CHAPITRE II

APPROCHE NUMERIQUE

2.1. Introduction

La résolution analytique d'un problème de mécanique des milieux continus appliquée au génie civil est une tache rarement possible. Les équations aux dérivées partielles permettent d'obtenir une solution mathématique exacte du problème, néanmoins elle reste limitée à des cas particuliers qui n'ont souvent qu'un rapport très lointain avec la réalité des ouvrages ; c'est pour quoi des méthodes de calcul approché ont été développées.

La méthode des éléments finis, qui est une méthode approchée de calcul numérique des structures donnant une solution à un problème de minimum, elle s'est avérée au cours du temps plus efficace, elle n'a jamais cessé d'élargir son champ d'application.

2.2. La Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode numérique de résolution, approchée des équations différentielles décrivant les phénomènes physiques de l'ingénierie.

D'une façon générale, la résolution par la MEF inclut les étapes suivantes :

- Obtention de la formulation du problème
- Réalisation d'un maillage, correspondant à la discrétisation du domaine d'étude en éléments (triangles, tétraèdres, hexaèdres . . .) sur lesquels les Champs sont écrits en termes d'un nombre fini de degrés de liberté et de fonctions de base à repère local.
- Calcul des matrices élémentaires qui, après assemblage, génèrent un système matriciel.
- Résolution du système algébrique pour l'obtention d'une solution approchée du problème. [Ida 97]

2.2.1. Historique

La méthode des éléments finis connaît, depuis 1970 environ, une extension fantastique, qui va de pair avec le développement et l'accroissement de puissance des ordinateurs. Elle est devenue un outil de travail, calcul et conception quotidien, voir familier, de l'ingénieur, dans des domaines aussi varies que l'analyse des structures, le transfert de chaleur, la mécanique des fluides, l'électromagnétisme, les écoulements souterrains, la combustion ou encore la diffusion des polluants.

C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaire, linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur. La modélisation d'un phénomène physique conduit habituellement à l'établissement, dans un domaine (volume, surface, ligne), d'équation différentielle ordinateur ou aux dérivées partielles, accompagnée, à la frontière du domaine (surface, ligne, point), des conditions aux limites. Cet ensemble s'appelle, en abrégé ; un problème aux limites et en constitue la forme différentielle. Il n'est pas fréquent de pouvoir en obtenir la solution analytique.

Les ingénieurs se sont donc tournés vers des méthodes de résolution approximative telle que la MEF qui consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielle en équation algébrique.

La MEF a été mise au point chez Boeing (Seattle, USA), l'apparition des ordinateurs et les besoins de l'industrie aéronautique ont provoqué un développement rapide de la mécanique des structures entre 1950 et 1960. Turner, Clough, Martin et Topp introduisent en 1956 le concept d'élément fini : ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires sur les quels les déplacements sont supposés varies linéairement. Le comportement de chaque panneau est caractérisé par une matrice de rigidité élémentaire. A partir de ces matrices, la technique classique de la mécanique des structures conduit à la solution, c'est-à-dire aux déplacements en tout point du milieu continu.

Par ailleurs, il est à signaler également le travail d'Argyris et Kesley en 1960 qui systématise l'utilisation de la notion d'énergie dans l'analyse des structures. En fait les idées de base de la méthode apparurent bien avant, courant (1943) et Hrennikoff (1941), pour résoudre divers problème aux limites, par exemple la torsion de Saint-Venant en divisant la section en triangle ; mais elles restèrent sans suite.

Dés 1960 la méthode est reformulée à partir de considérations énergétique et variationnelles, sous forme générale des résidus pondérés (Zienkiewicz, Avantes, Greene, Finalayson..).

De nombreux auteurs créent des éléments à haute précision (Fellippa); enfin la méthode est reconnue comme un outil général de résolution d'équations aux dérivées partielle, et une base mathématique construite à partir de l'analyse fonctionnelle.

A partir de 1967, de nombreux livres sont publiés sur la méthode des éléments finis signalons en particulier ceux de Zienkiewicz, Gallagher, Rockey, etc. Maintenant la MEF est très répandue dans les industries, en particulier en construction aéronautique, aérospatial, navale et nucléaire, de nombreux programmes généraux de calcul sont disponible pour utiliser industriellement la MEF, principalement dans le domaine de la mécanique des solides et des structures, citons par exemple : ABACUS, ANSYS, CEZAR, PLAXIS,.............. etc.

