

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider-Biskra  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département : Génie électrique

Réf: .....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم الهندسة الكهربائية  
المرجع: .....

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Magister en : Automatique**

**Option : Commande et identification des systèmes dynamiques**

**Contribution à la commande et au guidage des véhicules autonomes**

Présenté par :

**Hassani Soumia**

Soutenu Publiquement le.....

Devant le jury composé de :

Pr. Abdelnacer Titaouine	Président	Université de Biskra
Pr. Abdelkrim Allag	Rapporteur	Université de Biskra
Dr. Mohammed Boumehraz	Examineur	Université de Biskra
Pr. Sourî Mohamed Mimoun	Examineur	Université de Biskra

## ***Remerciements***

*A l'occasion de la présentation de cette thèse, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.*

*Je remercie le professeur Abdelkrim Allag mon encadreur ainsi que le président du jury le professeur Abdelnacer Titaouine et le maître de conférence Mohammed Boumehraz et le professeur Sourî Mohammed Mimoune membres du jury.*

*Je remercie également tous les membres de ma famille et particulièrement mon père qui m'a été d'un grand secours durant la préparation de cette thèse.*

## Résumé

Cette thèse est basée sur la combinaison de la méthode SDRE (équation de Riccati dépendante de l'état) avec les propriétés analytiques de la satisfaction à base du CLF (la fonction de commande de Lyapunov). Cette technique est appliquée au guidage de missiles contre les cibles manœuvrables commandés aérodynamiquement afin de produire une loi de guidage de performance élevée, optimale inverse et ayant la capturabilité globale. Il a été prouvé que quelles que soient les conditions de lancement initiales, le missile peut intercepter les cibles manœuvrables grâce à la capturabilité globale. Suite à la propriété d'optimalité inverse basée sur l'approche de satisfaction CLF, la loi de guidage qui en résulte peut aussi réduire de façon optimale une fonction intégrale du coût dépendant de l'énergie de la commande.

Finallement, le filtre de Kalman unscented (UKF) a été introduit comme une alternative au filtre de Kalman étendu (EKF) pour l'inférence probabiliste gaussienne approximative. Des extensions implementationnelles telles que le cas du bruit additif et la version du filtre de Kalman unscented de la racine carrée de Cholesky (SR-UKF) ont été appliquées dans le problème de guidage.

## Mots clés :

- Guidage.
- Système non linéaire affine.
- Équation de Riccati dépendante de l'état (SDRE).
- Condition nécessaire du SDRE.
- Optimalité.
- Fonction de commande de Lyapunov CLF.
- Satisfaction.
- Optimalité inverse.
- Filtre de Kalman unscented.

## ملخص الأطروحة

تعمل هذه الأطروحة علي المزج بين طريقة التحكم على أساس معادلة ريكاتي المرتبطة بالحالة و بين الخصائص التحليلية لمنهج الترضية على أساس دالة ليبونوف للتحكم. يتم تطبيق هذه التقنية لتوجيه صواريخ متحكم فيها ضد أهداف مناورة لإنتاج قانون توجيه ذو كفاءة عالية, الأمثل عكسيا و لديه خاصية الالتقاط الشامل. وقد تم إثبات أن مهما كانت الشروط الابتدائية للإقلاع, يمكن للصاروخ اعتراض الأهداف المناورة بفضل خاصية الالتقاط الشامل. نتيجة لخاصية المثالية العكسية لمنهج الترضية على أساس دالة ليبونوف للتحكم, قانون التوجيه الناتج عن المزج بين الطريقتين يخفض دالة تكامل التكلفة و التي هي بدلالة طاقة المدخل بصورة مثالية (القيمة الدنيا).

و أخيرا, تم إدخال مرشح كلمان أنسنتد كبديل لمرشح كلمان المدد في ميدان الاحتمال التقريبي لجوس. إضافات تطبيقية تتمثل في حالة الضجيج الإضافي و صيغة مرشح كلمان أنسنتد باستعمال الجذر التربيعي تم تطبيقها في مسألة التوجيه.

### الكلمات المفتاحية :

- التوجيه.
- نضام غير خطي مثل.
- معادلة ريكاتي المرتبطة بالحالة.
- الشرط الضروري لتقنية معادلة ريكاتي المرتبطة بالحالة.
- المثالية.
- دالة التحكم لليبونوف.
- الترضية.
- المثالية العكسية.
- مرشح كلمان أنسنتد.

## Liste des symboles et abréviations

<i>Symbole/ Abréviation</i>	<i>Signification</i>
$X_E, Y_E, Z_E$	Axes du système de coordonnées de terre-fixe
$X_B, Y_B, Z_B$	Axes du système de coordonnées de corps
$\phi, \theta, \psi$	Angles d'Euler sur les axes inertiels $X_i, Y_i$ et $Z_i$
$u, v, w$	Vitesses de missile sur les axes du corps $X_B, Y_B$ et $Z_B$
$p, q, r$	Vitesses angulaires de missile sur les axes du corps $X_B, Y_B$ et $Z_B$
$F_x, F_y, F_z$	Forces appliquées sur les axes du corps $X_B, Y_B$ et $Z_B$
$M_x, M_y, M_z$	Moments appliqués sur les axes du corps $X_B, Y_B$ et $Z_B$
$I_x, I_y, I_z$	Moments d'inertie de roulis, de tangage et de lacet respectivement
$h_{eng}$	Moment angulaire du moteur
$\vec{F}$	Somme des forces appliquées
$m$	Masse totale de l'aéronef
$\vec{V}$	Vitesse de l'aéronef
$\vec{M}$	Somme des couples appliqués
$\vec{H}$	Moment angulaire
$\vec{\omega}$	Vitesse angulaire
$\vec{W}$	Vecteur du poids de l'aéronef
$\vec{R}$	Force aérodynamique
$\vec{T}$	Vecteur de la poussée
$F_T$	Force de propulsion
$X, Y, Z$	Composantes de la force aérodynamique sur les axes du corps $X_B, Y_B$ et $Z_B$
$g$	Constante de gravité
$L, M, N$	Moment aérodynamique de roulis, de tangage et de lacet respectivement
$x_E, y_E, z_E$	Position par rapport au système de coordonnées de terre-fixe sur les axes $X_E, Y_E$ et $Z_E$
$q_i$	Pression dynamique
$\rho$	Densité de l'air
$\rho_0$	Densité de l'air au niveau de la mer
$h$	Altitude de missile
$\alpha$	Angle d'attaque

$\beta$	Angle de dérapage
$M$	Nombre de Mach
$v_S$	Vitesse du son
$k$	Rapport de la chaleur spécifique de l'air
$R$	Constante universelle des gaz
$T$	Température
$T_0$	Température au niveau de la mer
$S$	Aire de section du corps de missile
$d_M$	Diamètre de missile
$C_x, C_Y, C_Z$	Coefficients des forces aérodynamiques sur les axes du corps $X_B, Y_B$ et $Z_B$
$C_L, C_M, C_N$	Coefficients des moments aérodynamiques sur les axes du corps $X_B, Y_B$ et $Z_B$
$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$	Angles d'ailettes de commande
$\omega_0$	Pulsation propre de l'actionneur
$\xi$	Facteur d'amortissement de l'actionneur
$x$	Vecteur d'état de système
$u$	Vecteur de commande de système
$f$	Fonction de dynamique de système
$P$	Solution de l'équation de Riccati
$\mathcal{H}$	Fonction Hamiltonienne
$n$	Dimension du vecteur d'état
$\alpha_i$	Composants du paramètre vectoriel de la factorisation du système $\alpha$
$\alpha_{il}$	Coefficients des polynômes des composants $\alpha_i$
$\lambda_{\min}\{Q\}$	Valeur propre minimale de matrice $Q$
$\lambda_{\max}\{Q\}$	Valeur propre maximale de matrice $Q$
$\angle\{.,.\}$	Angle entre deux vecteurs
$\langle.,.\rangle$	Produit intérieur
$\ \cdot\ _{2,W}$	Norme pondérée du 2
$V(x)$	Fonction de commande de Lyapunov
$p_s(u, x)$	Fonction de selectabilité
$p_r(u, x)$	Fonction de rejectabilité
$b(x)$	Indice de sélectivité
$S(x)$	Ensemble des commandes de satisfaction
$m_1, m_2$	Marges de stabilité
$S_R(x)$	Ensemble des commandes de satisfaction robuste
$d$	Perturbation
$\ell\gamma$	Transformation de Legendre-Fenchel

$B(\mathbb{R}^m)$	Boule d'unité
$S_V$	Ensemble des commandes de stabilisation selon la fonction de Lyapunov $V$
$N(m, P)$	Densité de probabilité gaussienne de moyenne $m$ et de covariance $P$
$p(x y)$	Densité de probabilité d'une variable (ou vecteur) aléatoire $X$ ( $p_X(x)$ ) conditionnellement à une variable (ou vecteur) aléatoire $Y$ ( $p_Y(y)$ )
$y_k$	Mesure à l'instant $k$
$X_i$	Point sigma de rang $i$ (transformation unscented)
$\bar{x}$	Valeur moyenne de la variable aléatoire $x$
$W_i$	Pondération associée au point $X_i$ (transformation unscented)
$P_{xx}$	Matrice de covariance pour la variable aléatoire $x$
$v_k$	Bruit d'un processus gaussien
$n_k$	Bruit de la mesure
$R_v$	Covariance du bruit de processus
$R_n$	Covariance du bruit de mesure
$P_{k/k}$	Covariance des erreurs à l'instant $k$
$\mathbf{x}_{i,k k-1}$	Vecteur d'état du sigma-point ( $i$ )
$y_{i,k k-1}$	Mesure prédite pour le sigma-point ( $i$ )
$W_{(m)}^{(i)}$	Poids du sigma-point ( $i$ ) pour le calcul de la moyenne
$W_{(c)}^{(i)}$	Poids du sigma-point ( $i$ ) pour le calcul de la covariance
$\hat{x}_k^-$	Etat prédit à l'instant $k$
$P_{x_k}^-$	Covariance des erreurs prédite à l'instant $k$
$P_{x_k y_k}$	Matrice de cross-covariance des variables aléatoires $x$ et $y$
$K_k$	Gain de Kalman à l'instant $k$
$\hat{x}_k$	Vecteur $x$ estimé à l'instant $k$
$P_{x_k}$	Covariance des erreurs
$S_{x_k}$	Facteur de Cholesky de la covariance d'état à l'instant $k$
$S_x^-$	Facteur de Cholesky de la covariance d'état prédit
LOS	Ligne de vision (line of sight)
ECS	Système de coordonnées de terre-fixe (earth-fixed coordinate system)
BCS	Système de coordonnées de corps (body coordinate system)
DOF	Degrés de liberté
NED	Nord-Est-Bas
LQR	Régulateur linéaire quadratique
SDRE	Equation de Riccati dépendante de l'état
NQR	Régulateur quadratique non linéaire

SDC	Forme du coefficient dépendant de l'état (state dependent coefficient form)
ISS	Stabilité entrée-état (Input to State Stability)
ISS-CLF	Fonction de commande de Lyapunov stabilisante entrée-état (input to state stability control Lyapunov function)
CLF	Fonction de commande de Lyapunov (control Lyapunov function)
ISS <sub>V</sub>	Stabilité entrée-état selon la fonction de Lyapunov V
SVD	Décomposition en valeurs singulières (singular value decomposition)
HJI	Hamilton- Jacobi-Isaacs
EKF	Filtre de Kalman étendu
UKF	Filtre de Kalman unscented
UT	Transformation unscented
RMSE	Erreur moyenne quadratique

# Sommaire

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre I : Etat de l'art</b>	
<b>I.1. Introduction</b> .....	4
<b>I.2. Architecture de mobilité d'un véhicule automatisé</b> .....	4
<b>I.3. Sous-système de missile</b> .....	6
I.3.1. Navigation .....	6
I.3.2. Guidage .....	7
I.3.3. Auto-pilot .....	7
I.3.4. Contrôle de missile .....	8
I.3.4.1. Aérodynamique .....	8
I.3.4.2. Forces de réactions d'arèneuf .....	8
<b>I.4. Techniques de guidage des missiles</b> .....	8
I.4.1. Commande de guidage de line of sight .....	9
I.4.2. Guidage par beam riding .....	9
I.4.3. Autoguidage .....	10
I.4.3.1. Méthodes d'autoguidage conventionnel .....	11
I.4.3.1.1. Guidage de poursuite .....	11
I.4.3.1.2. Guidage de navigation proportionnelle .....	12
I.4.3.1.3. Guidage prédictif .....	13
I.4.3.2. Méthodes d'autoguidage basé sur la théorie de la commande optimale .....	13
I.4.3.3. Méthodes d'autoguidage intégré .....	14
<b>I.5. Techniques de commande des missiles</b> .....	14
I.5.1. Méthodes de commande classique .....	15
I.5.2. Méthodes de commande moderne .....	15
I.5.3. Méthodes de commande robuste .....	16
I.5.3.1. Méthodes de commande basée sur le théorème de Lyapunov .....	16
I.5.3.1.1. Commande de backstepping .....	16
I.5.3.1.2. Commande en mode glissant .....	17
I.5.3.2. Méthodes de commande basée sur la norme $H_\infty$ .....	17
I.5.4. Méthodes de commande intelligente .....	18
I.5.4.1. Méthodes de commande à base de réseau de neurones .....	18
I.5.4.2. Méthodes de commande à base la logique floue .....	19
<b>I.6. Conclusion</b> .....	19

## CHAPTER II : Modèle non linéaire de missile à 6-DOF

<b>II.1. Introduction</b> .....	20
<b>II.2. Définitions des systèmes de coordonnées</b> .....	20
II.2.1. Système de coordonnées de terre-fixe.....	20
II.2.2. Système de coordonnées de corps.....	20
II.2.3. Transformation du système de coordonnées de la terre fixe à système de coordonnées de corps.....	21
<b>II.3. Équations générale de mouvement</b> .....	21
II.3.1. Modèle dynamique.....	23
II.3.1.1. Dynamique de translation.....	24
II.3.1.2. Dynamique de rotation.....	25
II.3.2. Modèle cinématique.....	26
II.3.3. Modèle aérodynamique de missile.....	28
<b>II.4. Dynamique de l'actionneur</b> .....	33
<b>II.5. Conclusion</b> .....	33

## Chapitre III : Commandes non linéaires via les techniques SDRE

<b>III.1. Introduction</b> .....	35
<b>III.2. Régulation non linéaire via la méthode SDRE</b> .....	35
III.2.1. Simplification de la condition nécessaire de l'optimalité.....	41
III.2.2. Algorithme de la solution numérique de l'optimalité.....	44
III.2.3. Stabilité globale.....	46
III.2.4. Robustesse.....	47
III.2.5. Exemples illustratives pour la régulation non linéaire.....	48
<b>III.3. Conclusion</b> .....	58

## Chapitre IV : Commandes non linéaires via la satisfaction à base CLF

<b>IV.1. Introduction</b> .....	59
<b>IV.2. Commandes de satisfaction à base de CLF</b> .....	59
IV.2.1. Fonctions de commande de Lyapunov.....	60
IV.2.2. Satisfaction.....	62
IV.2.3. Commandes de satisfaction.....	70
IV.2.4. Robustesse aux perturbations d'entrée.....	72
IV.2.5. Optimalité inverse.....	76
<b>IV.3. Stabilisation entrée-état</b> .....	80

IV.3.1. Stabilité entrée-état et ISS-CLFs.....	80
IV.3.2. Commandes de satisfaction-ISS.....	83
IV.3.3. Robustesse aux perturbations d'entrée.....	88
IV.3.4. Optimalité inverse.....	90
<b>IV.4. Conclusion.....</b>	<b>95</b>

## Chapitre V : Stabilité assurée via la satisfaction

<b>V.1. Introduction.....</b>	<b>96</b>
<b>V.2. Structure de l'ensemble de satisfaction.....</b>	<b>97</b>
<b>V.3. Approche de satisfaction comme une formule globale.....</b>	<b>98</b>
<b>V.4. Structure de l'ensemble de satisfaction robuste.....</b>	<b>101</b>
<b>V.5. Projection sur un ensemble de satisfaction.....</b>	<b>105</b>
V.5.1. Optimisation locale à base SDRE.....	107
<b>V.6. Exemples illustratifs.....</b>	<b>108</b>
V.6.1. Commande de l'attitude du véhicule spatial par la satisfaction à base du SDRE.....	108
V.6.2. Exploitation l'espace nul de $V_x^T g$ .....	110
<b>V.7. Application du guidage de missile via SDRE et satisfaction combinées.....</b>	<b>112</b>
V.7.1. Cinématique de missile.....	112
V.7.1.1. Équations du mouvement.....	113
V.7.2. Simulation et interprétation.....	116
V.7.2.1. Résultats de simulation.....	117
<b>V.8. Conclusion.....</b>	<b>121</b>

## Chapitre VI : Filtre de Kalman unscented

<b>VI.1. Introduction.....</b>	<b>123</b>
<b>VI.2. Filtre de Kalman via la transformation unscented.....</b>	<b>124</b>
VI.2.1. Filtre de Kalman unscented.....	124
VI.2.2. Transformation unscented UT et choix du sigma points.....	125
VI.2.3. Transformation scaled-unscented.....	126
VI.2.4. Modèle d'estimation récursive UKF.....	127
<b>VI.3. Variation d'implémentation.....</b>	<b>129</b>
VI.3.1. Formes du bruit additif.....	129
VI.3.2. Formes de la racine carrée.....	131
<b>VI.4. Suivi de véhicule de rentrée.....</b>	<b>136</b>
<b>VI.5. Conclusion.....</b>	<b>142</b>

<b>Conclusion générale</b> .....	144
<b>Annexe</b> .....	146
<b>Bibliographie</b> .....	149

## Liste des figures

Figure I.1 : Architecture de mobilité classique d'un véhicule automatisé.....	5
Figure I.2 : Sous-systèmes de missile.....	6
Figure I.3 : Fonctions de l'auto-pilote.....	7
Figure I.5 : Commande de guidage de line of sight.....	9
Figure I.6 : Guidage par beam rider.....	10
Figure I.7 : Guidage de poursuite de vitesse.....	12
Figure I.8 : Guidage de navigation proportionnelle.....	13
Figure II.1 : Angle d'attaque et angle de dérapage.....	29
Figure III.1 : Exemple de Freeman et Kokotovic.....	50
Figure III.2 : Trajectoires d'état et des commandes du système non holonome du Heisenberg.....	51
Figure III.3 : Commande durement limitée.....	52
Figure III.4 : Trajectoires optimale et suboptimale d'état.....	54
Figure III.5 : Trajectoires optimale et suboptimale de la commande.....	55
Figure III.6 : Condition nécessaire de l'optimalité dans le temps.....	55
Figure III.7 : Paramètre vectoriel optimal de la factorisation SDC $\alpha$ .....	55
Figure III.8 : Trajectoires optimale et suboptimale d'état.....	56
Figure III.9 : Trajectoires optimale et suboptimale de la commande.....	56
Figure III.10 : Condition nécessaire de l'optimalité dans le temps.....	57
Figure III.11 : Paramètre vectoriel optimal de la factorisation SDC $\alpha$ .....	57
Figure IV-1 : Fonctions de la selectabilité et de la rejectabilité en fonction de $u$ , pour $x$ donné, et l'ensemble de satisfaction résultant.....	64

---

Figure V.1 : Espace de commande à un état et un temps fixes.....	100
Figure V.2 : Espace de commande à un état et un temps fixes.....	104
Figure V.3 : Espace de commande à un état et un temps fixes.....	105
Figure V.4 : Commande augmentée du SDRE du véhicule spatial.....	110
Figure V.5 : Évolution d'état sous $u_1$ et $u_2$ .....	112
Figure V.6 : Géométrie d'interception en 3-D.....	113
Figure V.7 : Guidage du missile par la commande de régulation SDRE.....	118
Figure V.8 : Guidage du missile par la commande de satisfaction.....	119
Figure V.9 : Guidage du missile par la commande SDRE augmentée.....	120
Figure VI.1 : Estimation d'état pour le problème du véhicule de rentrée en utilisant le filtre de Kalman unscented et étendu.....	141

## **Liste des tableaux**

Tableau II.1 : Paramètres du missile.....	22
Tableau VI.1 : Valeurs du RMSE pour le problème du véhicule de rentrée.....	141

## **Introduction Générale**

Dans cette thèse, nous proposons des lois de commande non linéaire pour les systèmes non linéaires affines en commande, au guidage de missiles contre des cibles manœuvrables commandés aérodynamiquement. Les lois de guidage dans cette application sont définies dans le système de coordonnées de line of sight LOS (ligne de vision).

