

CHAPITRE III

MODELISATION DES STRUCTURES EN COQUES

3.1. Introduction

Le premier élément fini courbe pour coque de géométrie arbitraire fut proposé en 1966. Jusqu'en 1970 environ, de nombreux essais eurent lieu avec des éléments plaque-membrane et des éléments courbes. Mais on se heurta à des difficultés théorique et numérique: théorie des coques, conformité aux frontières, mode rigides, etc. En 1970, l'élément fini et l'élément fini étaient encore en compétition.

Il faut attendre 1975 environ pour bien comprendre, au niveau de la méthode des éléments finis, les différences entre coques à forte courbure surbaissée, ainsi qu'entre coordonnées curvilignes et coordonnées cartésiennes.

3.2. Types d'éléments finis

Pour l'analyse des structures tridimensionnelles à parois minces, on peut utiliser des éléments finis de coque d'épaisseur mince ou modérée des types suivants:

- éléments de coque à surface moyenne courbe (à forte courbure en général, surbaissée parfois), basés sur l'une des théories générales (Love-Koiter ou Reissner-Naghdi);
- éléments de coque surbaissée, basés sur une théorie de coque surbaissée (Donnell, Marguerre, etc.);
- éléments plans, dits plaques-membranes, dont l'état flexionnel est basé sur la théorie des plaques minces (Kirchhoff) ou d'épaisseur modérée (Mindlin);
- éléments dits du type tridimensionnel dégénéré, ordinairement courbes, se rattachant à une formulation théorique de type Reissner-Mindlin. [FRE 03]

3.2.1. Élément basé sur la théorie des coques à forte courbure

La formulation d'élément basé sur une théorie de coque à forte courbure est à la fois la plus élégante, la plus délicate et la plus difficile. Partant de la théorie de Love-Koiter, on peut exprimer le champ des déplacements de deux façons différentes, en fonction (figure 3.1)

- Des composantes curvilignes u , v et w des déplacements de la surface moyenne, elle-même définie par le rayon vecteur $x(\alpha, \beta)$;

- des composantes cartésiennes u_x , v_y , et w_z des déplacements de la surface moyenne, définie semblablement par une fonction $Z = Z(X,Y)$ par rapport à un plan (X,Y) de référence.

La première solution permet de réaliser la conformité aux frontières, mais ne permet pas une représentation exacte des modes rigide.

➤ La seconde conduit à une sur compatibilité aux frontière (dans les dérivées des déplacements), limitative et peu pratique d'emploi, mais permet de représenté exactement les modes rigides. [FRE 03]

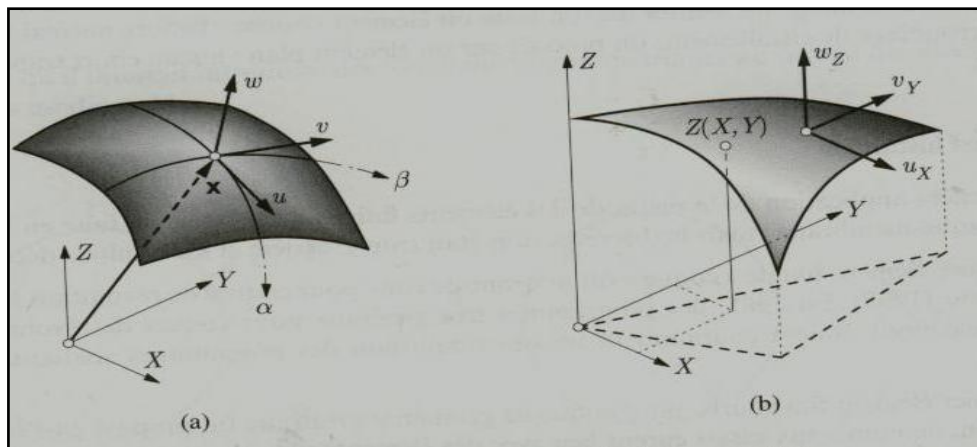


Fig. 3.1 composantes du champ des déplacements :

(a) Coordonnées curvilignes ; (b) Coordonnées cartésiennes. [FRE 03]

3.2.2. Élément base sur une théorie de coque surbaissée

Considéré isolément, un élément fini, de par sa taille, est davantage à l'image d'une coque surbaissée même si l'ensemble de la coque ne l'est pas (figure 3.2) que d'une coque à forte courbure. Or les théorie des coques surbaissée sont nettement plus simple que la théorie de Love ; en particulier, les rotations sont assimilable aux pentes de la composante transversal w de la déformée, ce que simplifie fortement les problèmes de conformité. On peut alors construire des éléments finis de coque surbaissée selon les deux théories décrites au chapitre 1 (Donnell en composantes curvilignes et Marguerre en composantes cartésiennes).

