

## II-1- Introduction

L'analyse dynamique d'une structure isolée soumise à la sollicitation sismique est la même que la structure à base fixe pour la détermination des réponses dynamiques mais avec une procédure complexe due au comportement non linéaire du système d'isolation parasismique.

Dans la première partie de ce chapitre, nous donnons quelques modèles mathématiques simples des principaux systèmes d'isolation parasismique qui permettent l'établissement des relations théoriques de leur comportement [22],[28]. Dans la deuxième partie, on formulera les équations du mouvement pour les deux structures isolées à 2 DDL et N DDL ou combinées (le système d'isolation et la superstructure) avec la théorie linéaire ; cette théorie approximative facilite le développement des matrices masse  $[M]$ , amortissement  $[C]$  et rigidité  $[K]$  avec la formulation des équations dans le but de comprendre l'influence du système d'isolation. Ces équations résultantes permettent de déterminer les fréquences, les amortissements et les facteurs de participation modale pour tous les modes de vibration.

## II-2- Modélisation mathématique des appuis parasismiques

### II-2-1- Isolateur en caoutchouc fretté (Laminated rubber bearings) (RB)

Ces systèmes d'appuis sont composés de couches alternées de caoutchouc et d'acier liées les unes aux autres pour la flexibilité horizontale et la rigidité verticale. La caractéristique rhéologique dominante de ce système est l'action parallèle du ressort et de l'amortisseur comme affiché schématiquement dans le modèle mathématique donné par les figures ci-dessous (32-a et 32-b), donc en raison du frottement interne d'élastomère, l'appui agit comme un amortisseur visqueux.

#### II-2-1-1- Système d'isolation en caoutchouc fretté

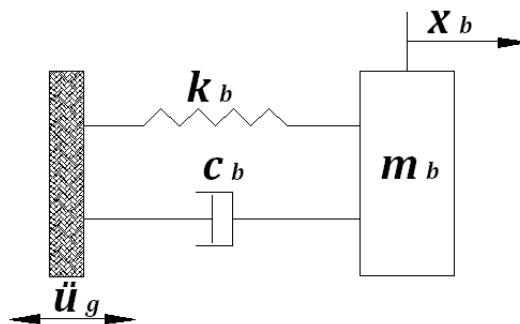


Figure (32-a) : Modèle mathématique pour un appui en caoutchouc fretté.

Le système est soumis à l'accélération du sol  $\ddot{u}_g$ . L'équation du mouvement est donnée comme suit:

$$\begin{aligned} m_b(\ddot{x}_b + \ddot{u}_g) + c_b\dot{x}_b + k_b x_b &= 0 \\ m_b\ddot{x}_b + c_b\dot{x}_b + k_b x_b &= -m_b\ddot{u}_g \end{aligned} \quad (01)$$

### II-2-1-2- Structure à N DDL montée sur système d'isolation (RB)

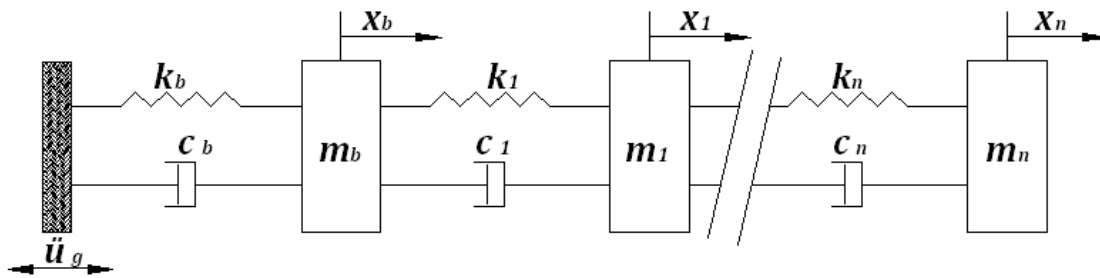


Figure (32-b) : Le Modèle mathématique d'une structure à N DDL montée sur un système d'isolation en caoutchouc fretté.

Le système est soumis à l'accélération du sol  $\ddot{u}_g$ . L'équation du mouvement de la base est donnée comme suit :

$$(m_b + \sum_{i=1}^n m_i)\ddot{x}_b + c_b\dot{x}_b + k_b x_b + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i = -(m_b + \sum_{i=1}^n m_i)\ddot{u}_g \quad (02)$$

### II-2-2- Isolateur en caoutchouc fretté avec amortisseur en barreau de plomb (Lead-rubber bearings) (LRB)

Ce type d'isolateur se compose de couches alternées de caoutchouc et d'acier liées les unes aux autres autour d'un cylindre de plomb pur, inséré au centre de ces couches d'acier et de caoutchouc. Le cylindre en plomb contrôle les déplacements latéraux de la structure sous des surcharges de service et absorbe une partie de l'énergie sismique. Le système se comporte comme un amortisseur hystérétique et le modèle mathématique est donné par les figures ci-dessous (33-a et 33-b).

#### II-2-2-1- Système d'isolation en caoutchouc avec amortisseur en barreau de plomb (LRB)

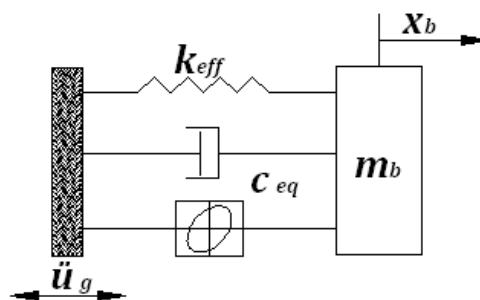


Figure (33-a) : Modèle mathématique pour un système d'isolation en caoutchouc fretté avec amortisseur en barreau de plomb.

Pour déterminer les propriétés du système LRB (la rigidité effective et l'amortisseur équivalent), le modèle bilinéaire de la courbe caractéristique est employé.

L'équation du mouvement du système LRB est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} m_b(\ddot{x}_b + \ddot{u}_g) + C_{eq}\dot{x}_b + K_{eff}x_b &= 0 \\ m_b\ddot{x}_b + C_{eq}\dot{x}_b + K_{eff}x_b &= -m_b\ddot{u}_g \end{aligned} \quad (03)$$

### II-2-2-2- Structure à N DDL montée sur système d'isolation (LRB)

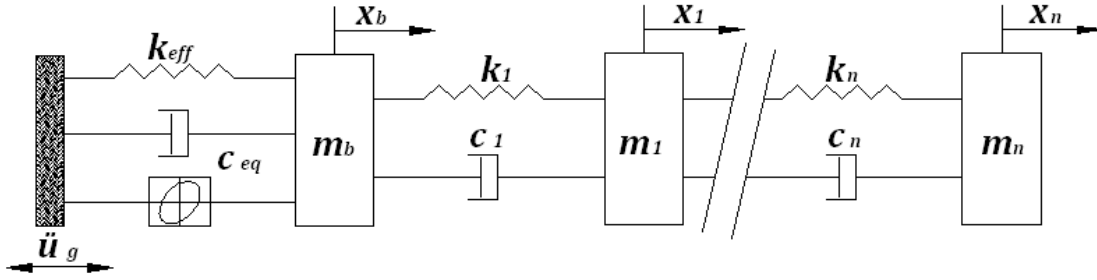


Figure (33-b) : Modèle mathématique d'une structure à N DDL montée sur un système d'isolation en caoutchouc fretté avec amortisseur en barreau de plomb.

L'équation du mouvement de la base d'une structure à NDDL montée sur un système LRB qui emploie les valeurs de rigidité effective et d'amortissement équivalent, elle est donnée comme suit :

$$(m_b + \sum_{i=1}^n m_i)\ddot{x}_b + C_{eq}\dot{x}_b + K_{eff}x_b + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i = -(m_b + \sum_{i=1}^n m_i)\ddot{u}_g \quad (04)$$

Avec:

$K_{eff}$  : La rigidité effective du système d'isolation.

$C_{eq}$  : Le coefficient d'amortissement équivalent linéaire.

$\xi_{eq}$  : Le rapport d'amortissement équivalent linéaire.

$$\text{et } C_{eq} = 2\xi_{eq}\sqrt{(m_b + \sum_{i=1}^n m_i) K_{eff}} \quad (05)$$

$$\xi_{eq} = \Delta E / (2\pi K_{eff} D_D^2) \quad (06)$$

Où,  $\Delta E$  est l'énergie totale dissipée et  $D_D$  le déplacement de conception.

### II-2-3- Isolateur à frottement pur (Pure-friction system) (PF)

Le système d'isolation par frottement pur est le dispositif le plus simple parce qu'il assure l'isolation par un frottement au glissement. Tant que l'excitation horizontale reste inférieure à la force de frottement, les sollicitations sismiques transmises à la structure sont identiques à celles qui auraient été transmises sans isolation. Dans le cas contraire, il y a du glissement entre la structure et le support.

D'autre part, il peut y avoir une déformation résiduelle dans la surface de frottement après l'événement sismique, parce qu'aucune force de rappel n'est assurée.

### II-2-3-1- Système d'isolation à frottement pur (PF)

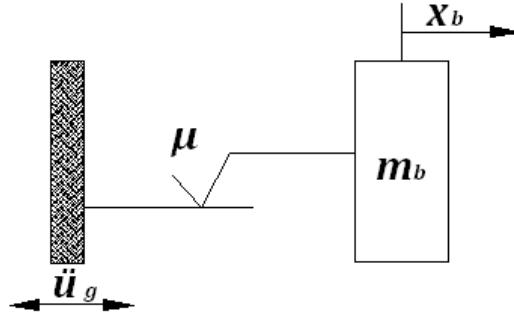


Figure (34-a) : Modèle mathématique pour un système d'isolation à frottement pur.

