

CHAPITRE IV

FORMULATION DES ELEMENTS DE COQUE A FACETTES PLANES

4.1. Introduction

Il ya Plusieurs types de formulations d'éléments finis en mécanique des structures, citer au chapitre II. (Formulation en déplacement, Formulation en déformation,.....etc.)

Nous allons représenter la formulation des éléments utilisés dans ce présent travail :

- Formulation de l'élément finis Q4 (Quadrilatéral with4 nouds) membranaire à champ de déplacement. [ROC 79]
- Formulation de l'élément Q4SBE1 (Quadrilatéral Strain based élément with4 nouds) membranaire à champ de déformation. [HAM 2007]
- Formulation de l'élément finis ACM (Ashwell, Clough, Melosh) pour l'étude de la flexion des plaques à champ de déplacement. [ADI 61],

A partir de la formulation de ces éléments on obtient par superposition deux types d'éléments de coque à facette plane : "ACM-Q4" à champ de déplacement et "ACM- Q4SBE1" mixte.

4.2. Formulation de l'élément membranaire Quadrilatère " Q4 " à champ de déplacement

Pour l'étude de l'élasticité plane, on utilise l'élément Quadrilatère " Q4 " à quatre nœuds avec deux degrés de liberté par nœud U et V.

L'élément rectangulaire utilisé à des côtés de longueur "a" et de largeur "b" avec une épaisseur "t". Le système de coordonnées convenables et la numérotation des nœuds de l'élément sont mentionnées sur la figure (4.1).

La figure (4.2) montre les huit déplacements inconnus et la figure (4.3) les forces nodales correspondantes.

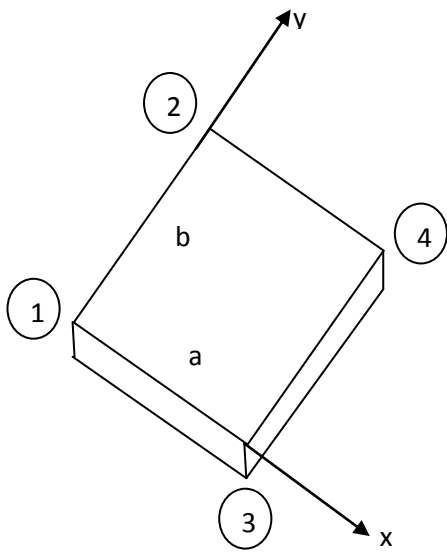


Fig.4.1. Numérotation des nœuds.

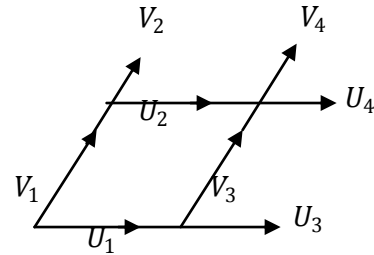


Fig.4.2. Les huit déplacements inconnus

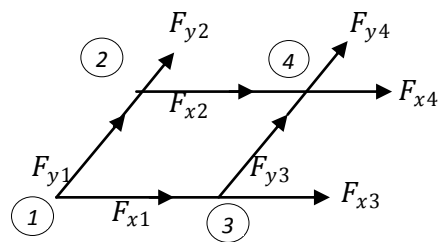


Fig.4.3. les forces nodales correspondantes.

Les équations 4.1 et 4.2 donnent les vecteurs des déplacements et des forces complets pour l'élément.

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \hline u_2 \\ v_2 \\ \hline u_3 \\ v_3 \\ \hline u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \hline F_{x2} \\ F_{y2} \\ \hline F_{x3} \\ F_{y3} \\ \hline F_{x4} \\ F_{y4} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

La matrice de rigidité de l'élément $[K^e]$ est carrée d'ordre 8.

$$\{F^e\} = [K^e] \{\delta^e\} \quad (4.3)$$

4.2.1. Le choix du champ de déplacement

L'élément a huit degrés de liberté, on doit avoir huit coefficients inconnus dans le polynôme représentant le modèle de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v(x, y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{cases} \quad (4.4)$$

Quand x est constant, u et v varient linéairement en fonction de y et de même quand y est constant, les deux déplacements varient linéairement en fonction de x .

Exemple :

Le long du bord 1-3 $y = 0$

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

$$v = \alpha_5 + \alpha_6 x$$

Le déplacement v varie linéairement le long de ce bord à partir du nœud (1) $x = 0, v_1 = \alpha_5$ jusqu' au nœud (3) $x = a, v_3 = \alpha_5 + \alpha_6 a$ (figure 4.4)