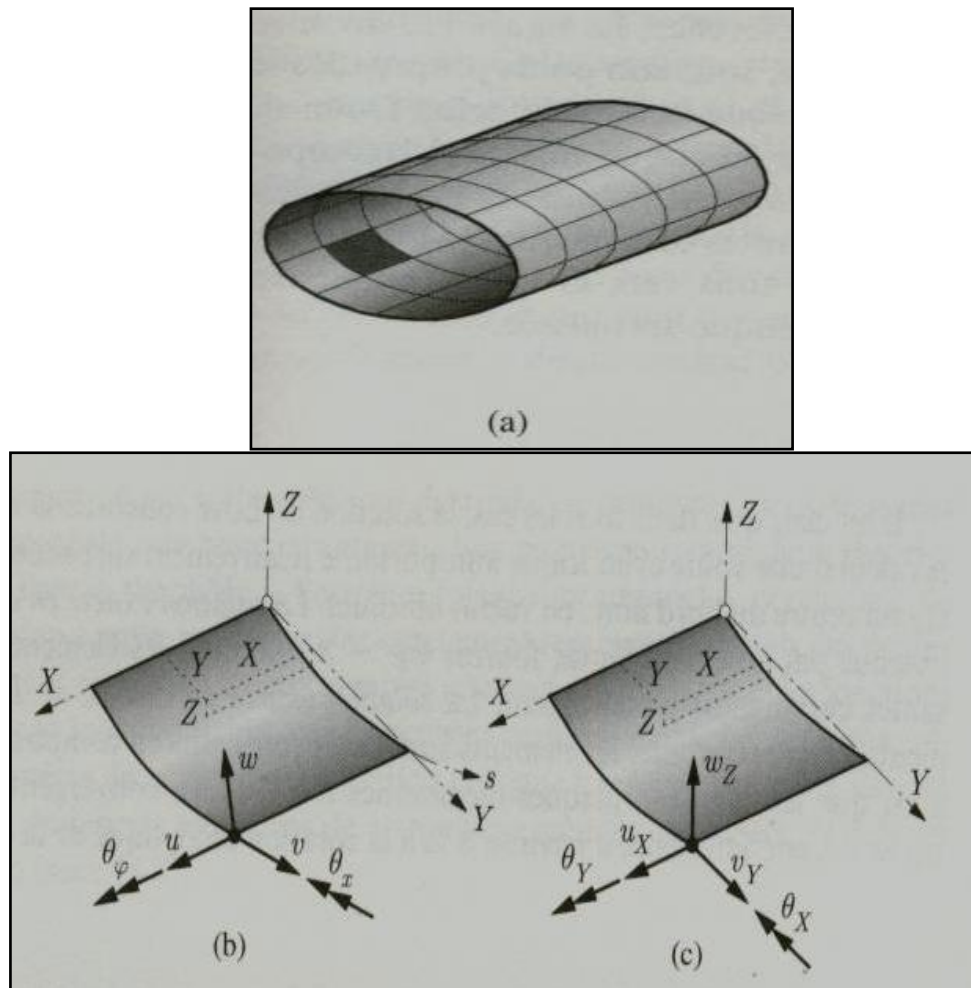


Fig. 3.2 Élément fini de coque surbaissée : (a) maillage d'une coque cylindrique ;
(b) composantes curvilignes ; (c) composantes cartésiennes. [FRE 03]

La solution théorique d'un problème de coque surbaissée est évidemment différente de celle du même problème exprimé en coque à forte courbure ; plus la coque est surbaissée, plus cette différence s'atténue.

Si l'entier d'une coque surbaissée ainsi que les éléments finis la discrétisant sont rapportés au même plan de référence, la solution numérique converge vers la solution théorique.

Par contre, si chaque élément fini est rapporté à son propre plan de référence, le résultat peut être totalement différent.

En effet la solution d'une coque à forte courbure modélisée et discrétisée par un maillage d'éléments finis formulés en coque surbaissée, est la suivante :

- Les éléments finis construits sur la base d'une théorie exprimée en composantes curvilignes des déplacements (Donnell) convergent vers la solution des coques surbaissée ; ils ne s'appliquent donc qu'aux seules coques surbaissée ;

- Les éléments finis développés sur la base d'une théorie formulée en composantes cartésiennes des déplacements (Marguerre) convergent vers la solution exacte de Love, que la coque soit surbaissée ou non ; on peut donc les appliquer au calcul de toutes les coques.

La figure 3.3 résume Ces résultats. [FRE 03]