Les exigences fondamentales concernant la loi de guidage dans cette thèse sont la performance élevée, et la garantie de la capturabilité globale dans le sens où, dans toutes les conditions de lancement initiales, le missile peut intercepter toutes les cibles manœuvrables.

Deux méthodes pour les problèmes de commande non linéaire sont étudiées dans cette thèse, la méthode de régulation non linéaire à base de l'équation de Riccati dépendante de l'état (SDRE) et l'approche de la satisfaction à base de la fonction de commande de Lyapunov (CLF). En utilisant la technique du SDRE nous résolvons le problème de guidage à travers une équation de Riccati qui dépend de l'état, en transformant les équations de mouvement dans une structure en forme linéaire, cette approche nous permet d'utiliser la méthode de commande optimale linéaire telle que la méthode LQR pour la synthèse des systèmes de commande non linéaires. La méthode semble bien fonctionner dans les applications mais des preuves théoriques rigoureuses manquent dans ce domaine à part dans certain cas qui sont mentionnés dans la thèse.

En utilisant l'approche de la satisfaction à base du CLF, nous dérivons une loi de guidage non linéaire qui fournit toujours l'état au point d'équilibre. Sur la base de l'existence d'une CLF, l'approche de la satisfaction à base du CLF génère une loi de commande de rétro-action qui stabilise globalement et asymptotiquement le système. La loi proposée permet à l'état du missile de s'approcher du point d'équilibre dans le sens de Lyapunov. Par conséquent, la loi proposée a capturabilité globale en ce sens que, dans toutes les conditions de lancement initiales, le missile peut intercepter toutes les cibles manœuvrables.

Parce que cette approche a la propriété de l'optimalité inverse, la loi de guidage non linéaire proposée peut également minimiser de façon optimale le coût intégral de l'énergie de commande et une fonction d'état pondérée qui dépend de la CLF (la fonction de commande de Lyapunov).

Finalement, la combinaison de la commande SDRE avec l'approche de la satisfaction à base du CLF garantit la stabilité analytique. Essentiellement, la commande SDRE est projetée ponctuellement sur l'ensemble de satisfaction, pour produire les lois de commande optimales

inverse à base de Lyapunov de haute performance, c'est qui nous permet d'assurer la capturabilité globale avec une minimisation d'une fonction du coût pour l'application de guidage et la conservation de la performance de la méthode SDRE.

La simulation de l'application de guidage de l'approche SDRE combinée avec la satisfaction sera prévue en conservant la performance de la stratégie SDRE avec les autres propriétés analytiques de garanties. En outre nombreux exemples seront traités en vue de fournir une preuve des concepts proposés.

## **Organisation de la Thèse**

Cette thèse a été organisée comme suit :

**Chapter I** fournit une introduction au véhicule automatisé et son architecture de mobilité. Il présente également les différents sous-systèmes de missile, avec les études de la commande et du guidage dans la littérature.

**Chapter II** introduit le modèle mathématique de missile en utilisant 12 équations non linéaires (6 cinématiques et 6 dynamiques) pour une représentation à 6 DOF. Finalement, les équations du modèle aérodynamique seront déterminées.

**Chapter III** traite des méthodologies de conception, d'optimalité, de suboptimalité et des propriétés de la stabilité et de la robustesse de régulateur non linéaire SDRE pour les systèmes affines en commande d'une manière plus systématique. En plus des exemples sont fournis en illustrant l'efficacité de cette méthode.

**Chapter IV** présente une paramétrisation des lois de commande basées sur CLF qui permet la conception de contrôleurs à haute performance tout en garantissant la stabilité, les marges de gain robuste, et l'optimalité inverse. Cette paramétrisation est étendue à des systèmes aux perturbations via la notion de stabilité entrée-état et CLF entrée-état.

**Chapter V** présente une interprétation graphique des contrôleurs non linéaires à base du CLF qui aidera à la compréhension de la stabilité de Lyapunov et permet de visualiser la signification des marges de stabilité et la propriété d'être une commande optimale inverse fondée sur la théorie de Lyapunov. La relation entre autre des approches basées sur la CLF, la formule de Sontag, la commande de min-norme de Freeman et Kokotovic est expliquée dans ce contexte. Une méthode de combinaison de la satisfaction à base CLF et autres techniques est proposée pour obtenir des lois de

commande qui sont stables et de haute performance. Des applications sur le système linéaire et nonlinéaire sont traitées pour illustrer les concepts de ce chapitre.

**Chapter VI** introduit le filtre de Kalman unscented (UKF) en montrant comment il est motivé et obtenu. Ensuite la dérivation du filtre de Kalman unscented de la racine carée de Cholesky est effectuée, ainsi que l'application de ce filtre.

A la fin de la thèse on a terminé par une conclusion générale.

---

## **CHAPITRE I:**

# **Etat de l'art**

---

## I.1. Introduction

La conception des véhicules automatisés, ou robots mobiles est un domaine de recherche en pleine expansion et très large. Elles sont utilisés dans l'industrie (comme moyen de transport, d'inspection, ou d'opération), l'agriculture, le domaine scientifique (dans l'exploration de l'espace), et militaire... etc. La conception mécanique, les systèmes de vision et de localisation, la planification ainsi que la commande de ces véhicules, ont suscité de nombreux travaux. Ce système (le véhicule) est un système en générale intrinsèquement non linéaire de par sa cinématique et ses caractéristiques dynamiques (actionneurs, moteur thermique). La commande d'un tel système est donc un problème qui, pour être résolu de façon satisfaisante, doit prendre ces non linéarités en considération.

Pour intervenir dans des milieux dangereux, pollués, impropres à la vie humaine, ou pour remplacer l'homme dans l'exécution de tâches répétitives, l'utilisation de véhicules automatisés se généralise. Un véhicule automatisé est un véhicule capable d'exécuter sa tâche sans opérateur humain à bord.

Un véhicule autonome est un véhicule automatisé susceptible de remplir sa tâche sans intervention aucune d'un opérateur humain, même à distance. Pour de nombreuses applications industrielles, il n'est pas encore envisageable, pour des raisons de sécurité et d'efficacité, de laisser un véhicule automatisé évoluer en autonomie complète dans un environnement peu structuré.

## I.2. Architecture de mobilité d'un véhicule automatisé

Un véhicule automatisé remplit le plus souvent d'autres tâches qu'un simple déplacement. Par exemple, un véhicule forestier doit non seulement pouvoir se déplacer en forêt, mais aussi abattre les arbres; un véhicule minier doit à la fois se déplacer dans les carrières, et effectuer des forages. Nous nous intéressons ici uniquement à la tâche de déplacement, et à donc l'architecture du système qui organise et commande le déplacement d'un véhicule automatisé, ou architecture de mobilité.

La chaîne fonctionnelle d'un véhicule automatisé, représentée sur la figure I.1, fait traditionnellement intervenir trois modules de commande organisés hiérarchiquement [1]:

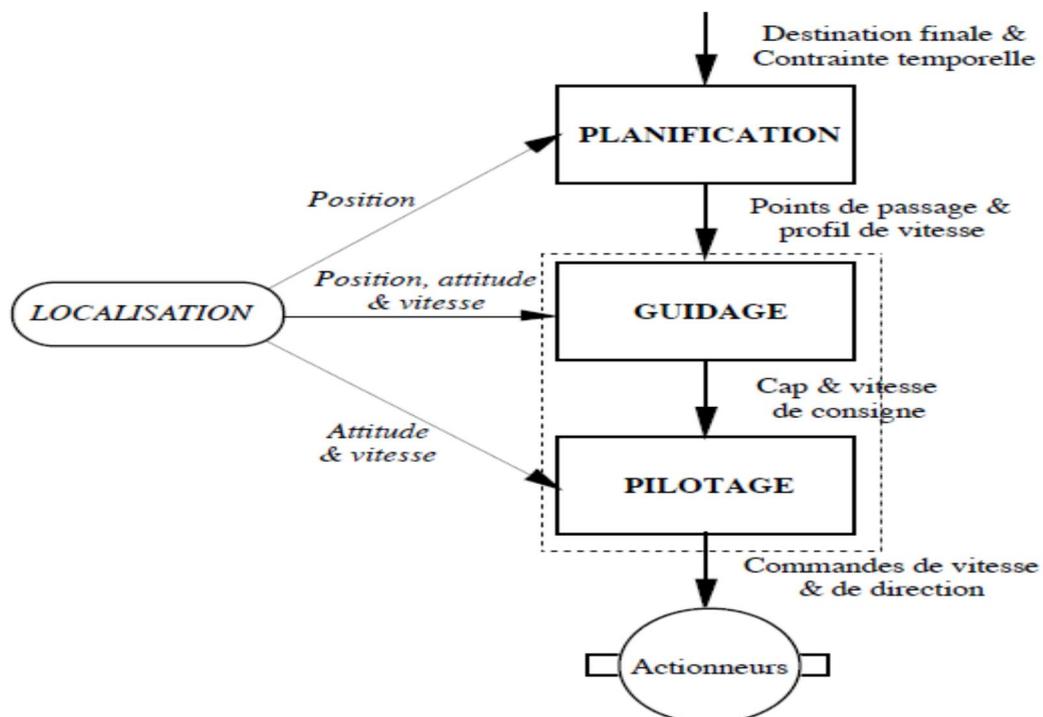
- le module de **planification** calcule un itinéraire local sous forme de points de passage à partir d'une destination définie par un opérateur humain (déplacement associé à la tâche du véhicule). Il calcule également une vitesse moyenne ou un profil de vitesse de consigne associé à cet itinéraire, en fonction du délai spécifié par l'opérateur pour la réalisation de la tâche.

- le module de **guidage** calcule les consignes de vitesse et de cap qui permettent au centre de gravité du véhicule (ou à tout autre point du véhicule, appelé point de commande) de suivre une trajectoire interpolant les points calculés par le module de planification.

- le module de **pilotage** a pour fonction d'asservir la vitesse et le cap du point de commande sur les valeurs de consigne déterminées par le module de guidage, c'est-à-dire d'élaborer les commandes qu'il faut délivrer aux actionneurs de la vitesse et de la direction.

Un module de localisation, qui ne fait pas à proprement parler partie de l'architecture de mobilité, est nécessairement présent à bord du véhicule. Il fournit aux différents étages hiérarchiques les informations de position, d'attitude (cap, roulis et tangage) et de vitesse du véhicule.

L'architecture de mobilité est représentée sur la figure I.1.



**Figure I.1:** Architecture de mobilité classique d'un véhicule automatisé

- l'**autonomie** est effective, si toutes les fonctions de planification, de guidage et de pilotage sont assurées par le véhicule. En présence d'obstacles (localisés par un système de détection

d'obstacles), le module de planification embarqué redéfinira lui-même les points de passage et les contraintes à respecter, en s'appuyant sur des cartes numérisées du terrain où il évolue.

Nous nous intéressons dans cette thèse au missile comme un véhicule aérien autonome.

L'histoire des vols habités est relativement courte. En l'espace de cent ans, nous avons vu des innovations technologiques extraordinaires. Des efforts de recherche et des investissements colossaux ont été fournis pour arriver au niveau technologique atteint de nos jours. Depuis le temps où les frères Wright ont réalisé un vol propulsé en 1903, jusqu'au jour où le major Charles E. Yeager a franchi la barrière du son en 1947, les drones qui survolent l'Afghanistan aujourd'hui, l'histoire de l'aviation est pleine d'événements qui expriment courage humain et ingéniosité : Le courage à faire face à l'inconnu et les risques et les dangers auxquels ces pionniers étaient confrontés pour l'avancement des sciences. L'ingéniosité pour concevoir et développer les technologies nécessaires pour réaliser ces merveilles des temps modernes.

### I.3. Sous-systèmes de missile

Un missile se compose de plusieurs sous-systèmes. Les sous-systèmes les plus étroitement liés sont présentés dans les diagrammes des figures I.2 et I.3, qui décrivent la fonction principale de chaque sous-système et lister les principaux éléments de chacun. Une brève description de chaque sous-système va suivre [2]:

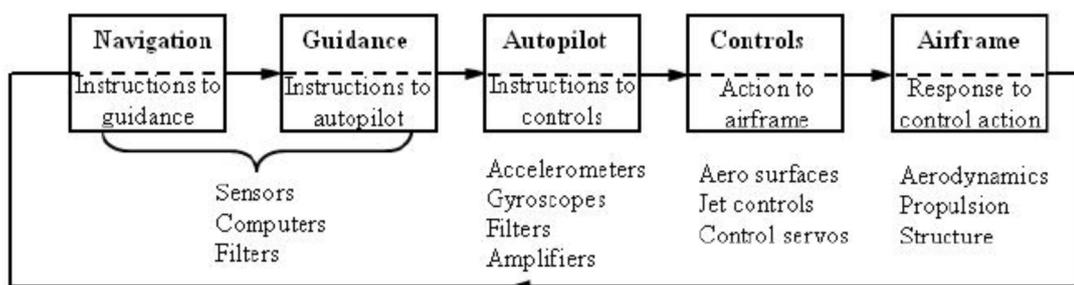


Figure I.2 : Sous-systèmes de missile

#### I.3.1. Navigation

Lorsque le missile est lancé, sa position, l'attitude, la vitesse, l'accélération et la rotation doivent être connues. Le sous-système de navigation actualise ces variables au cours du vol. Ceci est réalisé en utilisant les données des capteurs et les algorithmes de navigation de strap down. Les variables sont fournis aux sous-systèmes de guidage.

### I.3.2. Guidage

Le système de guidage calcule l'erreur entre les cours du missile actuels et les cours souhaités, calcule les corrections nécessaires pour réduire ou annuler l'erreur selon une loi de guidage choisie, et donne des commandes à l'auto-pilote pour activer les contrôles pour réaliser les corrections. Ces commandes peuvent être des accélérations latérales, vitesses angulaires, etc. Le système de navigation contient des capteurs qui fournissent des informations sur les trajectoires réelles et désirées du missile, des filtres de bruit et un ordinateur associés au système de guidage pour traiter les informations sur les commandes à l'auto-pilote.

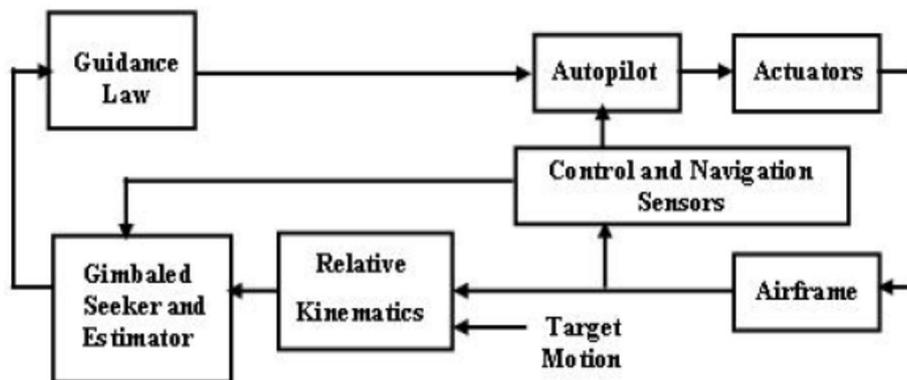


Figure I.3 : Fonctions de l'auto-pilote

### I.3.3. Auto-pilote

L'auto-pilote reçoit des commandes de l'ordinateur de guidage et les traite en commandes pour les contrôles tels que des déflexions ou les taux de déflexions des surfaces de contrôle ou des contrôles de jet à travers l'action de servo-mécanismes. Pour assurer la déviation à une vitesse souhaitée, les moteurs de servomécanisme doivent composer avec l'inertie du dispositif de commande et le couple autour de son axe. Puisque l'auto-pilote va convertir des ordres de guidage d'accélération ou de vitesse angulaire en ordres de commande, il doit avoir un moyen de déterminer si les accélérations et les vitesses angulaires fournies par la déflexion des contrôles répondent aux commandes de guidage. Donc ce sous-système aura des accéléromètres pour mesurer les accélérations obtenues et des gyroscopes pour mesurer les positions ou les taux angulaires. Selon l'endroit où ces instruments sont placés, l'auto-pilote peut avoir à apporter des corrections aux lectures de l'instrument pour obtenir les véritables accélérations du centre de missile de gravité (CG) et de véritables vitesses angulaires autour de ses axes principaux. Classiquement, l'auto-pilote de missile comprend trois

auto-pilotes indépendants, un pour chaque direction latérale, à savoir tangage et lacet, et l'un pour le roulis.