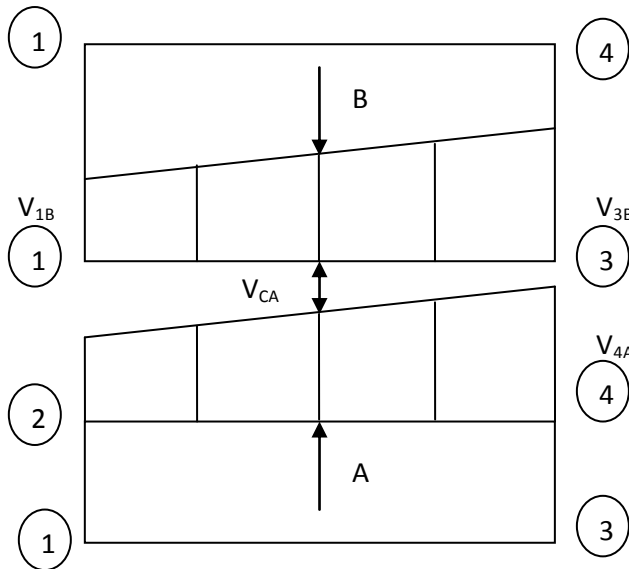


Fig.4.4 .Compatibilité des déplacements

On remarque que les déplacements imposés aux nœuds sont identiques, c'est-à-dire que la compatibilité des déplacements nodaux est assurée. Les mêmes déplacements existent dans des éléments adjacents pour tous les points le long de l'interface, donc le choix de cette fonction assure la continuité des déplacements.

On peut écrire l'équation 4.4 sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [f(x, y)] \{ \alpha \} \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

$\{ \alpha \}$: Vecteur des coefficients de la fonction de déplacement.

4.2.2. Expression des déplacements dans l'élément en fonction des déplacements nodaux

On doit exprimer l'état de déplacement en un point en fonction des déplacements nodaux sous la forme :

$$\{\delta^e\} = [A] \cdot \{\alpha\} \quad (4.6)$$

Où $[A]$ est la matrice obtenue après avoir remplacé dans $[f(x, y)]$ les valeurs de x et y par les coordonnées des nœuds de l'élément.

au nœud (1) $x_1 = 0, y_1 = 0$

$$[f(x_1, y_1)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Au nœud (2) $x_2 = 0, y_2 = b$

$$[f(x_2, y_2)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

Au nœud (3) $x_3 = a, y_3 = 0$

$$[f(x_3, y_3)] = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Au nœud (4) $x_4 = a, y_4 = b$

$$[f(x_4, y_4)] = \begin{bmatrix} 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \end{bmatrix}$$

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \\ [f(x_4, y_4)] \end{bmatrix} \{\alpha\} = [A] \cdot \{\alpha\} \quad (4.7)$$

$$\text{Donc} \quad \{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (4.8)$$

En remplaçant l'équation (4.8) dans l'équation (4.5) on obtient :

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)][A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (4.9)$$

4.2.3. Relation déformation-déplacements

L'état de déformation dans l'élément peut être représenté par :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial_u/\partial_x \\ \partial_v/\partial_y \\ \partial_u/\partial_y + \partial_v/\partial_x \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

En remplaçant U et V par leurs valeurs. A partir de l'équation (4.4), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy) = \alpha_2 + \alpha_4 y \\ \varepsilon_y = \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy) = \alpha_7 + \alpha_8 x \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy) \\ \quad = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_6 + \alpha_8 y. \end{array} \right.$$

En utilisant les expressions des déformations dans l'équation (4.10) on obtient :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 + \alpha_4 y \\ \alpha_7 + \alpha_8 x \\ \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_6 + \alpha_8 y \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Donc: } \{\varepsilon(x, y)\} = [C]\{\alpha\} \quad (4.11)$$

Et avec la valeur de $\{\alpha\}$ donnée par l'équation (4.8)

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [C][A]^{-1}\{\delta^e\}$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B]\{\delta^e\} \quad (4.12)$$

$$\text{Avec : } [B] = [C][A]^{-1}$$

4.2.4.: Relation contraintes - déplacements

Après avoir déterminé les déformations, on peut déduire les contraintes. D'après la loi de Hooke :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \{\varepsilon(x, y)\} \quad (4.13)$$

En remplaçant $\{\varepsilon(x, y)\}$ par sa valeur dans l'équation (4.12) on obtient :

$$\begin{aligned} \{\sigma(x, y)\} &= [D][B]\{\delta^e\} \\ &= [D][C][A]^{-1} \{\delta^e\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Où $[D]$ la matrice d'élasticité, elle est donnée par :

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

➤ pour des contraintes planes :

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \\ d_{21} &= d_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \\ d_{33} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{aligned}$$

➤ pour des déformations planes :

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{22} = \frac{(1 - \nu)E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ d_{21} &= d_{12} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ d_{33} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{aligned}$$

Avec E : module de Young
 ν : Coefficient de poisson

4.2.5: Obtention de la matrice de rigidité élémentaire

Cette étape permet de trouver une relation entre les forces nodales et les déplacements. En appliquant le théorème des travaux virtuels :

$$W_{int} = W_{ext} \quad (4.16)$$

Le travail interne par unité de volume est donnée par :

$$W_{int} = \{\varepsilon(x, y)^*\}^T \{\sigma(x, y)\} \quad (4.17)$$

Avec $\varepsilon(x, y)^*$: les déformations produites par les déplacements virtuels $\{\delta^{*e}\}$

$$W_{ext} = \{\delta^{*e}\} \{f^e\} = \{\delta^{*e}\} [K^e] \{\delta^e\} \quad (4.18)$$

En intégrant, on obtient le travail interne total et en faisant égaliser le travail interne et le travail externe, on obtient :

$$[K^e] = \int [B]^T [D] [B] d(vol) \quad (4.19)$$

Pour le cas d'un élément rectangulaire pour l'élasticité plane, on a :

$$dvol = t \cdot dx \cdot dy$$

Avec t l'épaisseur constante.