La force de frottement dans les plaques de glissement est donnée comme suit :

$$F_f = \mu m_b g \operatorname{sgn}(\dot{x}_b) \quad (07)$$

Dans la phase de glissement, l'équation du mouvement est représentée par :

$$m_b(\ddot{x}_b + \ddot{u}_g) + F_f = 0 \quad (08)$$

En remplaçant l'équation (07) dans (08), On aura :

$$m_b(\ddot{x}_b + \ddot{u}_g) + \mu m_b g \operatorname{sgn}(\dot{x}_b) = 0$$

$$\ddot{x}_b + \mu g \operatorname{sgn}(\dot{x}_b) = -\ddot{u}_g \quad (09)$$

$\mu$  : Coefficient de frottement

$g$  : Accélération de la pesanteur.

Où la fonction  $\operatorname{sgn}(\dot{x})$  représente le signe de la direction de la vitesse du système d'isolation en fonction de  $\dot{x}$  telle que :

$$\begin{cases} \text{si } \dot{x} > 0, \operatorname{sgn}(\dot{x}) = +1 \\ \text{si } \dot{x} < 0, \operatorname{sgn}(\dot{x}) = -1 \\ \text{si } \dot{x} = 0, \operatorname{sgn}(\dot{x}) = 0 \end{cases}$$

Cette fonction est discontinue en 0, la force de frottement  $F_f$  est donc discontinue lorsque la vitesse de glissement s'annule.

La condition de non glissement est donnée par la formule suivante :

$$|\ddot{u}_g| < \mu g$$

### II-2-3-2- Structure à N DDL montée sur système d'isolation (PF system)

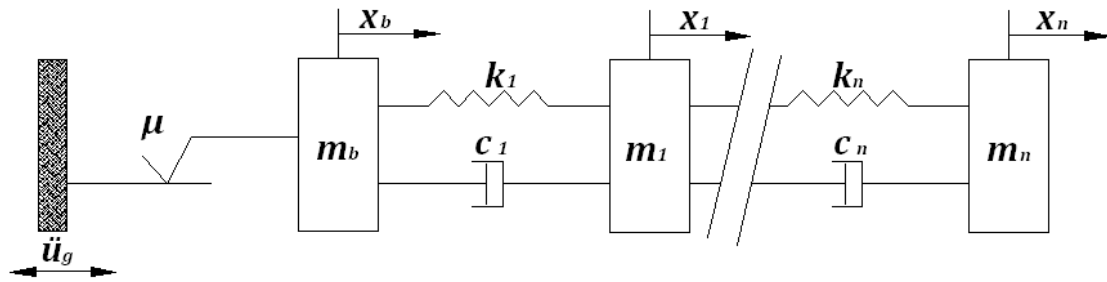


Figure (34-b) : Modèle mathématique d'une structure à N DDL montée sur un système d'isolation à frottement pur

L'équation du mouvement de la base dans la phase de glissement est donnée comme suit :

$$(m_b + M)\ddot{x}_b + \mu(m_b + M)g \operatorname{sgn}(\dot{x}_b) + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i = -(m_b + M)\ddot{u}_g \quad (10)$$

Avec:  $M = \sum_{i=1}^n m_i$

La condition de non glissement est donnée par la formule :

$$|(m_b + M)\ddot{u}_g + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i| < \mu(m_b + M)g \quad (11)$$

### II-2-4- Isolateur résistant par frottement (Resilient-friction base isolator) (R-FBI)

Ce système se compose de plaques en acier inoxydables superposées, elles sont recouvertes de téflon, pouvant glisser les unes sur les autres et reliées par un noyau central ou plusieurs noyaux en caoutchouc. Leur rôle est de distribuer le glissement sur la hauteur du système, elles ne portent donc aucune charge verticale. Ce système entraîne une réduction à la fois des accélérations et des déplacements de la superstructure et conduit à une diminution importante des efforts tranchants à sa base. A la différence du système à frottement pur, le système d'isolation résistant par frottement a une résistance additionnelle et une force de rappel.

#### II-2-4-1- Système d'isolation résistant par frottement

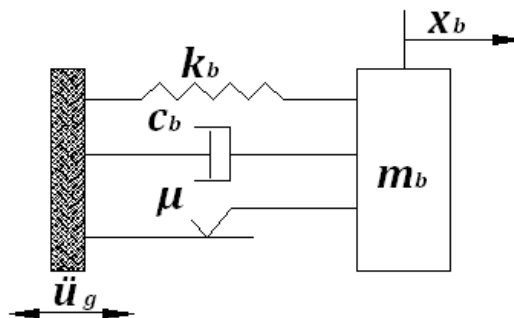


Figure (35-a) : Modèle mathématique pour un système d'isolation résistant par frottement (R-FBI).

L'équation du mouvement de ce système d'isolation est donnée comme suit :

$$m_b(\ddot{x}_b + \ddot{u}_g) + c_b \dot{x}_b + k_b x_b + \mu m_b g \operatorname{sgn}(\dot{x}_b) = 0$$

$$\ddot{x}_b + 2\beta_b \omega_b \dot{x}_b + \omega_b^2 x_b + \mu g \operatorname{sgn}(\dot{x}_b) = -\ddot{u}_g \quad (12)$$

$\beta_b$  : Facteur d'amortissement.

$\omega_b$  : Fréquence de vibration du système.

$\mu$  : Coefficient de frottement.

La condition de non glissement est donnée par la formule :

$$|\ddot{u}_g + \omega_b^2 x_b| < \mu g \quad (13)$$

#### II-2-4-2- Structure à N DDL montée sur ce système d'isolation

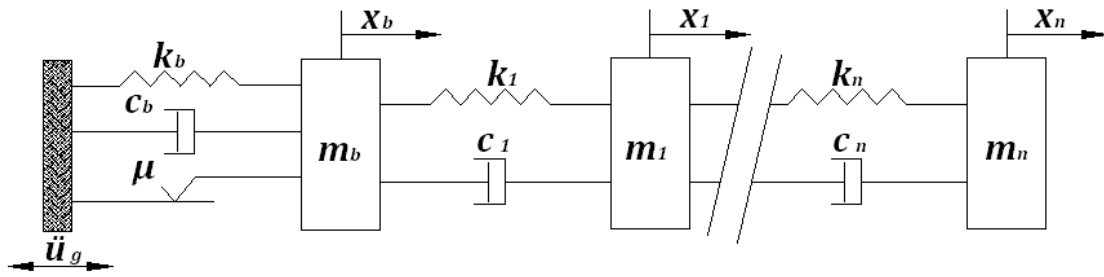


Figure (35-b) : Modèle mathématique d'une structure à N DDL montée sur un système d'isolation résistant par frottement.

L'équation du mouvement de la base d'une structure à NDDL montée sur un système résistant par frottement est donnée comme suit :

$$(m_b + M)(\ddot{x}_b + \ddot{u}_g) + c_b \dot{x}_b + k_b x_b + \mu(m_b + M)g \operatorname{sgn}(\dot{x}_b) + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i = 0$$

$$(m_b + M)\ddot{x}_b + c_b \dot{x}_b + k_b x_b + \mu(m_b + M)g \operatorname{sgn}(\dot{x}_b) + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i = -(m_b + M)\ddot{u}_g \quad (14)$$

La condition de non glissement est donnée par la formule :

$$|(m_b + M)\ddot{u}_g + k_b x_b + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i| < \mu(m_b + M)g \quad (15)$$

#### II-2-5- Isolateur d'électricité de France (EDF)

Le système d'isolation (EDF) combiné d'un système en caoutchouc fretté (RB) et d'un système à frottement pur (PF) montés en série est représenté par le modèle mathématique des figures ci-dessous (36-a et 36-b). Pendant un séisme modéré le système se comporte comme un système en (RB). Lorsque la force de frottement entre les plaques est dépassée pendant un séisme majeur, le glissement entre ces plaques commence avec des déformations résiduelles dans la surface de glissement.

**II-2-5-1- Système d'isolation EDF**

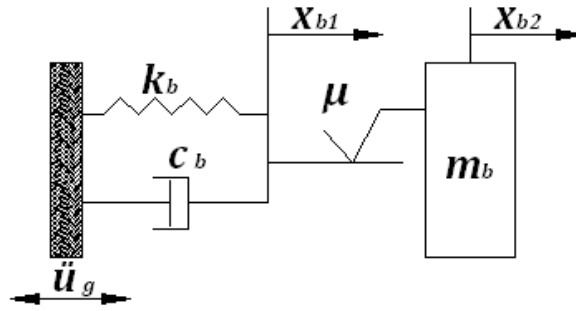


Figure (36-a) : Modèle mathématique pour un système d'isolation d'électricité de France (EDF)

Dans la phase de glissement les équations du mouvement sont données comme suit :

$$m_b(\ddot{x}_{b2} + \ddot{u}_g) + \mu m_b g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b2} - \dot{x}_{b1}) = 0 \tag{16}$$

$$c_b \dot{x}_{b1} + k_b x_{b1} - \mu m_b g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b2} - \dot{x}_{b1}) = 0 \tag{17}$$

$x_{b1}$ : Le déplacement du système en caoutchouc fretté.

$x_{b2}$ : Le déplacement de la base.

Dans la phase élastique (non glissement) la résistance de friction n'est pas dépassée, on a

$\dot{x}_{b1} = \dot{x}_{b2}$  et  $\ddot{x}_{b1} = \ddot{x}_{b2}$ , donc les équations (16) et (17) deviennent :

$$m_b \ddot{x}_{b2} + \mu m_b g = -m_b \ddot{u}_g \tag{18}$$

$$c_b \dot{x}_{b2} + k_b x_{b2} - \mu m_b g = 0 \tag{19}$$

Donc l'équation (18) devient :

$$\mu g = -\ddot{u}_g - \dot{x}_{b2}$$

La condition de non glissement est donnée par la formule :

$$|\ddot{u}_g + \dot{x}_{b2}| < \mu g \tag{20}$$

**II-2-5-2- Structure à N DDL montée sur un système d'isolation EDF**

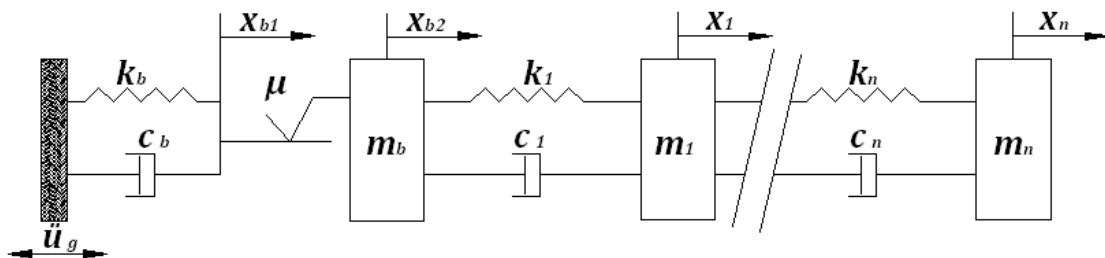


Figure (36-b) : Modèle mathématique d'une structure à N DDL montée sur un système d'isolation d'électricité de France (EDF).