Aujourd'hui, l'ingénieur de génie civil, confronté à la complexité croissante des structures comme aux exigences grandissantes des Maîtres d'œuvre en matière de justification, est donc amené, sinon incité, à mettre en œuvre cette puissante méthode de calcul, on peut d'ailleurs penser que son emploi se généralisera aux structures courantes, tant il es vrai qu'aucun ingénieur ne sait résister à l'attrait du progrès, particulièrement lorsqu'il est supposé permettre de « tout calculer » ; encore faut- il savoir manier correctement ces méthodes pour bénéficier de leurs potentialités effectives et, pour ce faire, disposer des guides et des conseils nécessaires à leur bonne pratique. [FRE 01], [DHA 84]

2.3. Modélisation et discrétisation

Pour s'assurer qu'une analyse numérique simulera au mieux un problème réel donné, il faut effectuer deux opérations essentielles, la modélisation dans un premier temps et la discrétisation dans un deuxième temps (figure 2.1). Ces opérations portent sur deux aspects principaux du problème pratique :

- Représentation de la géométrie, des charges, des conditions aux limites et du milieu ;
- Choix des éléments finis et du maillage.

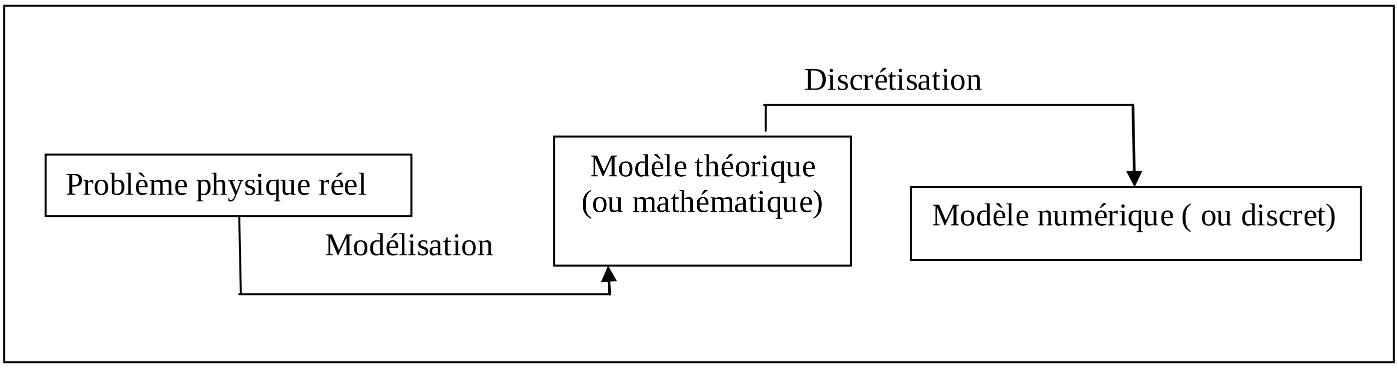

Fig.2.1. Etape de l'analyse d'un problème aux limites [FRE 01]

2.3.1. Modélisation du comportement de la structure

La modélisation consiste à rattacher la structure réelle à un modèle de la mécanique des solides, structures et matériaux, capable d'en décrire le fonctionnement avec une précision convenable. C'est à ce stade que s'opèrent deux options fondamentales :

- Choix cohérent du schéma et de la théorie décrivant la structure, c'est-à-dire à ramener la structure à une géométrie simple en choisissant des axes (barres, poutres, câble), des plans (parois, plaque), des surfaces (coques), des volumes (solides), à choisir la théorie la plus appropriée à cette géométrie, à définir les conditions d'appui et les charges, à tenir compte d'éventuelle symétries;
- Choix pertinent des lois constitutives décrivant chaque matériau, c'est-à-dire à choisir les lois décrivant tant les réponses mécaniques classiques (linéarité, anisotropie, plasticité…) que les phénomènes physique particuliers (teneur en eau, discontinuité, perméabilité…), et à connaître l'état initial des matériaux (contraintes initiales).

2.3.2. Discrétisation de la structure modélisée

L'opération de discrétisation est aussi importante que celle de modélisation. Elle implique essentiellement deux choix:

- L'un porte sur le type d'élément fini à utiliser, les éléments doivent s'adapter à la nature du problème à traiter, c'est-à-dire respecter les hypothèses et se conformer aux caractéristique de la modélisation ;
- L'autre sur la finesse de cette discrétisation, en liaison avec le maillage qui est guide essentiellement par la géométrie, à savoir par les discontinuités (trous; variation d'épaisseurs, d'inertie ou de matériau…), les conditions d'appui et chargement, les étapes de construction,

les zones à forte variation des contraintes ou déplacement (découpage plus fin), certains aspect de la rhéologie (orthotropie, …), etc.

La discrétisation fournit un modèle numérique du modèle mathématique de la structure.