Alors :

$$[K^e] = t \int_0^b \int_0^a [B]^T [D] [B] dx dy \quad (4.20)$$

4.3. Formulation l'élément de plaque en flexion " ACM " à champ de déplacement

Pour l'étude de la flexion des plaques minces, on utilise l'élément quadrilatère à quatre nœuds avec trois degrés de liberté en chaque nœud : Le déplacement vertical $\ll w \gg$, la rotation autour de l'axe x $\ll \theta_x \gg$ et celle autour de l'axe y $\ll \theta_y \gg$.

Le système de coordonnées ainsi que la numérotation des nœuds de l'élément sont montrés dans la figure (figure 4.5).

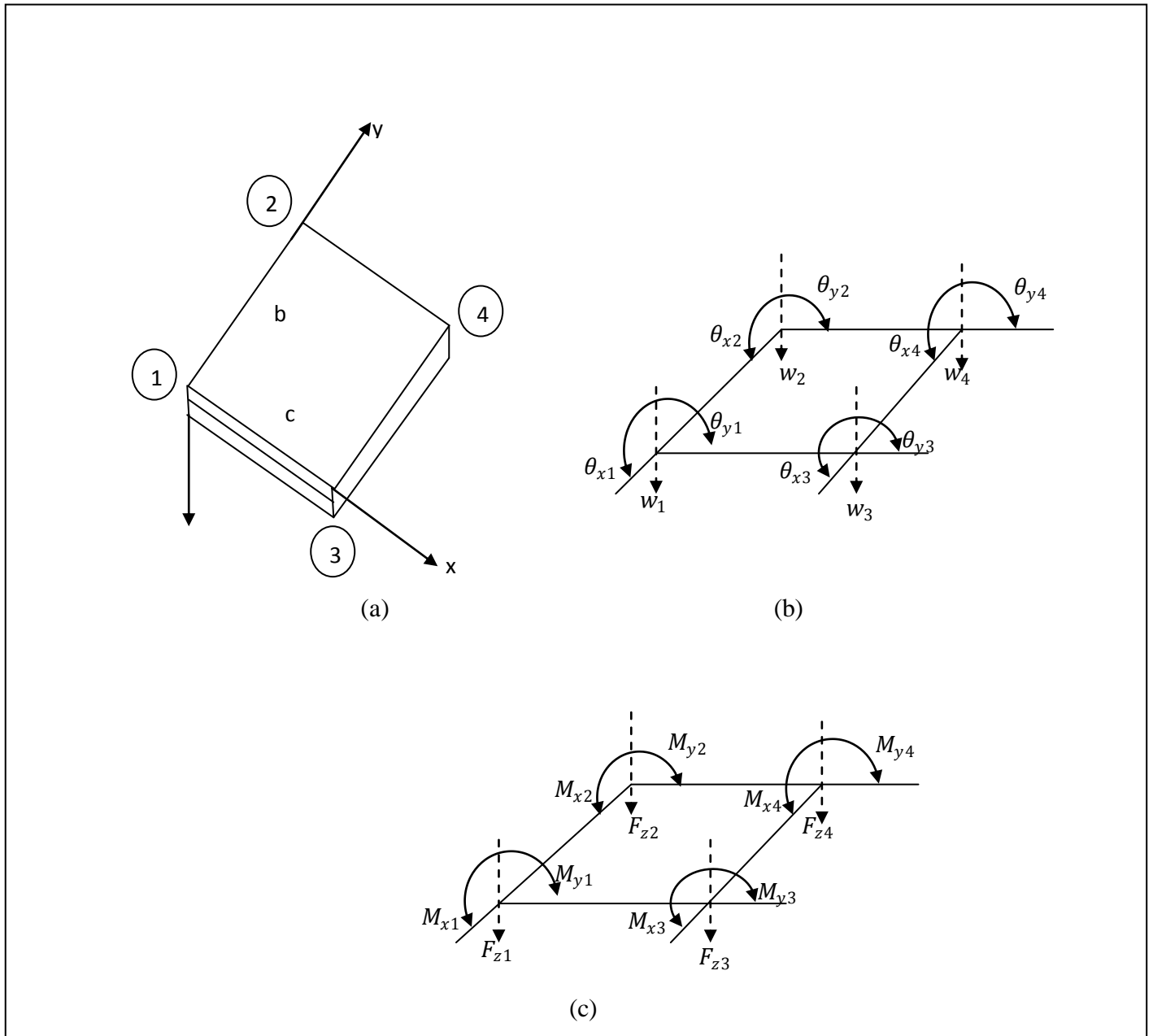


Fig.4.5. l'élément de plaque en flexion

. -a Système de coordonnées. b Déplacements nodaux. c Forces nodales

Cet élément est alors à un total de douze degrés de liberté (figure 4.5b). Les moments et les forces correspondantes consistent en deux moments M_x et M_y et une force de cisaillement F_z en chaque nœud (figure 4.5c). Les déplacements au nœud (i) peuvent être écrits de la façon suivante :

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_i \end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

et de même pour les forces et les moments correspondant au nœud (i) :

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ F_{Zi} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

De telle sorte que les vecteurs des forces et des déplacements pour tout l'élément s'écrivent :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Puisque chacun de ces vecteurs contient douze termes, la matrice de rigidité de l'élément est carrée d'ordre 12.

$$\{F^e\} = [K^e]\{\delta^e\} \quad (4.25)$$

4.3.1. Le choix du champ de déplacement

Puisque l'élément a douze degrés de liberté, on doit avoir douze coefficients indéterminés dans le polynôme qui représente « w ». L'équation (4.26) donne une fonction convenable.