Dans la phase de glissement les équations du mouvement de la base d'une structure à NDDL montée sur un système d'isolation d'électricité de France (EDF) sont données comme suit :

$$(m_b + M)(\ddot{x}_{b2} + \ddot{u}_g) + \mu(m_b + M)g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b2} - \dot{x}_{b1}) + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i = 0 \quad (21)$$

$$c_b \dot{x}_{b1} + k_b x_{b1} - \mu(m_b + M)g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b2} - \dot{x}_{b1}) = 0 \quad (22)$$

Donc l'équation (21) devient :

$$(m_b + M)\ddot{x}_{b2} + \mu(m_b + M)g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b2} - \dot{x}_{b1}) + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i = -(m_b + M)\ddot{u}_g \quad (23)$$

Dans la phase élastique ( $\dot{x}_{b1} = \dot{x}_{b2}$  et  $\ddot{x}_{b1} = \ddot{x}_{b2}$ ) l'équation (23) devient :

$$(m_b + M)\ddot{x}_{b2} + \mu(m_b + M)g + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i = -(m_b + M)\ddot{u}_g \quad (24)$$

Donc, la condition de non glissement est donnée par la formule :

$$|(m_b + M)(\ddot{x}_{b2} + \ddot{u}_g) + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i| < \mu(m_b + M)g \quad (25)$$

### II-2-6- Isolateur à frottement résistant par glissement (Sliding resilient-friction) (SR-F)

Le système d'isolation (SR-F) résulte d'une combinaison de quelques composantes des systèmes (R-FBI) et (EDF), donc le système (R-FBI) est modifié par l'addition des plaques à frottement au dessus et montées en séries comme représenté par le modèle mathématique des figures ci-dessous (37-a et 37-b). Pour des mouvements produits par des séismes modérés, le système (SR-F) se comporte comme un système en (R-FBI) et le glissement entre les plaques se produira pendant un séisme majeur, de ce fait en fournissant un facteur de sécurité plus grand par rapport aux d'autres systèmes d'isolations.

#### II-2-6-1- Système d'isolation (SR-F)

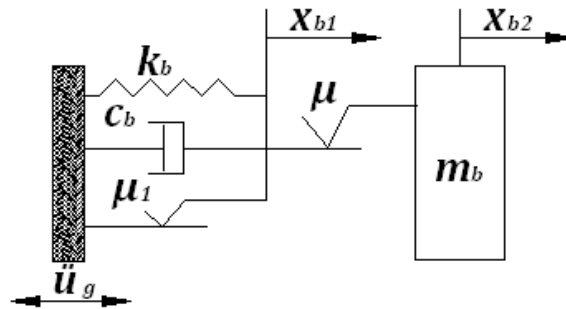


Figure (37-a): Modèle mathématique pour un système d'isolation à frottement résistant par glissement (SR-F).

Dans la phase de glissement les équations du mouvement sont données comme suit :

$$m_b(\ddot{x}_{b2} + \ddot{u}_g) + \mu m_b g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b2} - \dot{x}_{b1}) = 0 \quad (26)$$



$$c_b \dot{x}_{b1} + k_b x_{b1} + \mu_1 m_b g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b1}) - \mu m_b g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b2} - \dot{x}_{b1}) = 0 \quad (27)$$

Les équations (26) et (27) deviennent :

$$\ddot{x}_{b2} + \mu g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b2} - \dot{x}_{b1}) = -\ddot{u}_g \quad (28)$$

$$2\beta_b \omega_b \dot{x}_{b1} + \omega_b^2 x_{b1} + \mu_1 g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b1}) = \mu g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b2} - \dot{x}_{b1}) \quad (29)$$

En remplaçant l'équation (29) dans l'équation (28), on aura :

$$\ddot{x}_{b2} + 2\beta_b \omega_b \dot{x}_{b1} + \omega_b^2 x_{b1} + \mu_1 g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b1}) = -\ddot{u}_g \quad (30)$$

$x_{b1}$ : Le déplacement du système d'isolation résistant par frottement (R-FBI).

$x_{b2}$ : Le déplacement de la base.

$\mu_1$  : Coefficient de frottement des plaques dans l'isolateur (R-FBI).

$\mu$  : Coefficient de frottement des plaques au dessus de l'isolateur.

Pour:  $\dot{x}_{b1} = \dot{x}_{b2}$  et  $\ddot{x}_{b1} = \ddot{x}_{b2}$ , l'équation (30) devient :

$$\ddot{x}_{b1} + 2\beta_b \omega_b \dot{x}_{b1} + \omega_b^2 x_{b1} + \mu_1 g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b1}) = -\ddot{u}_g \quad (31)$$

Dans ce cas le système d'isolation se comporte comme un système en (R-FBI) à condition que la condition de non glissement  $|\dot{x}_{b1} + \ddot{u}_g| < \mu g$  soit vérifiée.

On considère que le glissement est fait seulement dans les plaques au dessus de l'isolateur, donc les équations du mouvement deviennent :

$$\dot{x}_{b1} = 0$$

$$\ddot{x}_{b2} + \mu g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b2}) = -\ddot{u}_g \quad (32)$$

Dans ce cas le système d'isolation se comporte comme un système à frottement pur (PF) en admettant que la condition de non glissement  $|\ddot{u}_g + \omega_b^2 x_{b1} + \ddot{x}_{b2}| < \mu_1 g$  est vérifiée.

Donc, il faut que  $\mu$  soit supérieur à  $\mu_1$ , pour que le système fonctionne avec une très grande efficacité.

### II-2-6-2- Structure à N DDL montée sur un système d'isolation (SR-F)

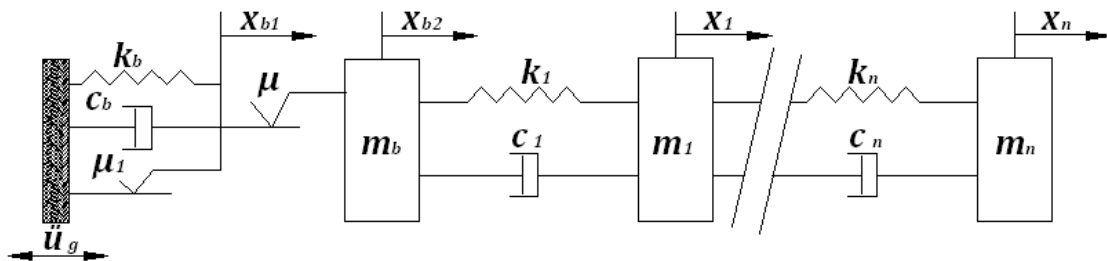


Figure (37-b): Modèle mathématique d'une structure à N DDL montée sur un système à frottement résistant par glissement (SR-F)

Les équations du mouvement de la base dans la phase de glissement pour une structure à N DDL montée sur un système à frottement résistant par glissement (SR-F) sont données comme suit :

$$(m_b + M)(\ddot{x}_{b2} + \ddot{u}_g) + \mu(m_b + M)g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b2} - \dot{x}_{b1}) + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i = 0 \quad (33)$$

$$c_b \dot{x}_{b1} + k_b x_{b1} + \mu_1(m_b + M)g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b1}) - \mu(m_b + M)g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b2} - \dot{x}_{b1}) = 0 \quad (34)$$

En remplaçant l'équation (33) dans l'équation (34), on aura :

$$(m_b + M)(\ddot{x}_{b2} + \ddot{u}_g) + c_b \dot{x}_{b1} + k_b x_{b1} + \mu_1(m_b + M)g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b1}) + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i = 0 \quad (35)$$

Dans la phase de non glissement pour les plaques à frottement au dessus de l'isolateur, on a ( $\dot{x}_{b1} = \dot{x}_{b2}$  et  $\ddot{x}_{b1} = \ddot{x}_{b2}$ ), donc l'équation (35) devient :

$$(m_b + M)(\ddot{x}_{b1} + \ddot{u}_g) + c_b \dot{x}_{b1} + k_b x_{b1} + \mu_1(m_b + M)g \operatorname{sgn}(\dot{x}_{b1}) + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i = 0 \quad (36)$$

### II-2-7- Isolateur en pendules glissants (Friction Pendulum System) (FPS)

Ce système d'isolation constitué de rotule glissante se déplace le long de la surface sphérique concave en acier inoxydable. Le mouvement de la rotule est similaire à celui d'un mouvement oscillatoire et permet également à la structure de s'élever. Au fur et à mesure que la rotule s'élève le long de la surface sphérique concave, la rotule développe une force de résistance latérale qui est égale à l'effet combiné d'une force de frottement dynamique et d'une force de rappel de la gravité. Cela assure l'amortissement nécessaire à l'absorption de l'énergie sismique. Le modèle mathématique est donné par les figures ci-dessous (38-a et 38-b).

#### II-2-7-1- Système d'isolation en pendule glissante (FPS)

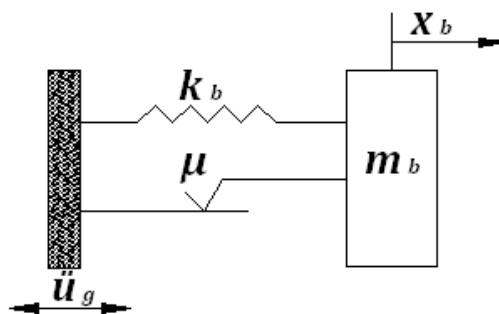


Figure (38-a) : Modèle mathématique pour un système d'isolation en pendules glissantes (FPS).