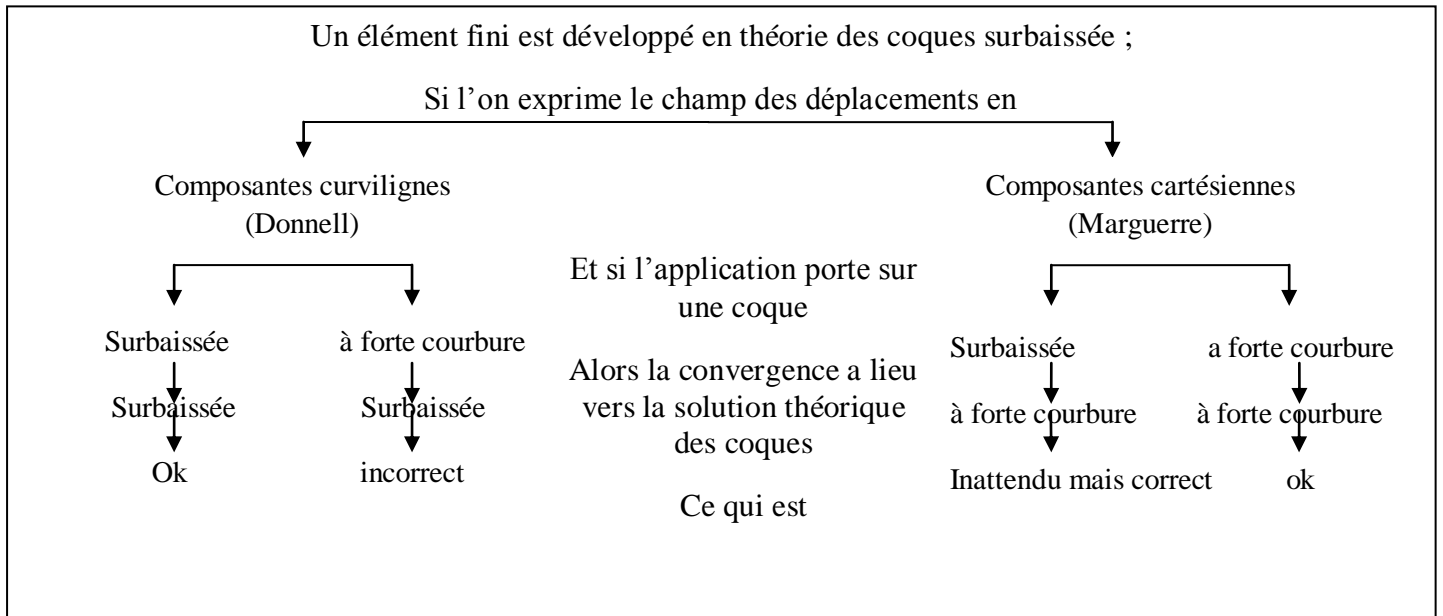


Fig. 3.3 convergence des éléments de coque surbaissée (shallow shell éléments). [FRE 03]

3.3. Approches géométrique

Pour effectuer l'analyse statique d'un ouvrage tel qu'on en rencontre dans la réalité, nous nous rendons compte immédiatement que le nombre d'éléments nécessaires pour le modéliser devient rapidement élevé. Ceci est dû d'une part à la nature des éléments utilisés et d'autre part à la complexité géométrique de la structure (intersection de coques, raidisseurs, etc....).

Nous rappelons brièvement que la modélisation des coques par éléments finis repose sur trois approches distinctes :

3.3.1. Approche curviligne

La formulation des éléments correspondants repose sur une théorie de coque courbe et utilise un repère curviligne pour la définition des grandeurs cinématiques et statiques. La qualité des résultats obtenus à partir de cette approche dépend aussi bien du modèle numérique que de la théorie de coque utilisée. Différentes théories de coques, utilisant les mêmes hypothèses cinématiques, se distinguent par le degré d'approximation des grandeurs

géométriques retenues dans la définition des relations déformations-déplacements. Les principaux problèmes rencontrés dans cette approche sont liés à la mauvaise représentation des modes de déformations constantes ou nulles, et aux blocages en membrane et/ou cisaillement. [BAT 92]

3.3.2. Approche cartésienne

Cette approche, initiée et appliquée au début des années 70 par Ahmad, Irons et Zienkiewicz [AHM 70], elle utilise des éléments isoparamétriques courbes ou tridimensionnelles dégénérées ; pour les structures homogènes isotropes, demeure aujourd'hui largement utilisée. Elle trouve son application dans des domaines variés de calcul des structures : coques composites multicouches, analyse des non linéarités géométriques et matérielles.

L'approche isoparamétriques courbe, appelée également approche du solide 3D-dégénéré, permet de discrétiser directement les équations tridimensionnelles de la mécanique des solides. L'introduction d'hypothèses cinématiques et mécaniques conduit à une formulation dégénérée avec une représentation isoparamétriques de la géométrie et des déplacements d'un point de la surface moyenne. Le vecteur de déplacement est défini par ses composantes cartésiennes (U, V, W). Les composantes de rotation sont au nombre de deux ou trois suivant que les normales aux nœuds sont continues ou discontinues d'un élément à un autre. [COF 91]

3.3.3. Approche par facettes planes

Très utilisée en pratique, cette approche consiste à approximer la coque de forme quelconque par un ensemble de surfaces (ou facettes) planes (Figure 3.4), de préférence triangulaires pour tenir compte des surfaces gauches si elles existent.

Les éléments plats sont obtenus par combinaison des éléments de membrane et de plaque en flexion avec ou sans effet de CT. Le couplage membrane-flexion est mis en évidence après transformation des variables nodales locales dans le repère global. La convergence de ce type d'éléments a été analysée dans [BER 89].

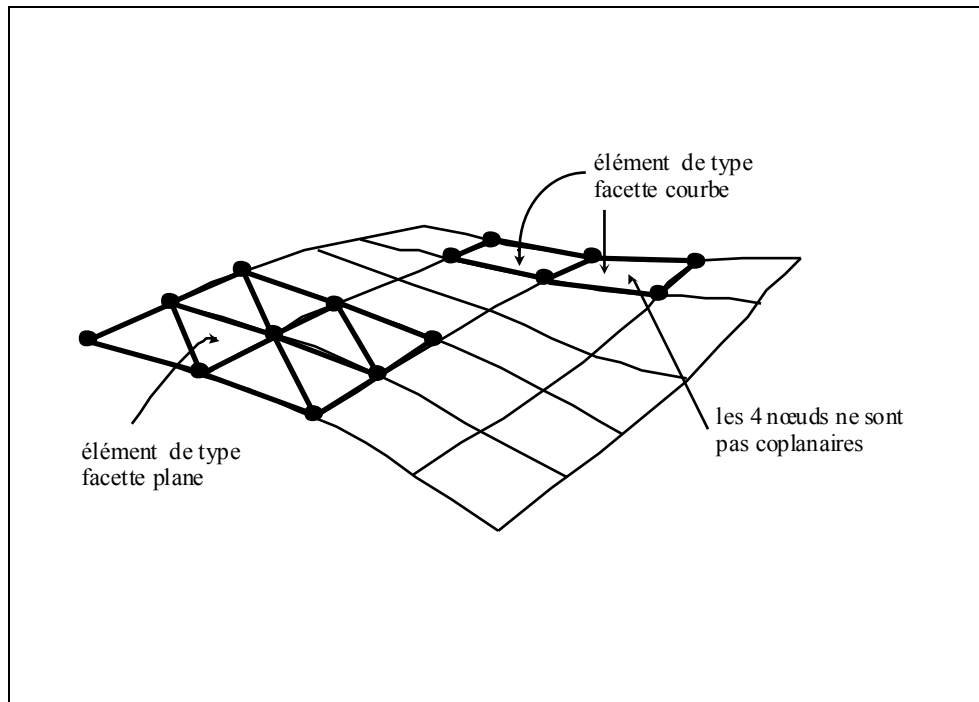


Fig. 3.4 : Coque quelconque. Facettes planes et courbes. [AYA 93]

Les éléments de coque à facettes planes sont simples à formuler, capables de représenter les mouvements de corps rigides, mixables avec d'autres éléments, etc...