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y \\ + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (4.26)$$

Ce qui donne les rotations suivantes :

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} = -(\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 \\ + \alpha_{11} ax^3 + 3\alpha_{12} xy^2) \quad (4.27)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 \\ + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3 \quad (4.28)$$

Pour vérifier la continuité des flèches et des pentes ; on Considère un bord de l'élément.

Par exemple le bord (1 -2) où x est égal à zéro :

Le déplacement latéral et les pentes en chaque point de ce bord sont donnés par l'équation suivante :

$$\begin{cases} w = \alpha_1 + \alpha_3 y + \alpha_6 y^2 + \alpha_{10} y^3 \\ \theta_x = -(\alpha_3 + 2\alpha_6 y + 3\alpha_{10} y^2) \\ \theta_y = \alpha_2 + \alpha_5 y + \alpha_9 y^2 + \alpha_{12} y^3 \end{cases} \quad (4.29)$$

Aux nœuds de ce bord on a :

Nœud 1 :

$$w = w_1 = \alpha_1$$

$$\theta_x = \theta_{x1} = -\alpha_3$$

$$\theta_y = \theta_{y1} = \alpha_2$$

Nœud 2 :

$$w = w_2 = \alpha_1 + \alpha_3 b + \alpha_6 b^2 + \alpha_{10} b^3$$

$$\theta_x = \theta_{x2} = -(\alpha_3 + 2\alpha_6 b + 3\alpha_{10} b^2)$$

$$\theta_y = \theta_{y2} = \alpha_2 + \alpha_5 b + \alpha_9 b^2 + \alpha_{12} b^3$$

On a ainsi six équations pour obtenir les huit coefficients, ce qui est impossible. Le déplacement w et la rotation θ_x sont complètement définis par les mouvements des extrémités, la rotation normale au bord θ_y n'est pas définie de façon unique. Puisque les mouvements des extrémités sont compatibles, cela signifie que la continuité de w et θ_x est assurée le long des bords où x est constant mais θ_y , d'autre part, est discontinu le long de ces bords. Cependant la discontinuité de la pente normale peut exister et la fonction choisie n'est pas idéale et appelée une «fonction non conforme».

4.3.2. Expression de l'état de déplacement en fonction des déplacements nodaux

Après avoir choisi la fonction de forme, on peut donner le vecteur de déplacements en un point (x, y) de la manière suivante :

$$\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [f(x, y)]\{\alpha\} \quad (4.30)$$

On doit exprimer l'état de déplacement en un point en fonction des déplacements nodaux.

Sous la forme suivante:

$$\{\delta^e\} = [A] \{\alpha\}$$

$[A]$: est la matrice obtenue après avoir remplacé dans $[f(x, y)]$ x et y par les coordonnées des nœuds.

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (4.31)$$

En remplaçant l'équation (4.31) dans l'équation (4.30) on aura :

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)] [A]^{-1} \{\delta^e\} \quad (4.32)$$

4.3.3.: Relation déformations - déplacements

L'état de déformation dans l'élément peut être représenté par :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ 2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix}$$

En remplaçant w par sa valeur on obtient l'équation (4.33) qui peut être écrite :

$$\begin{aligned} \{\varepsilon(x, y)\} &= [C]\{\alpha\} \\ &= [C] [A]^{-1} \{\delta^e\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

La relation cherchée entre déformations et déplacements nodaux est obtenue par :

$$\begin{aligned} \{\varepsilon(x, y)\} &= [B]\{\delta^e\} \\ [B] &= [C][A]^{-1} \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.3.4. Relations contraintes-déplacements

Dans la résolution des problèmes de flexion des plaques, les contraintes internes sont réellement les moments de flexion et de torsion ;

$$\{\sigma(x, y)\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon(x, y)\} \quad (4.35)$$

En remplaçant (4.33) dans (4.34) on aura :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D][B]\{\delta^e\}$$

$$\text{Avec : } [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 1 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}$$

$[D]$: Matrice de rigidité de flexion

$$D_{11} = D_{22} = Et^3/12(1-\nu^2)$$

$$D_{12} = D_{21} = \nu Et^3/12(1-\nu^2)$$

$$D_{33} = Et^3(1-\nu)/24(1-\nu^2)$$

4.3.5. Obtention de la matrice de rigidité élémentaire

On procède de la même façon que pour l'élément Q4. Ainsi la relation entre les charges nodales $\{F^e\}$ et les déplacements est donnée dans le cas général par l'équation suivante :

$$\{F^e\} = [\int [B]^T [D] [B] d(vol)] \{\delta^e\} \quad (4.36)$$

Pour le cas particulier d'un élément pour la flexion des plaques, l'équation (4.36) peut s'écrire de la façon suivante :