Cette étape importante, précédant le calcul proprement dit, fait appel aux connaissances et à l'expérience de l'ingénieur dans le domaine très vaste du calcul par éléments finis et de l'informatique. [FRE 01]

Les éléments les plus utilisés en pratique sont illustrés sur la figure 2.2

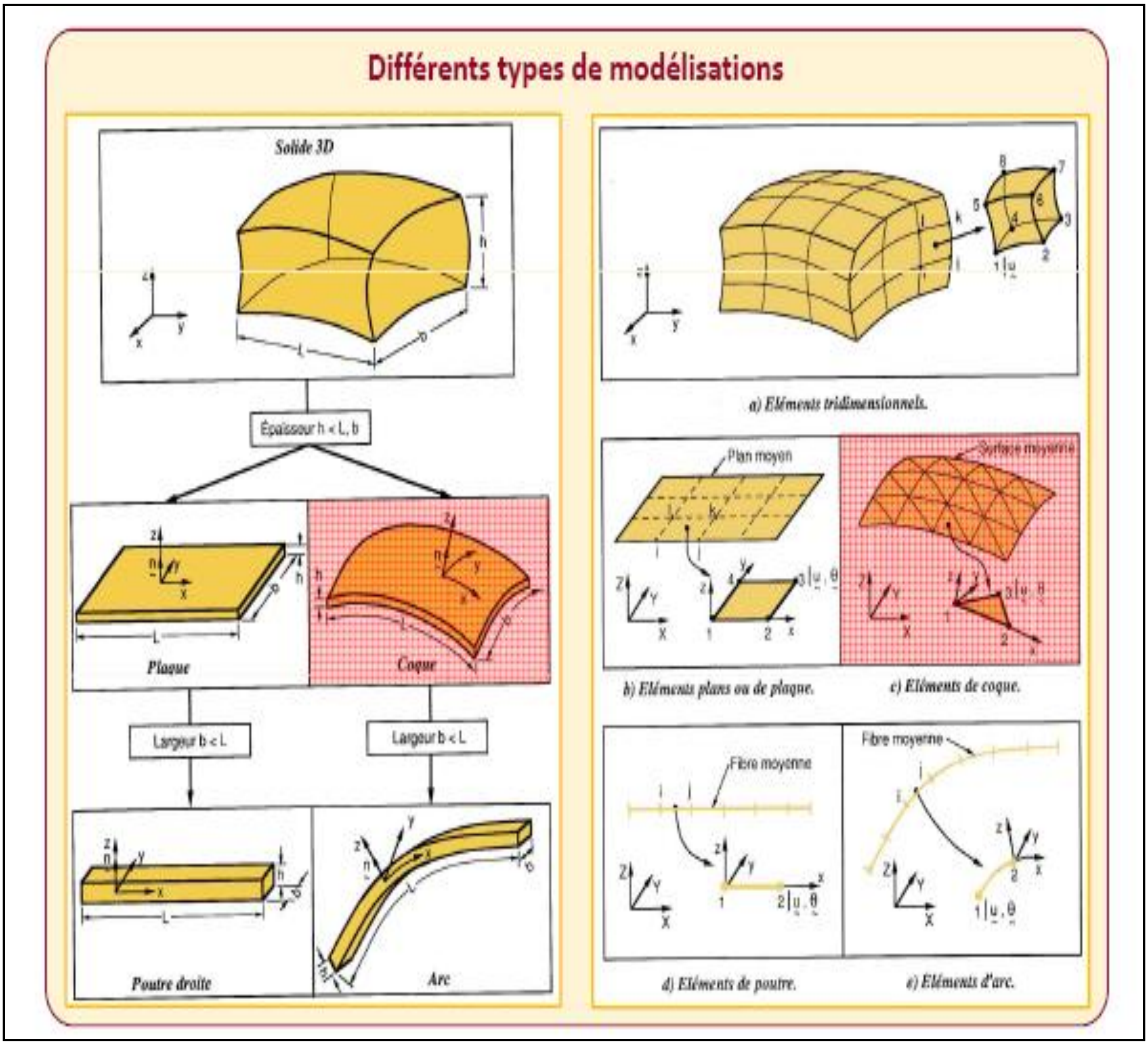

Fig.2.2. différents types de modélisations [NAC 2010]

2.4. Quelques problèmes de discrétisation

L'opération de discrétisation des structures tridimensionnelles à parois minces ou d'épaisseur modérée reste une étape délicate d'une analyse par éléments finis. La complexité des formes géométriques pousse l'ingénieur aux simplifications, nécessaires, mais parfois excessives. De plus, lés éléments, de par leurs propriétés, peuvent produire des comportements inattendus. On examine dans cette section quelques-uns des problèmes de discrétisation les plus classiques. Certains concernent surtout les éléments plaques-membranes, d'autres tous les éléments, d'autres enfin ne touchent que quelques types d'éléments.

2.4.1. Approximation de la géométrie

Le plus souvent, la représentation de la géométrie d'une coque par un maillage d'éléments finis introduit nécessairement des approximations géométriques. Entre les nœuds, l'approximation poly- nominale de la géométrie ne suit généralement pas la forme réelle de la surface moyenne de la coque ; le cas extrême est celui des éléments plaques-membranes, créant une coque à facettes inscrite dans la surface moyenne exacte.

Mais même avec des éléments courbes, la continuité de la pente, transversalement aux frontières, n'est ordinairement pas assurée (figure 2.3). Il en résulte la formation d'arêtes artificielles, qui peuvent provoquer de légères modifications de la rigidité de la coque discrétisée.