La force latérale développée dans le système d'isolation est donnée comme suit :

$$F = \frac{W}{R} x_b + \mu W \operatorname{sgn}(\dot{x}_b) \quad (37)$$

$x_b$  : Le déplacement de la base.

$R$  : Le rayon de courbure de la surface sphérique concave de glissement.

$W$  : Le poids de la structure.

$\mu$  : Le Coefficient de frottement de la surface de glissement.

Le système sous l'accélération du sol  $\ddot{u}_g$  est représenté par l'équation de mouvement suivante :

$$m_b(\ddot{x}_b + \ddot{u}_g) + F = 0 \quad (38)$$

En remplaçant l'équation (37) dans l'équation (38), on aura :

$$m_b \ddot{x}_b + \left(\frac{W}{R}\right) x_b + \mu W \operatorname{sgn}(\dot{x}_b) = -m_b \ddot{u}_g \quad (39)$$

Le rapport du poids de la structure sur le rayon de courbure de la surface de glissement  $\left(\frac{W}{R}\right)$  dans l'équation (39) représente la rigidité du système.

### II-2-7-2- Structure à N DDL montée sur un système d'isolation (FPS)

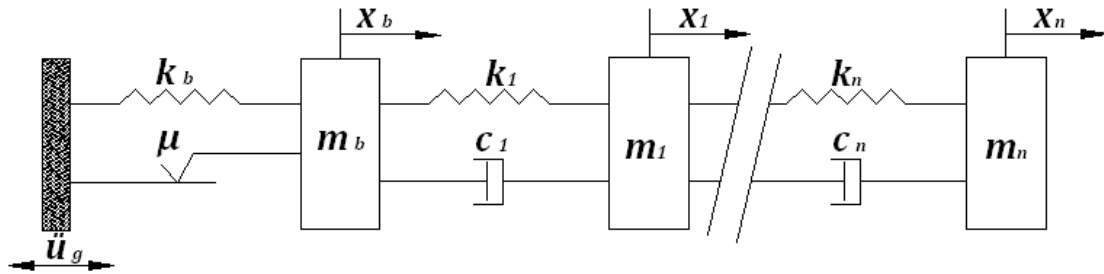


Figure (38-b): Modèle mathématique d'une structure à N DDL montée sur un système en pendule glissant (FPS)

L'équation de mouvement de la base d'une structure à N DDL sous l'accélération du sol  $\ddot{u}_g$  est donnée comme suit :

$$(m_b + M) \ddot{x}_b + \frac{W}{R} x_b + \mu W \operatorname{sgn}(\dot{x}_b) + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i = -(m_b + M) \ddot{u}_g \quad (40)$$

Avec :  $M = \sum_{i=1}^n m_i$

### II-2-8- Contrôle hybride amortisseur-actionneur de contreventement pour un seul niveau (Hybrid Damper Actuator Bracing Control - HDABC)

Sous l'accélération du sol  $\ddot{u}_g$ , les équations de mouvement qui peuvent être obtenues sont basées sur l'équilibre des forces dans le plancher et le contreventement en K (figure 39) [13].

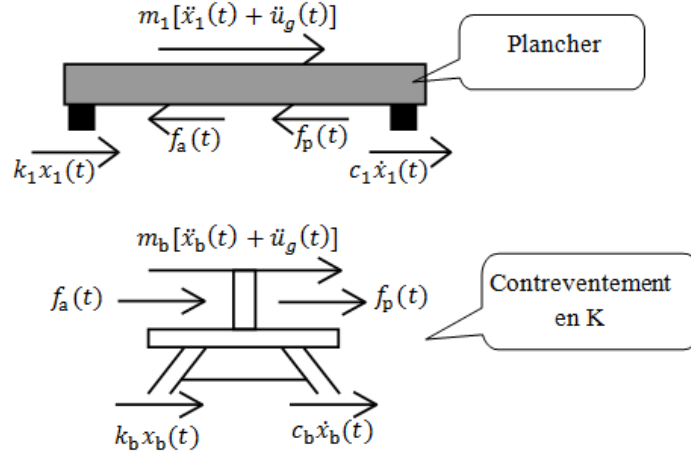


Figure 39 : les forces équilibrées dans le cas d'une structure encastree à un seul niveau.

Pour le plancher :

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 = f_a + f_p - m_1 \ddot{u}_g \quad (41)$$

Pour le contreventement:

$$m_b \ddot{x}_b + c_b \dot{x}_b + k_b x_b = -f_a - f_p - m_b \ddot{u}_g \quad (42)$$

Les équations (41) et (42) deviennent:

$$\ddot{x}_1 + 2\beta_1 \omega_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \frac{f_a}{m_1} + \left( \frac{f_p}{m_1} \right) - \ddot{u}_g \quad (43)$$

$$\ddot{x}_b + 2\beta_b \omega_b \dot{x}_b + \omega_b^2 x_b = -\frac{f_a}{m_b} - \left( \frac{f_p}{m_b} \right) - \ddot{u}_g \quad (44)$$

Où :

$x_1$  et  $x_b$  : sont respectivement les déplacements relatifs du plancher et du contreventement.

$m_1$ ,  $k_1$  et  $c_1$  : sont respectivement la masse, la rigidité et le coefficient d'amortissement pour le premier plancher.

$m_b$ ,  $k_b$  et  $c_b$  : sont respectivement la masse, la rigidité et le coefficient d'amortissement pour le système de contreventement.

$f_a$ ,  $f_p$  et  $\ddot{u}_g$  : sont respectivement la force active, la force passive et l'accélération du sol.

Les équations de mouvement pour ce système de contrôle sous forme matricielle sont données par :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f_a\} + \{f_p\} - [M]\{I\}\ddot{u}_g \quad (45)$$

Avec :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix}; [C] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_b \end{bmatrix}; [K] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_b \end{bmatrix}$$

$$\{f_a\} = \begin{Bmatrix} f_a \\ -f_a \end{Bmatrix}; \{f_p\} = \begin{Bmatrix} f_p \\ -f_p \end{Bmatrix}; \{I\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

La théorie du contrôle dans ce système est basée sur un modèle construit à partir d'un système des équations différentielles du premier ordre constituant une équation différentielle matricielle.

Pour le contrôle hybride d'une structure à un seul niveau, l'équation (45) peut être écrite en quatre équations comme suit :

$$\frac{d}{dt}x_1 = \dot{x}_1 \quad (46 - a)$$

$$\frac{d}{dt}x_b = \dot{x}_b \quad (46 - b)$$

$$\frac{d}{dt}\dot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1 - 2\beta_1 \omega_1 \dot{x}_1 + \frac{f_a}{m_1} + \left(\frac{f_p}{m_1}\right) - \ddot{u}_g \quad (46 - c)$$

$$\frac{d}{dt}\dot{x}_b = -\omega_b^2 x_b - 2\beta_b \omega_b \dot{x}_b - \frac{f_a}{m_b} - \left(\frac{f_p}{m_b}\right) - \ddot{u}_g \quad (46 - d)$$

Les équations (46-a) à (46-d) sous forme matricielle deviennent :

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_b \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & 0 & -2\beta_1 \omega_1 & 0 \\ 0 & -\omega_b^2 & 0 & -2\beta_b \omega_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_b \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ -1/m_b \end{Bmatrix} f_a + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ -1/m_b \end{Bmatrix} f_p + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \ddot{u}_g \quad (47)$$

Donc, on peut écrire le vecteur d'état qui contient les inconnus du système différentiel, défini par :  $Z = [x_1 \quad x_b \quad \dot{x}_1 \quad \dot{x}_b]^T$ .

$$\dot{Z} = [A]Z + \{B_a\}f_a + \{B_p\}f_p + \{B_r\}\ddot{u}_g \quad (48)$$

Avec :

$[A]$  : la matrice d'état.

$\{B\}$  : le vecteur d'entrée et les indices a, p et r sont correspond respectivement aux active, passive et la force sismique entrée.

### II-3- Formulation des Equations du Mouvement des structures isolées avec une analyse linéaire d'isolation sismique

La formulation des équations du mouvement pour des structures isolées par la théorie linéaire d'isolation sismique a été donnée en détail par Kelly et Naeim [18] et [24]. Cette théorie est une application directe des principes de la dynamique des structures, par conséquent ces équations permettent la détermination des propriétés modales correspondantes. Puisque la plupart des systèmes d'isolation sont intrinsèquement non linéaires, cette analyse linéaire développée par Kelly sera seulement approximative pour une telle structure isolée montée sur un système d'isolation représenté par une rigidité et amortissement équivalent.

#### II-3-1- Analyse d'une structure à deux degrés de liberté

Pour comprendre le comportement d'une structure isolée à N degrés de liberté, il est utile de considérer un modèle structural simple à deux masses (figure 40). La masse  $m_s$  est destinée pour représenter la superstructure et la masse  $m_b$  pour représenter la masse de la base au-dessus du système d'isolation linéaire. La rigidité et l'amortissement de la structure sont représentés par  $k_s$  et  $c_s$ . La rigidité et l'amortissement du système d'isolation sont représentés par  $k_b$  et  $c_b$ .

Les déplacements absolus des deux masses sont donnés par  $u_s$  et  $u_b$ , ils convient d'employer les déplacements relatifs  $v_s$  et  $v_b$ , qui représentent respectivement les deux résultats principaux, le déplacement inter étage et le déplacement du système d'isolation.

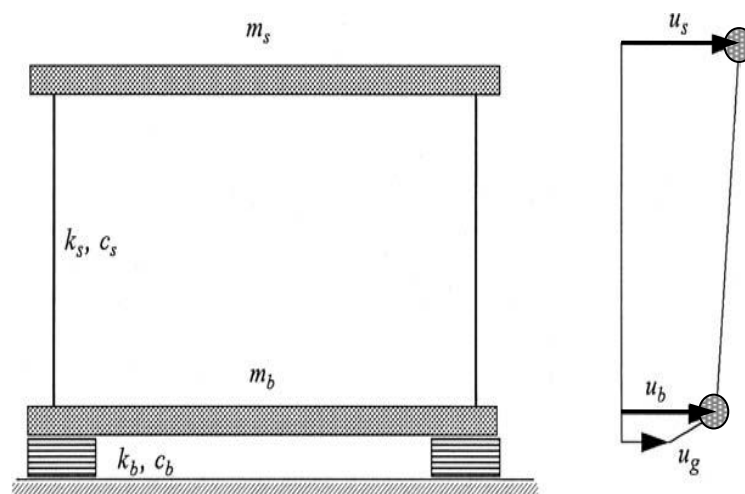


Figure 40 : Paramètres d'une structure isolée à deux degrés de libertés [18].