### **I.3.4. Contrôle de missile**

Le choix du système de contrôle dépendra de l'utilisation du missile, la trajectoire de vol et la hauteur à laquelle il va fonctionner. Il existe deux principaux types de systèmes de contrôle utilisés:

#### **I.3.4.1. Aérodynamique**

Le changement de l'aérodynamique de trajectoire de vol est obtenu par l'utilisation d'une aile à l'incidence de la direction du vol. L'aile est fixée à incidence d'une des deux façons suivantes:

- En utilisant une aile rotative.
- En utilisant une aile fixe, mais une surface de contrôle mobile pour mettre l'ensemble du missile en incidence. Les surfaces de contrôle peuvent être à l'avant ou à l'arrière du missile.

#### **I. 3.4.2. Forces de réactions d'aéronef**

Le changement de trajectoire de vol par les forces de réaction de jet est réalisé d'une des deux façons suivantes:

- En modifiant le sens de poussée de l'unité de propulsion, soit en faisant pivoter l'unité entière, ou par déviation du courant de gaz par des ailettes ou des dispositifs similaires.
- Par l'utilisation d'unités de réaction de jet auxiliaires séparées.

## **I.4. Techniques de guidage des missiles**

Différentes lois de guidage ont été développées et utilisées selon les capacités de l'intercepteur et la cible et le scénario de l'engagement.

Selon la voie de poursuite des cibles, les méthodes directes de guidage peuvent être divisées en trois groupes majeurs [3], [4], [5]:

- Commande de guidage de line of sight
- Guidage par beamriding
- Autoguidage

### I.4.1. Commande de guidage de line of sight

La commande de guidage de line of sight (CLOS) est l'un des deux méthodes de guidage de line of sight (LOS) [6], [7], [8]. Dans le guidage de CLOS, une liaison montante est utilisée pour transmettre des signaux de guidage d'un contrôleur au sol au missile [3], [9], [8]. En d'autres termes, les unités de guidage et de commande du missile sont placées à l'extérieur du missile, c.-à-d., au sol. Selon le type de transmission, les désignations suivantes peuvent être effectuées [3]:

- Guidage par fil
- Guidage par radio
- Guidage par radar

La représentation illustrative de guidage de CLOS est affichée dans la figure I.5.

Bien que la méthode de CLOS puisse être utilisée dans les scénarios à courte portée d'engagement de missile-cible, sa réussite diminue graduellement à mesure que le missile et la cible s'éloignent des traqueurs.

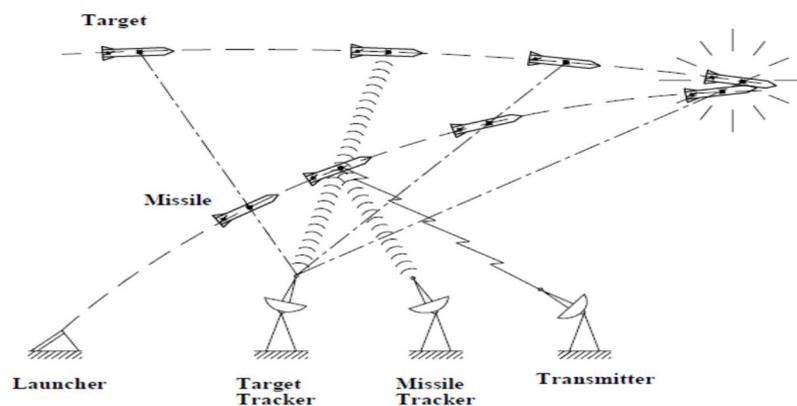


Figure I.5 : Commande de guidage de line of sight

### I.4.2. Guidage par beamriding

L'autre méthode de guidage de line of sight est le guidage par beamriding (BRG). Dans l'approche du BRG, le missile est configuré avec un capteur et un système optique d'abord pour détecter et puis pour suivre le rayonnement du traqueur de cible à la cible [8]. Dans le BRG, l'objectif est de faire voler le missile le long d'un rayonnement de radar ou d'une onde laser qui est dirigé continuellement sur la cible afin de garder le missile sur la ligne de rayonnement dans toute sa trajectoire [3], [6], [7], [8]. Si le rayonnement est toujours sur la cible et le missile est toujours sur

lerayonnement, une interception sera inévitable [6]. Cependant, la capacité du BRG est limitée aux situations d'engagement de missile-cible à courte portée [8]. Un autre désavantage de BRG est que les erreurs d'angle de poursuite dans l'rayonnement de guidage résultent les erreurs de position qui sont directement proportionnelles à la portée entre le traqueur de cible et la cible [4]. La représentation illustrative du BRG est affichée dans la figure I.6.

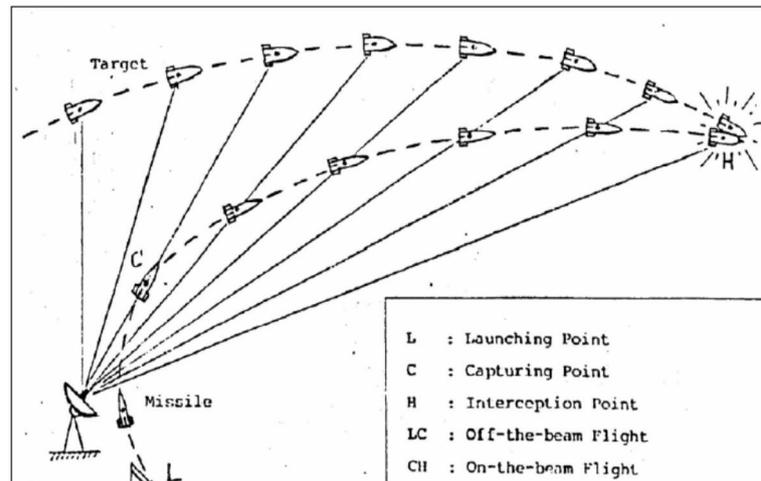


Figure I.6 : Guidage par beam rider[3]

### I.4.3. Autoguidage

L'autoguidage est défini comme une méthode par laquelle un missile s'oriente vers une cible au moyen d'une unité de guidage autonome qui produit un mouvement commandé basé sur certaines caractéristiques de la cible [3]. Simplement, un missile à tête chercheuse travaille sur les signaux qui lui parviennent de la cible fonctionnant sur des signaux atteignant de la cible [4]. Un missile autoguidé est plus sophistiqué comparé aux missiles guidés par le guidage de CLOS ou le BRG, car un missile autoguidé porte tout l'équipement supplémentaire exigé par l'unité de guidage, l'unité de mesure d'auto-mouvement et l'unité de poursuite des cibles. Cependant, un missile autoguidé est beaucoup plus commode à utiliser, parce qu'il exige un minimum d'équipement sur le site de lancement et après le lancement on peut simplement l'oublier puisqu'il accomplit sa fonction seule [3]. Un autre avantage de l'autoguidage sur le guidage de CLOS et le BRG est que la précision de mesure du mouvement relatif de la cible par rapport au missile augmente contrairement aux autres techniques quand le missile se rapproche à la cible [3], [10].

En l'autoguidage, l'unité de suivi de cible à bord nécessite un certain genre de méthode par lequel la cible devient détectable. Les quatre méthodes possibles peuvent être énumérées comme indiqué ci-dessous [3]:

- Autoguidage actif.
- Autoguidage semiactif.
- Autoguidage passif.
- Autoguidage par correspondance à la carte.

### **I.4.3.1. Méthodes d'autoguidage conventionnel**

Les lois de guidage sous ce titre sont celles qui remontent aux tous premiers missiles guidés développés en 1940 et 1950. Les raisons qu'ils ont eu tant de succès sont principalement dues à leur simplicité de mise en œuvre ainsi que leur performance robuste[7]. Nous illustrons les trois stratégies d'autoguidage conventionnelles couramment utilisées [3]:

- Guidage de poursuite
- Guidage de navigation proportionnelle
- Guidage prédictif

#### **I.4.3.1.1.Guidage de poursuite**

Le guidage de poursuite est destiné à annuler l'angle LOS (ligne de vision) relatif entre le missile et la cible.Cependant, les lois de guidage de poursuite ont une capacité limitée d'engager des cibles manœuvrables[8].

Le guidage de poursuite a deux variantes fondamentales[8]:

- Guidage de poursuite d'attitude ou de poursuite du corps
- Guidage de poursuite de vitesse

Dans l'approche de poursuite du corps, l'axe longitudinal ou l'axe du missile est dirigé à la cible.Afin de suivre la cible, le capteur doit avoir un champ de vision large [8].L'idée conceptuelle derrière le guidage de poursuite de vitesse (VPG) est que le missile doit toujours se diriger vers la position actuelle de la cible[7].En d'autres termes, le vecteur de vitesse du missile est maintenu pointé vers la cible pour être aligné avec la LOS dans cette approche [3], [8].Cette stratégie entraînera une interception à condition que la vitesse de missile soit plus grande que la vitesse de la cible [3], [4], [7].La loi de VPG exige une accélération latérale élevée, dans la plupart des cas

presque infini à la phase finale de l'interception. Car le missile ne peut pas produire de l'accélération infinie, le résultat est une distance finie [7].

La représentation de VPG est illustrée à la figure I.7.

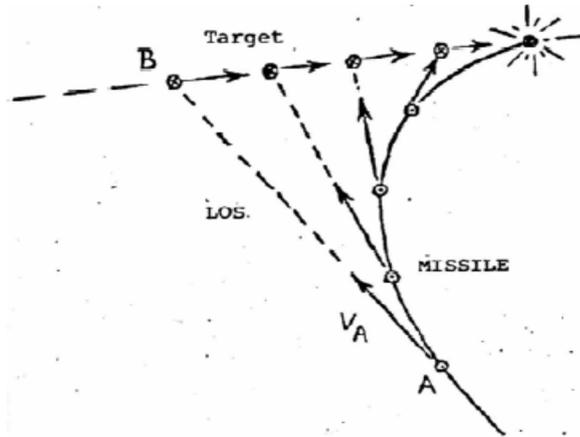


Figure I.7 : Guidage de poursuite de vitesse [3]

#### I.4.3.1.2. Guidage de navigation proportionnelle

Le missile d'alouette qui a eu son premier essai réussi en Décembre 1950 était le premier missile utilisant la méthode de guidage de navigation proportionnelle (PNG). Depuis ce temps, le PNG a été utilisé dans la plupart des missiles tactiques du monde, guidés par infra rouge (IR), par télévision (TV) et par radar. La popularité de cette loi de guidage de l'intercepteur vient de sa simplicité, l'efficacité et la facilité de mise en œuvre [6].

À l'origine, la loi de PNG réalise des commandes de vitesse angulaire ou d'accélération perpendiculaire au LOS (line of sight) instantanée de missile-cible conformément à un ratio de navigation effectif (ENR) [6], [11], [8], [12], [13]. Afin de déterminer la valeur optimale pour ENR en fonction de l'application, plusieurs études ont été menées [14]. Une fois que le capteur du missile détecte la cible, la loi de PNG commence à forcer le missile à se diriger sur la cible. S'il n'y a aucune dynamique et des incertitudes dans la boucle de PNG, alors l'écart de distance résultant devrait toujours être zéro [6].

Dans l'application, le missile employant le PNG n'est pas tiré vers la cible, mais est tiré dans une direction pour amener la cible. De cette façon, il est prévu pour le missile d'être sur un triangle de collision avec la cible [6], [11].

La représentation schématique de l'engagement du missile-cible en le PNG est donnée à la figure I.8.

Contrairement au guidage de poursuite, le taux angulaire de LOS tend à être annulé lors de la fermeture sur la cible en PNG [3], [8], [15]. En fait, cela donne un avantage en PNG par rapport aux méthodes de guidage de poursuite parce que les corrections de trajectoire sont effectuées dans les premières étapes du vol [4], [16], [17].

En fonction de la direction de la commande d'accélération générée, le PNG est généralement classifié en deux sous-groupes [8]:

- Guidage de navigation proportionnelle vrai (TPNG)
- Guidage de navigation proportionnelle pure (PPNG)

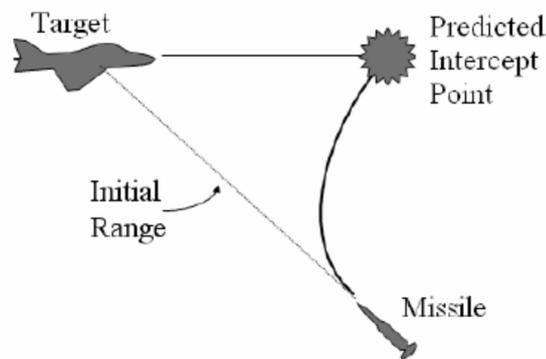


Figure I.8 : Guidage de navigation proportionnelle [18].

#### I.4.3.1.3. Guidage prédictif

La guidance prédictive est basée sur la prédiction de l'emplacement futur de la cible demandée. Une fois que cette prédiction est faite, la prochaine tâche est de tourner le cap du missile afin de former un triangle de collision avec la cible. Au cours de l'engagement, l'interception prédite est mise à jour à certains instants à l'égard de l'information d'état de la cible acquise par le capteur [6], [19], [12].

#### I.4.3.2. Méthodes d'autoguidage basé sur la théorie de la commande optimale

L'objectif de la théorie de la commande optimale est de déterminer les signaux de commande qui peuvent satisfaire les contraintes physiques et en même temps minimiser ou maximiser une fonction de coût [20]. Dans le sens du guidage, la fonction de coût est conçue dans une forme quadratique de manière à minimiser l'écart à la distance terminal, de l'accélération latérale maximale réalisable et le temps d'interception à certains poids. Bien que les méthodes dérivées basées sur la théorie de

commande optimale soient utilisées dans des simulations par ordinateur et quelques résultats satisfaisants sont obtenus, elles n'ont pas été encore mis en application dans les applications de guidage dans le monde réel[21], [22], [23], [24], [25], [26].

### **I.4.3.3.Méthodes d'autoguidage intégré**

Pour construire un algorithme de guidage et de commande de missile, les systèmes de guidage, de commande et d'estimation de mouvement de cible sont habituellement conçus séparément et après intégrés au missile. Puisque ces systèmes ont en général différentes largeurs de bande, il existe un décalage dans la réaction du système de guidage et de commande global[27]. Afin de réduire ce décalage, les algorithmes de guidage et de commande intégrés sont proposés[28]. Toutefois, étant donné la dimension du problème de commande et de guidage non linéaire est augmentée, il devient difficile de construire un tel schéma tel que la stabilité du missile est maintenue [28]. Pour ces raisons, ces types de structures ne peuvent pas être facilement mises en œuvre sur les problèmes de guidage et de commande réalistes.

En regardant la littérature, il existe d'autres méthodes d'autoguidage pouvant être vues et ne sont pas mentionnées ici telles que :

- Méthodes d'autoguidage basées sur la théorie des jeux.
- Méthodes d'autoguidage basées sur les techniques de commande robuste.
- Méthodes d'autoguidage avec des applications des techniques d'intelligence artificielle.

## **I.5. Techniques de commande des missiles**

La mission d'un système de commande de missile ou d'un auto-piloté de missile, est d'assurer la stabilité, la haute performance et permettre que le missile vole en accord avec les exigences de la loi de guidage[6], [29], [30], [31]. Dans la plupart des systèmes de commande de missile, les variables commandées sont sélectionnées pour être les composantes d'accélération latérale du missile. Selon le type de la commande de guidage, les variables commandées peuvent également être les taux de corps (taux de lacet, de tangage et de roulis), les angles du corps (angles de lacet, de tangage et de roulis), les angles du système de référence de vent (angles d'attaque et de dérapage), ou leurs taux.

Les stratégies utilisées dans la commande de missile peuvent être discutées sous les rubriques suivantes:

- Méthodes de commande classique

- Méthodes de commande moderne
- Méthodes de commande robuste
- Méthodes de commande intelligente

### **I.5.1. Méthodes de commande classique**

Si le mouvement de roulis du missile est stabilisé, alors son mouvement dans ses plans de lacet et de tangage deviendra découplé. Dans une telle structure, où les équations de mouvement sont presque linéaires pour des angles de vent et des déflexions de surface de commande pas aussi grands, les auto-pilotes peuvent être conçus facilement en utilisant les techniques de commande classique. Dans ce sens, habituellement la commande de PI (proportionnel plus intégrale) ou de PID (proportionnel plus intégrale plus dérivé) avec l'amortissement synthétique de tangage et de lacet est utilisée dans la conception des auto-pilotes de lacet et de tangage. Dans le système de commande résultant, les pôles souhaités sont en général réglés selon la technique d'emplacement de pôle. Afin de maintenir ces pôles aux emplacements désirés contre les conditions de fonctionnement changeantes, la façon dont principalement utilisée est la méthode de gain scheduling [31], [32]. Dans cette approche, les gains du contrôleur sont réglés continuellement par rapport à des conditions de vol actuelles de façon à maintenir les emplacements souhaités des pôles du système de commande en boucle fermée.

### **I.5.2. Méthodes de commande moderne**

La plupart des stratégies de commande moderne tombent dans une des deux catégories suivantes : Elles sont les stratégies de feedback d'état ou de feedback de sortie [33]. La plupart des méthodes de conception linéaire et non linéaire supposent que les informations d'état complètes est disponible [34]. Cependant, il n'est pas toujours possible de mettre en œuvre une loi de commande basée sur un retour d'état car tous les états peuvent ne pas être disponibles pour la mesure. Dans un tel cas, le retour de sortie est une alternative viable généralement couplée avec un filtre de Kalman pour estimer l'état complet. D'autre part, l'utilisation des stratégies de feedback d'état et de sortie est limitée dans la commande des missiles. Comme exemple, dans un problème spécifique où le missile est tiré à partir du sol, en position verticale, la commande par rétroaction de l'état peut être utilisée afin de maintenir la position verticale de missile tout au long de son vol.

