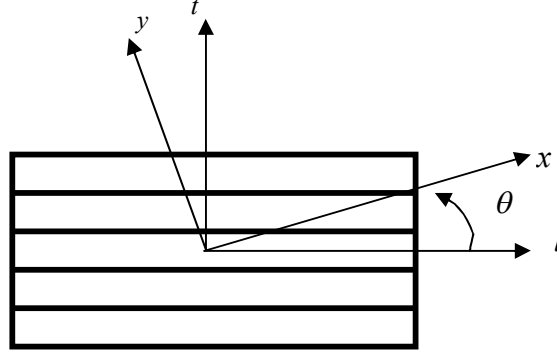


Fig. III-6 : axe d'orthotropie d'un pli

Dans les axes **l, t**, exprimons au moyen de la relation (III.27) la contrainte s'exerçant sur la facette de normale $\vec{x}$:

$$\{\sigma_{/x}\}_{l,t} = [\sigma_{ij}]_{l,t} \{x\}_{l,t} = [\sigma_{ij}]_{l,t} \begin{Bmatrix} C \\ S \end{Bmatrix}$$

Et dans les axes **x,y**, d'après (28) :

$$\{\sigma_{/x}\}_{x,y} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} [\sigma_{ij}]_{l,t} \begin{Bmatrix} C \\ S \end{Bmatrix}$$

D'une manière analogue, la contrainte s'exerçant sur la facette de normale $\vec{y}$ s'écrit dans les axes **x,y** :

$$\{\sigma_{/y}\}_{x,y} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} [\sigma_{ij}]_{l,t} \begin{Bmatrix} -S \\ C \end{Bmatrix}$$

D'où la matrice des contraintes dans les axes **x,y** :

$$[\sigma_{ij}] = [\sigma_{/x}, \sigma_{/y}] = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} [\sigma_{ij}]_{l,t} \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix}$$

on posant :

$$[P] = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix}$$

Et en remarquant que la matrice $[P]$ est orthogonale ($[P]^T = [P]^{-1}$), il vient :

$$[\sigma_{ij}]_{l,t} = [P]^T [\sigma_{ij}]_{x,y} [P]$$

Si l'on développe cette expression, soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_l & \tau_{lt} \\ \tau_{lt} & \sigma_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix}$$

Qu'on peut la réarranger sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & -2CS \\ S^2 & C^2 & 2CS \\ SC & -SC & (C^2 - S^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.29}$$

Soit:

$$\{\sigma\}_{l,t} = [T] \{\sigma\}_{xy} \quad \text{III.30}$$

Avec:

$$[T] = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & -2CS \\ S^2 & C^2 & 2CS \\ SC & -SC & (C^2 - S^2) \end{bmatrix}$$

La considération des déformations autorisant une procédure de calcul analogue, on pourra écrire parallèlement :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 2CS \\ S^2 & C^2 & -2CS \\ -SC & SC & (C^2 - S^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_{lt} \end{Bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{Bmatrix}_{x,y} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{Bmatrix}_{l,t} \quad \text{III.31}$$

En introduisant les relations (III.30) et (III.31) dans la relation de comportement (III.26), on trouve :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{[T]^{-1}} \begin{bmatrix} \frac{1}{E_l} & -\frac{\nu_{lt}}{E_t} & 0 \\ -\frac{\nu_{lt}}{E_l} & \frac{1}{E_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{lt}} \end{bmatrix} [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Nouvelle matrice des coefficients de souplesse dans les axes x, y

Tous calculs effectués, on obtient la loi de comportement suivante, écrite sous forme technique dans les axes x, y faisant l'angle θ avec les axes l, t . On y a fait apparaître les modules élastiques et les coefficients de Poisson relatifs à ces directions. On constate aussi l'existence de couplages non classiques notés η et μ qui montrent, par exemple, qu'une contrainte normale induit une distorsion.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{\eta_{xy}}{G_{xy}} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\mu_{xy}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_x}{E_x} & \frac{\mu_y}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.32}$$

