

CHAPITRE I

CLASSIFICATION DES STRUCTURES EN COQUES

1-1. Description géométrique des différents types des structures en coque

Une coque est un solide caractérisé par une surface courbe dans l'espace et par l'épaisseur h (figure 1.1).

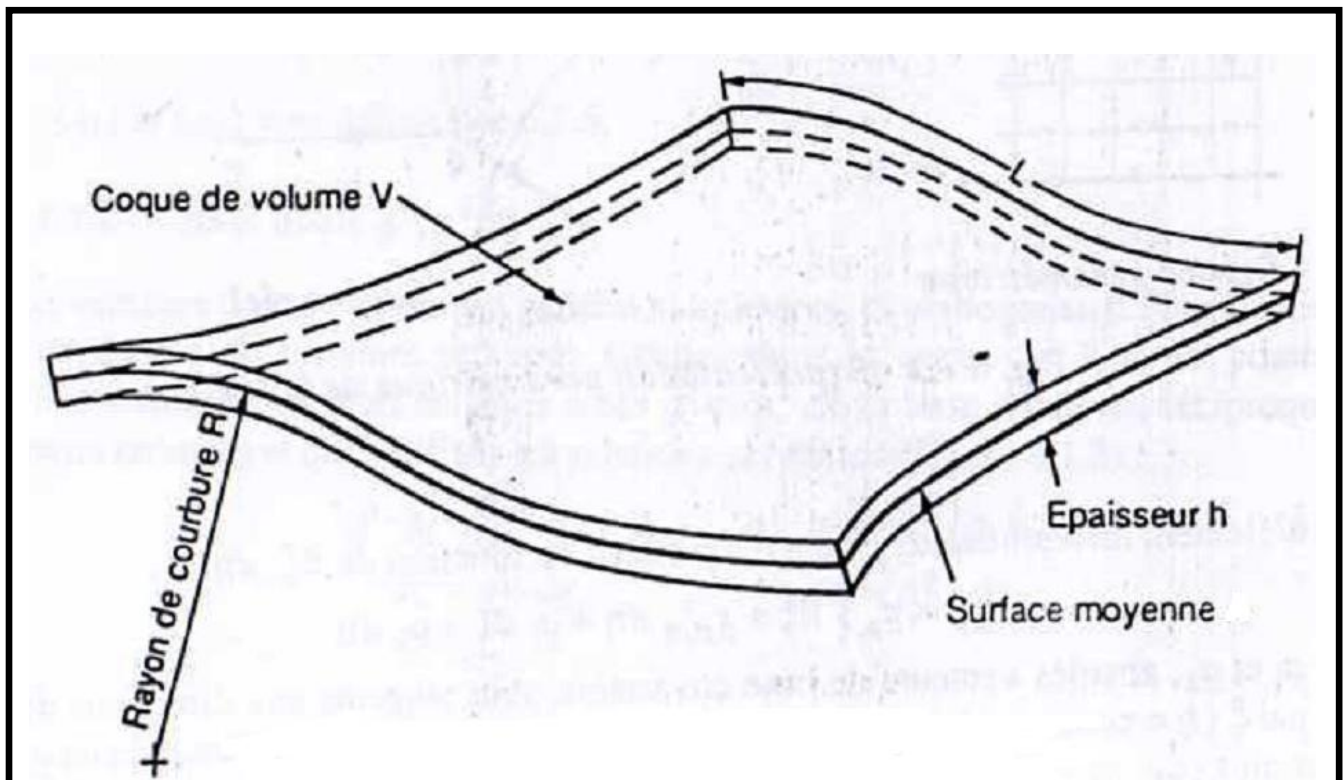


Fig.1.1. Géométrie d'une coque quelconque de volume [BAT 92]

Cette épaisseur h peut varier d'un point à un autre. Elle est considérée petite par rapport aux autres dimensions caractéristiques de la coque (longueur L , largeur b et rayon de courbure minimum).

Les structures de types coques sont fréquemment rencontrées dans les constructions civiles (toiture, barrages, réservoirs), les constructions mécaniques (carrosseries, automobiles), les constructions aéronautiques et spatiales (fuselages, caissons). [BAT 92]

La géométrie de la surface courbe peut être constante (Coque de révolution, forme simple) ou variable en chaque position (coque de forme complexe).

Autrement dit :

Une coque est définie par la géométrie de sa surface moyenne, et par son épaisseur en tout point de cette surface.

Soit Σ une surface et n une normale au point A de Σ . Un plan P contenant n , réalise une section normale de la surface; cette section se traduit par une courbe plane ν tracée sur Σ . Au point A de cette courbe, on désigne par r_n le rayon de courbure ; son inverse $1/r_n$ est la courbure normale (Figure .1.2). Lorsque le plan p tourne au tour de n , r_n et $1/r_n$ varient entre deux valeurs extrêmes que l'on appelle rayons de courbure principaux et courbures principales (r_1 et r_2 ; $1/r_1$ et $1/r_2$; tenseur de courbure).