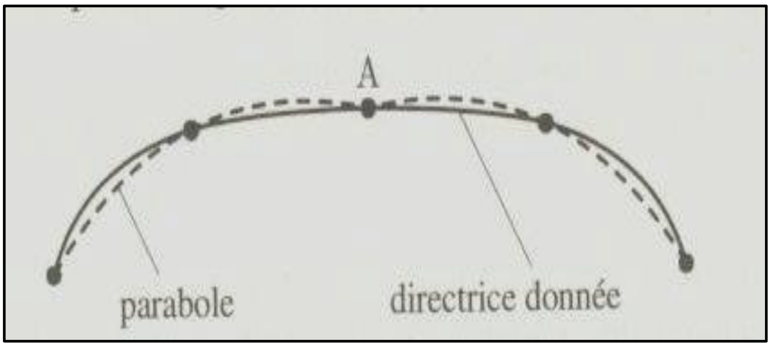

Fig.2.3. La discrétisation de la directrice d'une voûte autoportante par deux paraboles fait apparaître une arête artificielle le long de la génératrice A (vue en coupe) [FRE 03]

La situation peut être pire avec des éléments surbaissés formulés en coordonnées cartésiennes, car ces éléments sont rapportés à un plan de référence par projection orthogonale.

Il en résulte une dislocation le long des frontières, entre les nœuds sommets (Figure 2.4). Ces dislocations rendent hasardeuse la disposition de nœuds ailleurs qu'aux sommets

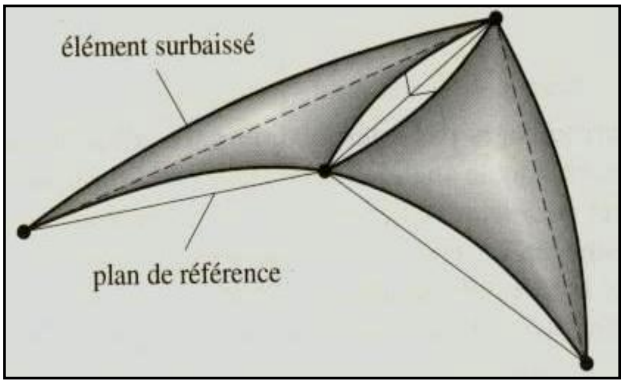

Fig. 2.4. Dislocation inévitable à la jonction de deux éléments
Triangulaires de type Marguerre [FRE 03]

Très peu d'études ont été consacrées à ces problèmes. Il semble que les erreurs géométriques aient peu d'influence sur les résultats, sauf pour les maillages visiblement trop grossiers. Quand la taille des éléments finis tend vers zéro ($h \longrightarrow 0$), ces erreurs ne compromettent pas les propriétés de convergence.

Il convient toutefois de rester attentif. Considérons par exemple un panneau cylindrique muni d'un raidisseur annulaire interne (Figure 2.5a). La discrétisation de cette structure par des éléments quadrilatéraux à quatre nœuds, de type coque surbaissée, fait apparaître des dislocations le long de chaque élément de raidisseur (Figure 2.5b). Tout se passe alors comme si la hauteur moyenne du raidisseur devenait supérieure à b, ce qui accroît artificiellement l'effet de raidissage par rapport à la réalité. Dans un problème d'instabilité, cet effet peut être très sensible.
Raccord coque-raidisseur : Risque de surestimer la résistance dans le cas dune étude de stabilité.

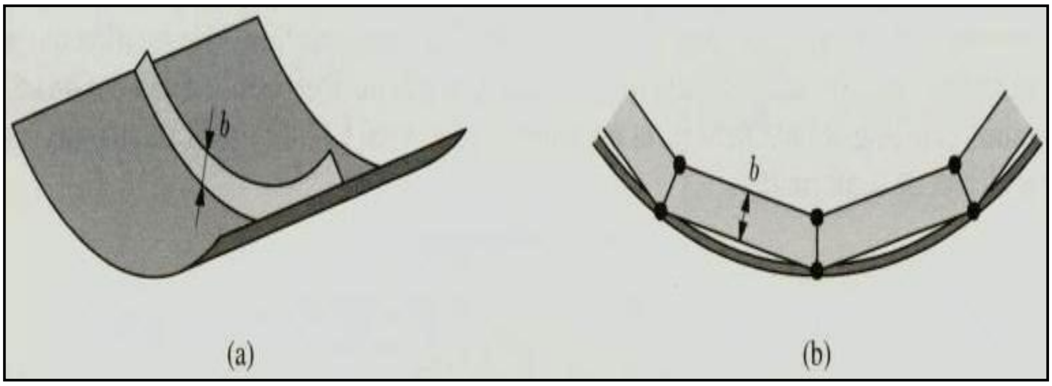

Fig. 2.5 Dislocation modifiant la raideur d'une structure :

(a) vue ; (b) discrétisation (coupe) [FRE 03]

2.4.2. Arêtes artificielles et moments parasites

Envisageons la discrétisation, par des éléments plans de coque, d'un cylindre soumis à une pression uniforme (Figure 2.6a). La modification de géométrie produite par le maillage en facettes introduit inévitablement des perturbations dans le champ des efforts intérieurs. Pour le cylindre, on a N_φ= cste et M_φ = 0, tandis que dans le modèle à facettes (qui est ici une structure plissée), chaque élément fini est évidemment soumis à des moments parasites (Figure 2.6b).