### **I.5.3. Méthodes de commande robuste**

Concernant les incertitudes dans les paramètres de missile et les perturbations influençant la dynamique de ce dernier, les méthodes de commande robuste apparaissent comme une solution viable [35]. Dans la conception d'un auto-pilote de missile, les méthodes de commande robuste les plus couramment utilisées peuvent être divisées en deux groupes principaux:

- Méthodes de commande basée sur le théorème de Lyapunov
- Méthodes de commande basée sur la norme  $H_{\infty}$

#### **I.5.3.1. Méthodes de commande basée sur le théorème de Lyapunov**

Dans les méthodes de commande sous ce titre, la loi de commande est générée par rapport à une fonction de Lyapunov adéquatement sélectionnée. Fondamentalement, deux genres de telles méthodes apparaissent dans la littérature :

- Commande de backstepping
- Commande en mode glissant

##### **I.5.3.1.1. Commande de backstepping**

La commande de backstepping est une technique de commande récursive. Afin de concevoir un contrôleur en utilisant la méthode de backstepping, les équations de la dynamique du système à commander doivent être exprimées sous « la forme de feedback stricte ». La méthode de backstepping est aussi bien utilisée dans la conception d'auto-pilote de missile. Selon la procédure de conception proposée par Sharma et Ward, en sélectionnant le taux de tangage, l'angle de tangage et l'angle de trajectoire de vol comme les variables d'état et de la déflexion d'élévateur comme l'entrée de commande. Les équations différentielles décrivant le mouvement de tangage du missile peuvent être exprimées en fonction de ces variables d'état et la variable d'entrée dans la forme de feedback stricte, et l'entrée de commande réelle est déterminée en suivant la procédure de conception backstepping [36]. D'autre part, puisque l'entrée de commande est nécessaire pour être mise à jour en fonction des paramètres changeants de vol, la mise en œuvre de cette procédure peut prendre un certain temps. Dans les applications pratiques de guidage, la méthode de backstepping est rarement utilisée.

### I.5.3.1.2. Commande en mode glissant

Spécifiant de manière adéquate les paramètres de surface de glissement et l'épaisseur de la couche limite introduite autour de la surface de glissement, afin de limiter la quantité de la vibration (chattering), un auto-pilote robuste peut être conçu en utilisant la méthode de commande en mode glissant (SMC). Dans l'étude réalisée par Menon et Ohlmeyer, la conception d'un auto-pilote de tangage en utilisant la méthode SMC est expliquée. Dans la conception mentionnée, le taux de tangage et l'angle d'attaque sont choisis comme des variables d'état et la déflexion de l'élévateur est sélectionnée comme l'entrée de commande [37], [38]. Bien qu'ils affirment que cette méthode donne des résultats tout à fait réussies, l'approche SMC n'est pas choisie plus souvent. C'est parce que le système de SMC sera plus lent que n'importe quel système de commande classique car la surface de glissement est nécessaire pour être adaptée aux conditions de vol variables.

### I.5.3.2. Méthodes de commande basées sur la norme $H_\infty$

La conception d'auto-pilote  $H_\infty$  est basée sur la dynamique linéarisée de missile et elle peut être effectuée dans le domaine de fréquence ou le domaine de temps sous forme de l'espace d'état [35]. Dans cette approche, d'abord les variables d'état et les entrées sont définies. Puis, les équations dynamiques linéarisées sont exprimées en termes de variables d'état et d'entrée choisies. Après dérivation les fonctions de transfert entre l'entrée et les variables d'état, la norme  $H_\infty$  de chaque fonction de transfert peut être définie comme suit :

$$\|\bar{x}\|_\infty = \max\{|x_k|, 1 \leq k \leq n\} \quad (I.1)$$

Donc, la tâche finale consiste à obtenir un contrôleur tel que  $\|\bar{x}\|_\infty$  est réduit au minimum [39]. Dans la conception d'auto-pilote, les variables d'état sont choisies pour être les taux de corps (taux de lacet, de tangage et de roulis), les angles du corps (angles de lacet, de tangage et de roulis) et les angles du système de référence de vent (angle d'attaque et angle de dérapage). Comme d'habitude, les variables d'entrée sont les déflexions de gouvernail, d'élévateur, et d'aileron. Concernant la conception d'auto-pilote de tangage,  $\bar{x}$  est construit en utilisant les fonctions de transfert à partir de la déflexion de l'élévateur aux taux de tangage, angle de tangage et angle d'attaque. Ensuite, le contrôleur doit être déterminé de manière à minimiser  $\|\bar{x}\|_\infty$ . Puisque l'algorithme comporte des incertitudes dans les paramètres de missile et des perturbations qui agissent sur le système de commande au sein de certaines limites, le système de commande conçu est robuste aux incertitudes des paramètres et aux perturbations. Toutefois, la détermination d'un contrôleur approprié est un

processus itératif, et par conséquent est un processus qui prend du temps. Alors, cette méthode n'est pas choisie dans les implémentations pratiques de guidage[39].

#### **I.5.4. Méthodes de commande intelligente**

Les méthodes intelligentes dans la commande de missile peuvent être groupées comme suit :

- Méthodes de commande à base de réseau de neurones
- Méthode de commande à base la logique floue

##### **I.5.4.1. Méthodes de commande à base de réseau de neurones**

En général, le contrôleur de réseau neuronal dans un système de commande est utilisé comme un modèle inversé. Dans la conception d'auto-pilote de missile, les composants d'accélération latérale de missile, les taux de corps, les angles du corps, les angles du système de référence de vent et la vitesse de missile sont habituellement choisis comme des variables de sortie. Effectuant des simulations par ordinateurs successives en utilisant le modèle de missile considéré, les valeurs de ces sorties sont mesurées pour les différentes valeurs des variables d'entrée (les déflexions de gouvernail, d'élévateur et d'aileron) à différents nombres de Mach. Ensuite les données collectées sont introduites dans le réseau de neurones afin de le former. Par conséquent, le réseau neuronal entraîné peut être utilisé comme un contrôleur dans le système de commande du missile. Afin d'augmenter la performance du contrôleur de réseau de neurones, l'espace de données d'entraînement doit être élargi. Les contrôleurs de réseau de neurones donnent des résultats satisfaisants à condition que les paramètres de vol du missile restent dans les limites considérées dans l'ensemble de données d'entraînement. Cependant, le processus de génération de données est très long ainsi que la durée de formation. Afin de garantir la stabilité des systèmes de commande neurals, Lin et Chen ont proposés un schéma de commande hybride, dans lequel un contrôleur à gain fixe fonctionne en parallèle avec le contrôleur de réseau de neurones. Cependant, cette méthode ne semble pas être pratique car elle dicte un ajustement en ligne des facteurs de pondération sur la gamme de fonctionnement [29]. En outre, pour les systèmes non-minimum, le contrôleur de réseau de neurones utilisé comme un modèle inversé devient instable[29], [41], [42], [43].

### **I.5.4.2. Méthodes de commande à base la logique floue**

Dans un système de commande de missile, un contrôleur à logique floue peut être utilisé pour générer les ordres de commande pour les déflexions d'ailettes. En général, le terme d'erreur entre l'entrée de référence et la sortie actuelle du système de commande, et la première dérivée du terme d'erreur sont désignés comme les entrées du contrôleur à logique floue. Ensuite, selon les règles d'inférence établies, les commandes de déflexion des ailettes sont produites comme des sorties. En fait, le succès d'un contrôleur flou est directement lié à la disposition des règles d'inférence. Dans la dérivation de ces règles, les données d'entrée et de sortie de certains contrôleurs fonctionnant correctement peuvent être utilisées comme référence. Afin d'augmenter la performance des contrôleurs flous, Dash et Panda proposent une structure de la logique floue dans laquelle les fonctions d'appartenance d'entrée et de sortie sont adaptables aux variations des paramètres.

## **I.6. Conclusion**

On abordera ce chapitre en expliquant l'architecture de mobilité de véhicule automatisé et le cas où l'autonomie de ce dernier est réalisé, pour bien comprendre la notion de véhicule autonome de manière générale. Une brève description des sous-systèmes de missile associée aux fonctions a été présentée, et finalement de nombreuses techniques de guidage et de commande de missile abordées par la littérature sont mentionnées.

---

## **CHAPITRE II:**

# **Modèle non linéaire de missile à 6-DOF**

---

## II.1. Introduction

Durant la conception de l'auto-pilote de commande de vol, la modélisation mathématique de missile est l'une des étapes les plus importantes. Dans ce chapitre, le modèle mathématique de missile sera construit en utilisant 12 équations non linéaires (6 cinématiques et 6 dynamiques) pour une représentation à 6 DOF (degrés de liberté). Les équations cinématiques sont les conséquences d'applications de matrice de transformation qui se rapporte aux systèmes d'axes de référence par les angles d'Euler et les équations dynamiques sont obtenues par la deuxième loi du mouvement de Newton, qui se rapporte à la somme des forces et des moments externes aux accélérations linéaires et angulaires du corps [47], [48]. Finalement, les équations du modèle aérodynamique seront présentées. Avant d'aborder les dérivations détaillées, des définitions nécessaires des systèmes de coordonnées et des hypothèses sont expliquées.

## II.2. Définitions des systèmes de coordonnées

Deux systèmes de coordonnées peuvent être définis afin de décrire [47] le mouvement du missile: le système de coordonnées de terre-fixe et le système de coordonnées de corps. Les deux systèmes de coordonnées sont droitiers.

### II.2.1. Système de coordonnées de terre-fixe (ECS)

Les axes  $X_E$  et  $Y_E$  pointent vers les directions nord et est respectivement, et ils sont situés sur un plan tangent à la surface de la terre. En conséquence, l'axe  $Z_E$  point vers le bas au centre de la terre, selon la règle de droit. Dans la littérature [49], [50], ce système de coordonnées est aussi appelé le système de coordonnées de niveau local ou de nord-est-bas (NED).

### II.2.2. Système de coordonnées de corps (BCS)

Ce système de coordonnées est supposé fixe au centre de gravité du véhicule de vol et se déplaçant avec celui-ci. L'axe  $X_B$  pointe vers l'avant à travers le nez, l'axe  $Y_B$  à travers l'aile tribord (à droite) et l'axe  $Z_B$  vers le bas.

### II.2.3. Transformation du système de coordonnées de la terre fixe à système de coordonnées de corps

La transformation  $T_{BE}$  du système de coordonnées des axes de terre fixe au système de coordonnées des axes de corps de missile est réalisée par une rotation de lacet, tangage, et roulis autour des axes longitudinal, latéral, et normale (soit vertical), respectivement [48].

$$T_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\psi\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi\cos\psi - \sin\psi\cos\phi & \sin\theta\sin\phi\sin\psi + \cos\psi\cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ \cos\psi\sin\theta\cos\phi + \sin\phi\sin\psi & \sin\theta\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \quad (\text{II.1})$$

où  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$  sont appelés angles de roulis, de tangage et de lacet qui définissent l'orientation de l'aéronef par rapport au ECS. Ces angles sont connus comme les angles d'Euler. Il est évident que la séquence des transformations ci-dessus représente le lacet, le tangage et le roulis lors de la transformation d'un vecteur du ECS à le BCS et vice-versa.

### II.3. Équations générales de mouvement

Les paramètres liés agissant sur le missile sont définis dans le tableau II.1 ci-dessous :

	<b>x</b>	<b>y</b>	<b>z</b>
<b>Angle</b>	$\phi$ (roulis)	$\theta$ (tangage)	$\psi$ (lacet)
<b>Vitesse</b>	u	v	w
<b>Position</b>	$x_B$	$y_B$	$z_B$
<b>Vitesse angulaire</b>	p	q	r
<b>Force</b>	$F_x$	$F_y$	$F_z$
<b>Moment</b>	$M_x$	$M_y$	$M_z$

<b>Inertie</b>	$I_x$	$I_y$	$I_z$
<b>Produit d'inertie</b>	$I_{yz}$	$I_{xz}$	$I_{xy}$

**Tableau II.1** : Paramètres du missile

Les hypothèses principales [47] qui sont utilisées pour établir les équations du mouvement du missile, sont données ci-dessous :

**Hypothèse 1 :**

L'aéronef est un corps rigide, ce qui signifie que tout couple de points situé sur ou à l'intérieur du fuselage restent fixes par rapport à eux-mêmes. Le changement de masse dû à la consommation du carburant est négligé de sorte que la masse du missile soit prise comme constante pendant le vol. Cette hypothèse est nécessaire pour appliquer les lois de Newton pour dériver les équations du mouvement.

**Hypothèse 2 :**

La terre est plate et non rotative et considérée comme une référence inertielle (qui est non rotative et sans accélération par rapport à la position moyenne des étoiles fixes). Cette hypothèse est valable lorsqu'il s'agit des simulations d'aéronefs et des missiles qui volent à une vitesse inférieure à Mach 5. Donc, le ECS est utilisé comme un système de coordonnées inertielle pour cette terre plate.

**Hypothèse 3 :**

La distribution de masse de l'aéronef est symétrique par rapport au plan  $X_B - Z_B$  du BCS, ce qui signifie que les produits d'inertie  $I_{yz}$  et  $I_{xy}$  sont nuls. Cette hypothèse est valable pour la plupart des aéronefs.

**Hypothèse 4 :**

Le moment angulaire ( $h_{eng}$ ) provoqué par la machinerie de rotation du moteur de l'aéronef est supposé agir le long de l'axe x positif du BCS.

**Hypothèse 5 :**

Le moteur de l'aéronef est monté de telle sorte que le point de la poussée se trouve sur l'axe des x du BCS.

**Hypothèse 6 :**

Le champ de gravité est supposé uniforme. En outre, le centre de masse et le centre de gravité de l'aéronef sont confondus.

**Hypothèse 7:**

Une atmosphère sans vent, ni rafales.

En tenant compte des hypothèses ci-dessus, le mouvement de l'aéronef a 6-DOF (degrés de liberté) (rotation et translation en trois dimensions). La dynamique d'aéronef peut être décrite par sa position, son orientation, sa vitesse et sa vitesse angulaire au fil du temps.

En utilisant les hypothèses ci-dessus les équations dynamiques et cinématiques sont obtenues comme suit.

**II.3.1. Modèle dynamique**

Un modèle dynamique non linéaire pour un aéronef peut être dérivé de la 2ème loi du mouvement de Newton, qui stipule que la somme de toutes les forces extérieures agissant sur un corps doit être égale à la dérivée temporelle de son moment linéaire par rapport à un système de référence inertielle, et la somme de tous les moments externes agissant sur un corps doit être égale à la dérivée temporelle du moment angulaire par rapport à un système de référence inertielle. Selon l'hypothèse 2, la 2ème loi de Newton peut être exprimée en ECS par deux équations vectorielles :

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{V}) \Big|_E \quad (\text{II.2})$$

$$\vec{M} = \dot{\vec{H}} = \frac{d}{dt} (\vec{H}) \Big|_E \quad (\text{II.3})$$

où, F représente la somme de toutes les forces extérieures appliquées, m est la masse de l'aéronef, V est le vecteur de vitesse, M représente la somme de tous les couples appliqués et H le moment angulaire. L'ensemble de ces quatre vecteurs sont en BCS tandis que la dérivée est prise par rapport au ECS. Afin de prendre la dérivée dans le BCS et d'exprimer tous les vecteurs dans ce système de coordonnées, le théorème de Coriolis est utilisé [47]. Ce théorème énonce que la dérivée d'un

vecteur par rapport à un système de référence est égale à la dérivée du vecteur par rapport à un deuxième système référence plus le produit vectoriel du vecteur de rotation de le seconde système référence par rapport à le premier système référence et du vecteur. Pour les dérivations des équations du mouvement, ces deux systèmes de référence sont représentés avec le BCS et le ECS.

L'équation de la force ci-dessus est utilisée pour dériver la dynamique de translation, et l'équation de moment est utilisée pour dériver la dynamique de rotation de l'aéronef.

### II.3.1.1. Dynamique de translation

Le théorème de Coriolis est appliqué à (II-2):

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{V})\Big|_B + \vec{\omega} \times m\vec{V}, \quad (\text{II.4})$$

où,  $\vec{\omega}$  est la vitesse angulaire de l'aéronef par rapport au ECS, exprimée en BCS.

En formulant les vecteurs comme la somme de leurs composantes par rapport au BCS on aura ce qui suit :

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (\text{II.5})$$

$$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$$

où  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont des vecteurs unitaires sur les axes du corps de l'aéronef  $X_B$ ,  $Y_B$  et  $Z_B$ , respectivement.

En substituant (II-5) dans (II-4) et compte tenu de l'hypothèse 1, il résulte :

$$\begin{aligned} F_x &= m(\dot{u} - rv + qw) \\ F_y &= m(\dot{v} + rv - pw) \\ F_z &= m(\dot{w} - qu + pv) \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

où les forces extérieures  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$  dépendent du vecteur du poids  $\vec{W}$ , du vecteur de la force aérodynamique  $\vec{R}$  et du vecteur de la poussée  $\vec{T}$  :

$$\vec{F} = [F_x \ F_y \ F_z]^T = \vec{T} + \vec{W} + \vec{R} \quad (\text{II.7})$$

La poussée produite par le moteur  $F_T$  agit le long de l'axe d'aéronef  $X_B$  (Hypothèse 5), ce qui rend le vecteur de poussée  $T$  égale à :

$$\vec{T} = [T_x \ T_y \ T_z]^T = [F_T \ 0 \ 0]^T \quad (\text{II.8})$$

Le vecteur de poids dirigé vers le centre de la terre, se trouvant le long de l'axe  $Z_E$  du ECS. Le vecteur de force aérodynamique a des composantes dans tous les axes du BCS :

$$\vec{W} = [W_x \ W_y \ W_z]^T = T_{BE} [0 \ 0 \ mg]^T, \quad (\text{II.9})$$

$$\vec{R} = [X \ Y \ Z]^T, \quad (\text{II.10})$$

où,  $g$  est la constante de gravité.