Les plans P correspondants sont perpendiculaires. [FRE 92]

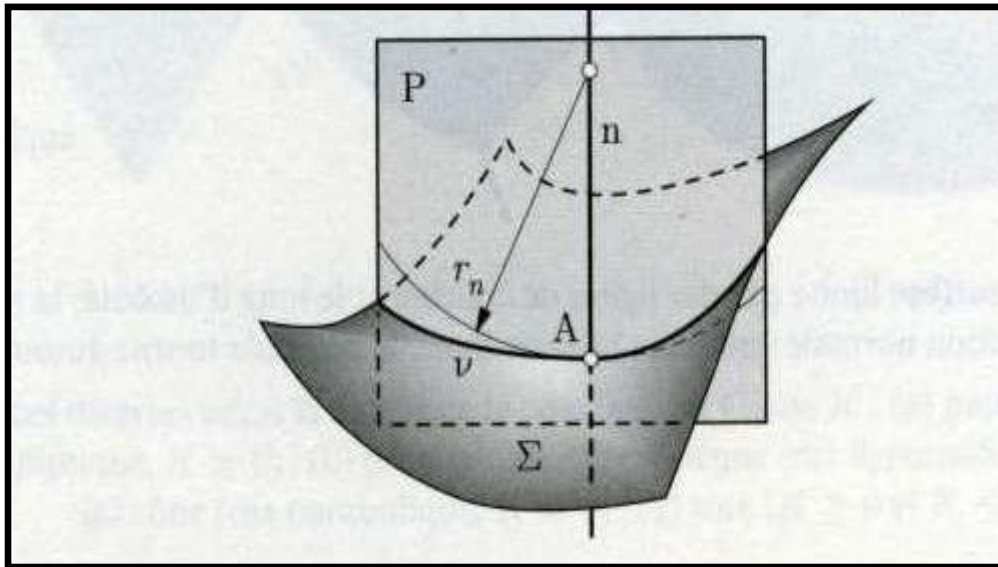


Fig.1.2. Courbe ν , de courbure normale $1/r_n$ au point A , Section normale de la surface Σ par le plan P . [FRE 92]

On appelle courbure " gaussienne " ou totale le produit des courbures principales

$k = (1/r_1) (1/r_2)$. Selon que l'une des courbures principales est nulle, de même signe ou de signe contraire à l'autre, on distingue les surfaces à courbure gaussienne:

- nulle, ou surface à simple courbure (cylindre...).
- positive (sphère.....), surface à double courbure.
- négative (paraboloïde hyperbolique.....), surface à double courbure.

1-2 Choix de la surface moyenne pour une coque

On peut puiser dans le grand choix offert par la géométrie des surfaces.

Parmi les surfaces à simple courbure, le cône et surtout le cylindre sont très utilisés (fusées ; réservoirs à hydrocarbures; récipients sous pression; silos; conduite forcées.....) .

❖ **Voûte autoportante** : une coque cylindrique " ouverte " appuyée à ses seules extrémités (figure.1.3.b); On peut accoler de telles voûtes, par exemple pour réaliser des sheds (figure.1.3.a).

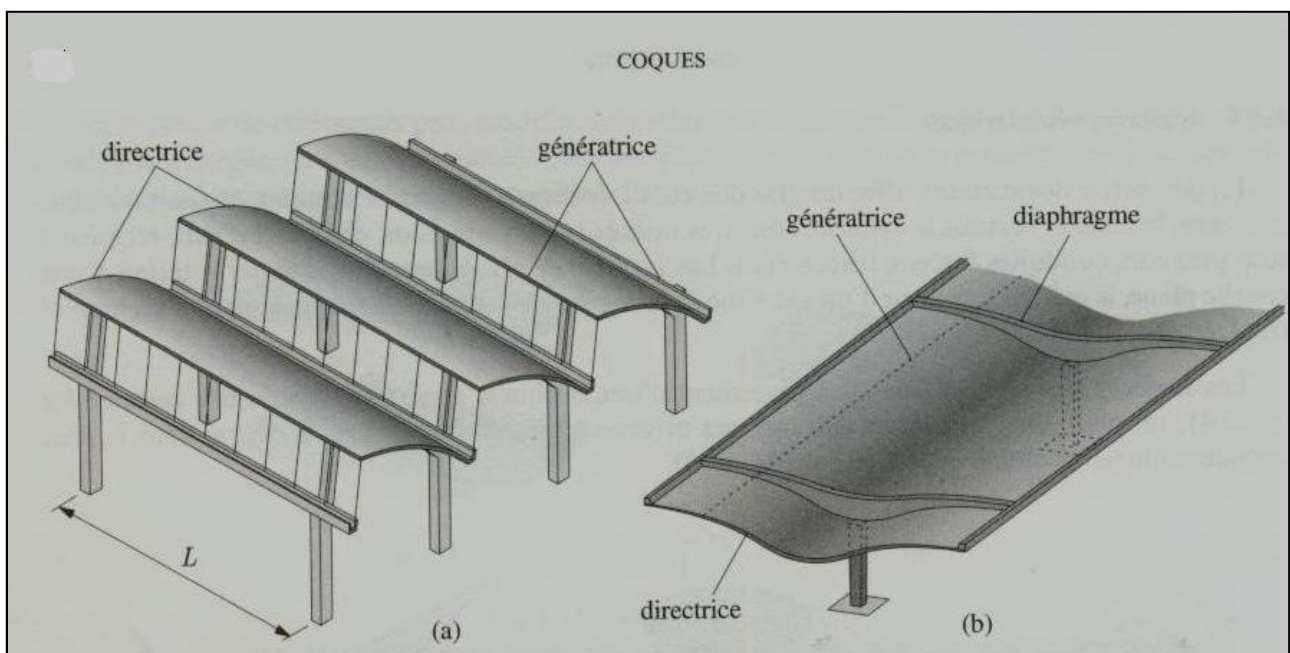


Fig.1.3. surfaces cylindriques ouvertes ($K=0$) dites voûtes autoportantes : (a) sheds (voutes à simple portée L) ; (b) abri (voute continue). [FRE 03]

❖ **Les surfaces de révolution** : obtenues par rotation d'une courbe plane autour d'un axe situé dans le plan de la courbe, sont d'un emploi très fréquent également (figure.1.4).