Avec:

$$E_x(\theta) = \frac{1}{\frac{c^4}{E_l} + \frac{s^4}{E_t} + c^2 s^2 \left(\frac{1}{G_{lt}} - 2 \frac{\nu_{tl}}{E_t} \right)}$$

$$E_y(\theta) = \frac{1}{\frac{s^4}{E_l} + \frac{c^4}{E_t} + c^2 s^2 \left(\frac{1}{G_{lt}} - 2 \frac{\nu_{tl}}{E_t} \right)}$$

$$G_{xy}(\theta) = \frac{1}{4c^2 s^2 \left(\frac{1}{E_l} + \frac{1}{E_t} + 2 \frac{\nu_{tl}}{E_t} \right) + \frac{(c^2 - s^2)^2}{G_{lt}}}$$

$$\frac{\nu_{yx}}{E_y}(\theta) = \frac{\nu_{tl}}{E_t} (c^4 + s^4) - c^2 s^2 \left(\frac{1}{E_l} + \frac{1}{E_t} - \frac{1}{G_{lt}} \right)$$

$$\frac{\eta_{xy}}{G_{xy}}(\theta) = -2cs \left[\frac{c^2}{E_l} - \frac{s^2}{E_t} + (c^2 - s^2) \left(\frac{\nu_{tl}}{E_t} - \frac{1}{2G_{lt}} \right) \right]$$

$$\frac{\mu_{xy}}{G_{xy}}(\theta) = -2cs \left[\frac{s^2}{E_l} - \frac{c^2}{E_t} - (c^2 - s^2) \left(\frac{\nu_{tl}}{E_t} - \frac{1}{2G_{lt}} \right) \right]$$

III.5.2 Coefficient de raideur

Lorsqu'on inverse la relation de comportement (III.26) écrite dans les axes d'orthotropie **l, t** du pli, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_l}{1-\nu_{lt}\nu_{tl}} & \frac{\nu_{tl}E_l}{1-\nu_{lt}\nu_{tl}} & 0 \\ \frac{\nu_{lt}E_t}{1-\nu_{lt}\nu_{tl}} & \frac{E_t}{1-\nu_{lt}\nu_{tl}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{lt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix}$$

Où apparaissent des coefficients élastiques dits de raideur par opposition à ceux de la relation (III.1) dénommés coefficients de souplesse. Pour alléger l'écriture on notera :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{E}_l & \nu_{tl}\overline{E}_l & 0 \\ \nu_{lt}\overline{E}_t & \overline{E}_t & 0 \\ 0 & 0 & G_{lt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} \quad \text{III.33}$$

Une procédure identique à celle qui a été suivie au paragraphe précède pour écrire la loi de comportement déformations contraintes conduit à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 2CS \\ S^2 & C^2 & -2CS \\ -SC & SC & (C^2 - S^2) \end{bmatrix}}_{[T_1]} \begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} \quad \text{III.34.1}$$

et :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C^2 & S^2 & -CS \\ S^2 & C^2 & CS \\ 2SC & -2SC & (C^2 - S^2) \end{bmatrix}}_{[T_1']} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.34.2}$$

Les axes $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ étant toujours déduits des axes $\mathbf{l}, \mathbf{t}$ par rotation θ autour du troisième axe $\mathbf{z}$, lorsqu'on substitue les relations (III.34,1) et (III.34,2) dans (III.33), on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T_1] \begin{bmatrix} \overline{E}_l & \nu_{tl}\overline{E}_l & 0 \\ \nu_{lt}\overline{E}_t & \overline{E}_t & 0 \\ 0 & 0 & G_{lt} \end{bmatrix} [T_1'] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Qui peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{E}_{11} & \overline{E}_{12} & \overline{E}_{13} \\ \overline{E}_{21} & \overline{E}_{22} & \overline{E}_{23} \\ \overline{E}_{31} & \overline{E}_{32} & \overline{E}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.35}$$