Par conséquent, en combinant les 4 dernières équations il résulte les équations dynamiques de translation dans le BCS suivantes :

$$\begin{aligned} X + F_T - mg \sin(\theta) &= m(\dot{u} - rv + qw) \\ Y + mg \cos(\theta) \sin(\phi) &= m(\dot{v} + rv - pw) \\ Z + mg \cos(\theta) \cos(\phi) &= m(\dot{w} - qu + pv) \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

### II.3.1.2. Dynamique de rotation

En utilisant le théorème de Coriolis, (II-3) peut être écrite comme suit :

$$\vec{M} = \left. \frac{d}{dt} (\vec{H}) \right|_B + \vec{\omega} \times \vec{H}. \quad (\text{II.12})$$

Dans le BCS, sous l'hypothèse 1 et l'hypothèse 4, le moment angulaire peut être exprimé comme suit :

$$\vec{H} = I\vec{\omega} + [h_{eng} \ 0 \ 0]^T, \quad (\text{II.13})$$

où, selon l'hypothèse 3, la matrice d'inertie est définie comme étant [47] :

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{II.14})$$

En expansion (II-12) en utilisant (II-13) on aura :

$$\begin{aligned} M_x &= \dot{p}I_{xx} - \dot{r}I_{xz} + qr(I_{zz} - I_{yy}) - pqI_{xz} \\ M_y &= \dot{q}I_{yy} + pr(I_{xx} - I_{zz}) + (p^2 - r^2)I_{xz} + rh_{eng} \\ M_z &= \dot{r}I_{zz} - \dot{p}I_{xz} + pq(I_{yy} - I_{xx}) + qrI_{xz} - qh_{eng} \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

où, les moments externes  $M_x$ ,  $M_y$ , et  $M_z$  sont les composants de  $\vec{M}$  le long des axes de coordonnées du corps. Ces moments sont dus à l'aérodynamique et à la poussée car il n'y a pas de moment causé par la gravité selon l'hypothèse 6. Par conséquent, les moments externes sont les suivants :

$$\begin{aligned} M_x &= L + L_T \\ M_y &= M + M_T \\ M_z &= N + N_T \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

où,  $L$ ,  $M$  et  $N$  sont les moments aérodynamiques et  $L_T$ ,  $M_T$ , et  $N_T$  sont les moments dus à la poussée. Dans l'hypothèse 5, il est dit qu'il n'y a pas de moment dû à la poussée, donc :

$$L_T = M_T = N_T = 0. \quad (\text{II.17})$$

Par conséquent, en combinant (II-15) et (II-16), les équations dynamiques de rotation dans le BCS sont réalisées comme suit :

$$\begin{aligned} L &= \dot{p}I_{xx} - \dot{r}I_{xz} + qr(I_{zz} - I_{yy}) - pqI_{xz} \\ M &= \dot{q}I_{yy} + pr(I_{xx} - I_{zz}) + (p^2 - r^2)I_{xz} + rh_{eng} \\ N &= \dot{r}I_{zz} - \dot{p}I_{xz} + pq(I_{yy} - I_{xx}) + qrI_{xz} - qh_{eng} \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

### II.3.2. Modèle cinématique

En complément des équations d'accélération de translation et de rotation, les équations cinématiques sont nécessaires pour définir les taux de translation et de rotation. Ces équations formulent la transformation du vecteur de vitesse  $\vec{V}$  du BCS au ECS et la transformation du vecteur de la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  à des taux d'Euler  $[\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$  [47], [48], [51] comme suit :

$$[\dot{x}_E \ \dot{y}_E \ \dot{z}_E]^T = T_{EB} [u \ v \ w]^T, \quad (\text{II.19})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad (\text{II.20})$$

où,  $[x_E \ y_E \ z_E]^T$  définit la position et  $[\phi \ \theta \ \psi]^T$  définit l'orientation de l'aéronef par rapport au ECS.

$\psi$  est l'angle de lacet,  $\theta$  est l'angle de tangage et  $\phi$  est l'angle de roulis du missile. À cause du terme tangente, l'équation II.20 présente des points de singularité à  $\theta = 90^\circ$  et  $\theta = 270^\circ$ .

Alors une hypothèse supplémentaire (H.8) est formulée [51] ci-dessous :

**H.8:**  $90^\circ$  et  $270^\circ$  sont des angles de tangage qui ne se produisent pas pendant le vol du missile.

Les équations du mouvement dérivées jusqu'à ici sont maintenant écrites comme un système de 12 équations différentielles du premier ordre comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= rv - qw - g \sin(\theta) + \frac{1}{m}(X + F_T) \\ \dot{v} &= pw - ru + g \sin(\phi)\cos(\theta) + \frac{1}{m}Y\end{aligned}\quad (\text{II.21})$$

$$\begin{aligned}\dot{w} &= qu - pv + g \cos(\phi)\cos(\theta) + \frac{1}{m}Z \\ \dot{p} &= (c_1r + c_2p)q + c_3L + c_4(N + h_{eng}q) \\ \dot{q} &= c_5 pr - c_6(p^2 - r^2) + c_7(M - h_{eng}r) \\ \dot{r} &= (c_8p - c_2r)q + c_4L + c_9(N + h_{eng}q)\end{aligned}\quad (\text{II.22})$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= p + \tan \theta (q \sin(\phi) + r \cos \phi) \\ \dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi, \\ \dot{\psi} &= \frac{q \sin \phi + r \cos \phi}{\cos \theta}\end{aligned}\quad (\text{II.23})$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_E &= u \cos \theta \cos \psi + u(\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) + w(\sin \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \\ \dot{y}_E &= u \cos \theta \sin \psi + v(\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi) + w(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \\ \dot{z}_E &= -u \sin \theta + v \sin \phi \cos \theta + w \cos \phi \cos \theta\end{aligned}\quad (\text{II.24})$$

où, les composants du moment d'inertie sont donnés en [47] :

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{(I_{yy} - I_{zz})I_{zz} - I_{xz}^2}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \\ c_2 &= \frac{(I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})I_{xz}}{I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2} \\ c_3 &= \frac{I_{zz}}{I_{xz}I_{zz} - I_{xz}^2} \\ c_4 &= \frac{I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2} \\ c_5 &= \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_6 &= \frac{I_{xz}}{I_{yy}} \\
c_7 &= \frac{1}{I_{yy}} \\
c_8 &= \frac{I_{xx}(I_{xx} - I_{yy}) + I_{xz}^2}{I_{xz}I_{zz} - I_{xz}^2} \\
c_9 &= \frac{I_{xx}}{I_{xz}I_{zz} - I_{xz}^2}
\end{aligned} \tag{II.25}$$

### II.3.3. Modèle aérodynamique de missile

Pendant le vol du missile, certains paramètres aérodynamiques sont apparus pour décrire le mouvement et l'orientation de ce dernier. En premier lieu, la pression dynamique, l'angle d'attaque, l'angle de dérapage et le nombre de Mach sont [51] introduits.

#### Pression dynamique :

La pression dynamique indique la pression aérodynamique subie par le missile. Elle est proportionnelle au carré de la vitesse du missile et à la densité de l'air. Elle est donnée par la formule ci-dessous :

$$q_i = \frac{1}{2} \rho V^2 \tag{II.26}$$

où  $\rho$  est la densité de l'air, elle est calculée comme suit :

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 (1 - 0.00002256h)^{4.256} & \text{si } h \leq 10000 \text{ m} \\ 0.412e^{-0.000151(h-10000)} & \text{si } h > 10000 \text{ m} \end{cases} \tag{II.27}$$

où  $h$  (en mètres) et  $\rho_0$  désignent l'altitude et la densité de l'air au niveau de la mer et

$$\rho_0 = 1.223 \text{ kg / m}.$$

#### Angle d'attaque:

L'angle d'attaque est utilisé pour décrire l'angle entre l'axe des  $x$  par rapport au système de coordonnées du corps et à la direction de la vitesse de missile dans le plan  $X_B-Z_B$ , comme on le voit sur la figure II.1. Il peut être décrit comme l'angle entre l'endroit où le missile est dirigé et où il va. Il est défini comme suit :

$$\alpha = \arctan \left( \frac{w}{u} \right) \tag{II.28}$$

Puisque  $w$  est beaucoup plus petite que  $u$ , l'équation ci-dessus peut être écrite comme suit :

$$\alpha \cong \frac{w}{u} \quad (\text{II.29})$$

### Angle de dérapage :

L'angle de dérapage est utilisé pour décrire l'angle entre la direction de la vitesse de missile dans le plan  $X_B-Z_B$  et la vitesse de missile, comme on le voit sur la figure II.1 ( $V_T$  ici est la vitesse de missile). Il est défini comme suit :

$$\beta = \arctan\left(\frac{v}{V}\right) \quad (\text{II.30})$$

Puisque  $v$  est beaucoup plus petite que  $V$  (il peut être pris comme  $u$ ), l'équation ci-dessus peut être écrite comme suit :

$$\beta \cong \frac{v}{V} = \frac{v}{u} \quad (\text{II.31})$$

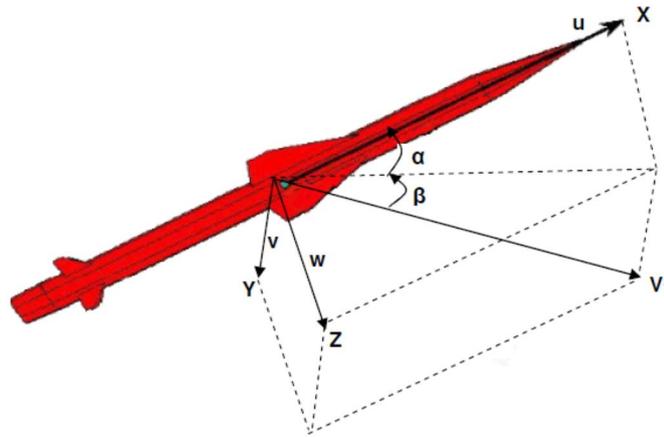


Figure II.1 : Angle d'attaque et angle de dérapage

### Nombre de Mach :

Le nombre de Mach est une mesure sans dimension de la vitesse relative, qui est définie comme étant la vitesse du missile divisée par la vitesse du son dans le même milieu. Il peut être exprimé comme suit :

$$M = \frac{v}{v_s} \quad (\text{II.32})$$

où  $v_s$  est la vitesse du son et peut être calculée selon [52] la formule suivante :

$$v_s = \sqrt{kRT} \quad (\text{II.33})$$

Dans l'équation (II.33),  $k$  est le rapport de la chaleur spécifique de l'air, qui est considéré comme étant égal à 1.4 et  $R$  est la constante universelle des gaz, qui est considérée comme étant égale à 287J / kgK.  $T$  est la température ambiante qui change aussi avec l'altitude, et peut être [52] exprimée de la manière suivante :

$$T = \begin{cases} T_0(1 - 0.00002256h) & \text{si } h \leq 10000 \text{ m} \\ 0.7744T_0 & \text{si } h > 10000 \text{ m} \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

Dans l'équation (II.34),  $T_0$  est la température au niveau de la mer.

Nous avons vu précédemment qu'il existe trois différentes forces agissant sur le missile: La force aérodynamique, la force gravitationnelle et la force de propulsion, et un seul type de moment agissant sur le missile: Le moment aérodynamique.

Par conséquent, les équations de force et de moment peuvent être séparées comme suit :

$$F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\dot{u} + m(qw - rv) \\ m\dot{v} + m(ru - pw) \\ m\dot{w} + m(pv - qu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i S C_x + F_T - mg \sin(\theta) \\ q_i S C_y + mg \cos(\theta) \sin(\phi) \\ q_i S C_z + mg \cos(\theta) \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

De sorte que [48], [51], [52]:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = q_i S \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

où  $q_i$  est la pression dynamique;  $S$  est l'aire de section transversale du missile;  $F_T$  est la force de propulsion;  $C_x$ ,  $C_y$ , et  $C_z$  sont les coefficients des forces aérodynamiques.

Les dérivations ultérieures conduisent aux équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rv - qw + \frac{q_i S C_x + F_T}{m} - g \sin(\theta) \\ pw - ru + \frac{q_i S C_y}{m} + g \cos(\theta) \sin(\phi) \\ qu - pv + \frac{q_i S C_z}{m} + g \cos(\theta) \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

De même, pour la dynamique de rotation, les équations suivantes peuvent être dérivées :

$$M = \begin{bmatrix} I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} + (I_{zz} - I_{yy})qr - I_{xz}pq \\ I_{yy}\dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})pr + I_{xz}(p^2 - r^2) + rh_{eng} \\ I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p} + (I_{yy} - I_{xx})pq + I_{xz}qr - qh_{eng} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i S d_M C_L \\ q_i S d_M C_M \\ q_i S d_M C_N \end{bmatrix} \quad (II.38)$$

De sorte que [48], [51], [52]:

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = q_i S d_M \begin{bmatrix} C_L \\ C_M \\ C_N \end{bmatrix} \quad (II.39)$$

où  $q_i$  est la pression dynamique;  $S$  est l'aire de section transversale du missile;  $d_M$  est le diamètre de missile;  $C_L$ ,  $C_M$ , et  $C_N$  sont les coefficients des moments aérodynamiques.

Les dérivations ultérieures conduisent aux équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_{xz}}{I_{xx}}\dot{r} - \frac{(I_{zz}-I_{yy})}{I_{xx}}qr + \frac{I_{xz}}{I_{xx}}pq + \frac{q_i S d_M C_L}{I_{xx}} \\ -\frac{(I_{xx}-I_{zz})}{I_{yy}}pr - \frac{I_{xz}}{I_{yy}}(p^2 - r^2) + \frac{q_i S d_M C_M - r h_{eng}}{I_{yy}} \\ \frac{I_{xz}}{I_{zz}}\dot{p} - \frac{(I_{yy}-I_{xx})}{I_{zz}}pq - \frac{I_{xz}}{I_{zz}}qr + \frac{q_i S d_M C_N + q h_{eng}}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (II.40)$$

Les coefficients aérodynamiques peuvent être définis comme suit :

$C_x$ : Coefficient de force axiale,

$C_Y$  : Coefficient de force latérale,

$C_Z$  : Coefficient de force normale,

$C_l$  : Coefficient de moment de roulis,

$C_m$  : Coefficient de moment de tangage,

$C_n$  : Coefficient de moment de lacet.

Les coefficients aérodynamiques ( $C_i$ ) peuvent être définis par rapport à des paramètres de vol, comme l'angle d'attaque, l'angle de dérapage, le nombre de Mach, les déviations d'ailettes ( $\delta_a$ ,  $\delta_e$  et  $\delta_r$ ) et les vitesses angulaires ( $p$ ,  $q$  et  $r$ ) [51].

D'autre part, pour le problème de conception d'auto-pilote, les coefficients aérodynamiques peuvent être linéarisés comme [51], [52]. Et pour cette raison l'expansion en série de Taylor autour des points de découpage des paramètres de vol est utilisée dans [51] d'où il résulte:

$$C_i = C_{i0}(M, \alpha) + C_{i\alpha}(M, \alpha)\alpha + C_{i\beta}(M, \alpha)\beta + C_{i\delta_a}(M, \alpha)\delta_a + C_{i\delta_e}(M, \alpha)\delta_e + C_{i\delta_r}(M, \alpha)\delta_r + C_{ip}(M, \alpha) \cdot p \cdot \frac{d_M}{2.V_T} + C_{iq}(M, \alpha) \cdot q \cdot \frac{d_M}{2.V_T} + C_{ir}(M, \alpha) \cdot r \cdot \frac{d_M}{2.V_T} + HOT \quad (II.41)$$

où HOT correspond aux termes d'ordre supérieur et le terme  $\frac{d_M}{2.V_T}$  est introduit comme un multiplicateur pour les dérivées aérodynamiques pour les rendre sans dimension.

De sorte que les dérivés aérodynamiques peuvent être écrits comme suit :

$$C_{i\theta_i}(M, \alpha) = \left. \frac{\partial C_i}{\partial \theta_i} \right|_{\theta_i = \theta_{i0}} \quad (II.42)$$

Les valeurs des dérivés aérodynamiques sont prises dans [51] à des valeurs de découpage des paramètres de vol et elles sont maintenues seulement comme une fonction non linéaire du nombre de Mach et de l'angle d'attaque. Puisque le long de la trajectoire de vol du missile, les paramètres seront faibles, de sorte que les points de découpage peuvent être pris égaux à zéro. Après linéarisation, les coefficients aérodynamiques adimensionnels peuvent être écrits comme suit :

$$\begin{aligned} C_x &= C_{x0}(M, \alpha) \\ C_y &= C_{y\beta}(M, \alpha) \cdot \beta + C_{y\delta}(M, \alpha) \cdot \delta_r + C_{yr}(M, \alpha) \cdot r \cdot \frac{d_M}{2.V_T} \\ C_z &= C_{z\alpha}(M, \alpha) \cdot \alpha + C_{z\delta}(M, \alpha) \cdot \delta_e + C_{zq}(M, \alpha) \cdot q \cdot \frac{d_M}{2.V_T} \\ C_l &= C_{l\delta}(M, \alpha) \cdot \delta_a + C_{lp}(M, \alpha) \cdot p \cdot \frac{d_M}{2.V_T} \\ C_m &= C_{m\alpha}(M, \alpha) \cdot \alpha + C_{m\delta}(M, \alpha) \cdot \delta_e + C_{mq}(M, \alpha) \cdot q \cdot \frac{d_M}{2.V_T} \\ C_n &= C_{n\beta}(M, \alpha) \cdot \beta + C_{n\delta}(M, \alpha) \cdot \delta_r + C_{nr}(M, \alpha) \cdot r \cdot \frac{d_M}{2.V_T} \end{aligned} \quad (II.43)$$

Les indices e, r et a des termes  $\delta$  désignent les déviation de l'élévateur, du gouvernail et de l'aileron, respectivement. Ces déviations sont fournies par les surfaces de contrôle et sont définies en fonction des déviations des angles des ailettes, voir ci-dessous (pour les quatre ailettes canard contrôlées [51]) :

$$\begin{aligned}\delta_a &= \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4}{4} \\ \delta_e &= \frac{\delta_2 - \delta_4}{2} \\ \delta_r &= \frac{\delta_1 - \delta_3}{2}\end{aligned}\tag{II.44}$$

Les angles  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  et  $\delta_4$  représentent le premier, le deuxième, le troisième et le quatrième angle d'ailettes de commande, respectivement.

## II.4. Dynamique de l'actionneur

La dynamique des surfaces de contrôle peut être estimée comme un système du second ordre selon [53] :

$$\delta = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \delta_c\tag{II.45}$$

Dans [54]  $\omega_0 = 250$  et  $\xi = 0.7$ . Cela donne des pôles dans  $-175 \pm 178.54i$ .

## II.5. Conclusion

Nous allons commencer ce chapitre par la présentation des équations de Newton et d'Euler respectivement pour la translation et la rotation. En plus des équations cinématiques qui peuvent être divisées en deux parties: une gouverne le mouvement de translation et l'autre régit le mouvement de rotation. La simulation de six degrés de liberté (DOF) requière évidemment six équations dynamiques séparées qui décrivent un mouvement de véhicules dans un espace tridimensionnel. Les équations de translation, cependant, ne décrivent que le mouvement du centre de masse et ne donnent aucune indication quant à l'orientation du véhicule autour du centre de masse dans l'espace inertiel. C'est là où les équations de rotation (équations d'Euler) décrivent l'orientation du véhicule sur le centre de masse du véhicule par rapport à un système de coordonnées inertiel.