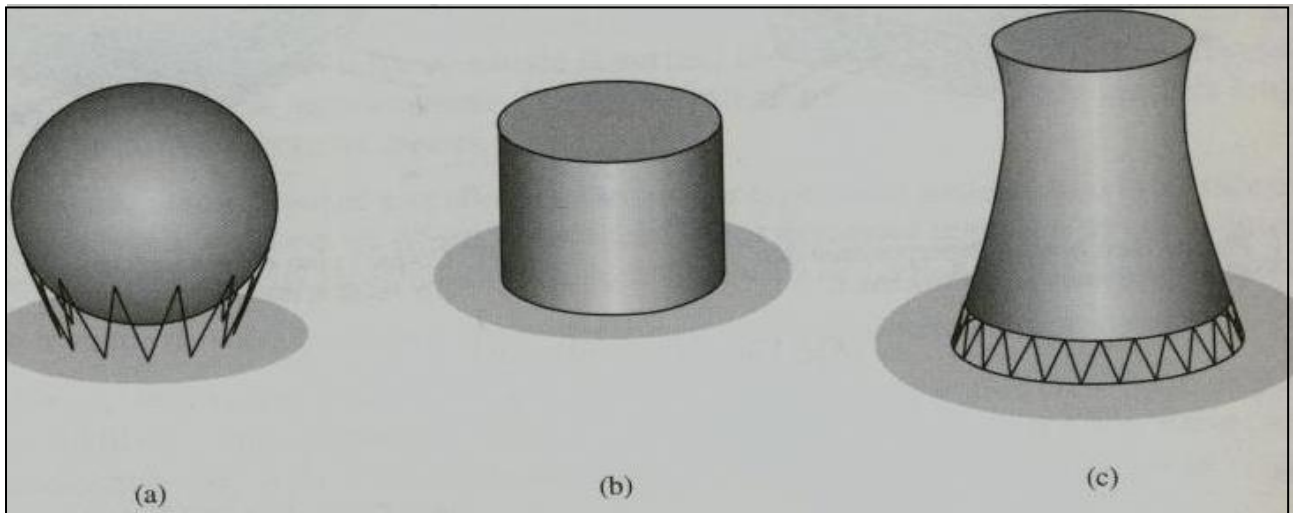


Fig.1.4. Surface de révolution (K : courbe gaussienne) :
 (a) réservoir sphérique (double courbure $K > 0$); (b) réservoir cylindrique (simple courbure $K = 0$);
 (c) tour de refroidissement (hyperboloïde, double courbure ($K < 0$)). [FRE 03]

- ❖ **Les surfaces de translation** : résultent du déplacement d'une courbe plane, dite génératrice, sur une autre, dite directrice (figure.1.5).

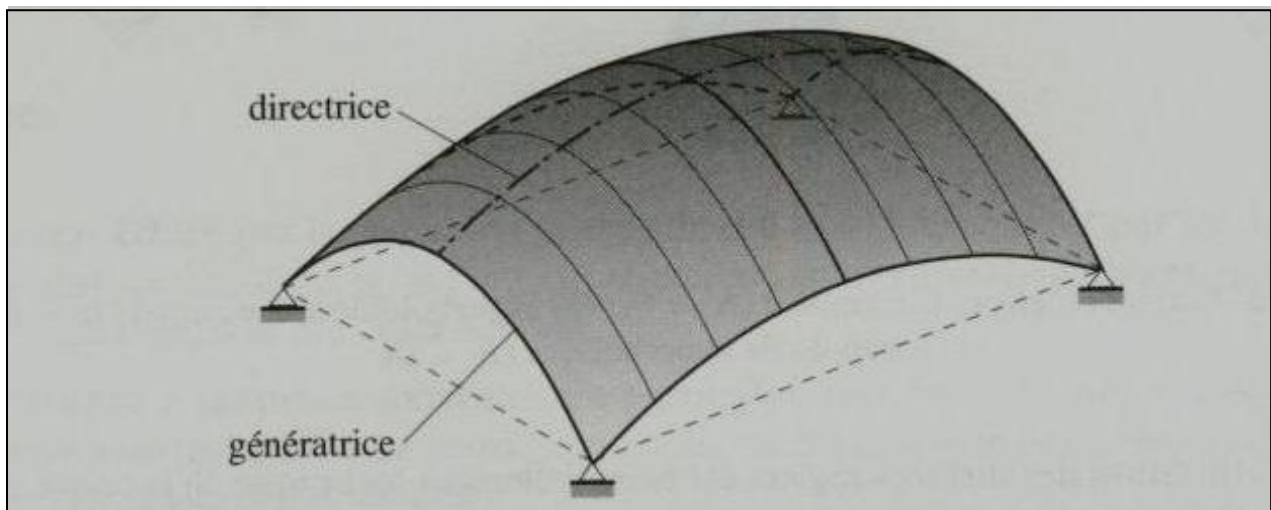


Fig.1.5. surfaces de translation ($K > 0$). [FRE 03]

❖ **Les surfaces réglées** : résultent du déplacement d'une droite (génératrice) le long de deux directrices ; on peut engendrer ainsi des surfaces à double courbure (figure.1.6).