Tous calculs effectués, on trouve pour les coefficients de raideurs E_{ij} les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{E}_{11}(\theta) &= c^4 \bar{E}_l + s^4 \bar{E}_t + 2c^2 s^2 (\nu_{lt} \bar{E}_l + 2G_{lt}) \\ \bar{E}_{22}(\theta) &= s^4 \bar{E}_l + c^4 \bar{E}_t + 2c^2 s^2 (\nu_{lt} \bar{E}_t + 2G_{lt}) \\ \bar{E}_{33}(\theta) &= c^2 s^2 (\bar{E}_l + \bar{E}_t - 2\nu_{lt} \bar{E}_l) + (c^2 - s^2)^2 G_{lt} \\ \bar{E}_{12}(\theta) &= c^2 s^2 (\bar{E}_l + \bar{E}_t - 4G_{lt}) + (c^4 + s^4) \nu_{lt} \bar{E}_l \\ \bar{E}_{13}(\theta) &= -cs \left[c^2 \bar{E}_l - s^2 \bar{E}_t - (c^2 - s^2) (\nu_{lt} \bar{E}_l + 2G_{lt}) \right] \\ \bar{E}_{23}(\theta) &= -cs \left[s^2 \bar{E}_l - c^2 \bar{E}_t + (c^2 - s^2) (\nu_{lt} \bar{E}_l + 2G_{lt}) \right]\end{aligned}$$

Expressions dans lesquelles :

$$\bar{E}_l = \frac{E_l}{1 - \nu_{lt} \nu_{tl}} \quad \bar{E}_t = \frac{E_t}{1 - \nu_{lt} \nu_{tl}}$$

III.6. Comportements mécaniques des stratifiées

III.6.1 Comportement en membrane

Dans le cas des plaques pressentent la symétrie miroir on a un découplage entre les forces de membrane et celles de flexion. Si nous avons une plaque de matériaux composite stratifiée composée de 2n couche alors si chaque couche de numéro (x) a comme orientation des fibres un angle θ la couche numéro (-x) a la même orientation des fibres, dans ce cas on peut dire que on a une symétrie miroir. fig.III.7

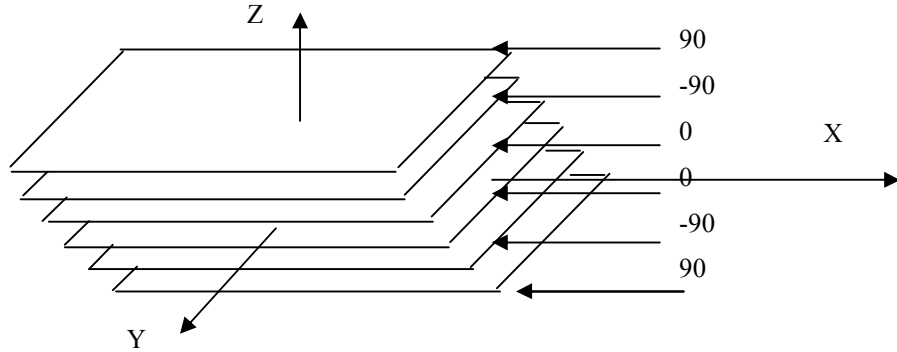
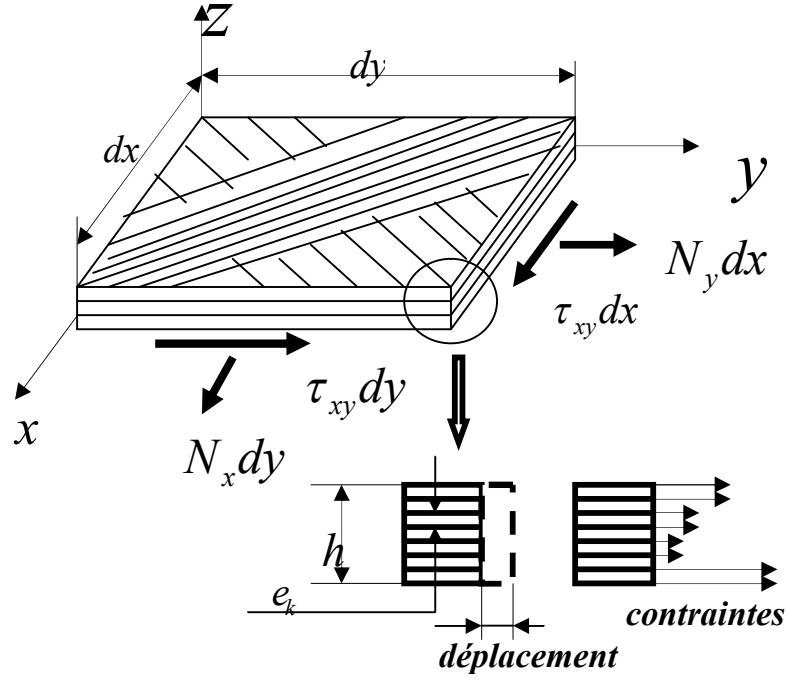


Fig. III.7 Composite avec symétrie miroir

Nous considérons dans ce qui suit un stratifié plan de hauteur h , constitué de n plis. Le pli numéro k à une épaisseur notée e_k .