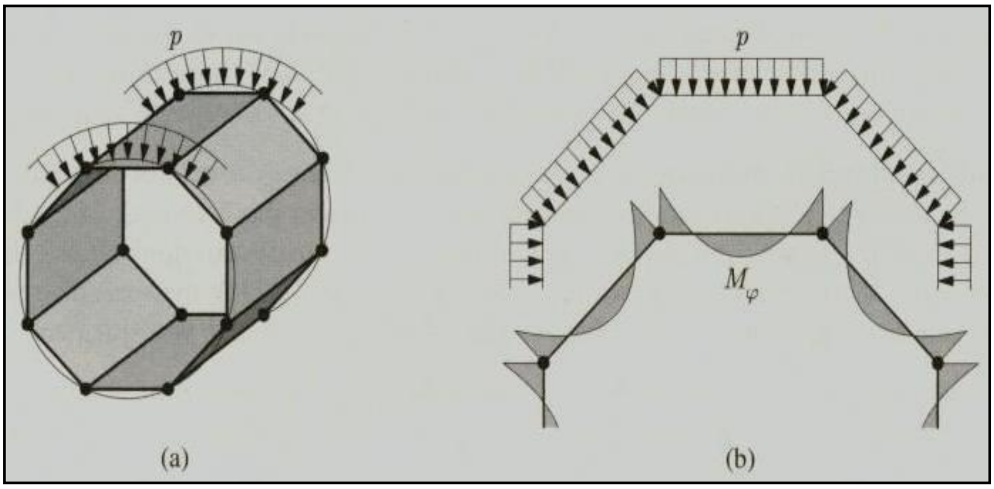

Fig. 2.6 Les arêtes artificielles créent des moments parasites [FRE 03]

Les moments parasites apparaissent lorsqu'ils existent des arêtes artificielles et se superposent aux moments réellement existants. L'importance de ces moments parasites est difficile à évaluer ; elle reste en principe faible si la discrétisation est raisonnablement fine, et s'atténue asymptotiquement (***h*** $\longrightarrow$ 0).

2.4.3. Difficultés de conformité

Dans les structures plissées, lors des jonctions de coque et le long des arêtes artificielles, la non- conformité devient quasiment inévitable.

Considérons deux éléments finis de type plaque-membrane connectés à angle droit

(Figure 2.7). On observe immédiatement que chaque élément possède un degré de liberté de rotation qui ne peut être connecté à l'autre élément, vu qu'il n'y a que deux degrés de liberté de rotation par nœud. Cette circonstance, conséquence naturelle de la modélisation, peut néanmoins conduire à des problèmes de conformité.

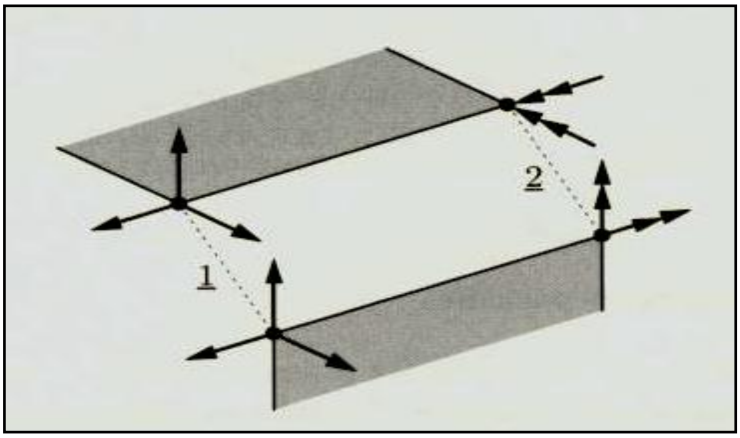

Fig. 2.7 raccordement, à angle droit, de deux éléments plaques-membranes. [FRE 03]

Pour examiner plus en détail la conformité le long de la frontière 1-2, prenons le cas courant, de type Kirchhoff-Love, où l'on combine un champ membranaire (u, v) linéaire à un champ flexionnel (w) cubique pour créer un élément plaque-membrane (la situation est la même pour un élément surbaissé utilisé plan). La Figure 2.8(a) montre la situation examinée : il est clair que la cubique de plaque ne peut se connecter à la droite de membrane ; on ne peut réaliser que $v_1 = w_1$ et $v_2 = w_2$

Il faut donc choisir un champ membranaire cubique. Mais le choix usuel des degrés de liberté $v_1, v_2, v_3 et\ v_4$ ne convient toujours pas, car ces degrés ne s'associent pas à ceux de la plaque $w_1, w_2, w_1^{'}\ et\ w_2^{'}$ (incompatibilité des continuités $C°$ et C^1 ; figure 2.8 (b).