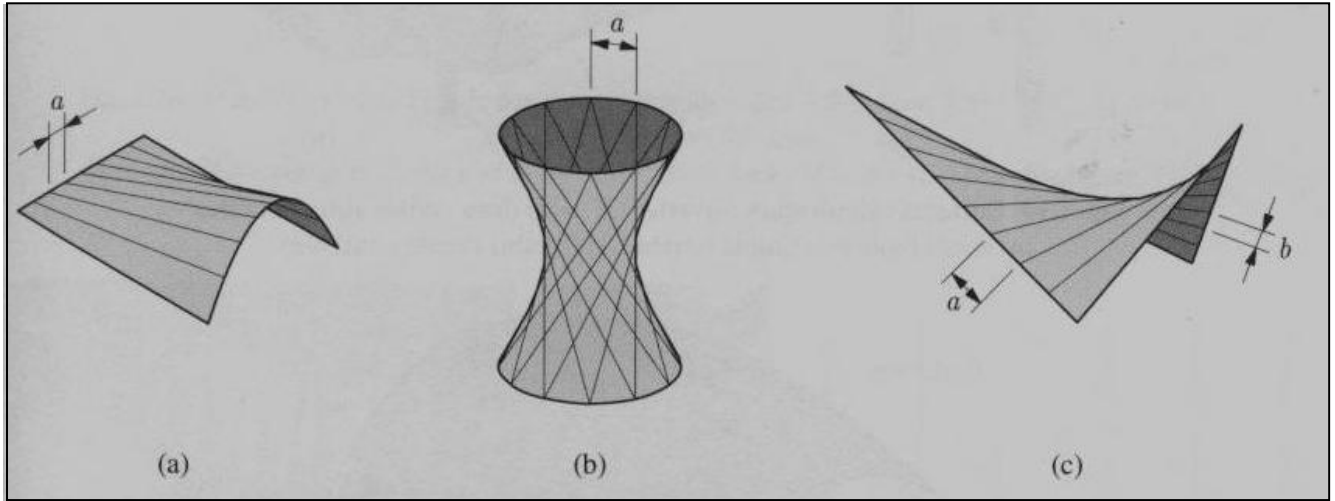


Fig.1.6. surfaces réglées diverses :

(a) Les conoïdes ($K=0$) ; (b) L'hyperboloïde à une nappe ($K < 0$) ;

(c) Le paraboloïde hyperbolique ($K < 0$). [FRE 03]

L'intérêt technique essentiel des surfaces réglées est de pouvoir réaliser le coffrage du béton au moyen de planches étroites rectilignes disposées suivant les génératrices, ou même de réaliser la coque en bois par un réseau de planches croisées clouées.

Ces surfaces géométriques ne sont toutefois ni l'unique ni nécessairement le meilleur choix pour une coque.

Le choix doit en fait être gouverné en premier lieu par la fonction à remplir. [FRE 92]

1-3 Classification des Théories selon le comportement

1-3-1 Hypothèses de linéarisation

On se place dans le cadre usuel de l'analyse linéaire des structures, acceptant :

- L'hypothèse de linéarisation géométrique : Petits déplacements, petites déformations.
- L'hypothèse de linéarisation matérielle (Loi de Hooke+ matériau homogène isotrope).

La première admet que le déplacement et déformations restent petits, en sorte que les équations cinématiques soient linéaires.

Pratiquement, les dilatations et les rotations doivent rester petites.

La seconde admet que le matériau obéit à la loi de Hooke.

Par simplicité, l'hypothèse complémentaire est la suivante :

-La coque est constituée d'un seul matériau isotrope homogène.

1-3-2. Hypothèses de La théorie des coques minces [Hypothèse love -Kirchhoff]

Love a généralisé aux coques les hypothèses classiques propres aux poutres de Bernoulli et aux plaques de Kirchhoff. Elles peuvent s'exprimer de la manière suivante :

- Les normales à la surface moyenne de la coque non déformée restent des normales à la surface moyenne de la coque déformée et elles ne changent pas de longueur ;

- La contrainte normale transversale est négligeable.

La première hypothèse est purement cinématique et s'appelle parfois loi de conservation des normales. Il en résulte d'abord que :

- Les glissements sont nuls dans tous les plans normaux à la surface moyenne.

$$\gamma_{\alpha z} = 0 \quad \gamma_{\beta z} = 0 \quad (1.1)$$

- la dilatation perpendiculaire à la surface moyenne est nulle ;

(Etat plan de contrainte, mais avec une incohérence)

$$\varepsilon_z = 0 \quad (1.2)$$

La seconde hypothèse : c'est une hypothèse statique, permet d'ignorer les effets qui se manifestent à travers l'épaisseur et s'écrit

$$\sigma_z \cong 0 \quad (1.3)$$

1-3-3 -Hypothèse de faible épaisseur

C'est l'hypothèse-clé, dont l'épaisseur h de la coque est petite vis-à-vis du rayon de courbure minimal r_{\min} de la surface moyenne, soit :

$$\text{En pratique } \frac{h}{r_{\min}} < \frac{1}{10} \quad (1.4)$$

❖ Conséquences

- Les faces de l'élément de coques sont rectangulaires.
- Vu que $\varepsilon_z = 0$, on peut supposer que les charges agissent au niveau de la surface moyenne.
- L'ordre de grandeur des termes négligeables.

1-3-4 Hypothèse de La théorie des Coques épaisses

Dans une théorie du premier ordre, les contraintes de cisaillements ne peuvent pas s'annuler sur les faces intérieures et extérieures de la coque ;

La fibre normale reste toujours rectiligne, mais n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen.