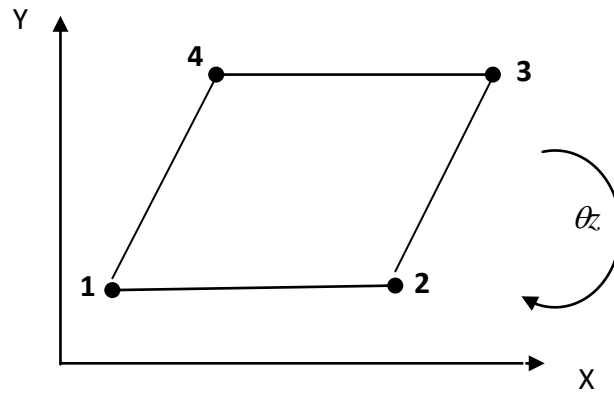
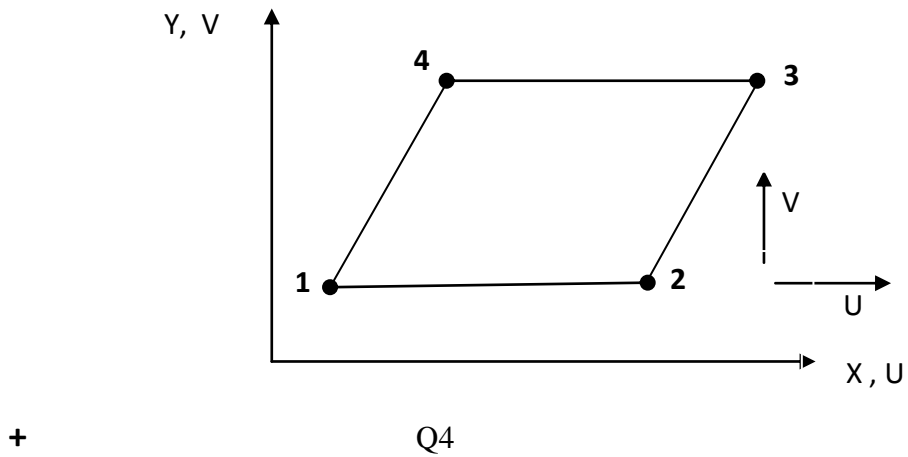
$$\{F^e\} = \left[\int_0^b \int_0^a [B]^T [D] [B] d_x d_y \right] \{\delta^e\}$$

La matrice de rigidité est définie par :

$$[K^e] = t \int_0^b \int_0^a [B]^T [D] [B] d_x d_y$$

4.4. Construction de l'élément plane ACM-Q4

Le principe d'obtention d'un élément de coque plane par superposition d'un élément de membrane et d'un élément de flexion est illustré en (figure 4.6).