Le stratifié est soumis à des sollicitations dans son plan qui sont notées $N_x, N_y, T_{xy} = T_{yx}$, par unité de longueur suivant la direction y ou la direction x . il s'agit de la déformation dite de membrane, ou éléments de réduction pour les contraintes, ou encore flux d'efforts dans le stratifié.



Ils sont définis comme suit :

- N_x : effort résultant dans la direction x , par unité de largeur suivant la direction y

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \sum_{k=1^{er} pli}^n (\sigma_x)_k e_k \quad \text{III.36}$$

- N_y : effort résultant dans la direction y , par unité de largeur suivant la direction x

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = \sum_{k=1^{er} pli}^n (\sigma_y)_k e_k \quad \text{III.37}$$

- T_{xy} : (ou T_{yx}) cisaillement de membrane par unité de largeur suivant la direction y (respectivement suivant la direction x) :

$$\tau_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = \sum_{k=1^{er} pli}^n (\tau_{xy})_k e_k \quad \text{III.38}$$

Le déplacement élastique de tout point du stratifié est supposé bidimensionnel plan, dans le plan x, y du stratifié. Il a alors pour composantes : u_0, v_0 .

Les déformations qui ne sont pas nulles correspondantes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0x} &= \partial u_0 / \partial x \\ \varepsilon_{0y} &= \partial v_0 / \partial y \\ \gamma_{0xy} &= \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \end{aligned}$$

Nous avons vu dans la partie comportement mécanique d'un pli que nous pouvions l'exprimer dans un repère quelconque, les contraintes en fonction des déformations. L'élément de réduction N_x défini par la relation (III.36) peut alors être détaillé comme suit :

$$N_x = \sum_{k=1}^n \left(\overline{E}_{11}^k \varepsilon_{0x} + \overline{E}_{12}^k \varepsilon_{0y} + \overline{E}_{13}^k \gamma_{0xy} \right) e_k$$

Soit:

$$N_x = A_{11} \varepsilon_{0x} + A_{12} \varepsilon_{0y} + A_{13} \gamma_{0xy}$$

Avec:

$$A_{11} = \sum_{k=1}^n \overline{E}_{11}^k e_k$$

$$A_{12} = \sum_{k=1}^n \overline{E}_{12}^k e_k$$

$$A_{13} = \sum_{k=1}^n \overline{E}_{13}^k e_k$$

D'une manière analogue on obtient à partir de la relation (III.37) :

$$N_y = A_{21} \varepsilon_{0x} + A_{22} \varepsilon_{0y} + A_{23} \gamma_{0xy}$$

Avec:

$$A_{2j} = \sum_{k=1}^n \overline{E}_{2j}^k e_k$$

Et pour le flux de cisaillement T_{xy} on peut écrire à partir de la relation (III.38) :

$$T_{xy} = A_{31} \varepsilon_{0x} + A_{32} \varepsilon_{0y} + A_{33} \gamma_{0xy}$$

Avec:

$$A_{3j} = \sum_{k=1}^n \overline{E}_{3j}^k e_k$$

On peut ainsi exprimer les flux d'efforts sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.39}$$

Avec :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \overline{E}_{ij}^k e_k \quad \text{III.40}$$

Les expressions de $\overline{E}_{ij}$ sont :

$$\begin{aligned} \overline{E}_{11}(\theta) &= c^4 \overline{E}_l + s^4 \overline{E}_t + 2c^2 s^2 (\nu_{lt} \overline{E}_l + 2G_{lt}) \\ \overline{E}_{22}(\theta) &= s^4 \overline{E}_l + c^4 \overline{E}_t + 2c^2 s^2 (\nu_{tl} \overline{E}_t + 2G_{tl}) \\ \overline{E}_{33}(\theta) &= c^2 s^2 (\overline{E}_l + \overline{E}_t - 2\nu_{lt} \overline{E}_l) + (c^2 - s^2)^2 G_{lt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{E}_{12}(\theta) &= c^2 s^2 (\bar{E}_l + \bar{E}_t - 4G_{lt}) + (c^4 + s^4) \nu_{lt} \bar{E}_l \\ \bar{E}_{13}(\theta) &= -cs \left[c^2 \bar{E}_l - s^2 \bar{E}_t - (c^2 - s^2) (\nu_{lt} \bar{E}_l + 2G_{lt}) \right] \\ \bar{E}_{23}(\theta) &= -cs \left[s^2 \bar{E}_l - c^2 \bar{E}_t + (c^2 - s^2) (\nu_{lt} \bar{E}_l + 2G_{lt}) \right]\end{aligned}$$