On a :  $v_s = u_s - u_b$  et  $v_b = u_b - u_g$

Où  $u_g$ : Le déplacement du sol.

### II-3-1-1- Equations de Mouvement

Les équations du mouvement pour une structure isolée à deux degrés de libertés en terme de déplacements absolus sont :

$$m_s \ddot{u}_s + c_s (\dot{u}_s - \dot{u}_b) + k_s (u_s - u_b) = 0 \quad (49)$$

$$m_s \ddot{u}_s + m_b \ddot{u}_b + c_b (\dot{u}_b - \dot{u}_g) + k_s (u_b - u_g) = 0 \quad (50)$$

Pour les déplacements relatifs les équations (49) et (50) deviennent :

$$m_s \ddot{v}_s + m_s \ddot{v}_b + c_s \dot{v}_s + k_s v_s = -m_s \ddot{u}_g \quad (51)$$

$$(m_s + m_b) \ddot{v}_b + m_s \ddot{v}_s + c_b \dot{v}_b + k_b v_b = -(m_s + m_b) \ddot{u}_g \quad (52)$$

### II-3-1-2- Formulation matricielle

Les équations du mouvement (51) et (52) sous forme matricielle sont données par :

$$\begin{bmatrix} M & m_s \\ m_s & m_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_b \\ \ddot{v}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & c_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_b \\ \dot{v}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_b \\ v_s \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} M & m_s \\ m_s & m_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{u}_g \quad (53)$$

Où  $M = m_s + m_b$ , (53) sous d'autre forme matricielle est donnée par :

$$[M]\{\ddot{v}\} + [C]\{\dot{v}\} + [K]\{v\} = -[M]\{r\}\ddot{u}_g \quad (54)$$

Avec :

$$[M] = \begin{bmatrix} M & m_s \\ m_s & m_s \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & c_s \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix}, \{v\} = \begin{Bmatrix} v_b \\ v_s \end{Bmatrix} \text{ et } \{r\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les fréquences de vibrations  $\omega_b$  et  $\omega_s$  sont données par :

$$\omega_b^2 = \frac{k_b}{m_s + m_b} \text{ et } \omega_s^2 = \frac{k_s}{m_s}$$

$$\text{Donc : } 2\omega_b \beta_b = \frac{c_b}{m_s + m_b} \text{ et } 2\omega_s \beta_s = \frac{c_s}{m_s}.$$

### II-3-1-3- Calcul des fréquences propres

Les fréquences propres sont déterminées par la relation suivante :

$$\text{Det} ([K] - \omega_n^2 [M]) = 0 \quad (55)$$

$$\text{Det} \left( \begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} - \omega_n^2 \begin{bmatrix} M & m_s \\ m_s & m_s \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\text{Det} \left( \begin{bmatrix} k_b - \omega_n^2 M & -\omega_n^2 m_s \\ -\omega_n^2 m_s & k_s - \omega_n^2 m_s \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Rightarrow (k_b - \omega_n^2 M)(k_s - \omega_n^2 m_s) - \omega_n^4 m_s^2 = 0$$

On suppose :

$$\gamma = \frac{m_s}{m_s + m_b} = \frac{m_s}{M} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{\omega_b^2}{\omega_s^2}, \quad \varepsilon \text{ varie entre } 10^{-1} \text{ et } 10^{-2} \quad (\omega_b \ll \omega_s).$$

Donc l'équation caractéristique pour la détermination des fréquences propres  $\omega_n$  est donnée comme suit :

$$(1 - \gamma)\omega_n^4 - (\omega_b^2 + \omega_s^2)\omega_n^2 + \omega_b^2\omega_s^2 = 0 \quad (56)$$

Après la résolution de cette équation on a :

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2(1-\gamma)} \left\{ \omega_b^2 + \omega_s^2 - \sqrt{(\omega_b^2 - \omega_s^2)^2 + 4\gamma\omega_b^2\omega_s^2} \right\} \quad (57)$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2(1-\gamma)} \left\{ \omega_b^2 + \omega_s^2 + \sqrt{(\omega_b^2 - \omega_s^2)^2 + 4\gamma\omega_b^2\omega_s^2} \right\} \quad (58)$$

La plus petite valeur de  $\omega_1$  et  $\omega_2$  représente la fréquence d'isolation translatée (The shifted isolation frequency), l'autre valeur représente la fréquence modifiée de la structure (The structural frequency modified) par la présence du système d'isolation.

Donc au premier ordre de  $\varepsilon$ , il résulte :

$$\omega_1^2 = \omega_b^2(1 - \gamma\varepsilon) \quad , \quad \omega_2^2 = \frac{\omega_s^2}{(1-\gamma)}(1 + \gamma\varepsilon) \quad (59)$$

On a  $\gamma < 1$  et  $\varepsilon$  est de l'ordre de  $10^{-2}$  donc le produit  $\gamma\varepsilon$  est très petit. Par conséquent, dans la plupart des cas on prise comme approximation les premiers termes de  $\omega_1$  et  $\omega_2$ :

$$\omega_1^2 = \omega_b^2 \quad , \quad \omega_2^2 = \frac{\omega_s^2}{(1-\gamma)} \quad (60)$$

#### II-3-1-4- Détermination des modes propres

Les modes propres de vibration de la structure sont déterminés par l'équation suivante :

$$([K] - \omega_n^2[M])\{\phi^n\} = 0 \quad (61)$$

$$\begin{bmatrix} k_b - \omega_n^2 M & -\omega_n^2 m_s \\ -\omega_n^2 m_s & k_s - \omega_n^2 m_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_b^n \\ \phi_s^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\omega_b^2 - \omega_n^2)\phi_b^n - \omega_n^2 \gamma \phi_s^n = 0 \\ -\omega_n^2 \phi_b^n + (\omega_s^2 - \omega_n^2)\phi_s^n = 0 \end{cases} \quad (62)$$

Le premier mode  $\phi^1$  est donné par :

$$\begin{cases} (\omega_b^2 - \omega_1^2)\phi_b^1 - \omega_1^2 \gamma \phi_s^1 = 0 \\ -\omega_1^2 \phi_b^1 + (\omega_s^2 - \omega_1^2)\phi_s^1 = 0 \end{cases} \quad (63)$$

En fixant  $\phi_b^1 = 1$ , la solution des équations précédentes nous donne :

$$\phi^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{Bmatrix}$$



Le deuxième mode  $\phi^2$  est donné par :

$$\begin{cases} (\omega_b^2 - \omega_2^2)\phi_b^2 - \omega_2^2\gamma\phi_s^2 = 0 \\ -\omega_2^2\phi_b^2 + (\omega_s^2 - \omega_2^2)\phi_s^2 = 0 \end{cases} \quad (64)$$

En fixant  $\phi_b^2 = 1$ , la solution des équations précédentes nous donne :

$$\phi^2 = \left\{ \frac{1}{\gamma} \left[ -1 - (1 - \gamma)\varepsilon \right] \right\}$$

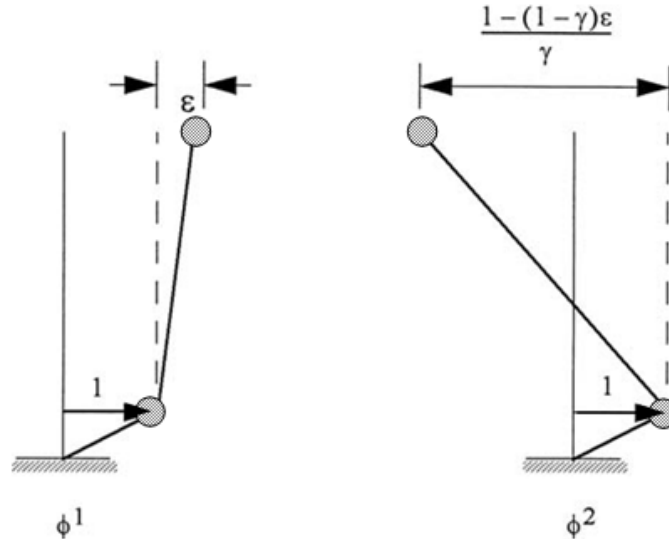


Figure 41 : La forme des modes propres de la structure isolée à deux degrés de libertés [18].

Suivant les indications de la figure 41 la structure se déplace comme un bloc presque indéformable dans le premier mode  $\phi^1$  et la modification de la fréquence est petite entre la structure et le système d'isolation. Ainsi, l'accélération horizontale induite dans la structure est approximativement constante sur toute la hauteur de la structure. Par contre, le deuxième mode  $\phi^2$  entraîne la déformation dans la structure et le système d'isolation puisque la fréquence de la structure est sensiblement augmentée par la présence d'une masse à la base. La signification pratique de ce résultat est représentée quand des valeurs d'accélération sont élevées pour le deuxième mode la structure isolée n'ont pas être accompagnées d'un grand cisaillement à la base.

### II-3-1-5- Calcul des valeurs maximales du déplacement relatif

Après que les deux modes  $\phi^1$  et  $\phi^2$  sont obtenus, les déplacements relatifs  $v_b$  et  $v_s$  peuvent être écrits comme suit :

$$\begin{cases} v_b = q_1\phi_b^1 + q_2\phi_b^2 \\ v_s = q_1\phi_s^1 + q_2\phi_s^2 \end{cases} \quad (65)$$

$q_1$  et  $q_2$  sont des coefficients modaux dépendants du temps.