Les équations du mouvement sont non linéaires et différentielles couplées. Pour empirer les choses, des forces et des moments aérodynamiques fortement non linéaires sont imbriqués dans les équations du mouvement provoquant un cauchemar mathématique pur pour n'importe quel ingénieur de commande faisant face à ce dilemme, surtout si la conception du système de la commande non linéaire a pour résultat final d'atteindre la cible. Les forces et les moments

aérodynamiques incidents sur le fuselage du missile ne sont pas clairement définis dans la nature. La représentation de l'aérodynamique de tout véhicule aérospatial peut être une tâche ardue surtout si les algorithmes logiciels prédictifs tels que DATCOM MISSILE ne sont pas disponibles. Typiquement, les équations aérodynamiques sont données à titre d'expansion en série de Taylor, dans laquelle les coefficients (les dérivés de stabilité) pour chacun des termes sont donnés en fonction du nombre de Mach et de l'angle d'attaque. Les raisons pour cela sont simples. Une grande partie des essais aérodynamiques qui se produit sur un véhicule en développement s'effectue à l'intérieur des tunnels de vent et il est logique que les données collectées sont des fonctions des paramètres utilisés lors des tests.

---

**CHAPITRE III:**

**Commandes non linéaires  
via la technique SDRE**

---

### III.1. Introduction

La théorie du régulateur linéaire quadratique (LQR) [55] a été appliquée avec succès à une variété d'applications au cours de ces dernières décennies, mais elle est pratiquement limitée à des systèmes linéaires ou linéarisés, ce qui limite son utilité.

L'équation de Riccati dépendante de l'état (SDRE) est la base d'une technique de commande de feedback suboptimale d'un problème de régulateur quadratique non linéaire (NQR). Il s'agit d'une extension de l'équation de Riccati utilisée pour la commande de feedback de problèmes linéaires, avec l'addition de non-linéarités dans la dynamique de l'état du système résultant en un gain dépendant de l'état.

La méthode de l'équation de Riccati dépendante de l'état (SDRE) est une technique développée pour la commande des systèmes dynamiques non linéaires [56, 57]. En utilisant une forme particulière de la dynamique du système. Cette approche permet au concepteur d'utiliser des méthodes de commande optimale linéaire comme la méthode LQR et la technique de design  $H_\infty$  pour la synthèse de systèmes de commande non linéaire. La technologie de commande SDRE a de vastes applications dans la conception des systèmes de commande de vol avancés, et aussi dans de nombreuses applications de commande des processus.

Ce chapitre traite des méthodologies de conception, optimalité, suboptimalité et des propriétés de la stabilité et de la robustesse de régulation non linéaire SDRE pour les systèmes affines à l'entrée d'une manière plus systématique comme traitée par Cloutier, D'Souza et Mracek [58]. Des exemples fournis illustrent l'efficacité de la technique SDRE.

### III.2. Régulation non linéaire via la méthode SDRE

Dans le problème de régulation non linéaire, nous sommes intéressés à minimiser la fonction de coût à horizon infini.

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [x^T Q(x)x + u^T R(x)u] dt \quad (\text{III-1})$$

Soumis à la contrainte différentielle non linéaire

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (\text{III-2})$$

étant donné l'état  $x \in \mathcal{R}^n$  et la commande  $u \in \mathcal{R}^m$ , avec  $f, g, R, Q \in \mathcal{C}^k$ ,  $k > 1$ , et où  $Q(x) = H^T(x)H(x) \geq 0$ , et  $R(x) > 0$  pour tout  $x$ . On suppose que  $f(0) = 0$  de sorte que l'origine soit un point d'équilibre du système en boucle ouverte. Nous cherchons des solutions de stabilisation de la forme

$$u = L(x)x \quad (\text{III-3})$$

où le gain de feedback non linéaire  $L$  est une matrice en fonction de  $x$ . La formulation ci-dessus devrait être familière à la théorie du régulateur linéaire quadratique (LQR), sauf que les matrices  $Q, R, L$  ont tous des éléments qui sont autorisés à être des fonctions de  $x$ . Alors, la fonction de coût (III-1) peut ou non être quadratique selon que  $Q$  et  $R$  soient des matrices constantes ou non. Dans la méthode SDRE la contrainte de la dynamique (III-2) est écrite dans une structure ponctuellement linéaire ayant une forme du coefficient dépendant de l'état SDC (state dependent coefficient form) :

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u \quad (\text{III-4})$$

De sorte que :

$$f(x) = A(x)x \quad (\text{III-5})$$

et

$$g(x) = B(x) \quad (\text{III-6})$$

À ce point il est important de noter que les hypothèses sur la fonction de dérive en boucle ouverte  $f$  garantie qu'une paramétrisation globale SDC existe [59]. Une telle factorisation [59] est :

$$A(x) = \int_0^1 \nabla_x f(\lambda x) d\lambda \quad (\text{III-7})$$

qui est garantie d'exister si  $f(0) = 0$  et  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ .

Nous allons maintenant écrire les définitions suivantes associées à la forme du SDC pour une utilisation ultérieure.

- ✚  $\{H(x), A(x)\}$  est une paramétrisation globalement observable du système non linéaire, si la paire  $\{H(x), A(x)\}$  est observable pour tout  $x$ .
- ✚  $\{A(x), B(x)\}$  est une paramétrisation globalement contrôlable du système non linéaire, si la paire  $\{A(x), B(x)\}$  est contrôlable pour tout  $x$ .
- ✚  $\{H(x), A(x)\}$  est une paramétrisation globalement détectable du système non linéaire, si la paire  $\{H(x), A(x)\}$  est détectable pour tout  $x$ .

- ✚  $\{A(x), B(x)\}$  est une paramétrisation globalement stabilisable du système non linéaire si la paire  $\{A(x), B(x)\}$  est stabilisable pour tout  $x$ .

Nous associons avec la fonction de coût non linéaire (III-1) l'équation de Riccati (algébrique) dépendante de l'état (SDRE) :

$$A^T(x)P(x) + P(x)A(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) + Q(x) = 0 \quad (\text{III-8})$$

La technique de régulation non linéaire SDRE résout (III-8), n'acceptant que  $P(x) = P^T(x) > 0 \forall x$ , et construit le commande de feedback non linéaire sous la forme suivante :

$$u = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x)x \quad (\text{III-9})$$

De sorte que le gain de feedback non linéaire soit :

$$L(x) = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x) \quad (\text{III-10})$$

Ces équations peuvent être résolues de manière analytique pour produire une équation pour chaque élément de  $u$ , ou être résolues numériquement à un taux d'échantillonnage suffisamment élevé. Notez que très clairement à partir de (III-10), nous devons avoir un retour d'état complet disponible pour construire la commande  $u$  en utilisant cette méthode.

La stabilité locale du système en boucle fermée résultante de l'utilisation de la technique de régulation non linéaire SDRE est donnée par le théorème suivant de [59].

### **Théorème III.1.**

En plus de  $f, g, Q, R \in C^k, k \geq 1$ , supposons que  $A \in C^k$  et  $A$  donne une paramétrisation des coefficients dépendants de l'état globalement stabilisable et détectable du système non linéaire. Alors, la méthode de commande de régulation non linéaire SDRE a une solution en boucle fermée qui est localement et asymptotiquement stable.

Comme preuve : Notons que la solution en boucle fermée est donnée par

$$\dot{x} = [A(x) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x)]x \equiv F(x)x$$

et que la fonction matricielle  $F(x)$  en boucle fermée est garantie d'être stable en tout point  $x$  à partir de la théorie de l'équation de Riccati standard. Sous la propriété de  $C^k$  des données précédentes et les hypothèses stabilisables/détectables sur les paramètres du système,  $P \in C^k$  alors  $F \in C^k$ .

L'expansion de  $F$  dans un développement en série de Taylor aux environs du zéro, pour un certain voisinage de l'origine donne :

$$\dot{x} \approx F(0)x + \psi(x) \cdot \|x\|$$

où  $\psi(x)$  est d'ordre  $k$  et

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \psi(x) = 0$$

Dans un voisinage plus petit de l'origine, le terme linéaire, qui possède une matrice stable et constante, domine le terme d'ordre supérieur ce qui donne la stabilité asymptotique locale.

À ce point on remarque que la preuve du théorème III.1 s'appuie sur des arguments de linéarisation, et donc la stabilisabilité et la détectabilité globales de la paramétrisation de la SDC ne sont pas nécessaires pour la stabilité locale, mais seulement la stabilisabilité et la détectabilité de la linéarisation de (III-2).

On considère maintenant les conditions nécessaires d'optimalité de la méthode SDRE. A partir de l'indice de performance et la contrainte de la dynamique, nous formons la fonction Hamiltonienne

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}x^T Q(x)x + \frac{1}{2}u^T R(x)u + \lambda^T [A(x)x + B(x)u] \quad (\text{III-11})$$

Avec les conditions de stationnarité

$$\mathcal{H}_u^T = 0 \quad (\text{III-12})$$

$$\dot{\lambda} = -\mathcal{H}_x^T \quad (\text{III-13})$$

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u \quad (\text{III-14})$$

En utilisant (III-9) et (III-11), nous aurons

$$\mathcal{H}_u^T = R(x)u + B^T(x)\lambda \quad (\text{III-15})$$

$$= R(x)[-R^{-1}(x)B^T(x)P(x)x] + B^T(x)\lambda \quad (\text{III-16})$$

$$= B^T(x)[\lambda - P(x)x] \quad (\text{III-17})$$

Donc,  $\mathcal{H}_u^T = 0$  si nous choisissons

$$\lambda = P(x)x \quad (\text{III-18})$$

La satisfaction de l'équation (III-18) pour tout temps satisfera la condition d'optimalité  $\mathcal{H}_u$ . De là, nous allons ignorer la notation de l'argument ( $x$ ) pour la simplicité. En dérivant (III-18) par rapport au temps on aura :

$$\dot{\lambda} = \dot{P}x + P\dot{x} \quad (III-19)$$

En utilisant la condition d'optimalité (III-13), nous aurons également

$$\dot{\lambda} = -Qx - \frac{1}{2}x^T Q_x(x)x + \frac{1}{2}u^T R_x(x)u - (x^T A_x^T + A^T + u^T B_x^T)\lambda \quad (III-20)$$

L'équivalence de (III-19) et (III-20) avec des substitutions de (III-2) et (III-9) donnera :

$$\dot{P}x + P(Ax - BR^{-1}B^T Px) = -Qx - \frac{1}{2}x^T Q_x x - \frac{1}{2}u^T R_x u - (x^T A_x^T + A^T + x^T PBR^{-1}B_x^T)Px \quad (III-21)$$

Après organisation on aura :

$$\dot{P}x + \frac{1}{2}x^T Q_x x + \frac{1}{2}u^T R_x u + x^T A_x^T Px - x^T PBR^{-1}B_x^T Px + [A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q]x = 0 \quad (III-22)$$

En outre, à partir de (III-8) on note que le terme entre parenthèses est la régulation non linéaire SDRE, ce qui est égal à zéro, et en remplaçant  $u$  une fois de plus, (III-22) se réduit à :

$$\dot{P}x + \frac{1}{2}x^T Q_x x + \frac{1}{2}x^T PBR^{-1}R_x R^{-1}B^T Px + x^T A_x^T Px - x^T PBR^{-1}B_x^T Px = 0 \quad (III-23)$$

C'est la condition nécessaire du SDRE pour l'optimalité qui doit être satisfaite pour que la solution en boucle fermée soit localement optimale. Le côté gauche de (III-23) se réduit à zéro dans le cas standard (temps infini) de la régulation linéaire quadratique, donc cette méthode est une véritable généralisation de la théorie LQR.

## Cas scalaire

Dans le cas de  $x$  scalaire. La seule paramétrisation SDC est donnée par

$$a(x) = f(x)/x. \quad (III-24)$$

### Théorème III.2. [58]

Dans le cas de  $x$  scalaire, la solution SDRE est globalement optimale.

Preuve :

Puisque  $a(x) = f(x)/x$ , l'équation de Riccati dépendante de l'état est donnée par

$$2 \frac{f(x)}{x} p - \frac{g^2(x)}{r(x)} p^2 + q(x) = 0 \quad (\text{III-25})$$

ce qui donne la solution définie positive

$$p = \frac{r(x)}{g^2(x)} \left[ \frac{f(x)}{x} + \sqrt{\frac{f^2(x)}{x^2} + \frac{g^2(x)q(x)}{r(x)}} \right] \quad (\text{III-26})$$

On montre tout d'abord que le critère d'optimalité SDRE est satisfait. Puisque  $x$  est scalaire, le critère d'optimalité SDRE est réduit à

$$\dot{p} + \frac{1}{2} q_x x + \frac{1}{2} \frac{g^2}{r^2} r_x p^2 x + a_x p x - \frac{g}{r} g_x p^2 x = 0 \quad (\text{III-27})$$

Après la dérivation partielle de l'équation (III-24) par rapport à  $x$  et en prenant la dérivée de l'équation (III-26) par rapport au temps, il est facile de montrer que l'équation (III-26) satisfait à l'équation (III-27). Les détails des manipulations algébriques sont omis pour abréviation.

Etant donné que l'indice de performance est convexe et la contrainte différentielle est linéaire en  $u$ , et que  $u$  est scalaire, il n'existe qu'une seule solution qui est donc globale.

### Cas multivariable

En général, le critère d'optimalité SDRE (III-23) ne sera pas satisfait pour une paramétrisation SDC donnée  $A(x)$  dans le cas multivariable. Nous verrons, cependant, qu'il existe toujours une famille infinie de la paramétrisation SDC de la forme  $A(x, \alpha)$  et en sélectionnant proprement  $\alpha$  comme une fonction de temps, le critère d'optimalité peut en effet être satisfait, à condition que le choix de  $\alpha$  existe.

Dans le cas de multi-états, il ya un nombre infini des paramétrisations SDC [58, 59] qui existent pour (III-2). La preuve repose sur la démonstration qu'au moins deux paramétrisations existent, et que toute combinaison linéaire de ces deux paramétrisations est également une paramétrisation SDC valide.

Puisque le problème est multivariable,  $x$  possède au moins deux composants,  $x_1$  et  $x_2$ . Supposons

qu'il existe un terme scalaire non linéaire  $f_i(x)$  figurant dans l'une des équations d'état. Alors, dans cette équation d'état, une paramétrisation a la non-linéarité  $f_i(x)/x_1$  apparaissant comme un coefficient de  $x_1$  tandis qu'une deuxième paramétrisation a la non-linéarité  $f_i(x)/x_2$  apparaissant comme un coefficient de  $x_2$ . Donc, il existe toujours au moins deux paramétrisations.

Donc si on a  $A_1(x)$  et  $A_2(x)$  deux paramétrisations SDC distinctes, alors  $f(x) = A_1(x)x = A_2(x)x$ . Si on considère l'hyperplan de matrices SDC  $A(x, \alpha) = \alpha A_1(x) + (1 - \alpha)A_2(x)$ , on trouve

$$\begin{aligned}
 A(x, \alpha)x &= \alpha A_1(x)x + (1 - \alpha)A_2(x)x \\
 &= \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(x) \\
 &= \alpha f(x) + f(x) - \alpha f(x) \\
 &= f(x)
 \end{aligned} \tag{III-28}$$

Par conséquent  $A(x, \alpha)$  est une famille infinie de paramétrisations SDC.

Les auteurs de [58] conjecturent alors l'existence d'une paramétrisation optimale SDC qui conduit à une solution optimale  $P(x, \alpha)$  de (III.8) et (III.23), et proposent des procédures pour la trouver.

### III.2.1. Simplification de la condition nécessaire de l'optimalité

Rappelons que dans le problème du régulateur non linéaire SDRE nous voulons trouver la commande  $u$  qui résout l'équation du problème de commande optimale suivante (notez que la notation de dépendance  $x$  a été supprimée pour abréviation) :

$$0 = \min_u \mathcal{H} = \min_u \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + \lambda^T [A x + B u] \tag{III-29}$$

En invoquant la condition nécessaire du premier ordre  $\mathcal{H}_u = 0^T$  et en supposant que  $R = R^T$ , on obtient :

$$u_0^T R + \lambda^T B = 0 \tag{III-30}$$

où nous avons utilisé la notation  $u_0$  pour la commande optimale. Faire l'association  $\lambda = P x$  et par la résolution de l'équation ci-dessus nous obtenons :

$$u_0(x) = -R^{-1} B^T P x \tag{III-31}$$

En substituant (III-31) dans (III-29) et en simplifiant on aura :

$$x^T [A^T P + P^T A - P^T B R^{-1} B^T P + Q] x = 0 \quad (\text{III-32})$$

Qui peut être résolue en mettant l'expression entre crochets égale à zéro, ce qui donne l'équation de Riccati dépendante de l'état dans le cas où nous supposons que  $P = P^T$  comme dans la section III.2. Une équation du vecteur supplémentaire de dimension  $n$  qui doit être satisfaite pour que la méthode SDRE satisfère les conditions nécessaires du problème du régulateur optimal non linéaire. Cette équation, appelée la condition nécessaire d'optimalité du SDRE, permet de poursuivre la trajectoire du vecteur optimale. L'équation donnée à la section III.2 est la suivante (en supposant  $P = P^T$ )

$$\dot{P}x + \frac{1}{2} x^T \frac{\partial Q}{\partial x} x + \frac{1}{2} x^T P B R^{-1} \frac{\partial R}{\partial x} R^{-1} B^T P x + x^T \frac{\partial A}{\partial x} P x - x^T P B R^{-1} \frac{\partial B^T}{\partial x} P x = 0 \quad (\text{III-33})$$

qui est une équation compliquée comportant des tenseurs du troisième ordre et la dérivée dans le temps de la matrice P. Si nous mettons  $x$  en facteur vers la droite dans (III-33), puis mettons le terme multipliant à gauche égale à zéro, on aura  $n^2$  équations de contraintes à résoudre. Dans cette section, nous dérivons une forme alternative de (III-33) qui est significativement plus simple, en fournissant également une explication physique de l'obligation résultant et montrer que pour P symétrique la condition nécessaire d'optimalité place en fait  $n(n-1)/2$  au lieu de  $n^2$  contraintes additionnelles sur le problème de la commande. La dérivation de cette condition nécessaire simplifiée tire avantage du fait que (III-32) est satisfaite par notre choix de A et P, et est présentée ci-dessous.