Quelques inconvénients [YAN 90] :

- limitation aux seuls éléments triangulaires si la coque discrétisée présente un gauchissement.
- lenteur de la convergence dans le cas des problèmes sensibles aux défauts de géométrie, tels que le flambement, etc...

L'approche par facettes planes a été introduite pour la première fois en 1961 par Green et al [GRE 61]. Une liste d'éléments plats assez connus est présentée par Yang et al (1990)

[YAN 90]. Batoz et al ont utilisé cette approche en combinant les éléments de plaque de Kirchhoff discret DKT et DKQ aux éléments de membrane classiques CST (Constant Strain Triangle) et Q4 bilinéaire standard. Ils ont obtenu de bons résultats pour des problèmes non linéaires statiques et dynamiques...

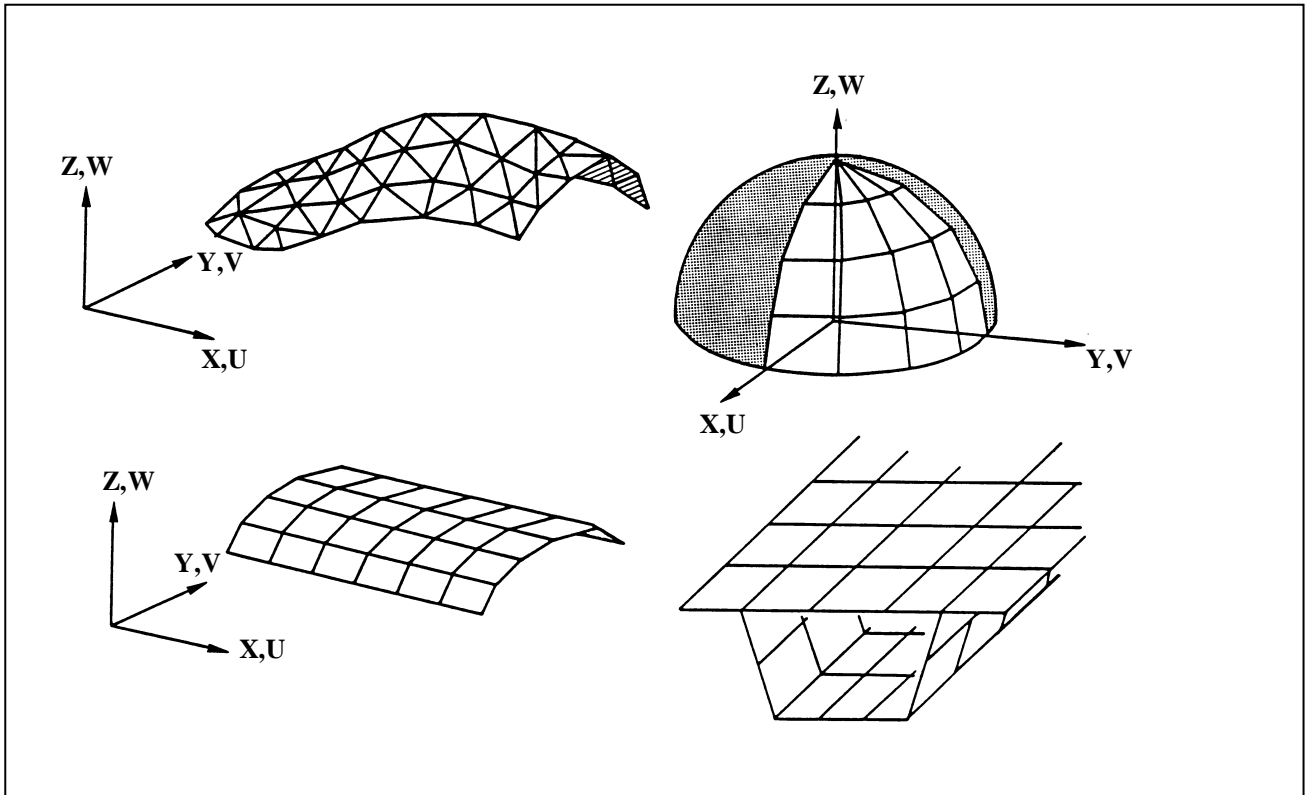


Fig. 3.5 : Exemple de coques et de structures plissées idéalisées par des éléments de coque plans. [MIC95]

Les éléments les plus usuels utilisés, pour ce type de représentation, sont les éléments triangulaires et quadrangulaires (figure 3.5).

3.4. Éléments de coques à facettes planes

Les éléments d'une coque plane sont soumis à des charges agissant dans son plan et normales à celui-ci donnant à la fois une action dans le plan (comportement membranaire) et une action normale au plan (comportement flexionnel).

Pour des petits mouvements, ces deux actions sont complètement indépendantes donc le comportement de l'élément pris sur une plaque peut être considéré de deux façons indépendantes, une action élastique dans le plan et une action de flexion normale au plan.