Rotation fictive θ_z

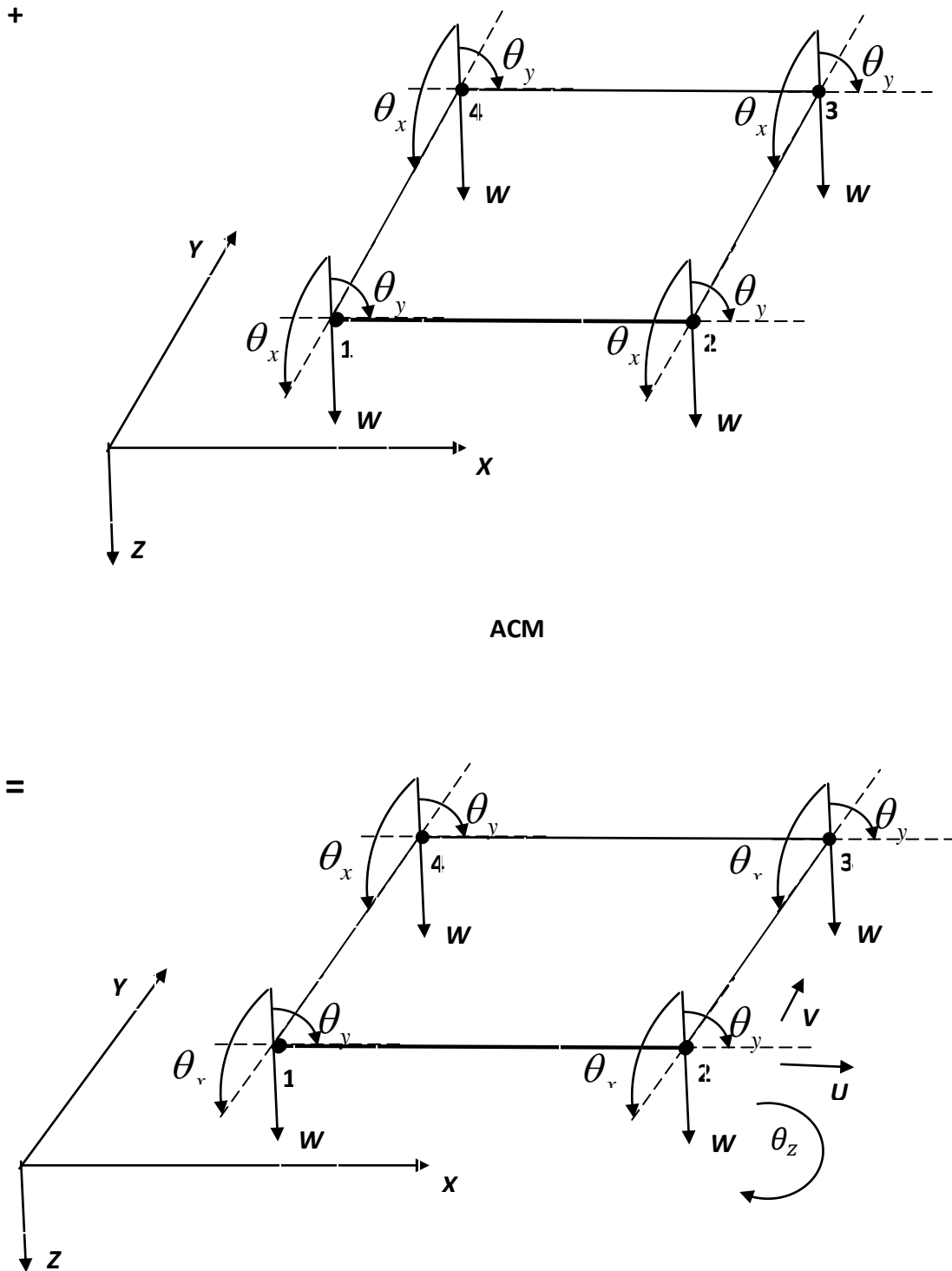


Fig.4.6. l'élément de coque plane ACM-Q4

4.5. Formulation de l'élément de coque plane « ACM- Q4SBE1 » mixte

A. construction de l'élément ACM- Q4SBE1

Pour la modélisation par éléments finis des structures complexe, divers éléments peuvent être utilisés : poutres, membrane, éléments de solide, plaques et coques ces éléments construits selon la formulation classique ne partagent pas, en général, les mêmes degrés de liberté nodaux, ce qui complique l'élaboration d'un modèle compatible. Pour résoudre ce problème, nous utilisons un nouveau élément fini **ACM- Q4SBE1** (élément de coque plane, Quadrilatère) qui a été développé par M^r Dr : D.HAMADI (2009) [HAM 2009].

Ce type d'élément est simple, stable, fiable, peu coûteux en temps de calcul et adapté à l'analyse des problèmes généraux d'élasticité plane.

B. Description de l'élément Q4SBE1

Le présent élément est un quadrilatère avec quatre nœuds au coin et un nœud central, chaque nœud à deux degrés de liberté. Ainsi, le champ de déplacement doit contenir dix constantes indépendantes.

La figure (Fig.4.7) montre les propriétés géométriques de l'élément Q4SBE1 et les déplacements nodaux correspondants.

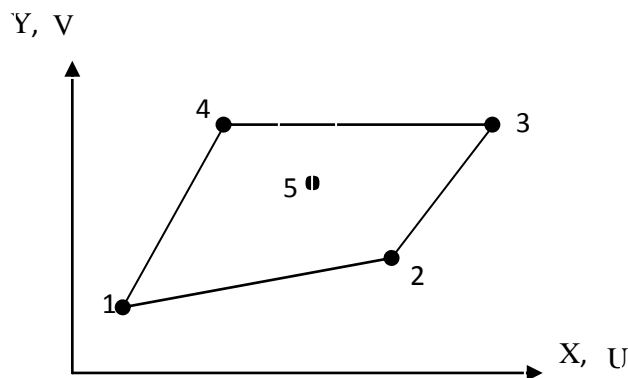


Fig.4.7. les coordonnées nodaux de l'élément Q4SBE1

Les trois composants du champ de déformation à un point quelconque sont donnés par l'équation (4.37).

$$\begin{cases} \varepsilon_x = U_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_y = V_y = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = U_y + V_x \end{cases} \quad (4.37)$$

U, V : Les composants des déplacements respectivement dans les directions X et Y.

Les équations (4.37) doivent au minimum représenter le mouvement d'un corps, rigide.

Donc, on peut écrire :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 0 \\ \varepsilon_y = 0 \\ \gamma_{xy} = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

L'intégration de (4.38) permet d'obtenir une solution particulière :

$$\begin{cases} U = a_1 - a_3 y \\ V = a_2 + a_3 x \end{cases} \quad (4.39)$$

Les déformations dans l'équation (4.37) doivent satisfaire une équation additionnelle appelée l'équation de compatibilité :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.40)$$

L'équation (4.38) donne les trois composantes qui représentent le champ de déplacement correspondant au mouvement du corps rigide et exige trois constantes indépendantes

(a1, a2, a3).

Ainsi il reste sept constantes (a4, a5... a10) pour représenter approximativement la déformation dans l'élément.

Ces sept constantes indépendantes sont réparties comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a_4 + a_5 y + a_9 x \\ \varepsilon_y = a_6 + a_7 x + a_{10} y \\ \gamma_{xy} = -a_5 x R - a_7 y R + a_8 - a_9 H y - a_{10} H x \end{cases} \quad (4.41)$$

$$\text{Avec : } H = \frac{2}{(1-\nu)} \quad ; \quad R = \frac{2\nu}{(1-\nu)}$$

Ces déformations données par les équations (4.41) satisfont l'équation de compatibilité

(4.40) et les équations bidimensionnelles d'équilibre (4.42a) et (4.42b)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (4.42a)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (4.42b)$$

En intégrant les équations (4.41) nous obtenons :

$$U = a_4 x + a_5 x y - a_7 y^2 (R+1)/2 + a_8 y/2 + a_9 (x^2 - H y^2)/2 \quad (4.43a)$$

$$V = -a_5 x^2 (R+1)/2 + a_6 y + a_7 x y + a_8 x/2 + a_{10} (y^2 - H x^2)/2 \quad (4.43b)$$