Si θ_x, θ_y désignent les angles que fait la fibre normale avec l'axe Z, il ne correspondant plus à l'inclinaison du plan moyen, on a donc : $\theta_x \neq -\frac{\partial w}{\partial y}$; $\theta_y \neq -\frac{\partial w}{\partial x}$

L'hypothèse de Mindlin-Reissne [Mic95] conduit naturellement à la formulation d'élément de coque épaisse si :

$$4 < L/h < 20 \quad \text{et} \quad 4 < r_{\min}/h < 20 \quad (1.5)$$

1-4 Coques surbaissées

1-4-1 Géométrie

Lorsqu'une coque a, en tout point, une surface moyenne de très faible courbure, elle est qualifiée de coque surbaissée; la surface moyenne est aussi dite surbaissée.[FRE 03] On peut tracer un plan, à peu près parallèle à la surface moyenne Σ de la coque, dans lequel on dessine les axes X et Y d'un système d'axes cartésiens (X,Y,Z) (figure.1.7) ,et définir Σ par rapport à ce plan explicitement, par (1.6)

$$Z = Z(X, Y) \quad (1.6)$$

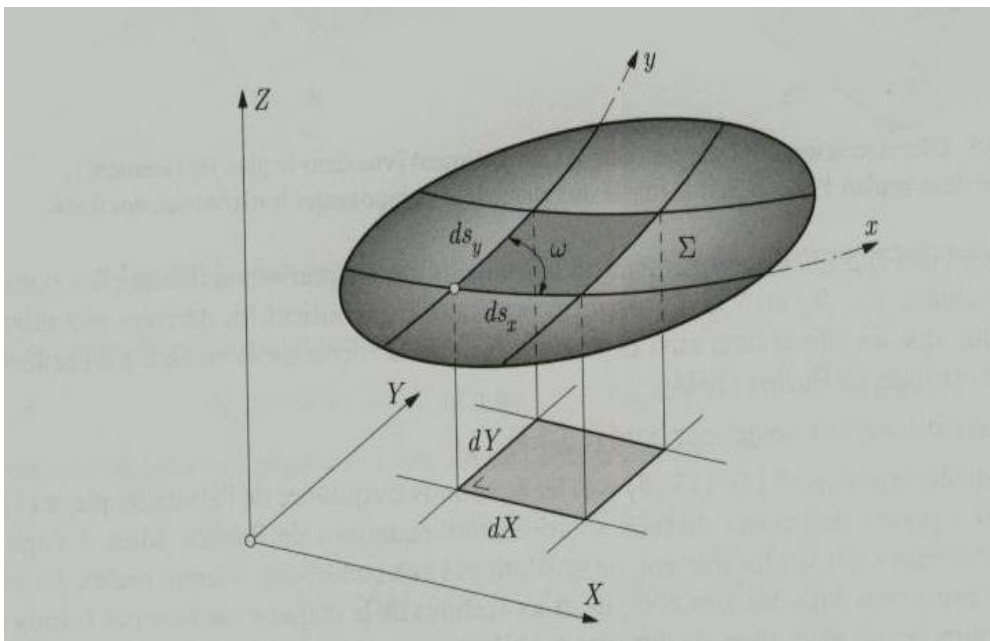


Fig. 1.7 Surface moyenne d'une coque surbaissée. [FRE 03]

La surface moyenne de la coque est surbaissée si, par rapport au plan de référence (X, Y), les pentes:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

Sont petites, c'est-à-dire si les carrés et produits des dérivées premières de Z(X,Y) sont négligeable devant l'unité .

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \ll 1 \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \ll 1 \quad \left|\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}\right| \ll 1 \quad (1.7)$$

Pratiquement en tout point (figure.1.8), des que $\varphi_0 < 10^\circ$ environ, on entre dans cette catégorie de coque.

Généralement, une coque est considérée surbaissée comme postulé par E .Reissner [KRA 67]

$$\text{Si :} \quad H < \frac{1}{8} 2a \quad (1.8)$$

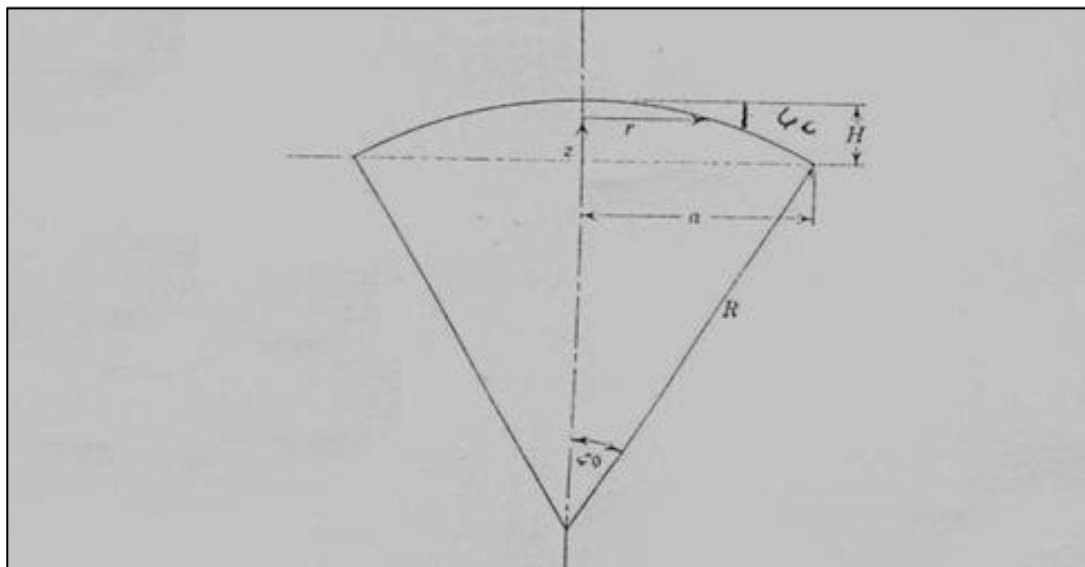


Fig.1.8 Coque surbaissée (shallow shell). [KRA 67]