$C°$ (rotation et déplacement discrétisés indépendamment les uns des autres, en coque épaisse).

C^1 (rotation en fonction des déplacements, en coque mince).

On devrait donc choisir des dérivées des déplacements membranaires pour assurer la conformité (Figure 2.8c), mais ces degrés de liberté introduisent une surcompatibilité indésirable et sont pas facile à manipuler pratiquement.

De façon plus générale, on constate qu'il est difficile de réaliser la conformité le long d'un raccord à angle de deux éléments finis de coque (surtout en théorie de Kirchhoff-Love) ; en pratique, on y renonce.

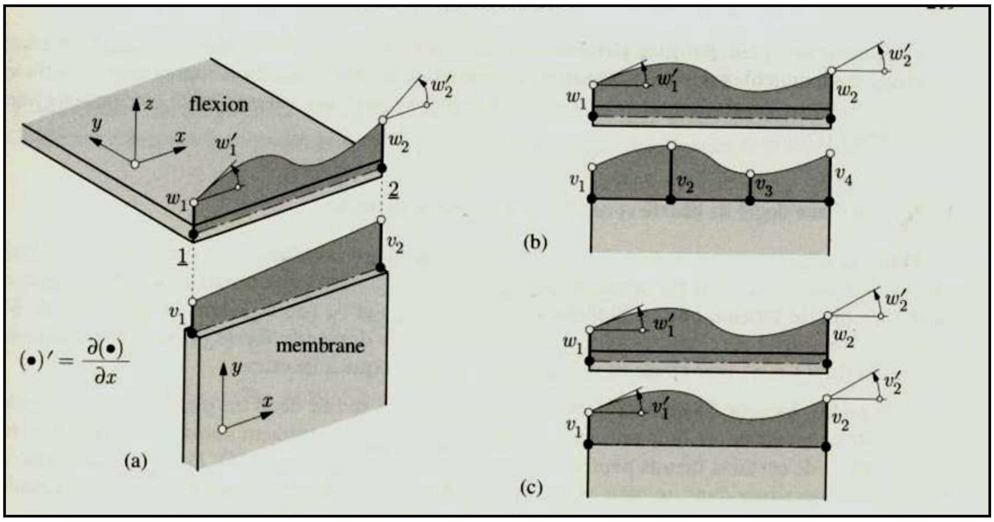

Fig. 2.8. Non-conformité aux frontières des coques à facettes [FRE 03]

Terminons par le raccord de trois éléments (Figure 2.9). Les éléments (1) et (2) sont admis parfaitement connectés, comme à la figure 2.8(c).

Le raccord flexionnel des éléments (1) et (3) exige alors l'égalité des rotations autour de l'arête a-a ($\propto = w_1'$). Par suite, le raccord des éléments (3) et (2) entraîne la conservation de l'angle droit au nœud 1 de l'élément (2) (β=$\propto$). Ainsi, on a, au niveau du comportement membranaire de l'élément (2) et au voisinage du nœud 1.

$$\gamma_{xy} = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = 0$$

Si cette situation est acceptable ici (figure 2.9), elle ne l'est plus lorsque les raccordements à angle proviennent des arêtes artificielles issues de la discrétisation. Dans une coque à facettes par exemple, l'annulation des déformations tangentielles en chaque point anguleux tend à faire disparaître la déformabilité au cisaillement membranaire, ce qui produit une sur rigidité inadmissible.

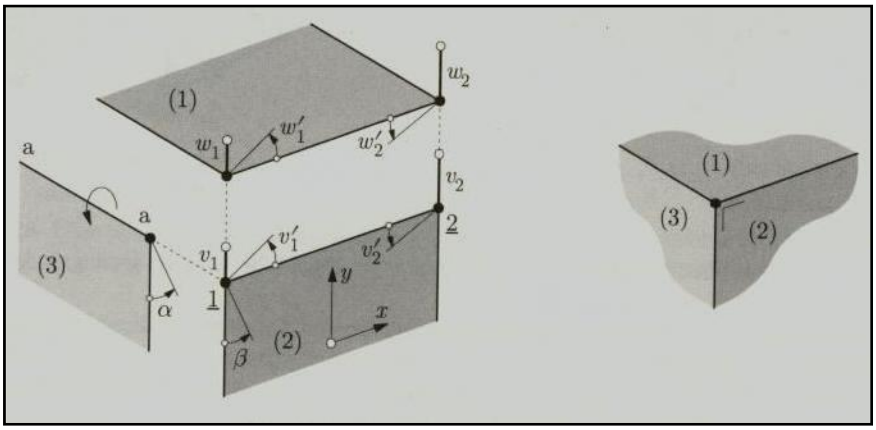

Fig. 2.9. Raccord de trois éléments [FRE 03]

La conclusion peut paraître paradoxale : il faut accepter la non-conformité aux frontières. Il ne s'agit évidemment pas d'exagérer dans ce sens, car l'expérimentation numérique montre que, de deux discrétisations incompatibles, celle qui présente la meilleure compatibilité cinématique fournit les meilleurs résultats. [FRE 03]

2.5. Différentes formulations

Il existe plusieurs sortes de formulations d'éléments finis en mécanique des structures. [DHA 84]

2.5.1. Formulation en déplacement

C'est une formulation selon laquelle l'approximation est faite sur le champ de déplacements de façon que l'intégrabilité du champ de déformations soit assuré à l'intérieur de l'élément.