Expressions dans lesquelles :

$$\bar{E}_l = \frac{E_l}{1 - \nu_{lt} \nu_{tl}} \quad \bar{E}_t = \frac{E_t}{1 - \nu_{lt} \nu_{tl}}$$

Il est possible de substituer aux flux d'efforts N_x, N_y, T_{xy} des contraintes moyennes globales (qui sont fictives) :

$$\begin{aligned}\sigma_{0x} &= N_x / h \\ \sigma_{0y} &= N_y / h \\ \tau_{0xy} &= T_{xy} / h\end{aligned} \quad \text{III.41}$$

En déduit alors de (39) la loi de comportement en membrane du stratifié rendu « homogène » sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{0x} \\ \sigma_{0y} \\ \tau_{0xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.42}$$

III.6.2 Modules apparents du stratifié

L'inversion de la relation (III.42) permet d'obtenir ce que l'on peut qualifier de modules apparents et coefficients de couplages associés pour le comportement en membrane dans le plan $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. ces coefficients apparaissent au moyen de l'identification qui suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} = h[A]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{0x} \\ \sigma_{0y} \\ \tau_{0xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{E}_x} & -\frac{\bar{\nu}_{yx}}{\bar{E}_y} & \frac{\bar{\eta}_{xy}}{\bar{G}_{xy}} \\ -\frac{\bar{\nu}_{xy}}{\bar{E}_x} & \frac{1}{\bar{E}_y} & \frac{\bar{\mu}_{xy}}{\bar{G}_{xy}} \\ \frac{\bar{\eta}_x}{\bar{E}_x} & \frac{\bar{\mu}_y}{\bar{E}_y} & \frac{1}{\bar{G}_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{0x} \\ \sigma_{0y} \\ \tau_{0xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.43}$$

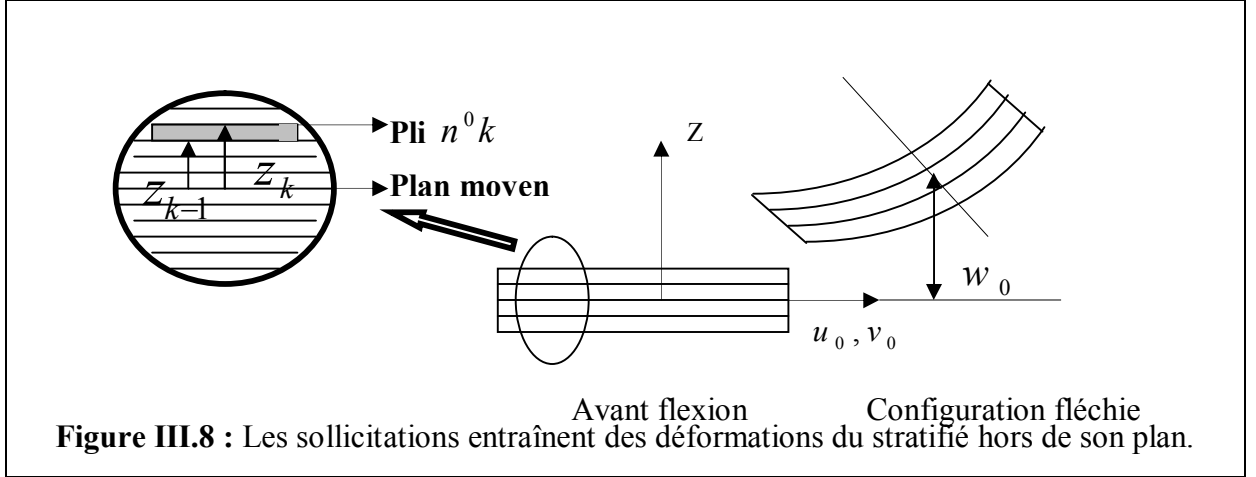
Remarque 1 : si le stratifié est équilibré (autant de plis dans une direction que dans l'autre), on a découplage entre déplacements dus à la traction et distorsion angulaire due au cisaillement, c'est à dire :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix}$$

Remarque 2 : Les A_{ij} sont indépendants de l'ordre d'empilement des plis.