Nous commençons par considérer le cas le plus général dans lequel P n'est pas nécessairement symétrique. Différencier  $\lambda = Px$ , pour le système en boucle fermée, on obtient :

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial Px}{\partial x} \dot{x} = \left[ \frac{\partial P}{\partial x} x + P \right] (Ax + Bu_0) \quad (\text{III-34})$$

En transposant, nous obtenons :

$$\dot{\lambda}^T = (x^T A^T + u_0^T B^T) \left[ P^T + x^T \frac{\partial P^T}{\partial x} \right] \quad (\text{III-35})$$

Pour l'optimalité, nous devons satisfaire :

$$\dot{\lambda}^T = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \quad (\text{III-36})$$

En remplaçant la partie de droite (III-36) (rappelons que  $u$  et  $\lambda$  sont considérés comme des variables indépendantes de  $x$ ), on trouve :

$$\dot{\lambda}^T = -x^T Q - \frac{1}{2} x^T \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} x \right] - \frac{1}{2} u^T \left[ \frac{\partial R}{\partial x} u \right] - \lambda^T \left[ \frac{\partial A}{\partial x} x + A + \frac{\partial B}{\partial x} u \right] \quad (\text{III-37})$$

En tenant compte du fait que sur la trajectoire optimale  $u = u_0$  on aura :

$$\dot{\lambda}^T = -x^T Q - \frac{1}{2} x^T \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} x \right] - \frac{1}{2} u_0^T \left[ \frac{\partial R}{\partial x} u_0 \right] - \lambda^T \left[ \frac{\partial A}{\partial x} x + A + \frac{\partial B}{\partial x} u_0 \right] \quad (\text{III-38})$$

Maintenant, rappelons que pour satisfaire (III-32), on doit satisfaire :

$$\mathcal{H}(x, u_0) = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u_0^T R u_0 + x^T P^T [A x + B u_0] = 0 \quad (\text{III-39})$$

Pour tout  $x$ . Alors, la dérivée partielle de (III-39) par rapport à  $x$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} & x^T Q + \frac{1}{2} x^T \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} x \right] + \frac{1}{2} u_0^T \left[ \frac{\partial R}{\partial x} u_0 \right] + [u_0^T R + x^T P^T B] \frac{\partial u_0}{\partial x} + x^T P^T \left[ \frac{\partial A}{\partial x} x + A + \frac{\partial B}{\partial x} u_0 \right] \\ & + (x^T A^T + u_0^T B^T) \left[ P + \frac{\partial P}{\partial x} x \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-40})$$

Remplaçons  $x^T P^T$  avec  $\lambda^T$ , en utilisant (III-30) de telle sorte que le coefficient de  $\frac{\partial u_0}{\partial x}$  s'annule, et par cette réarrangement on aura :

$$-x^T Q - \frac{1}{2} x^T \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} x \right] - \frac{1}{2} u_0^T \left[ \frac{\partial R}{\partial x} u_0 \right] - \lambda^T \left[ \frac{\partial A}{\partial x} x + A + \frac{\partial B}{\partial x} u_0 \right] = (x^T A^T + u_0^T B^T) \left[ P + \frac{\partial P}{\partial x} x \right] \quad (\text{III-41})$$

En substituant (III-41) dans (III-38), on obtient :

$$\dot{\lambda}^T = (x^T A^T + u_0^T B^T) \left[ P + \frac{\partial P}{\partial x} x \right] \quad (\text{III-42})$$

Alors, en comparant (III-42) à (III-35), nous voyons que pour atteindre la solution optimale, nous devons avoir :

$$(x^T A^T + u_0^T B^T) \left[ P^T + x^T \frac{\partial P^T}{\partial x} \right] = (x^T A^T + u_0^T B^T) \left[ P + \frac{\partial P}{\partial x} x \right] \quad (\text{III-43})$$

C'est la condition nécessaire d'optimalité simplifiée qui est beaucoup plus facile à travailler que (III-33), à partir de (III-43) on doit avoir :

$$P^T + x^T \frac{\partial P^T}{\partial x} = P + \frac{\partial P}{\partial x} x \quad (\text{III-44})$$

Si nous imposons à présent l'hypothèse que  $P = P^T$ , la SDRE serait simplifiée à :

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (\text{III-45})$$

tandis que (III-44) devient :

$$x^T \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} x \quad (\text{III-46})$$

ou

$$x^T \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} x = 0 \quad (\text{III-47})$$

Une interprétation de (III-44) est fournie par l'utilisation de la théorie de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Nous voyons qu'en général, (III-44) est une équation matricielle en  $x$  qui impose des  $n^2$  contraintes scalaires sur le problème d'optimisation. Pour  $P = P^T$  cependant, en examinant la version étendue de (III-47), on peut voir que les éléments diagonaux de la partie gauche de (III-47) sont automatiquement nuls en raison de l'hypothèse de symétrie sur  $P$ . En outre, les éléments hors diagonale de la partie gauche de (III-47) sont égales à leurs homologues symétriques en raison de l'hypothèse de symétrie. Alors, dans le cas de symétrie  $P$ , la partie gauche de (III-47) est une fonction matricielle symétrique de telle sorte que (III-47) impose  $k=n(n-1)/2$  contraintes sur le problème.

### III.2.2. Algorithme de la solution numérique de l'optimalité

Nous avons donc développé et mis en œuvre une approche de la solution numérique du SDRE au problème du régulateur non linéaire optimal basée sur les résultats de la section III.2.1. Dans [59], l'auteur propose deux façons possibles pour avoir la condition nécessaire d'optimalité du SDRE (III-33). La première consiste à assumer le paramètre vectoriel de la factorisation SDC  $\alpha$  une fonction explicite du temps, l'autre façon est d'assumer  $\alpha$  une fonction explicite du vecteur d'état  $x$ . Ils ont alors décrit un algorithme pour résoudre (III-33) basée sur  $\alpha = \alpha(t)$ , ce qui implique :

#### Procédure 1

1. choisir  $\alpha(0)$
2. résoudre la SDRE pour  $P(x, \alpha)$

3. différencier la SDRE par rapport au  $x_i$  et  $\alpha_i$  pour obtenir des équations de Lyapunov pour  $P_{x_i}$  et  $P_{\alpha_i}$
4. résoudre ces équations de Lyapunov
5. substituer les solutions  $P_{x_i}$  et  $P_{\alpha_i}$  dans la condition nécessaire d'optimalité et la résoudre algébriquement pour obtenir  $\dot{\alpha}$ .
6. intégrer sur un pas de temps, et revenir à l'étape 2 ci-dessus jusqu'à ce que  $\alpha(t)$  diverge.
7. ajuster de façon itérative  $\alpha(0)$  jusqu'à ce que  $\dot{\alpha}(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

Nous proposons aussi une autre procédure similaire à la solution ci-dessus, mais sur la base de la combinaison des deux hypothèses, c'est-à-dire  $\alpha = \alpha(x, t)$ . A chaque pas de temps nous laissons chaque  $\alpha_i$  être exprimé comme un polynôme (d'ordre désiré fixe) en  $x$  avec des coefficients constants inconnus (sur un pas de temps)  $\alpha_{il}$ . La méthode proposée est alors la suivante :

### **Procédure 2**

1. empiler les  $\alpha_{il}$  dans un nouveau vecteur inconnu  $\theta$
2. choisir  $\theta_0$  ( $\theta_0 = [0 \dots 0]^T$  peut être un bon choix)
3. résoudre la SDRE pour  $P(x, \theta)$
4. suivre l'étape 3 dans la procédure 1 en substituant  $\theta_i$  pour  $\alpha_i$
5. différencier les expressions de l'étape 4 ci-dessus par rapport à  $x_i$  et  $\theta_i$  pour obtenir des équations de Lyapunov pour  $P_{x_i \theta_i}$ ,  $P_{\theta_i^2}$  (la partielle de P par rapport à  $\theta_i$  deux fois)
6. utiliser les informations provenant de l'étape précédente pour former le gradient de notre condition nécessaire d'optimalité simplifiée (III-47) par rapport au vecteur du paramètre inconnu  $\theta$
7. utiliser une procédure itérative pour trouver la racine comme la méthode de Newton, pour calculer la valeur suivante de  $\theta$  (note: nous ne pouvons pas avoir besoin de l'étape précédente si l'on choisit une autre méthode qui ne nécessite pas de gradients)
8. retourner à l'étape 3 et itérer jusqu'à la convergence du  $\theta$
9. utiliser les valeurs obtenues de P et  $\alpha$  pour former le système en boucle fermée
10. intégrer au pas de temps suivant et répéter, en utilisant la dernière valeur de  $\theta$  comme nouvelle estimation initiale dans l'étape 2.

Notez qu'en utilisant cette procédure, nous avons converti notre problème de commande optimale en un problème d'optimisation des paramètres à résoudre à chaque pas de temps. Il est

également à noter que cette procédure permet effectivement à  $\alpha$  d'être une fonction du temps et du vecteur d'état, car il est possible d'obtenir un vecteur  $\theta$  variant dans le temps. Une telle méthode a au moins un avantage par rapport à la procédure 1, qui consiste en ce que nous avons une bonne supposition initiale de  $\theta$ , puisque toute valeur de  $\theta$  avec des zéros ou des uns dans les parties des coefficients constants comprend une paramétrisation valide.

### III.2.3. Stabilité globale

#### Théorème III.3. [58]

Supposons que  $Q(x)$  est choisie suffisamment grande ( $\lambda_{\min}\{Q\}$  suffisamment grande) et/ou que  $R(x)$  est choisie suffisamment petite ( $\lambda_{\max}\{Q\}$  suffisamment petite) de sorte que  $\dot{P} - Q - PgR^{-1}g^TP < 0$  pour tout  $x$ . Alors, si la paramétrisation SDC du système non linéaire est fortement contrôlable et fortement observable, la solution en boucle fermée est globalement asymptotiquement stable.

Preuve :

Soit  $V(x) = x^TP(x)x$  est la fonction de Lyapunov candidate, où  $P(x)$  est la solution de l'équation de Riccati dépendante de l'état (III.8).  $V(x) > 0$  puisque  $P(x) > 0$  en raison de l'observabilité de la paramétrisation SDC  $A(x)$ . Maintenant, en utilisant les équations (III.4), (III-6), (III.8) et (III.9), on aura :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x^T\dot{P}x + x^TP\dot{x} + \dot{x}^TPx \\ &= x^T\dot{P}x + x^TP(Ax - gR^{-1}g^TPx) + (Ax - gR^{-1}g^TPx)^TPx \\ &= x^T(\dot{P} + PA - PgR^{-1}g^TP + A^TP - PgR^{-1}g^TP)x \\ &= x^T(\dot{P} - Q - PgR^{-1}g^TP)x\end{aligned}$$

Par conséquent,  $\dot{V} < 0$  basée sur la sélection supposée de  $Q$  et  $R$ . Si  $A(x)$  est une paramétrisation fortement contrôlable et fortement observable, il existe une matrice constante  $\bar{P} > 0$  telle que  $V(x) = x^TP(x)x \geq x^T\bar{P}x$  ce qui implique que  $V(x) \rightarrow \infty$  lorsque  $\|x\| \rightarrow \infty$ . Par conséquent, l'équilibre à l'origine est globalement asymptotiquement stable.

On peut se demander s'il existe un ensemble non vide de  $Q$  et  $R$  qui garantit que  $\dot{P} - Q - PgR^{-1}g^TP < 0$  pour tout  $x$ . La réponse est oui et une méthode pour garantir la sélection d'une telle  $Q$  et  $R$  est fournie dans [60].

### III.2.4. Robustesse

La technique du SDRE produit un système en boucle fermée qui est robuste aux variations des paramètres et/ou des non-linéarités non modélisées. Soit les symboles  $\angle\{.,.\}$ ,  $\langle.,.\rangle$ , et  $\|\cdot\|_{2,W}$  désignent l'angle entre deux vecteurs, le produit intérieur, et la norme pondérée du 2, respectivement. Nous avons ce qui suit.

#### Théorème III.4. [58]

Soit le système non linéaire actuel donné par

$$\dot{x} = f(x) + \beta(x)c(x) + [g(x) + k(x)]u \quad (\text{III-48})$$

où la scalaire  $\beta(x) > 0$ . Supposons que  $Q(x)$  est choisie suffisamment grande de sorte que  $\dot{P} - Q < 0$  pour tout  $x$ . Alors si la paramétrisation SDC est fortement contrôlable et fortement observable, la solution en boucle fermée basée sur la dynamique modélisée

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (\text{III-49})$$

est globalement asymptotiquement stable si :

$$\beta(x) \leq \frac{\|g^T(x)P(x)x\|_{2,R^{-1}}^2}{2\langle P(x)x, C(x)x \rangle} \quad \forall x \quad \text{si } \langle P(x)x, C(x)x \rangle > 0 \quad (\text{III-50})$$

ou

$$\beta(x) < \infty \quad \forall x \quad \text{si } \langle P(x)x, C(x)x \rangle \leq 0 \quad (\text{III-51})$$

telle que la condition suivante aux deux cas est vérifiée

$$\angle\{k^T P x, R^{-1} g^T P x\} \leq 90^\circ \quad (\text{III-52})$$

où  $C(x)$  est la paramétrisation SDC du  $c(x)$ , c.-à-d.,

$$c(x) = C(x)x \quad (\text{III-53})$$

Preuve :

Soit  $V(x) = x^T P(x)x$  est la fonction de Lyapunov candidate, où  $P(x)$  est la solution de l'équation de Riccati dépendante de l'état (III.8).  $V(x) > 0$  et est radialement non bornée en raison des

hypothèses sur la paramétrisation SDC  $A(x)$ . En utilisant les équations (III.5), (III-6), (III.8), (III.9), (III-48) et (III.53), nous avons :

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= x^T \dot{P}x + x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x \\
 &= x^T \dot{P}x + x^T P [f - (g + k)R^{-1}g^T P x + \beta c] + [f - (g + k)R^{-1}g^T P x + \beta c]^T P x \\
 &= x^T (\dot{P} + PA - P g R^{-1} g^T P + A^T P - P g R^{-1} g^T P) x \\
 &\quad + x^T (\beta C^T P + \beta P C - P k R^{-1} g^T P - P g R^{-1} k^T P) x \\
 &= x^T (\dot{P} - Q - P g R^{-1} g^T P) x + \beta x^T (C^T P + P C) x - 2x^T P k R^{-1} g^T P x
 \end{aligned}$$

Nous savons par hypothèse que  $\dot{P} - Q < 0$  et que  $P g R^{-1} g^T P > 0$ . Si  $\angle\{k^T P x, R^{-1} g^T P x\} \leq 90^\circ$ ,  $2x^T P k R^{-1} g^T P x \geq 0$ . Maintenant nous devons seulement garantir que  $x^T P g R^{-1} g^T P x - \beta x^T (C^T P + P C) x$  est non négatif; ce sera le cas pour toute  $\beta(x)$  finie si  $\beta x^T (C^T P + P C) x \leq 0$ . Si  $\beta x^T (C^T P + P C) x > 0$ , on a :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq x^T P g R^{-1} g^T P x - \beta x^T (C^T P + P C) x \iff \\
 0 &\leq \|g^T(x)P(x)x\|_{2,R^{-1}}^2 - 2\beta(x) \langle P(x)x, C(x)x \rangle \iff \\
 \beta(x) &\leq \frac{\|g^T(x)P(x)x\|_{2,R^{-1}}^2}{2\langle P(x)x, C(x)x \rangle} \quad \text{si } \langle P(x)x, C(x)x \rangle > 0
 \end{aligned}$$

Il est intéressant d'observer que la magnitude de la non-linéarité non modélisée  $k(x)$  n'a pas d'effet sur la stabilité. Ce qui importe est plutôt combien  $k^T(x)$  tourne le vecteur  $P(x)x$ , ce qui correspond à combien  $k(x)$  est en train de changer la direction dans laquelle la commande est appliquée.

### III.2.5. Exemples illustratifs pour la régulation non linéaire

Dans cette section, la méthode du SDRE est appliquée à plusieurs problèmes de régulateur non linéaire.

#### Exemple III.1

Le premier exemple est le problème scalaire trouvé dans Freeman et Kokotovic [61].

$$\text{Minimiser } I = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^2 + u^2 dt \quad (\text{III-54})$$

par rapport à  $x$  et  $u$  qui sont soumis à la contrainte

$$\dot{x} = x - x^3 + u \quad (\text{III-55})$$

Freeman et Kokotovic ont utilisé cet exemple pour illustrer les pièges potentiels de la commande de la linéarisation du feedback. Un tel contrôleur stabilisant est donné par :

$$u_{fl} = x^3 - 2x \quad (\text{III-56})$$

Ce contrôleur annule la non-linéarité  $-x^3$  et il résulte que la dynamique de la boucle fermée devient :

$$\dot{x} = -x \quad (\text{III-57})$$

Bien que ce contrôleur donne la stabilité exponentielle globale sur  $x = 0$ , pour les grandes  $x$  il exige une activité de commande énorme qui peut provoquer l'instabilité en présence de saturation de l'actionneur ou des incertitudes.