On suppose donc que les mouvements de flexion et les rotations de l'élément sont rapportés uniquement aux forces normales au plan et que les déplacements plans sont seulement rapportés aux forces planes. En respectant ces hypothèses, on peut alors faire l'étude des plaques pliées en superposant les deux comportements. [ZIN 2000]

3.4.1. La matrice de rigidité élémentaire dans le repère local

D'abord, on considère l'effet membranaire «en contraintes planes». Nous savons que l'état de déformations est défini par le champ de déplacements uniforme dont les composantes sont les deux translations (U et V)

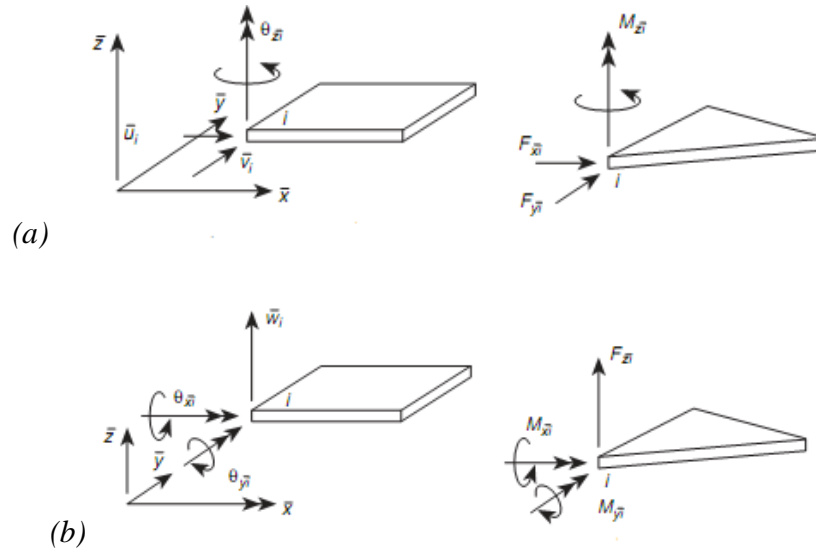


Fig. 3.6 élément plane soumis à des actions membranaires et flexionnelles :
 (a) Déplacements et forces «plane»; (b) Déplacements et force «flexion». [ZIN 2000]

En considérant la matrice de rigidité reliant les forces et les déplacements plans aux nœuds, on a:

$$\{F_e^p\} = \{K_e^p\}\{\delta_e^p\} \quad (3.1)$$

$$\{F_e^p\} = \begin{Bmatrix} \{F_1^p\} \\ \{F_2^p\} \\ \{F_3^p\} \\ \{F_4^p\} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\text{Avec : } \{F_i\}^p = \begin{Bmatrix} F_{Xi} \\ F_{Yi} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Et le vecteur déplacement est donné par :

$$\{\delta_e^p\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\}^p \\ \{\delta_2\}^p \\ \{\delta_3\}^p \\ \{\delta_4\}^p \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\text{Avec : } \{\delta_i\}^p = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

On peut écrire alors pour un nœud (i) :

$$\{F_i^p\} = \{K_{ii}^p\}\{\delta_i^p\} \quad (3.6)$$

$[K_{ii}^p]$ est la sous matrice qui relie les forces du nœud (i) aux déplacements de se même nœud :

Pour tout l'élément, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix}$$

Da la même manière, quand on considère le comportement flexionnel, on aboutie à la relation suivante :

$$\{K_e^f\}\{\delta_e^f\} = \{F_e^f\} \quad (3.7)$$

On peut écrire alors pour un nœud (i) les vecteurs force et déplacement :

$$\{F_i\}^f = \begin{pmatrix} F_{zi} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$\{\delta_i\}^f = \begin{pmatrix} w_i \\ \theta x_i \\ \theta y_i \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

(f) indique le comportement flexionnel.

(p) indique le comportement membranaire.

Avant d'effectuer la superposition des deux comportements, on doit faire les remarques suivantes :

- On suppose que l'action membranaire et l'action flexionnelle soient parfaitement découplées pour avoir un élément de coque plane par superposition
- Les deux déplacements dans le plan (u et v) et les trois degrés de liberté dus à la flexion (w , θ_x , et θ_y), l'élément peut être aussi sujet à des rotations dans son plan (θ_z) autour de l'axe z.

Bien que la plaque soit très rigide dans son plan de telle sorte que ces rotations soient très petites et donc négligeable devant les autres degrés de liberté, il est commode, pour des raisons qui apparaîtront plus loin (au niveau de l'assemblage). De prendre en compte cette rotation en l'associant à un couple fictif (M_z)

Pour inclure le terme θ_z que l'on sait négligeable et qui n'affecte pas les autres termes dans la matrice de rigidité de l'élément, la relation entre les quantités θ_z et M_z peuvent être exprimées par la pseudo-équation :

$$(M_z)_i = 0. (\theta_z)_i \tag{3.10}$$

Donc, on obtient finalement en chaque nœud les déplacements et les forces suivants : (figure3.7).