Si la continuité du champ de déplacement est vérifiée aux surfaces de séparation des éléments, le modèle est dit compatible. [FRA 74]

2.5.2. Formulation ''équilibre'' (contraintes ou forces)

C'est une formulation dans laquelle les équations d'équilibre soient satisfaites à l'intérieur de chaque élément.

2.5.3. Formulation hybride

Dans cette formulation, le plus souvent, on définit la solution en termes d'approximation, d'une part du champ de contraintes internes en équilibre, d'autre part des déplacements sur la frontière de l'élément.

2.5.4. Formulation mixte

Dans celle-ci, on définit la solution en termes d'approximation de deux ou plusieurs champs indépendants ; généralement, le champ des déplacements et celui des contraintes.

2.5.5. Formulation en déformation

C'est une formulation dans laquelle l'approximation se fait sur le champ de déformation de façon telle que les équations de compatibilité et d'équilibre soient satisfaites à l'intérieur de l'élément. Le champ de déplacements est déduit du champ de déformations qui est continu et différentiable.

2.5.6. Avantage du modèle en déformation

L'interpolation directe sur les déformations permet d'avoir une meilleure précision sur ces grandeurs et sur les contraintes et les déplacements (obtenus par intégration) ; contrairement à la formulation classique où les déformations sont obtenues par dérivation du champ choisi des déplacements.

Les avantages des éléments à modèle en déformation sont :

- Satisfaction plus facile des deux principaux critères de convergence (mode de déformation constante et mode de corps rigide).
- Découplage plus facile des différentes composantes des déformations (un champ de déplacements découplés engendre des déformations couplées). [BEL 98]

2.6. Caractéristique d'un élément fini

2.6.1. Attributs d'un élément fini

Un découpage, artificiel d'un milieu continu, en éléments finis permet, d'isoler un élément fini pour l'étudier et en établir les caractéristiques. L'identification d'un élément fini comprend les points suivants :

- **Géométrie :** un élément fini peut être segment de droit ou de courbe, triangle ou quadrilatère (plan ou courbe), tétraèdre, prismes ou hexaèdre.

Les frontières entre éléments peuvent être respectivement des points, des segments de droit ou de courbes, des faces planes ou courbes.

- **Matériau**: le matériau d'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope et ces propriétés mécaniques E et ν, etc).
- **Nœuds**: les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres. Ils occupent les sommets, les extrémités, les milieux des arêtes et faces, etc. on y choisit et définit les degrés de liberté du problème.
- **Degrés de liberté**: la fonction d'approximation choisie (en général le champ des déplacements) est exprime en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer la solution complète (assemblage) tout veillant à respecter certains règles, dites critères de convergence.
- **Forces nodales:** à travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. elles sont dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température..).

Ces paramètres d'identification permettent de construire les deux caractéristique clés d'un élément fini que sont sa matrice de rigidité et son vecteur force. [FRE 01]

2.6.2. Choix des éléments finis

Les éléments d'ordre supérieur sont plus précis mais plus coûteux et on peut toujours atteindre la même précision avec un plus grand nombre d'éléments simples et c'est cette tendance qui devenue privilégiée ces dernières temps.

Les éléments simple (triangle à trois nœud quadrilatère à quatre nœuds et hexaèdre à huit nœud) offrent l'avantage supplémentaire d'être faciles à générer par des meilleur automatique et adaptifs.

Pour l'analyse du comportement membranaire, les éléments finis basés sur la formulation mixte et hybride sont plus précis et son général privilégiés dans les logiciels professionnels. Les éléments d'ordre supérieur ont connu un grand succès dans l'analyse du comportement flexionnel (poutre, plaque et coque). [FRE 01]

2.7. Choix des fonctions de déplacement et conditions de convergence

Les différents champs de déplacement nécessitent un nombre total de constantes égales au nombre total des degrés de liberté de l'élément. Cependant, il convient de choisir les constantes proportionnellement aux différents champs de déplacement suivant la destination de l'élément et de la nature du problème à analyser.

On dit qu'il y a convergence si, en augmentant la densité du maillage, les calculs en éléments finis tendent vers la solution exacte. Malheureusement, le plus souvent, c'est précisément parce que la solution exacte n'est pas connue que les éléments finis sont utilisés. Il est donc délicat de parler d'une convergence vers une solution inconnue. Malgré cette difficulté, certains résultats ont été acquis par les mathématiciens.