1-4-2 Théories de coques surbaissées

Deux théories de coques surbaissée sont couramment utilisée: l'une, dite de donnell, s'exprime en coordonnées curviligne (x, y), l'autre, de Marguerre, en coordonnée cartésiennes (X, Y).

Selon la théorie, une hypothèse complémentaire de type cinématique est nécessaire ou non, c'est à se stade que s'exprime la différence.

1-4-3 Coque surbaissée en coordonnée curviligne (théorie de Donnell (1993))

Toutes les grandeurs et équations s'exprime dans les coordonnées curviligne (x, y) de la surface moyenne la normale est désigne par z.

Dans cette théorie, une hypothèse complémentaire de caractère cinématique, est nécessaire; elle postule que les composantes membranaires u et v du déplacement sont négligeable devant la composante transversale w: elles peuvent être ignorée dans l'expression des rotations, et disparaissent donc aussi de celle des courbures

1-4-4 Coques surbaissées en coordonnées cartésiennes (Théorie de Marguerre) (1938)

On travaille dans les axes cartésiens (X, Y, Z) et toute les grandeurs s'y réfèrent.

La correspondance entre la coque surbaisse et son plan (X, Y) de référence a lieu par projection sur (X, Y) aucune hypothèse complémentaire n'est nécessaire.

1-5 l'analyse Analytique des coques

L'Ioi de HOOKE tridimensionnelle s'écrit

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x) \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) \\
 \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx}/G
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

Où E est le module d'élasticité, ν le coefficient de poisson et G le module de glissement.

Suite à La première et la seconde hypothèse de La théorie des coques minces (§ 1.3.2) elle devient:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Ces hypothèses ramènent donc l'état tridimensionnel à un état de contrainte localement plan, parallèlement à la surface moyenne de la coque.

De plus, suite à ces mêmes hypothèses ; les déplacements de tout point de la coque sont définis par la connaissance des déplacements de la seule surface moyenne. On réduit ainsi l'étude à la surface moyenne.

Suite à La première hypothèse (§ 1.3.2), les déplacements varient linéairement à travers l'épaisseur de la coque ; puis, suite à l'hypothèse-clé (§ 1.3.3), et l'hypothèse de linéarisation géométrique, les déformations aussi; enfin, suite à l'hypothèse de linéarisation matérielle, les contraintes elles aussi sont distribuées linéairement à travers l'épaisseur.

Enfin, par simplicité, vu que la coque est formée d'un seul matériau isotrope homogène,

La "surface neutre" se trouve à mi-épaisseur de la coque, et coïncide donc avec la surface moyenne.

❖ Contraintes et efforts intérieurs

Afin d'obtenir une théorie bidimensionnelle, il faut encore intégrer les distributions des contraintes à travers l'épaisseur afin de les remplacer par leurs résultantes équivalentes que sont les efforts intérieurs.

Alors la variable z aura complètement disparu.

La figure 1.9 montre les conventions de signe pour les contraintes : sur une face positive, les contraintes sont positives lorsqu'elles agissent dans le sens des axes.

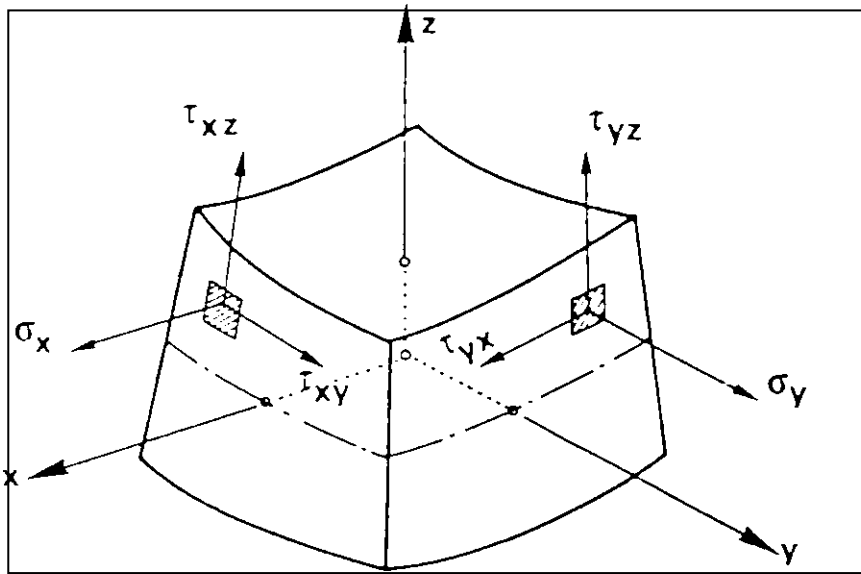
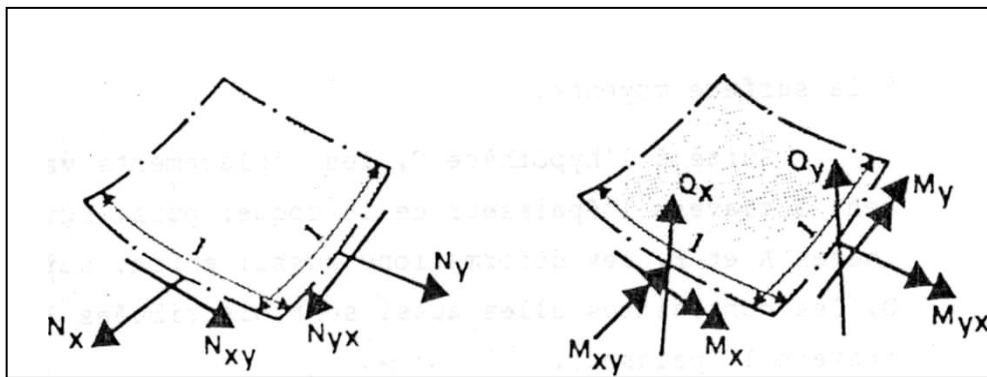