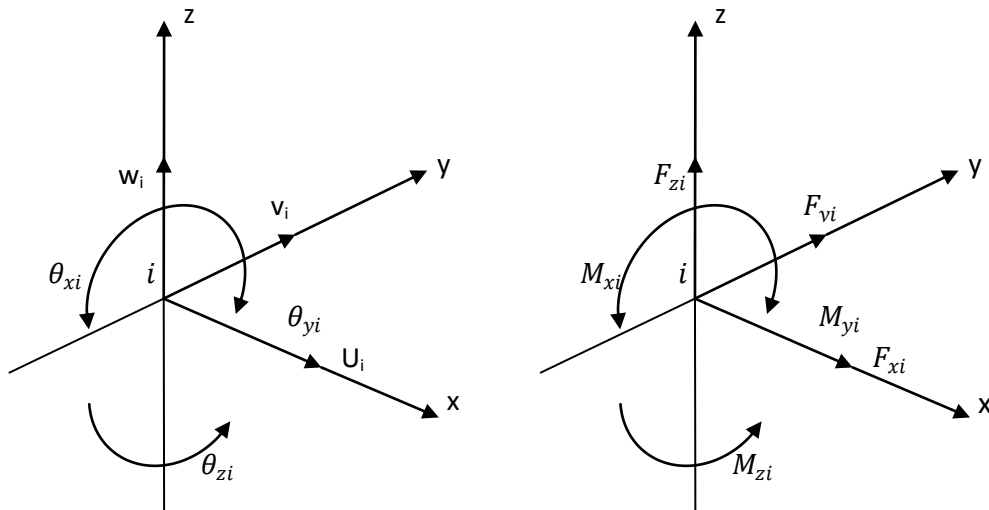


Fig.3.7 déplacements et forces nodales après superposition. [ZIN 2000]

Pour le nœud(i) on a :

$$\{F_i\} = \begin{bmatrix} K_{ii}^p & 0 & 0 \\ 0 & K_{ii}^f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\delta_i^p\} \\ \{\delta_i^f\} \\ \{\theta_{zi}\} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

On peut généraliser ces équations afin d'obtenir la matrice de rigidité $[K_e]$ de l'élément de plaque pliée.

3.4.2. Passage aux coordonnées globales et assemblage des éléments

Dans les problèmes d'élasticité plane et de flexion des plaques, tous les éléments étaient coplanaires, cependant pour les plaques pliées types et les coques, les éléments adjacents sont inclinés les uns aux autres.

Par conséquent, avant d'effectuer l'assemblage des éléments et de former ainsi la matrice de rigidité globale, on doit exprimer les matrices et vecteurs élémentaires dans le système de coordonnées globales (X, Y et Z).

Ce changement de repère a un intérêt important, car les déplacements qu'on calculera par la suite seront rapportés au système global, c'est à dire qu'ils n'auront une signification que dans ce système de coordonnées (Figure.3.8).

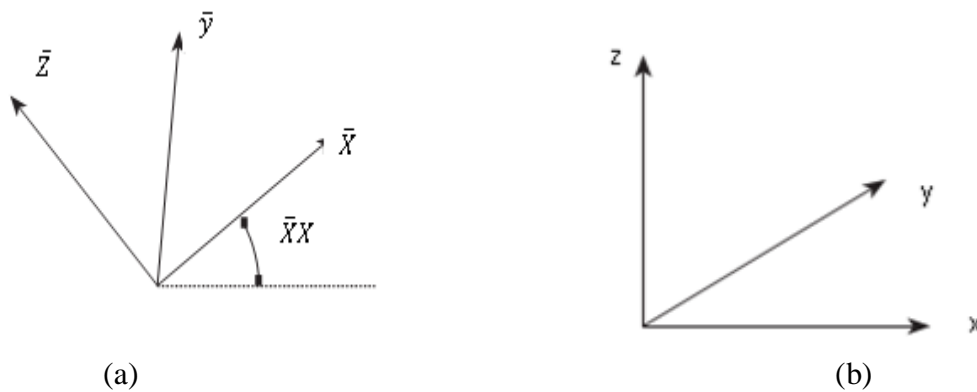


Fig.3.8 le système de coordonnées :
(a) repère local ; (b) repère global. [ZIN 2000]

Les raisons d'inclure le sixième degré de liberté (θ_z) dans les équations d'équilibre (dans le repère local), sont maintenant apparentes car ceci permet d'avoir une matrice $[T]$ symétrique carrée, ce qui va rendre les opérations d'assemblage plus faciles.

Sachant que les inclinaisons entre le repère local et le repère global sont exactement les mêmes au nœud (i) qu'aux autres nœuds de l'élément, on peut écrire :

$$\{\bar{\delta}^e\} = [R]\{\delta^e\} \quad (3.12)$$

$$\{\bar{F}^e\} = [R]\{F^e\} \quad (3.13)$$

$$\{F^e\} = [R]^{-1}\{\bar{F}^e\} \quad (3.14)$$

Et vu que $[R]$ est une matrice orthogonale, on; peut écrie $[R]^{-1} = [R]^T$ où $[R]$ est la matrice symétrique carrée d'ordre 24 et qui s'écrit comme suit :

$$[R] = \begin{bmatrix} [T] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T] \end{bmatrix}$$

On exprime maintenant la matrice de rigidité d'un élément dans le repère global on a :

$$\{\overline{F}^e\} = [K^e]\{\overline{\delta}^e\} \quad (3.15)$$

Soit

$$[R]\{F^e\} = [\overline{K}^e][R]\{\delta^e\} \quad (3.16)$$

On effectue le changement de repère par une matrice de rotation $[T]$, telle que pour le nœud (i), on a :

$$\{\overline{\delta}_i\} = [T]\{\delta_i\} \quad (3.17)$$

$$\{\overline{F}_i\} = [T]\{F_i\} \quad (3.18)$$

Avec :

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\text{Ou } [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{\bar{x}x} & \lambda_{\bar{x}y} & \lambda_{\bar{x}z} \\ \lambda_{\bar{y}x} & \lambda_{\bar{y}y} & \lambda_{\bar{y}z} \\ \lambda_{\bar{z}x} & \lambda_{\bar{z}y} & \lambda_{\bar{z}z} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$\lambda_{\bar{ii}}$ est le cosinus de l'angle que forment les axes \bar{x} et x (fig.3.8.a)

$$\text{Dou : } [K_e] = [R]^T \cdot [\overline{K}_e][R] \quad (3.21)$$

Une fois les matrices de rigidité de tous éléments sont exprimées dans le repère global, l'assemblage et la prise en compte des conditions aux limites ainsi que la résolution du système d'équation final suivront les mêmes démarches standards.