Le champ de déplacement final pour l'élément Q4SBE1 est obtenu par combinaison de l'équation (4.39) et (4.43) pour obtenir ce qui suit :

$$\begin{cases} U = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 x y - a_7 \frac{y^2 (R+1)}{2} + a_8 \frac{y}{2} + a_9 \frac{1}{2} (x^2 - H y^2) \\ V = a_2 + a_3 x - a_5 \frac{x^2 (R+1)}{2} + a_6 y + a_7 x y + a_8 \frac{x}{2} + a_{10} \frac{1}{2} (y^2 - H x^2) \end{cases} \quad (4.44)$$

La matrice de rigidité peut être calculée à partir de l'expression suivante :

$$[K_e] = [A^{-1}]^T [K_0] [A^{-1}] \quad (4.45a)$$

$$[K_0] = \iint_S [Q]^T [D][Q] dx.dy \quad (4.45b)$$

Avec:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -xR & 0 & -yR & 1 & -Hy & -Hx \end{bmatrix}$$

$$\text{et } [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = D_{22} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \\ D_{12} = \frac{\nu.E}{(1-\nu^2)} \\ D_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{array} \right.$$

Pour $[A]$ et $[K_0]$ voir l'annexe

L'élément de coque à facette plane "ACM- Q4SBE1" mixte (Figure 4.8) ; est obtenu par le même principe précédent de superposition de l'élément de membrane Q4SBE1 et de l'élément ACM (L'élément standard de plaque en flexion).

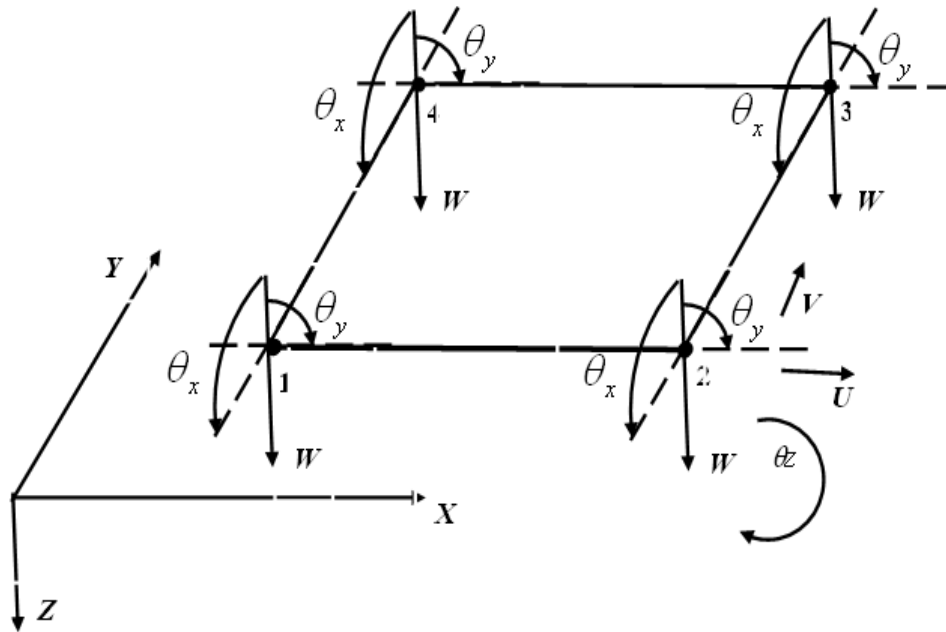


Fig.4.8. élément de coque plane "ACM- Q4SBE1"

4.6. L'intégration analytique de la matrice $[K_0]$

Généralement l'intégration numérique est très couteuse, quoi qu'elle donne de bons résultats, il existe des situations où deux problèmes peuvent se présenter :

Problème de distorsion géométrique, sachant que, pour certains éléments, une trop grande distorsion (distorsion sévère) peut conduire à des résultats numériques erronés (perte de précision) et problème de blocage ou verrouillage de membrane [HAM 2007], [VID 96].

Pour éviter ces problèmes on a utilisé l'intégration analytique pour les deux éléments de coque plane « ACM- Q4SBE1 » et « ACM-Q4 ».

L'évaluation de la matrice de rigidité élémentaire est donnée par l'expression suivante :

$$[K_e] = [A^{-1}]^T [K_0] [A^{-1}] \quad (4.46 \text{ b})$$

$$\text{Avec : } [K_0] = \iint_S [Q]^T [D] [Q] dx dy \quad (4.46 \text{ c})$$

Etant donné que la matrice $[A]$ et son inverse peuvent être évalués numériquement,

L'évaluation de l'intégral (4.46c) devient la clé du problème.