Fig.1.9 Contrainte. [FRE 92]



a) efforts membranaires

b) efforts flexionnels

Fig.1.10 Efforts intérieurs. [FRE 92]

Le sens d'action des efforts intérieurs est déduit de celui des contraintes:

un effort intérieur positif produit des contraintes positives sur les faces positives dans la zone $z > 0$ (figure.1.10). Les efforts intérieurs sont définis par unité de longueur d'arc sur la surface moyenne.

Le domaine d'intégration est rectangulaire, de hauteur t (épaisseur de la coque), et de largeur constante L (en vertu de l'hypothèse-clé (1.4)). On a :

$$\begin{array}{ll}
\text{Efforts normaux} & N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x d_z \quad N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y d_z \\
\text{Efforts tangentiels} & N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} d_z \quad N_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} d_z \\
\text{Moment de flexion} & M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z d_z \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z d_z \\
\text{Moment de torsion} & M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z d_z \quad M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} z d_z \\
\text{Effort tranchants} & T_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} d_z \quad T_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} d_z
\end{array} \quad (1.11)$$

En vertu de la réciprocité des contraintes tangentiels, on a

$$N_{xy} = N_{yx} \quad (1.12)$$

$$M_{xy} = M_{yx} \quad (1.13)$$

De sorte qu'il y a huit efforts intérieurs inconnus

Il n'y a pas contradiction entre la présence des efforts tranchants T_x et T_y , et l'hypothèse (1.1)

(qui conduit à $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$) Comme pour les poutres et les plaques, ces efforts tranchants sont nécessaires pour satisfaire aux conditions d'équilibre, et peuvent se déduire ces autres efforts intérieurs (M_x et M_y) par les équations d'équilibre (sans qu'il soit nécessaire de définir la distribution des τ qu'ils produisent).

Lorsque les efforts intérieurs sont connus, on en déduit la distribution des contraintes par les formules classiques (section rectangulaire de largeur L et de hauteur t)

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{N_x}{t} + \frac{12 M_x}{t^3} z & \sigma_y &= \frac{N_y}{t} + \frac{12 M_y}{t^3} z \\
 \tau_{xy} &= \frac{N_{xy}}{t} + \frac{12 M_{xy}}{t^3} z & & \\
 \tau_{xz} &= \frac{3 T_x}{2t} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right) & \tau_{yz} &= \frac{3 T_y}{2t} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2}\right)
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

Les contraintes σ_x, σ_y et τ_{xy} varient linéairement et sont extrêmes en $z = \pm t/2$ tandis que τ_{xz} et τ_{yz} varient paraboliquement, sont maximums sur la surface moyenne ($z = 0$) et nulles en $z = \pm t/2$

❖ Equations générales

Soit P_x, P_y, P_z les composantes des forces de surface agissant sur la surface moyenne et provenant des diverses charges sollicitant la coque. L'expression de l'équilibre d'un fragment de coque fournit six équations liant les efforts intérieurs et ces forces (figure.1.10).

Cependant, à cause de (1.12) et (1.13), il ne subsiste que cinq équations d'équilibre, car l'équilibre de rotation autour de l'axe normal z est automatiquement satisfait.

Appelons $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et γ les déformations normales et tangentielles de la surface moyenne, X_1, X_2 et X les variations des courbures principales et de la torsion de cette même surface.

La figure 1.11 montre comment les variations des courbures interviennent dans le calcul de la dilatation d'une fibre. La torsion se définit comme pour les plaques (limite du rapport de l'angle entre deux côtés opposés d'un élément de la surface moyenne à la distance les séparant, lorsque l'élément tend vers zéro).