On obtient alors les déplacements exprimés dans le repère global ce que fait qu'on doit repasser au repère local afin de calculer les contraintes.

3.4.3. Détermination des cosinus directeur dans le cas d'un élément quadrilatère

L'utilisation de ces éléments est limitée pour représenter des surfaces de type cylindrique ou en caisson. [ZIN 2000]

De ce fait, il est commode de prendre l'un des cotés de l'élément et l'axe \bar{y} correspondant parallèle à l'axe global x .

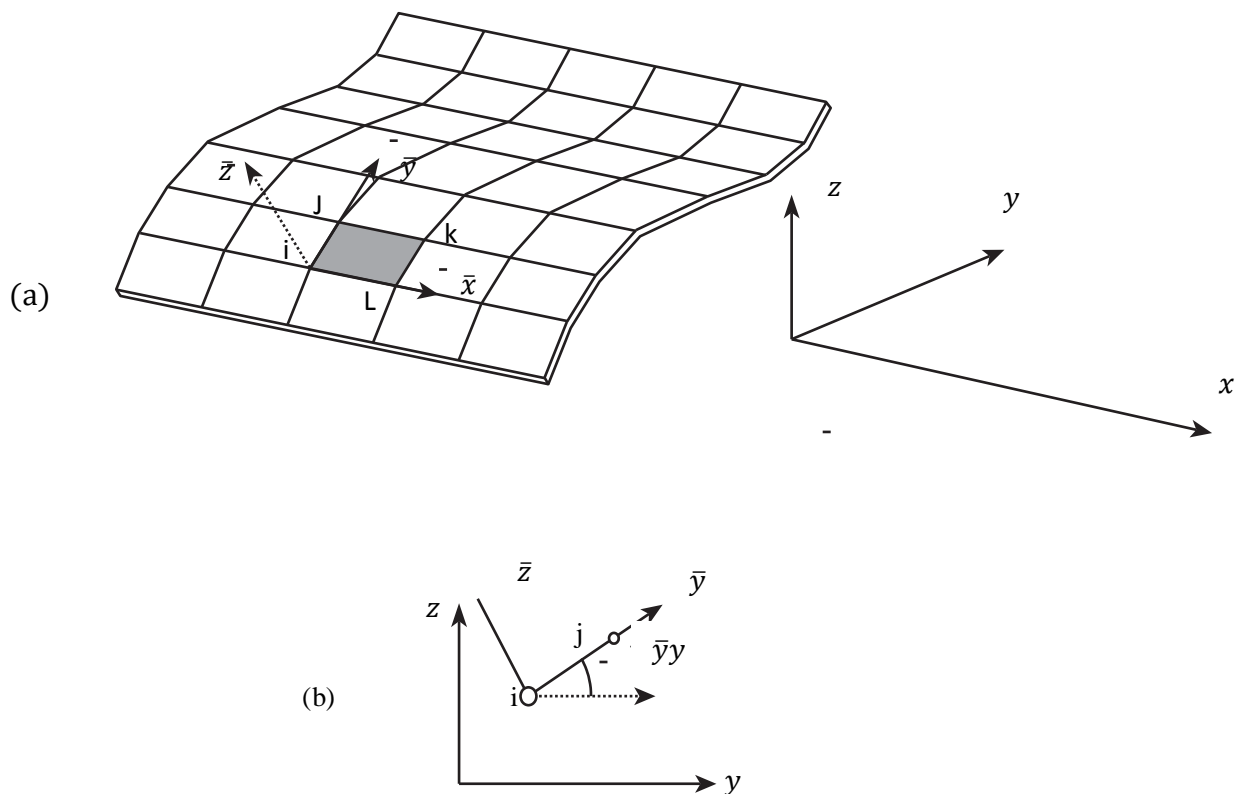


Fig.3.9 Coque cylindrique par l'assemblage d'éléments rectangulaires :

(a) Les coordonnées global et local; (b) la section vertical $i j$. [ZIN 2000]

Pour l'élément $ijkl$, on a :

Les cosinus directeurs de l'axe \bar{y}

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar{y}y} &= \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \\ \lambda_{\bar{y}x} &= 0 \\ \lambda_{\bar{y}z} &= \frac{(z_j - z_i)}{\sqrt{(y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}}\end{aligned}\quad (3.22)$$

Pour les cosinus directeurs de l'axe \bar{x} , on a :

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar{x}y} &= 0 \\ \lambda_{\bar{x}x} &= 1 \\ \lambda_{\bar{x}z} &= 0\end{aligned}\quad (3.23)$$

Pour les cosinus directeurs de l'axe \bar{z} , on les exprime en fonction des coordonnées des nœuds.