III.6.3 Comportement en Flexion : « Hypothèse de Love »

Au paragraphe précédent nous nous sommes limités aux sollicitations N_x, N_y, T_{xy} agissant dans le plan du stratifié. Nous examinerons maintenant le cas où les sollicitations entraînent des déformations du stratifié hors de son plan, suivant la figure ci-après fig.III.8. Le stratifié considéré est (comme précédemment) supposé pourvu de la symétrie miroir.



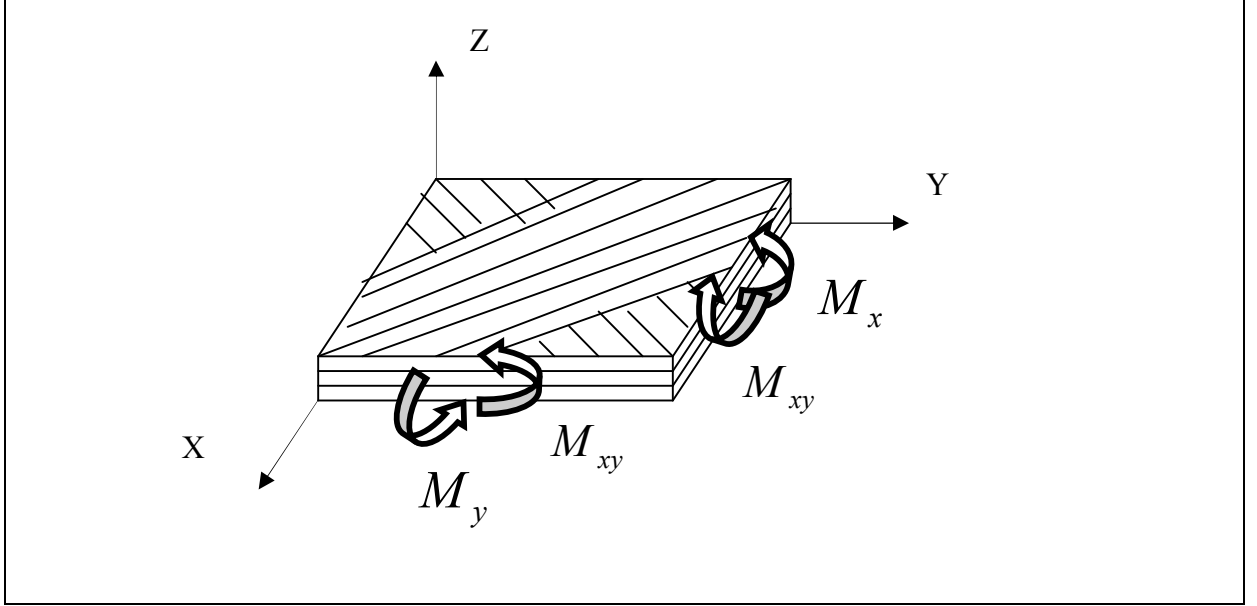
On suppose (Hypothèse de Love) qu'une ligne perpendiculaire au plan moyen avant déformation demeure perpendiculaire à la surface moyenne transformée du plan moyen dans la configuration fléchie. Donc si l'on note comme précédemment u_0 et v_0 les composantes du déplacement dans le plan moyen, et w_0 le déplacement hors de ce plan, le déplacement de tout point de cote z dans le stratifié (en configuration non déformée) s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v &= v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w &= w_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{III.44}$$

On en déduit les déformations non nulles correspondantes :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{0x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_{0y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{0xy} - z \left(2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{III.45}$$

Aux efforts de membrane N_x, N_y, T_{xy} décrits dans le paragraphe précédent viennent s'ajouter des moments par unité d'envergure suivant la direction y ou la direction x .