On peut écrire l'équation (65) comme suit :

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_b \\ v_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_b^1 & \phi_b^2 \\ \phi_s^1 & \phi_s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (66)$$

$$\text{Avec: } v_j = \sum_{i=1}^2 \phi_j^i q_i \quad (67)$$

Remplaçant l'équation (67) dans (54), On aura :

$$[M] \sum_{i=1}^2 \phi_j^i \ddot{q}_i + [C] \sum_{i=1}^2 \phi_j^i \dot{q}_i + [K] \sum_{i=1}^2 \phi_j^i q_i = -[M] r \ddot{u}_g \quad (68)$$

Multipliant tous les termes par  $\phi_j^{iT}$ , on obtient :

$$\phi_j^{iT} [M] \sum_{i=1}^2 \phi_j^i \ddot{q}_i + \phi_j^{iT} [C] \sum_{i=1}^2 \phi_j^i \dot{q}_i + \phi_j^{iT} [K] \sum_{i=1}^2 \phi_j^i q_i = -\phi_j^{iT} [M] r \ddot{u}_g \quad (69)$$

D'après les propriétés d'orthogonalité des modes propres par rapport aux matrices de masse, d'amortissement et de rigidité, l'équation (69) peut s'écrire :

$$\phi_j^{iT} [M] \phi_j^i \ddot{q}_i + \phi_j^{iT} [C] \phi_j^i \dot{q}_i + \phi_j^{iT} [K] \phi_j^i q_i = -\phi_j^{iT} [M] r \ddot{u}_g \quad (70)$$

Divisant les deux membres de l'équation (70) par  $\phi_j^{iT} [M] \phi_j^i$ , on obtient :

$$\ddot{q}_i + \frac{\phi_j^{iT} [C] \phi_j^i}{\phi_j^{iT} [M] \phi_j^i} \dot{q}_i + \frac{\phi_j^{iT} [K] \phi_j^i}{\phi_j^{iT} [M] \phi_j^i} q_i = -\frac{\phi_j^{iT} [M] r}{\phi_j^{iT} [M] \phi_j^i} \ddot{u}_g \quad (71)$$

Dans laquelle

$$\phi_j^{iT} [M] \phi_j^i = M_i \quad (72)$$

$$\frac{\phi_j^{iT} [C] \phi_j^i}{\phi_j^{iT} [M] \phi_j^i} = 2\beta_i \omega_i \quad (73)$$

$$\frac{\phi_j^{iT} [K] \phi_j^i}{\phi_j^{iT} [M] \phi_j^i} = \omega_i^2 \quad (74)$$

$$\frac{\phi_j^{iT} [M] r}{\phi_j^{iT} [M] \phi_j^i} = L_i \quad (75)$$

L'équation (71) peut s'écrire :

$$\ddot{q}_i + 2\beta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -L_i \ddot{u}_g \quad (76)$$

Donc on a :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\beta_1 \omega_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = -L_1 \ddot{u}_g \\ \ddot{q}_2 + 2\beta_2 \omega_2 \dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = -L_2 \ddot{u}_g \end{cases} \quad (77)$$

D'après (72) on aura :

$$M_1 = \phi_j^{1T} [M] \phi_j^1 = (1, \varepsilon) \begin{bmatrix} M & m_s \\ m_s & m_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{Bmatrix} = M + 2\varepsilon m_s + m_s \varepsilon^2$$

Au premier ordre de  $\varepsilon$ , il résulte :

$$M_1 = M(1 + 2\gamma\varepsilon) \quad (78)$$

De la même manière, on a :

$$M_2 = \phi_j^{2T} [M] \phi_j^2 = \left(1, \frac{-[1 - (1 - \gamma)\varepsilon]}{\gamma}\right) \begin{bmatrix} M & m_s \\ m_s & m_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\gamma}[1 - (1 - \gamma)\varepsilon] \end{Bmatrix}$$

$$M_2 = M - 2\frac{m_s}{\gamma}[1 - (1 - \gamma)\varepsilon] + \frac{m_s}{\gamma^2}[1 - (1 - \gamma)\varepsilon]^2$$

Donc au premier ordre de  $\varepsilon$ , il résulte :

$$M_2 = M \frac{(1 - \gamma)[1 - 2(1 - \gamma)\varepsilon]}{\gamma} \quad (79)$$

D'après l'équation (75) les facteurs de participation modale pour le premier et le deuxième mode sont donnés comme suit :

$$L_1 = \frac{\phi_j^{1T} [M] r}{\phi_j^{1T} [M] \phi_j^1} = \frac{(1, \varepsilon) \begin{bmatrix} M & m_s \\ m_s & m_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}}{(1, \varepsilon) \begin{bmatrix} M & m_s \\ m_s & m_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{Bmatrix}} = \frac{(1 + \gamma\varepsilon)}{(1 + 2\gamma\varepsilon)}$$

Au premier ordre de  $\varepsilon$ , il résulte :

$$L_1 = (1 - \gamma\varepsilon) \quad (80)$$

$$L_2 = \frac{\phi_j^{2T} [M] r}{\phi_j^{2T} [M] \phi_j^2} = \frac{(1, \frac{-[1 - (1 - \gamma)\varepsilon]}{\gamma}) \begin{bmatrix} M & m_s \\ m_s & m_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}}{(1, \frac{-[1 - (1 - \gamma)\varepsilon]}{\gamma}) \begin{bmatrix} M & m_s \\ m_s & m_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\gamma}[1 - (1 - \gamma)\varepsilon] \end{Bmatrix}}$$

$$= \frac{(1 - \gamma)\varepsilon}{(1 - \gamma)[1 - 2(1 - \gamma)\varepsilon]}$$

Au premier ordre de  $\varepsilon$ , il résulte :

$$L_2 = \gamma\varepsilon \quad (81)$$

Dans laquelle ( $\gamma < 1$  et  $\varepsilon$  varie entre  $10^{-1}$  et  $10^{-2}$ ), le facteur de participation modale pour le deuxième mode  $L_2$  qui entraîne la très petite déformation dans la structure, ce résultat montre l'efficacité du système d'isolation.

D'autre façon, puisque le facteur de participation pour le deuxième mode est très petit, son mode est presque orthogonal à l'entrée du séisme caractérisée par  $r\ddot{u}_g$ , c.-à-d.

On a  $\phi_j^{1T} = (1, \varepsilon)$  et  $r^T = (1, 0)$  avec :  $r \approx \phi_j^1$

D'après les propriétés d'orthogonalité, on obtient :

$$\phi_j^{NT} [M] \phi_j^1 = 0 \quad \text{Pour: } N \neq 1$$

Donc :  $\phi_j^{N^T} [M] r \approx 0$  Pour:  $N \neq 1$

Pour ce résultat, même si le séisme possède une forte énergie à la fréquence du deuxième mode, elle ne sera pas transmise à la superstructure. Alors le système d'isolation réduit l'énergie induite par cette propriété d'orthogonalité.

D'après l'équation (73) les relations entre les amortissements modaux pour la structure et le système d'isolation sont données par :

$$2\omega_1\beta_1 = \frac{\phi_j^{1^T} [C] \phi_j^1}{\phi_j^{1^T} [M] \phi_j^1} = 2\omega_b\beta_b(1 - 2\gamma\varepsilon)$$

$$2\omega_2\beta_2 = \frac{\phi_j^{2^T} [C] \phi_j^2}{\phi_j^{2^T} [M] \phi_j^2} = \frac{1}{1 - \gamma} (2\omega_s\beta_s + 2\gamma\omega_b\beta_b)$$

On a :

$$\beta_1 = \beta_b(1 - \frac{3}{2}\gamma\varepsilon) \quad (82)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{(1-\gamma)^{1/2}} (\beta_s + \gamma\beta_b\varepsilon^{1/2}) \quad (83)$$

Donc l'équation (83) montre que l'amortissement structural est augmenté avec un ordre de  $\varepsilon^{1/2}$  par rapport à l'amortissement du système d'isolation comme représenté par le produit  $\beta_b\varepsilon^{1/2}$ , cette augmentation est importante si  $\beta_s$  est très faible. Ceci montre que l'augmentation de l'amortissement du système d'isolation peut donner une augmentation importante à l'amortissement structural.

Si l'histoire de l'accélération du sol  $\ddot{u}_g(t)$  est connue, les composantes modales  $q_1$  et  $q_2$  dans l'équation (77) sont données par :

$$q_1 = -\frac{L_1}{\omega_1} \int_0^t \ddot{u}_g(t - \tau) e^{-\omega_1\beta_1\tau} \sin \omega_1\tau d\tau \quad (84)$$

$$q_2 = -\frac{L_2}{\omega_2} \int_0^t \ddot{u}_g(t - \tau) e^{-\omega_2\beta_2\tau} \sin \omega_2\tau d\tau \quad (85)$$

Les valeurs maximales de  $q_1$  et  $q_2$  peuvent être données par :

$$|q_1|_{max} = L_1 S_D(\omega_1, \beta_1) \quad (86)$$

$$|q_2|_{max} = L_2 S_D(\omega_2, \beta_2) \quad (87)$$

Où  $S_D(\omega, \beta)$  est le spectre de déplacement pour le mouvement du sol  $\ddot{u}_g(t)$ , à la fréquence  $\omega$  et au facteur d'amortissement  $\beta$ .