Une expression général facile à mettre en œuvre numériquement est formulée, permette l'évaluation de façon automatique de la matrice $[K_0]$ quelque soit le degré du polynôme et la distorsion de l'élément (Figure 4.9)

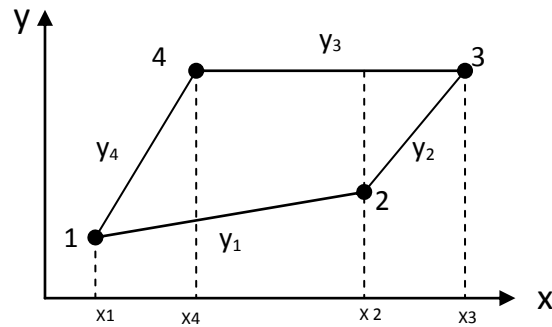


Fig.4.9. Élément quadrilatère

$$I = [K_0] = \iint_S C \cdot x^\alpha y^\beta dx dy \quad (4.47)$$

L'expression générale de l'équation (4.47) pour l'élément quadrilatère est donnée par :

$$I = \sum_{p=1}^3 I_p \quad (4.48)$$

Avec :

$$I_p = \frac{C}{\beta+1} \sum_{k=1}^{\beta+2} \frac{1}{k+\alpha} \cdot C(k) \left(a_j^{k-1} \cdot b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1} \cdot b_i^{\beta+2-k} \right) \left(x_n^{k+\alpha} - x_m^{k+\alpha} \right)$$

4.7. Présentation de l'Organigramme générale

La figure (figure 4.10) résume les parties de base du programme pour la résolution du problème par la méthode des éléments finis.

4.8. Conclusion

La performance de ces éléments de coque à facette plane ACM- Q4SBE1 et ACM-Q4 est évaluée on utilise des tests de validations standards.

La comparaison avec les résultats analytiques basés sur la théorie des coques minces est très importante.

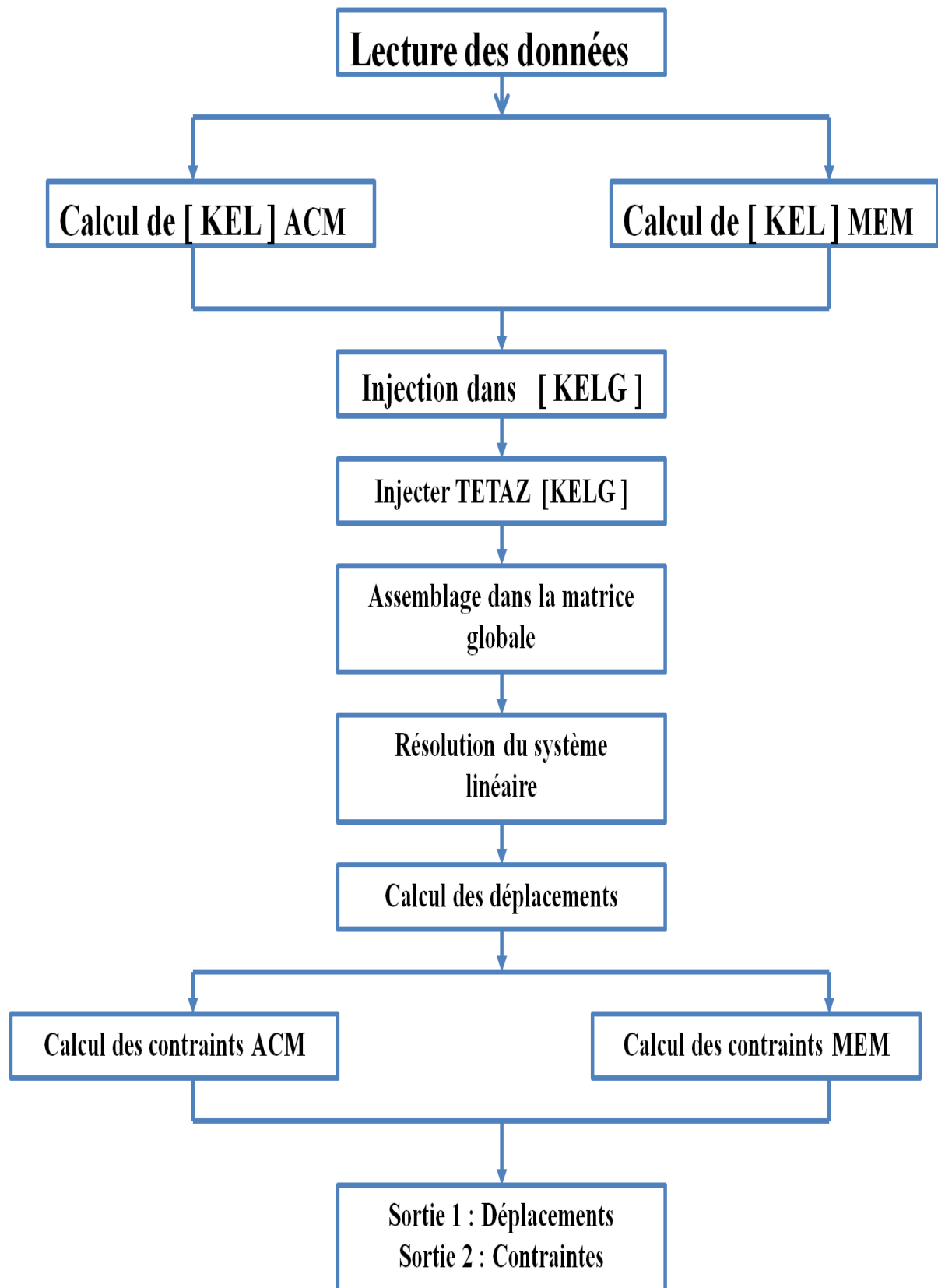


Fig.4.10. l'Organigramme générale