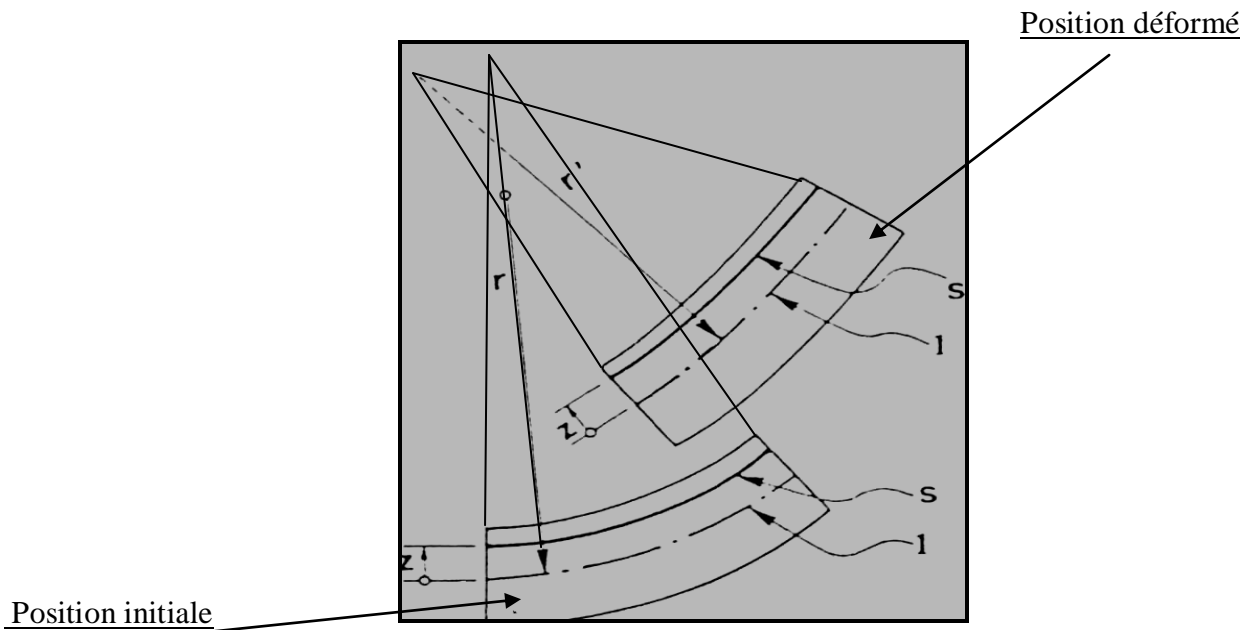


Fig.1.11 Dilatation suite à la variation de courbure cinématique x . [FRE 92]

Triangles semblables :

$$s = \frac{r - z}{r} = 1 - \frac{z}{r}$$

$$s' = \frac{r' - z}{r'} = 1 - \frac{z}{r'}$$

Dilatation : $\epsilon = (s' - s)/s$

$$\epsilon = \frac{1 - z/r' - (1 - z/r)}{1 - z/r} = \frac{-z/r' + z/r}{1 - z/r}$$

L'hypothèse de faible épaisseur $\Rightarrow \epsilon \cong -z \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) = -zx$

On a, en tout point de la coque

$$\begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_1 - z X_1 \\ \epsilon_y = \epsilon_2 - z X_2 \\ \gamma_{xy} = \gamma - z X \end{cases} \quad (1.15)$$

Ces équations montrent que les déformations varient linéairement à travers l'épaisseur de la coque. x_1 , x_2 et x les variations de courbure cinématique.

❖ **Loi constitutive**

On introduit ces valeurs dans (1.10); on résout par rapport aux contraintes, que l'on introduit alors dans (1.11). On obtient ainsi l'expression de la loi constitutive "intégrée à travers l'épaisseur", où les efforts intérieurs ("contraintes généralisées") sont fonctions des six déformations ("généralisées") de la surface moyenne.

$$\left. \begin{aligned}
 N_x &= C(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \\
 N_y &= C(\nu\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\
 N_{xy} &= N_{yx} = C \frac{1-\nu}{2} \gamma = GtY \\
 M_x &= -D(X_1 + \nu X_2) \\
 M_y &= -D(X_2 + \nu X_1) \\
 M_{xy} &= M_{yx} = -D \frac{1-\nu}{2} \gamma = -G \frac{t^3}{12} X
 \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Avec

- rigidité extensionnelle $C = \frac{Et}{1-\nu^2}$ (1.17)

- rigidité flexionnelle $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ (1.18)

- module de glissement $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (1.19)

Enfin, si l'on appelle u, v, w les trois composantes du déplacement d'un point de la surface moyenne, il est possible d'établir six relations cinématiques liant les six déformations généralisées ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma, x_1, x_2, x$) à ces trois déplacements (u, v, w); ce sont les relations déformations-déplacements.

Bilan

Il y a 17 inconnues

- 8 efforts internes,
 - 6 déformations,
 - 3 déplacements
- } *définis sur la surface moyenne*

Pour 17 équations

- 5 équations d'équilibre,
- 6 relations constitutives,
- 6 relations cinématiques.

Il est donc en principe possible de résoudre.

Nous avons vu que le but des hypothèses était essentiellement de ramener l'étude de la coque à celle de sa surface moyenne. Aussi, si l'on désire établir rigoureusement les 17 équations, est-il nécessaire de travailler avec ces coordonnées tracées sur cette surface. L'appareil mathématique est alors très complexe (calcul tensoriel en coordonnées curvilignes quelconques), et les équations ne présentent presque plus aucun intérêt pratique pour l'ingénieur. Cette démarche est toutefois la seule valable pour établir convenablement la théorie.

Il existe heureusement les méthodes numériques qui permettent de simplifier cette théorie générale, tout en conservant un degré de précision tout à fait satisfaisant. Ces méthodes numériques permettent aujourd'hui de traiter les cas les plus complexes. [FRE 92]

1.6. Conclusion

L'évolution de la modélisation des coques est très liée à celle des méthodes numériques, et principalement à la méthode des éléments finis, par contre les développements analytiques sont très rares et d'une grande complexité. Cela a donné naissance à des formulations intéressantes et largement utilisées actuellement dans les codes de calcul.