Plusieurs méthodes ont été proposées pour estimer les valeurs maximales probables du déplacement relatif du système d'isolation et de la structure. La plus populaire de ces

méthodes et la plus simple, est de calculer la moyenne quadratique des réponses modales que nous appelons méthode de combinaison quadratique (Square Root of the Sum of the Squares ou SRSS), donc les déplacements relatifs obtenus par cette méthode sont donnés comme suit :

$$|v_s|_{max} = \sqrt{(\phi_s^1 |q_1|_{max})^2 + (\phi_s^2 |q_2|_{max})^2} \quad (88)$$

$$|v_b|_{max} = \sqrt{(\phi_b^1 |q_1|_{max})^2 + (\phi_b^2 |q_2|_{max})^2} \quad (89)$$

Substituant les résultats obtenus de  $\phi^1, \phi^2, L_1$  et  $L_2$  dans les équations (88) et (89) :

$$\text{Avec : } \phi^1 = \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \right\}, \quad \phi^2 = \left\{ \frac{1}{\frac{-[1-(1-\gamma)\varepsilon]}{\gamma}} \right\}, \quad L_1 = (1 - \gamma\varepsilon), \quad L_2 = \gamma\varepsilon.$$

On aura :

$$\begin{aligned} |v_b|_{max} &= \sqrt{[L_1 S_D(\omega_1, \beta_1)]^2 + [L_2 S_D(\omega_2, \beta_2)]^2} \\ &= \sqrt{(1 - \gamma\varepsilon)^2 [S_D(\omega_1, \beta_1)]^2 + \gamma^2 \varepsilon^2 [S_D(\omega_2, \beta_2)]^2} \end{aligned} \quad (90)$$

et

$$\begin{aligned} |v_s|_{max} &= \sqrt{[\varepsilon L_1 S_D(\omega_1, \beta_1)]^2 + \left[ \left( \frac{[1 - (1 - \gamma)\varepsilon]}{\gamma} \right) L_2 S_D(\omega_2, \beta_2) \right]^2} \\ |v_s|_{max} &= \sqrt{\varepsilon^2 (1 - \gamma\varepsilon)^2 [S_D(\omega_1, \beta_1)]^2 + \frac{[1 - (1 - \gamma)\varepsilon]^2}{\gamma^2} \gamma^2 \varepsilon^2 [S_D(\omega_2, \beta_2)]^2} \\ &= \sqrt{\varepsilon^2 (1 - \gamma\varepsilon)^2 [S_D(\omega_1, \beta_1)]^2 + [1 - (1 - \gamma)\varepsilon]^2 \varepsilon^2 [S_D(\omega_2, \beta_2)]^2} \end{aligned} \quad (91)$$

Beaucoup de spectres de conception ont des spectres de vitesse approximativement constante dans l'intervalle des fréquences moyennes. Pour cela, les valeurs de  $S_A(\omega, \beta)$  pour différentes fréquences  $\omega$  et en négligeant des variations dues à l'amortissement  $\beta$ , pour de tels spectres de conception soit :

$$\frac{S_A^2(\omega_1, \beta_1)}{\omega_1^2} = \omega_1^2 S_D^2 = S_V^2 \quad \text{et} \quad \frac{S_A^2(\omega_2, \beta_2)}{\omega_2^2} = \omega_2^2 S_D^2 = S_V^2$$

Avec :

$$\omega_1^2 = \omega_b^2 (1 - \gamma\varepsilon) \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \frac{\omega_s^2}{(1-\gamma)} (1 + \gamma\varepsilon)$$

Les valeurs maximales du déplacement relatif  $|v_b|_{max}$  et  $|v_s|_{max}$  en fonction du pseudo-spectre de vitesse sont données par :

$$|v_s|_{max} = \varepsilon \frac{S_V}{\omega_b} \sqrt{1 + \varepsilon \frac{[1-(1-\gamma)\varepsilon]^2}{(1+\gamma\varepsilon)/(1-\gamma)}} \quad (92)$$

$$|v_b|_{max} = \frac{S_V}{\omega_b} \sqrt{1 + \frac{\gamma\varepsilon^2}{(1+\gamma\varepsilon)/(1-\gamma)}} \quad (93)$$

Ainsi que si nous prenons seulement le premier terme, nous obtenons :

$$|v_s|_{max} = \varepsilon \frac{S_V}{\omega_b} = \varepsilon S_D(\omega_b, \beta_b) \quad (94)$$

$$|v_b|_{max} = \frac{S_V}{\omega_b} = S_D(\omega_b, \beta_b) \quad (95)$$

Les deux équations (94) et (95) et pour un spectre de vitesse constante où le déplacement relatif dans la structure (le déplacement inter étage) est d'ordre  $\varepsilon$  comparable avec le déplacement du système d'isolation.

### II-3-2- Analyse d'une structure à N degrés de liberté

L'analyse qui a été faite dans la théorie linéaire approximative pour la structure isolée à deux degrés de liberté peut être étendue à des structures à N degrés de liberté.

Pour une structure classique (encastrée) à la base à N DDL soumise à l'accélération du sol  $\ddot{u}_g$ , l'équation du mouvement sous la forme matricielle est donnée comme suit :

$$[M_0]\ddot{u} + [C_0]\dot{u} + [K_0]u = -[M_0]r \ddot{u}_g \quad (96)$$

Avec :  $u$  : vecteur de déplacement par rapport au sol.

$r$  : vecteur d'influence.

$[M_0]$ ,  $[C_0]$  et  $[K_0]$  : représentent respectivement la matrice de masse, la matrice d'amortissement et la matrice de rigidité d'ordre (N x N).

#### II-3-2-1- Equation de mouvement

Le modèle structural à N DDL est superposé à sa base par un système d'isolation avec une masse  $m_b$  (la masse du plancher au-dessus du système d'isolation), une rigidité  $k_b$  et un amortissement  $c_b$ .

L'équation de la base représentée par la masse  $m_b$  :

$$m_b \ddot{u}_b + m_1 \ddot{u}_1 + m_2 \ddot{u}_2 + \dots + m_N \ddot{u}_N + c_b (\dot{u}_b - \dot{u}_g) + k_b (u_b - u_g) = 0 \quad (97)$$

Nous avons :

$$u_b = u_g + v_b, \quad u_1 = u_b + v_1, \quad u_2 = u_b + v_2, \quad u_N = u_b + v_N$$

L'équation (97) de la masse  $m_b$  devient :

$$(m_b + m_1 + \dots + m_N) \ddot{v}_b + (m_1 \ddot{v}_1 + \dots + m_N \ddot{v}_N) + c_b \dot{v}_b + k_b v_b = -(m_b + m_1 + \dots + m_N) \ddot{u}_g \quad (98)$$

Equation de la masse  $m_i$ :

$$m_i \ddot{u}_i + c_i (\dot{u}_i - \dot{u}_b) + k_i (u_i - u_b) = 0$$

$$m_i (\ddot{u}_g + \ddot{v}_b + \ddot{v}_i) + c_i \dot{v}_i + k_i v_i = 0$$

$$\text{Donc : } m_i \ddot{v}_b + m_i \ddot{v}_i + c_i \dot{v}_i + k_i v_i = -m_i \ddot{u}_g \quad (99)$$

$$\text{Avec : } c_i = \sum_{j=1}^N c_{ji} \quad \text{et} \quad k_i = \sum_{j=1}^N k_{ji}.$$

### II-3-2-2- Les équations du mouvement du système combiné

Les équations du mouvement du système combiné (système d'isolation avec la structure à N DDL) sous forme matricielle sont données par :

$$[M^*]\{\dot{V}^*\} + [C^*]\{\dot{V}^*\} + [K^*]\{V^*\} = -[M^*]r^* \ddot{u}_g \quad (100)$$

Avec :

$$[M^*] = \begin{bmatrix} m_b + M & r^T [M_0] \\ [M_0]r & [M_0] \end{bmatrix}, [C^*] = \begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & [C_0] \end{bmatrix}, [K^*] = \begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & [K_0] \end{bmatrix}$$

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_N, \{V^*\} = \begin{Bmatrix} v_b \\ v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{Bmatrix}, r^* = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, r = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

On pose :  $\{V^*\} = \begin{Bmatrix} v_b \\ v \end{Bmatrix}$ , avec  $v^T = (v_1 \dots v_N)$ .

L'équation (52) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} m_b + M & r^T [M_0] \\ [M_0]r & [M_0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_b \\ \ddot{v} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & [C_0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_b \\ \dot{v} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & [K_0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_b \\ v \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_b + M & r^T [M_0] \\ [M_0]r & [M_0] \end{bmatrix} r^* \ddot{u}_g$$

$$\begin{cases} (m_b + M) \ddot{v}_b + r^T [M_0] \ddot{v} + c_b \dot{v}_b + k_b v_b = -(m_b + M) \ddot{u}_g & (101) \\ [M_0]r \ddot{v}_b + [M_0] \ddot{v} + [C_0] \dot{v} + [K_0]v = -[M_0]r \ddot{u}_g & (102) \end{cases}$$

### II-3-2-3- Déterminations des fréquences du système combiné

Les modes propres d'une structure encastree sont supposés connus et ils sont notés par  $\phi^i$ , où  $i=1, \dots, N$ . Le déplacement de chaque degré de liberté de la structure peut être représenté en fonction de ces modes propres :

$$v = \sum_{i=1}^N q_i \phi^i$$

Les fréquences naturelles  $\omega_N$  d'une structure encastree sont déterminées par :

$$\text{Det}([K_0] - \omega_N^2 [M_0]) = 0$$

En remplaçant  $v$  dans les équations (101) et (102), on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N r^T [M_0] \ddot{q}_i \phi^i + (m_b + M) \ddot{v}_b + c_b \dot{v}_b + k_b v_b = -(m_b + M) \ddot{u}_g \\ \sum_{i=1}^N [M_0] \ddot{q}_i \phi^i + \sum_{i=1}^N [C_0] \dot{q}_i \phi^i + \sum_{i=1}^N [K_0] q_i \phi^i = -[M_0] r (\ddot{u}_g + \ddot{v}_b) \end{array} \right. \quad (103)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N r^T [M_0] \ddot{q}_i \phi^i + (m_b + M) \ddot{v}_b + c_b \dot{v}_b + k_b v_b = -(m_b + M) \ddot{u}_g \\ \sum_{i=1}^N [M_0] \ddot{q}_i \phi^i + \sum_{i=1}^N [C_0] \dot{q}_i \phi^i + \sum_{i=1}^N [K_0] q_i \phi^i = -[M_0] r (\ddot{u}_g + \ddot{v}_b) \end{array} \right. \quad (104)$$