Tout comme pour les efforts de membrane, ces moments servent aussi à synthétiser les efforts de cohésion mis en évidence sur les coupures, suivant une méthode générale classique, commune à toute les structures (poutres, plaques,...). On doit donc les interpréter comme les moments unitaires des efforts de cohésion. Ils s'écrivent alors :

- M_y : moment fléchissant d'axe y , dû aux contraintes σ_x , par unité de largeur suivant la direction y :

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad \text{III.46}$$

- M_x : Moment fléchissant d'axe x , dû aux contraintes σ_y , par unité de largeur suivant la direction x :

$$M_x = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad \text{III.47}$$

- M_{xy} : (ou $-M_{yx}$) Moment de torsion d'axe x (ou y), dû aux contraintes τ_{xy} , par unité de largeur suivant y (ou suivant x) :

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad \text{III.48}$$

Compte tenu de la relation qui permet d'exprimer dans un repère quelconque, les contraintes dans un pli en fonction des déformations de ce dernier, l'élément de réduction M_y s'écrit :

$$M_y = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{E}_{11}^k \varepsilon_x + \bar{E}_{12}^k \varepsilon_y + \bar{E}_{13}^k \gamma_{xy}) z dz$$

Du fait de l'existence de la symétrie miroir, tout intégrale de type :

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} \overline{E}_{1j} z dz$$

Dans l'expression ci-dessus s'accompagne d'une intégrale tel que :

$$\int_{-z_k}^{z_{k-1}} \overline{E}_{1j} z dz$$

Qui lui est opposée en signe. Les intégrales de ce type disparaissent et il reste :

$$M_y = \sum_{k=1^{er} pli}^n - \left[\overline{E}_{11}^k \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \overline{E}_{12}^k \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \overline{E}_{13}^k \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right]$$

Soit encore:

$$M_y = -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - D_{13} 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

Avec:

$$D_{1j} = \sum_{k=1^{er} pli}^n \overline{E}_{1j}^k \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3}$$

En procédant de manière analogue avec M_x et M_{xy} , on obtient sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ -M_y \\ -M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{III.49}$$

III.6.4 Comportement en Membrane –Flexion Couples d'un stratifié sans symétrie miroir

Si on reprend les considérations du paragraphe précédant, en l'absence de la symétrie miroir, on note de nouveau la présence des intégrales des types :

$$\int_{-z_k}^{z_{k-1}} \overline{E}_{ij} z dz = \overline{E}_{ij}^k \frac{(z_k^2 - z_{k-1}^2)}{2}$$

Qui caractérisent le pli numéro **k**. lorsqu'on effectue la sommation à tous les plis du stratifié, ces intégrales conduisent à des termes non nuls qui prennent la forme :

$$B_{ij} = \sum_{k=1^{er} pli}^n \overline{E}_{ij}^k \frac{(z_k^2 - z_{k-1}^2)}{2}$$

On aura ainsi pour le développement de M_y :

$$M_y = -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - D_{13} 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + B_{11} \varepsilon_{0x} + B_{12} \varepsilon_{0y} + B_{13} \gamma_{0xy}$$

Expression qui fait apparaître le couplage des comportements de flexion et de membrane.

D'une manière analogue, l'effort de membrane N_x tel qu'il est développé en fin du paragraphe précédant, s'écrit :

$$N_x = A_{11} \varepsilon_{0x} + A_{12} \varepsilon_{0y} + A_{13} \gamma_{0xy} - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - B_{13} 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

Si l'on développe de la même façon les autres efforts unitaires : M_x, M_{xy}, N_y, T_{xy} , on peut regrouper les résultats obtenus. On obtient la relation comportement global sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ -M_y \\ -M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{III.50}$$

Où

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{Bmatrix}$$

Remarques :

- ❖ Dans le cas général, on a un couplage entre les comportements en membrane et en flexion dans un stratifié quelconque, mais la symétrie miroir implique le découplage, c'est à dire que les B_{ij} sont nulles et les termes $(Z_k^2 - Z_{k-1}^2)$ s'annulent 2 par 2. Les termes $[E_{16}]^k$ et $[E_{26}]^k$ s'obtiennent en fonction de $\sin \Theta^k$ et $\sin 3\Theta^k$ qui ne changent pas de signe pour 2 couches symétriques.
- Si on évite ce couplage, le comportement en membrane est indépendant de l'ordre de la séquence d'empilement.
- Pour les stratifiés équilibrés, les termes A_{16} et A_{26} sont nulles.