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar{z}y} &= \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \\ \lambda_{\bar{z}x} &= 0 \\ \lambda_{\bar{z}z} &= \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}}\end{aligned}\quad (3.24)$$

On remarque que les règles des transformations orthogonales sont toujours satisfaites

$$\begin{aligned}\lambda_{\bar{x}x}^2 + \lambda_{\bar{x}y}^2 + \lambda_{\bar{x}z}^2 &= 1 \\ \lambda_{\bar{y}x}^2 + \lambda_{\bar{y}y}^2 + \lambda_{\bar{y}z}^2 &= 1 \\ \lambda_{\bar{z}x}^2 + \lambda_{\bar{z}y}^2 + \lambda_{\bar{z}z}^2 &= 1 \\ \lambda_{\bar{x}x}^2 \cdot \lambda_{\bar{x}y}^2 + \lambda_{\bar{y}x}^2 \cdot \lambda_{\bar{y}y}^2 + \lambda_{\bar{z}x}^2 \cdot \lambda_{\bar{z}y}^2 &= 0 \\ \lambda_{\bar{x}x}^2 \cdot \lambda_{\bar{x}z}^2 + \lambda_{\bar{y}x}^2 \cdot \lambda_{\bar{y}z}^2 + \lambda_{\bar{z}x}^2 \cdot \lambda_{\bar{z}z}^2 &= 0 \\ \lambda_{\bar{x}y}^2 \cdot \lambda_{\bar{x}z}^2 + \lambda_{\bar{y}y}^2 \cdot \lambda_{\bar{y}z}^2 + \lambda_{\bar{z}y}^2 \cdot \lambda_{\bar{z}z}^2 &= 0\end{aligned}\quad (3.25)$$

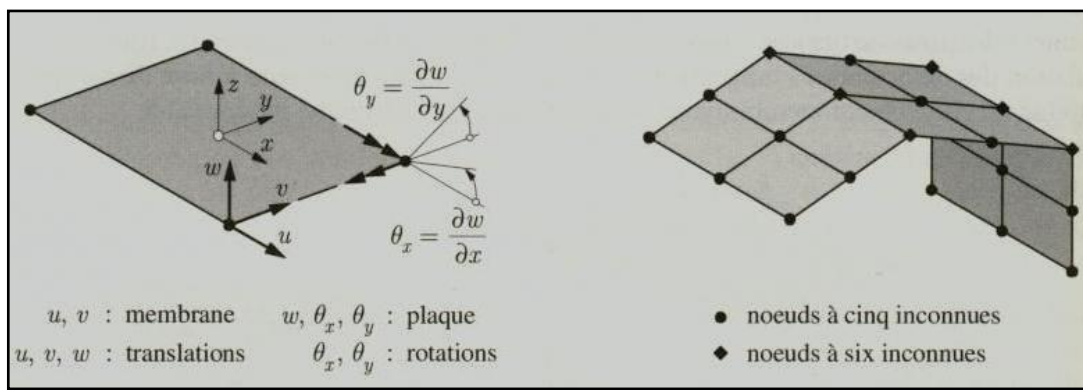
3.4.4. Problèmes pratiques de modélisations

Jusqu'ici, on a supposé que tous les éléments, pris à travers une section, d'une structure en plaques pliées, étaient inclinés entre eux, cela est valable que si on se contente d'étudier une coque courbe comme une plaque pliée (figure 3.10) équivalente. Cependant, la formulation que nous venons de décrire, conduit à des difficultés dans la modélisation si tous les éléments

qui concourent en un même nœud sont coplanaires, ceci est en effet causé par l'absence de rigidité correspondant à la rotation (θ_z), qui nous donnera une singularité du type

$$(0 = 0) \tag{3.26}$$

Cette équation ($0 = 0$) ne présente pas de difficultés particulières avant l'assemblage (bien que pour certains ordinateurs elle entraîne un message d'erreur). Néanmoins dans le cas où les directions des axes globaux diffèrent de celles des axes locaux, on aboutit après le changement de repère à six équations qui sont linéairement dépendantes et donc à un système où la matrice est singulière.



(a)

(b)

Fig.3.10 plaque pliée :

(a) Degrés de liberté ; (b) cinq ou six degrés de liberté. [FRE 03]

Ce type de singularité disparaît quand les éléments adjacents ne sont pas coplanaires ou quand les éléments de plaques sont bordés par des poutres-raidisateurs.

Les solutions envisageables pour surmonter cette difficulté sont les suivantes :

1. Supprimer les degrés de liberté (θ_z), correspondant à ces singularités et eux seuls.
2. Introduire des rigidités fictives faibles correspondant à ces degrés de liberté, remplacer la relation (3.26) par la relation :

$$K_{\theta_z} \cdot \theta_{zi} = 0 \tag{3.27}$$

Qui, après transformation, mène a un système d'équations sans problèmes dont en tire tous les déplacements y compris un(θ_{zi}), de la manière habituelle.

Comme ce (θ_{zi}) n'a pas d'influence sur les contraintes et n'est pas couplés aux équations de l'équilibre, la valeur de $K_{\theta z}$ correspond a une rigidité extérieur et n'a donc pas d'importance.

Des travaux ont été consacrés à la détermination du coefficient de rigidité réel pour les rotations du type envisagé en les considérant comme un degré de liberté supplémentaire en analyse plane. [ZIN 2000]

Dans notre programme on a simplement introduit des coefficients de rigidité en rotation fictifs pour tous les éléments qu'ils soient coplanaires ou non. Pour un élément quadrilatère, Ils ont été définis par une matrice telle que l'équilibre soit préservé en coordonnées locales.

Pour un quadrilatère on a :

$$\left\{ \begin{array}{c} M_{zi} \\ M_{zj} \\ M_{zk} \\ M_{zl} \end{array} \right\} = \alpha . E . t . A \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_{zi} \\ \theta_{zj} \\ \theta_{zk} \\ \theta_{zl} \end{array} \right\}$$

Ou α est coefficient qui reste à fixer.

Pour notre cas on a prit $\alpha = 10^{-6}$

3.5. Conclusion

Les éléments de coque à facettes planes sont les plus simples à formuler.

Il suffit de formuler deux éléments qui représentent les deux comportements ; membranaire et flexionnel.

Les types de formulations sont divers, dans notre travail la formulation utilisée est représenté dans le quatrième chapitre.