En multipliant les deux membres de l'équation (104) par  $\phi^{iT}$  et en simplifiant cette équation suivant les propriétés d'orthogonalité des modes de vibration, on obtient :

$$\ddot{q}_i + \frac{\phi^{iT} [C_0] \phi^i}{\phi^{iT} [M_0] \phi^i} \dot{q}_i + \frac{\phi^{iT} [K_0] \phi^i}{\phi^{iT} [M_0] \phi^i} q_i = -\frac{\phi^{iT} [M_0] r}{\phi^{iT} [M_0] \phi^i} (\ddot{u}_g + \ddot{v}_b) \quad (105)$$

Dans laquelle :

$$\frac{\phi^{iT} [C_0] \phi^i}{\phi^{iT} [M_0] \phi^i} = 2\beta_i \omega_i, \quad \frac{\phi^{iT} [K_0] \phi^i}{\phi^{iT} [M_0] \phi^i} = \omega_i^2, \quad \frac{\phi^{iT} [M_0] r}{\phi^{iT} [M_0] \phi^i} = L_i.$$

Donc, l'équation (105) peut s'écrire :

$$\ddot{q}_i + 2\beta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -L_i (\ddot{u}_g + \ddot{v}_b) \quad (106)$$

De même l'équation (103) devient :

$$\sum_{i=1}^N \frac{L_i \phi^{iT} [M_0] \phi^i}{(m_b + M)} \ddot{q}_i + \ddot{v}_b + \frac{c_b}{(m_b + M)} \dot{v}_b + \frac{k_b}{(m_b + M)} v_b = -\ddot{u}_g \quad (107)$$

Dans laquelle :

$$\frac{c_b}{(m_b + M)} = 2\beta_b \omega_b, \quad \frac{k_b}{(m_b + M)} = \omega_b^2 \quad \text{et} \quad M_i = \phi^{iT} [M_0] \phi^i$$

Donc, l'équation (107) peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^N \frac{L_i M_i}{(m_b + M)} \ddot{q}_i + \ddot{v}_b + 2\beta_b \omega_b \dot{v}_b + \omega_b^2 v_b = -\ddot{u}_g \quad (108)$$

Si le système combiné oscille avec l'un de ses modes propres (avec une fréquence  $\omega$ ), alors  $v_b$  et chaque coordonnée modale de la structure encastree,  $q_i$ , vont osciller avec la même fréquence, c-à-d :

$$v_b = \bar{v}_b e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad q_i = \bar{q}_i e^{i\omega t}$$

Les modes propres classiques sont déterminés par les équations du système libre non amorti suivantes :

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i + L_i \ddot{v}_b = 0 \quad (109)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{L_i M_i}{(m_b + M)} \ddot{q}_i + \ddot{v}_b + \omega_b^2 v_b = 0 \quad (110)$$

Remplaçant  $v_b$  et  $q_i$  dans les équations (109) et (110), on obtient :

$$(\omega_i^2 - \omega^2) \bar{q}_i - \omega^2 L_i \bar{v}_b = 0 \quad (111)$$

$$\Rightarrow \bar{q}_i = \frac{\omega^2 L_i}{(\omega_i^2 - \omega^2)} \bar{v}_b \quad (112)$$

$$-\omega^2 \sum_{i=1}^N \frac{L_i M_i}{(m_b + M)} \bar{q}_i + (\omega_b^2 - \omega^2) \bar{v}_b = 0 \quad (113)$$



Remplaçant  $\bar{q}_i$  dans les équations (113), on obtient :

$$-\omega^2 \sum_{i=1}^N \frac{L_i M_i}{(m_b + M)} \frac{\omega^2 L_i \bar{v}_b}{(\omega_i^2 - \omega^2)} + (\omega_b^2 - \omega^2) \bar{v}_b = 0$$

Pour des valeurs non nulles de  $\bar{v}_b$  :

$$\bar{v}_b \neq 0 \Rightarrow \omega^2 \sum_{i=1}^N \frac{L_i M_i}{(m_b + M)} \frac{\omega^2 L_i \bar{v}_b}{(\omega_i^2 - \omega^2)} = (\omega_b^2 - \omega^2)$$

Donc on peut écrire l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^N \frac{L_i^2 M_i}{(m_b + M)} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega_i^2}{\omega^2}\right)} = \left(1 - \frac{\omega_b^2}{\omega^2}\right) \quad (114)$$

Cette équation caractéristique nous permet de déterminer les fréquences propres pour  $N + 1$  modes du système combinés. Si on reconnaît  $L_i^2 M_i$  comme étant la masse effective au  $i^{eme}$  mode de la structure encastree et par analogie avec le modèle à deux degrés de liberté on a :

$$\gamma_i = \frac{L_i^2 M_i}{m_b + M} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N \gamma_i = \frac{M}{m_b + M}$$

La résolution de l'équation caractéristique (114) permettant la détermination des fréquences  $\omega_0^*$ ,  $\omega_1^*$ , ...,  $\omega_N^*$  du système combiné.

#### II-3-2-4- Déterminations des modes propres du système combiné

En substituant les fréquences du système combiné dans l'équation (112), on aura :

$$\bar{q}_i = \frac{\omega_j^{*2} L_i}{(\omega_i^2 - \omega_j^{*2})} \bar{v}_b \quad i = 1, \dots, N \text{ et } j = 0, 1, \dots, N \quad (115)$$

Où  $\omega_0^*$  correspond à  $\omega_b^*$  (la fréquence d'isolation translattée).

Si les valeurs de  $\bar{q}_i$  à l'indice  $j$  sont notées par  $q_i^j$  et pour  $\bar{v}_b = 1$ , les modes propres du système combiné sont donnés par le vecteur résultant  $\psi^j$  comme suit :

$$\psi^j = \{1, \sum_{i=1}^N q_i^j \phi_1^i, \sum_{i=1}^N q_i^j \phi_2^i, \dots, \dots, \sum_{i=1}^N q_i^j \phi_N^i\} \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (116)$$

$$\text{Avec :} \quad q_i^j = \bar{q}_i(\omega_j^*) = \frac{\omega_j^{*2} L_i}{(\omega_i^2 - \omega_j^{*2})}$$

Donc, dans la plupart des cas seulement le premier mode doit être inclus dans les structures isolées, car les modes supérieurs, n'ont aucun rôle dans la réponse dynamique ou dans la conception de la structure et système d'isolation.

### II-3-2-5- Estimation des déplacements des structures isolées à N DDL

On a les équations du mouvement (51) et (52) de la première analyse de la structure isolée à 2 DDL.

$$m_s \ddot{v}_s + m_s \ddot{v}_b + c_s \dot{v}_s + k_s v_s = -m_s \ddot{u}_g \quad (51)$$

$$(m_s + m_b) \ddot{v}_b + m_s \ddot{v}_s + c_b \dot{v}_b + k_b v_b = -(m_s + m_b) \ddot{u}_g \quad (52)$$

Les équations (51) et (52) peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\ddot{v}_s + \ddot{v}_b + 2\omega_s \beta_s \dot{v}_s + \omega_s^2 v_s = -\ddot{u}_g \quad (117)$$

$$\ddot{v}_b + \gamma \ddot{v}_s + 2\omega_b \beta_b \dot{v}_b + \omega_b^2 v_b = -\ddot{u}_g \quad (118)$$

Soit les équations (117) et (118) correspondent aux équations (106) et (108) dans l'analyse d'une structure à N DDL. Dans la plupart des cas le premier mode doit être inclus dans la conception des structures isolées et systèmes d'isolation si bien que on remplace  $v_b$

par  $L_1 v_b$ ,  $\ddot{u}_g$  par  $L_1 \ddot{u}_g$  et  $\gamma = \frac{m_s}{M}$  par  $\gamma_1 = \frac{L_1^2 M_1}{m_b + M}$ .

Donc, les équations (117) et (118) deviennent :

$$L_1 \ddot{v}_b + \ddot{q}_1 + 2\omega_1 \beta_1 \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = -L_1 \ddot{u}_g \quad (119)$$

$$\frac{L_1^2 M_1}{m_b + M} \ddot{q}_1 + L_1 \ddot{v}_b + 2\omega_b \beta_b L_1 \dot{v}_b + \omega_b^2 L_1 v_b = -L_1 \ddot{u}_g \quad (120)$$

Dans la solution de ces équations (119) et (120),  $q_1$  est donné par la solution de  $v_s$  correspondant à l'analyse de la structure isolée à 2 DDL avec le premier mode.

La valeur maximale du déplacement relatif à la base pour une analyse de 2 DDL est représentée comme suit :

$$|v_b|_{max} = \frac{1}{\omega_b^2} S_A(\omega_b, \beta_b) \quad (121)$$

La valeur maximale du déplacement relatif à la base est donnée comme suit :

$$|L_1 v_b|_{max} = \frac{1}{\omega_b^2} L_1 S_A(\omega_b, \beta_b) \quad (122)$$

Le vecteur du déplacement relatif aux niveaux des étages de la structure est donné par :

$$V = q_1 \phi^1 \quad (123)$$

$$\text{Avec : } |q_1|_{max} = \sqrt{\varepsilon^2 L_1^2 \frac{S_A^2(\omega_b^*, \beta_b^*)}{\omega_b^{*4}} + \varepsilon^2 L_1^2 \frac{S_A^2(\omega_s^*, \beta_s^*)}{\omega_s^{*4}}} \quad (124)$$

**II-4) Conclusion**

Pour mieux comprendre l'efficacité du système d'isolation sismique des formulations concernant les équations du mouvement pour les deux structures isolées à 2 DDL et N DDL ont été faites avec la théorie linéaire d'isolation développée par Kelly, la simplicité de cette théorie approximative montre le rôle important du système d'isolation qui consiste à découpler le mouvement du sol du mouvement de la structure dans le but de réduire les forces sismiques transmises à cette dernière.

Les formulations obtenues nous permettent de déduire que la structure isolée se déplace comme un bloc presque indéformable et les accélérations induites sont approximativement constantes sur toute la hauteur de la structure. Par conséquent, les déplacements relatifs et les accélérations sont réduits pour tous les niveaux de la structure, ceci est traduit par la participation essentielle du premier mode dans les structures isolées, et par les modes supérieurs qui n'ont aucun rôle dans la réponse dynamique ou dans la conception de la structure et du système d'isolation. Donc seulement le premier mode doit être inclus.