Il est assez facile de donner des conditions nécessaires de convergence. En effet la méthode des éléments finis peut être considérée comme une méthode d'approximation continue par morceaux d'un champ continu. A ce titre, c'est donc une méthode de Rayleigh-Ritz généralisée et les règles (critères) suivants s'appliquent :

- **Critères des déformations constantes ou de complétude :**

1) Les états de déplacement constant ou de modes rigides.
2) Les états de déformation constante.

Les fonctions de déplacement doivent permettre à l'élément de subir un mouvement de corps rigide sans déformations internes. Ce critère est fondamental dans la mesure où il représente une propriété réelle du comportement des structures et résulte en une convergence plus lente s'il n'est pas observé.

- **Critère de compatibilité :**

Ces mêmes fonctions aussi doivent assurer la continuité des déplacements le long des limites entre éléments (inter-éléments). Cela signifie que les éléments doivent se déformer sans causer des discontinuités entre eux.

Les règles 1 et 2 se traduisent par le terme élément complet. La règle 3 par le terme élément compatible et l'ensemble 1+2+3 par élément conforme. [FRE 01], [BEL 2000]

Tous les éléments ne sont pas conformes et cela n'interdit pas de les employer avec succès. L'expérience et la pratique courante ont montré que les deux premiers critères sont nécessaires et suffisants pour assurer la convergence et que les éléments non conformes (incompatibles) convergent mieux que les éléments conformes, même si la convergence n'est pas monotone. [DES 72]

2.8. Analyse bibliographique

- La première application de la méthode des éléments finis aux coques a été faite en 1961 avec un élément plaque-membrane; mais la discrétisation était trop grossières et les résultats décevants.
- Le premier élément fini de «coque» fut un tronc de cône pour coque de révolution à chargement de révolution (1963).
- En 1965, des programmes très généraux pour coque de révolution à chargement quelconque étaient couramment utilisés. [FRE 03]
- Les recherches entreprises à l'université de Cardiff (UK) concernant la convenance des éléments finis disponibles pour les structures courbes, ont montré que pour avoir des résultats convergents avec les éléments basés sur le modèle en déplacement, il était nécessaire de diviser la structure à bord courbe en un très grand nombre d'éléments [ASH 71a].
- Dans un premier temps, une étude détaillée a été entreprise sur des arcs circulaires simples avec différents rapports et il a été prouvé que de meilleurs résultats peuvent être obtenus sans l'utilisation d'un très grand nombre d'éléments lorsqu'on en adopte le modèle en déformation à la place du modèle en déplacement [ASH 71b].
- Un élément fini de coque cylindrique a été ensuite développé par Ashwell (1972). L'efficacité de cet élément a été testée en l'utilisant pour l'analyse d'un cylindre pincé court à bords libres. Les résultats obtenus ont montré une convergence rapide aussi bien pour le déplacement que pour les contraintes. [ASH 72]
- Un élément courbe a été également développé par Sabir et Lock (1973) pour l'analyse de non linéarité géométrique des arcs circulaires. [SAB 73]
- Pour étudier la performance de l'élément coque à modèle de déformation pour la prédiction des contraintes très élevées au voisinage de l'application des charges concentrées, Sabir et Ashwell (1978) ont entrepris des essais sur des coques minces et le chargement appliqué était soit des forces radiales ou des moments concentrés et les résultats obtenus correspondaient bien aux solutions théoriques .[SAB 78]
- Sabir (1983) a appliquée L'approche en déformation pour développer une nouvelle classe d'éléments pour les problèmes d'élasticité générale en coordonnées cartésiennes.

  [SAB 83]
- A. B. Sabir & M. S. Djoudi (1995) ont utilisés un élément de coque surbaissée pour l'analyse non linéaire des coques et plaques [SAB 95]

- M.S. Djoudi, H. Bahai (2002) ont développés un élément finie de coque surbaissée pour l'analyse linéaire et non linéaire des coques cylindriques [DJO 02].
- M.S. Djoudi, H. Bahai (2003) ont développés un élément de coque basé sur l'approche en déformation pour l'étude des effets des ouvertures sur le comportement dynamique des panneaux cylindriques [DJO 03a]. Comme ils ont aussi développés un autre élément de coque cylindrique pour l'analyse de la vibration des structures en coques [DJO 03b].
- A.I. Mousa et M.H. El Naggar (2007) ont développés un nouveau élément fini rectangulaire sphérique basé sur la formulation des coques surbaissées. [MOU 07]

2.9. CONCLUSION

Malgré ces recherches et progrès considérable, en utilisons la méthode des éléments finis pour développer des éléments de coques, il n'existe toujours pas d'élément qui ne présent l'une ou l'autre faiblesse: la recherche, dans ce domaine; reste toujours ouverte.