Pour ce problème

$$f(x) = x - x^3 \quad a(x) = 1 - x^2 \quad g(x) = 1 \quad q = 1 \quad r = 1 \quad (\text{III-58})$$

En utilisant la méthode du SDRE, l'équation de Riccati dépendante de l'état est donnée par :

$$2(1 - x^2)p - p^2 + 1 = 0 \quad (\text{III-59})$$

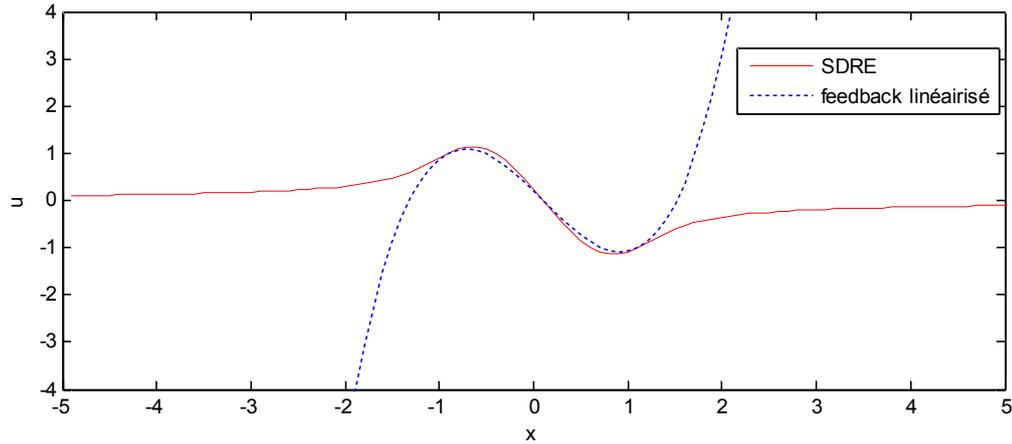
qui donne la solution définie positive

$$p(x) = 1 - x^2 + \sqrt{(1 - x^2)^2 + 1} \quad (\text{III-60})$$

La commande est alors donnée par  $u = -p(x)x$  qui fournit la commande optimale dérivée par Freeman et Kokotovic pour ce problème qui est :

$$u_{opt} = -(x - x^3) - x\sqrt{x^4 - 2x^2 + 2} \quad (\text{III-61})$$

La figure III.1 illustre ces deux contrôleurs. On peut voir que  $u_{opt}$  utilise le fait que la non-linéarité se stabilise pour les grandes valeurs de  $x$  par une activité de commande très peu dans cette région.



**Figure III.1 :** Exemple de Freeman et Kokotovic

On peut voir que la solution du SDRE n'a pas annulé les bénéfices de la non-linéarité  $-x^3$ .

### Exemple III.2

Exemple III.2 qui est tiré de [58], est le système non holonome du Heisenberg qui, selon le théorème de Brockett ne peut pas être stabilisé avec une commande de feedback continue.

$$\dot{x}_1 = u_1$$

$$\dot{x}_2 = u_2$$

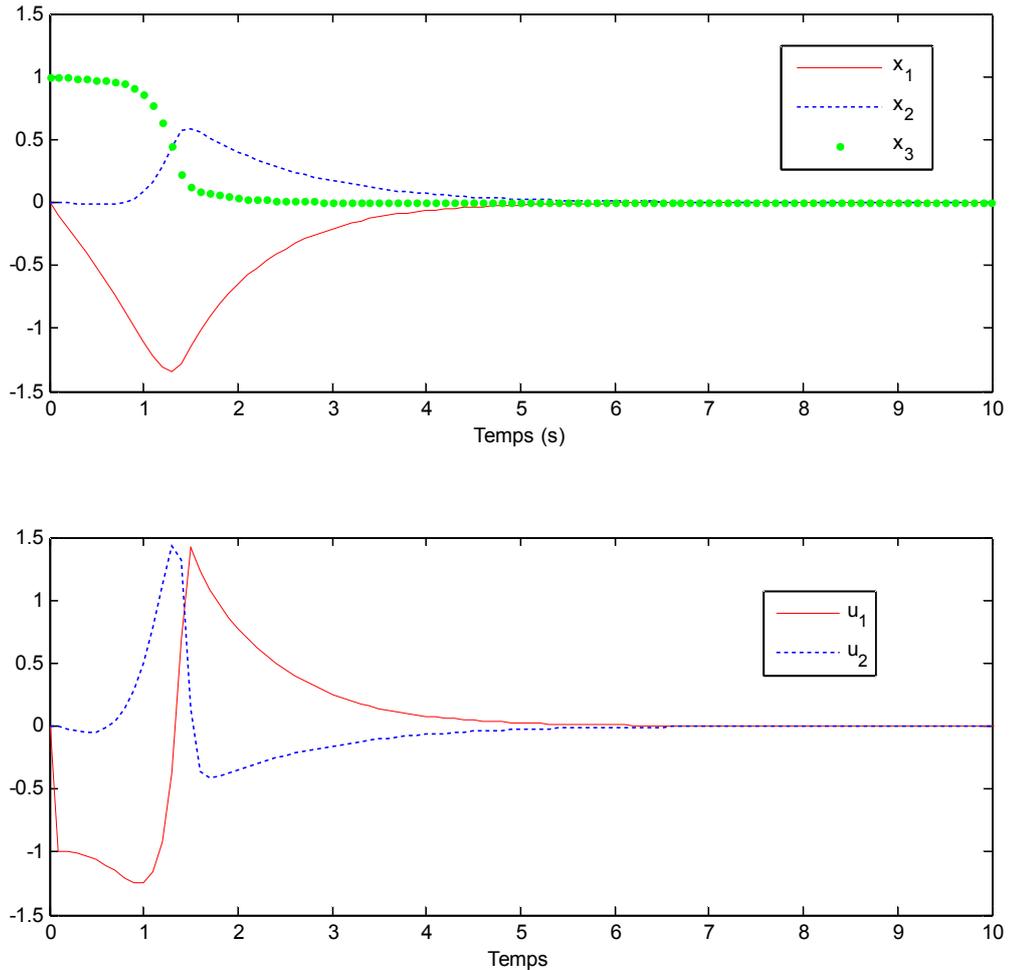
$$\dot{x}_3 = x_1 u_2 - x_2 u_1$$

(III-62)

Notez que dans ce système  $f(x) = 0$ . Cependant, nous pouvons paramétrer le système en choisissant  $A(x)$  tel que  $x$  se situe toujours dans son espace nul, c'est à dire,  $A(x)x = 0$  pour tout  $x$ . La figure III.2 montre la réponse de l'état et les commandes, respectivement, obtenus à partir de la méthode du SDRE en utilisant  $Q = I$ ,  $R = I$  et

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & -x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \end{bmatrix} \quad (III-63)$$

Comme on peut le constater, la méthode du SDRE produit une solution stabilisante. Alors qu'il apparaît dans la figure III.2 que les commandes sont continues, ce n'est pas le cas. Pour cet exemple, l'équation de Riccati n'a pas une solution lorsque  $x = 0$ . Alors, il ya une petite discontinuité dans les commandes de près de zéro à zéro après que l'état a été tirée vers le bas à un niveau extrêmement faible. A cet instant plus d'effort de commande n'est nécessaire.



**Figure III.2 :** Trajectoires d'état et des commandes du système non holonome du Heisenberg

**Exemple III.3**

Exemple III.3 de [58] montre que les limites dures peuvent être imposées sur les commandes de la méthode SDRE. Dans l'exemple III.1, on peut voir dans la figure III.1 que pour certaines valeurs de l'état, la commande est supérieure à un, nous pouvons imposer une contrainte dure sur la commande en posant le problème suivant :

$$\text{Minimiser } I = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^2 + u^2 dt \tag{III-64}$$

Par rapport à  $x$  et  $u$  qui sont soumis aux contraintes :

$$\dot{x} = x - x^3 + u \tag{III-65}$$

$$-\frac{3}{4} \leq u \leq \frac{3}{4} \tag{III-66}$$

Ce problème peut être transformé en un problème équivalent qui est de la forme du problème du régulateur non linéaire (III-1)-(III-2) en introduisant la variable slack  $x_2$  où

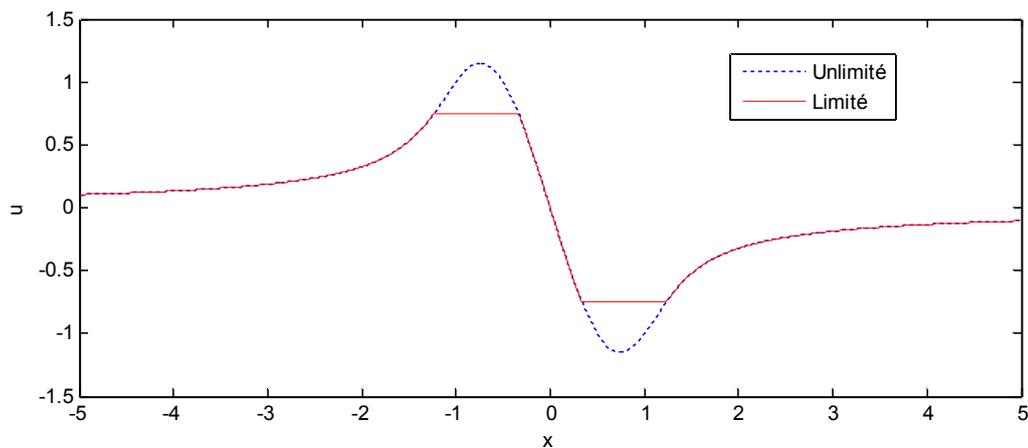
$$u = \frac{3}{4} \sin(x_2) \quad (\text{III-67})$$

Et en introduisant une commande intégrale définie par  $\dot{x}_2 = u_1$ . La figure III.3 compare la commande non contrainte avec la commande obtenue à partir de la méthode SDRE en utilisant la paramétrisation SDC.

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 - x_1^2 & \frac{3 \sin x_2}{2} \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-68})$$

Comme on le voit, une limite stricte sur  $u$  a été atteinte. La forme de la commande limitée durement à la figure III.3 allait changer.

En outre, nous pouvons imposer des limites sur le taux de changement de la commande par l'introduction d'une autre variable slack et employant une commande intégrale double.



**Figure III.3 :** Commande durement limitée

#### Exemple III.4

La génération de la commande non linéaire optimale en utilisant l'hyperplan  $A(x, \alpha)$  de paramétrisations SDC sera illustrée dans l'exemple III.4, et une comparaison avec la suboptimalité du SDRE est effectuée en utilisant les deux paramétrisations SDC de la forme  $A(x)$ .

Cette procédure a été mise en œuvre en Matlab en [59], dont les équations d'état sont données

ci-dessous :

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1^3 + x_2 + u_1 \quad (\text{III-69})$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_1^2 x_2 - x_2 + u_2$$

avec  $H = I_2$  et  $R = 2I_2$ , où  $I_2$  est la matrice d'identité de deux dimensions.

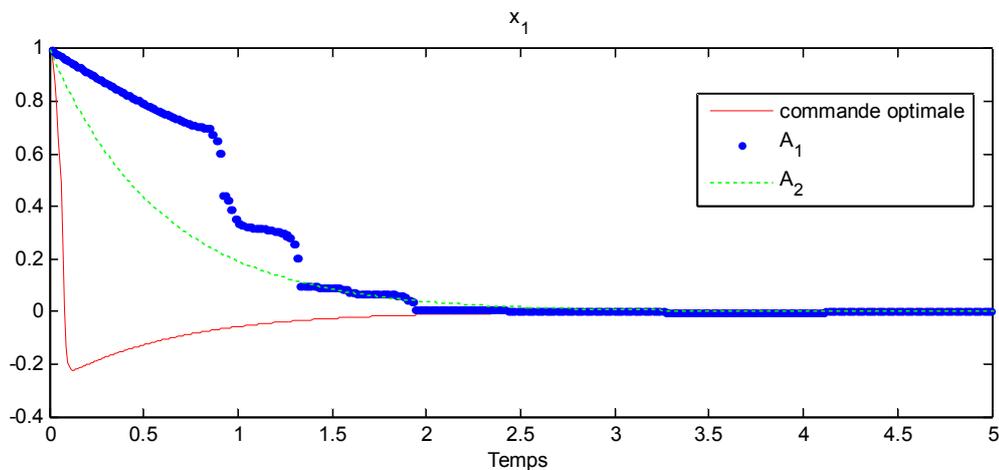
Nous sommes mesure de reproduire la commande optimale et suboptimale et les trajectoires de l'état à partir des conditions initiales  $x_0 = [1 \ 1]^T$ , Pour les cas suboptimaux nous prenons les deux paramétrisations suivantes :

$$A(x) = A_1(x) = \begin{bmatrix} -x_1^2 & \frac{x_1}{x_2} + 1 \\ 1 & x_1^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-70})$$

$$A(x) = A_2(x) = \begin{bmatrix} 1 - x_1^2 & 1 \\ 1 + x_1 x_2 & -1 \end{bmatrix}$$

Par l'hyperplan de paramétrisations  $A(x, \alpha) = \alpha A_1(x) + (1 - \alpha)A_2(x)$ , on détermine la trajectoire optimale, en utilisant les deux procédures soulignées dans la section III.2.2.

Pour la procédure 1, on a associé les figures (III.4)-(III.9) et (III.10)-(III.15) pour la procédure 2, ils indiquent les trajectoires optimales et suboptimales de commande et d'état, et également l'évolution de la condition nécessaire de l'optimalité et le vecteur du paramètre SDC dans le temps :



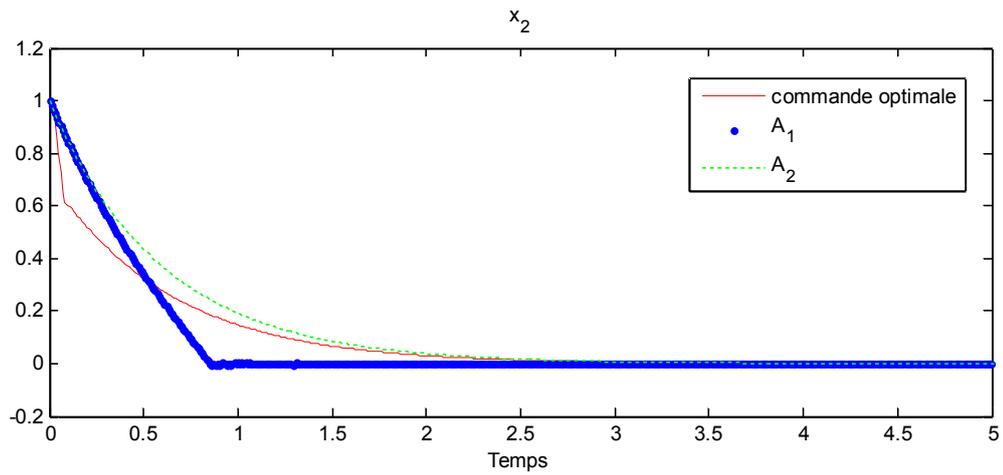


Figure III.4 : Trajectoires optimale et suboptimale d'état

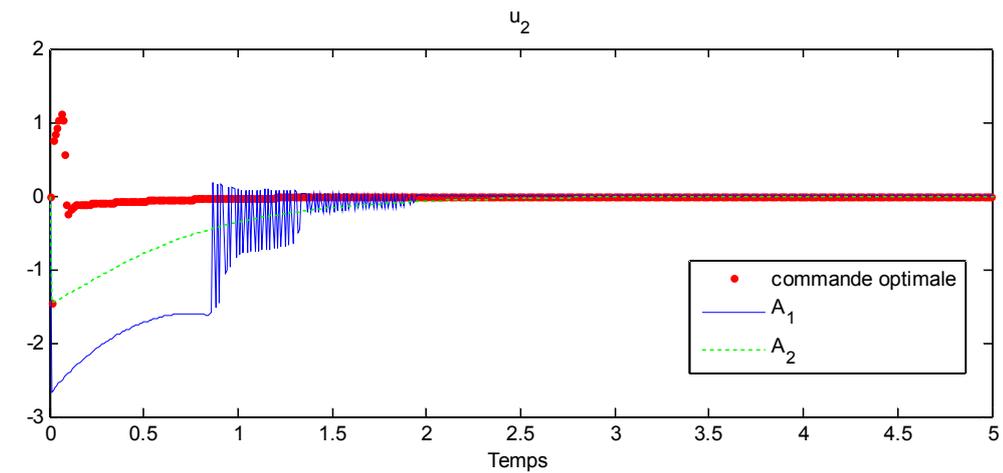
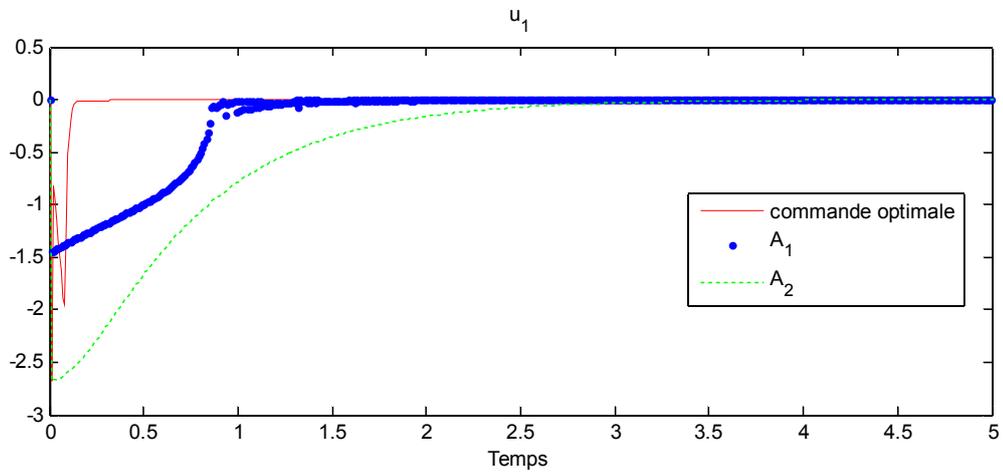
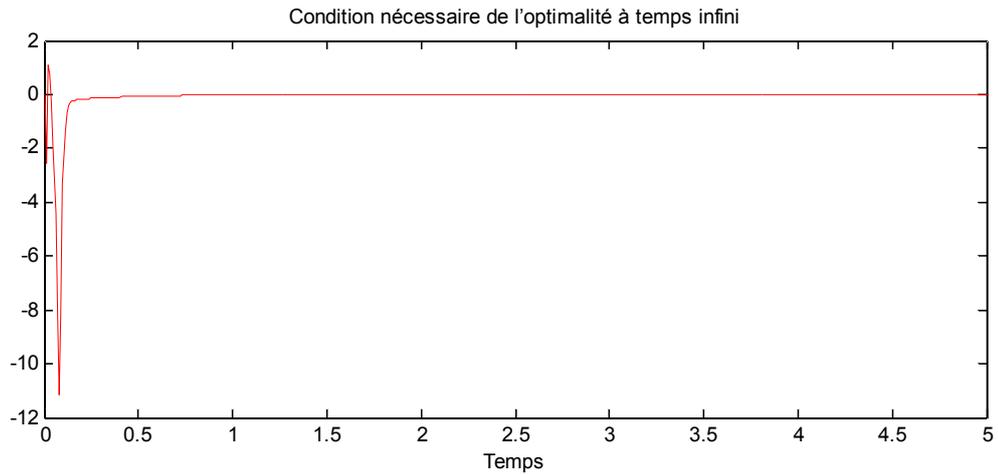
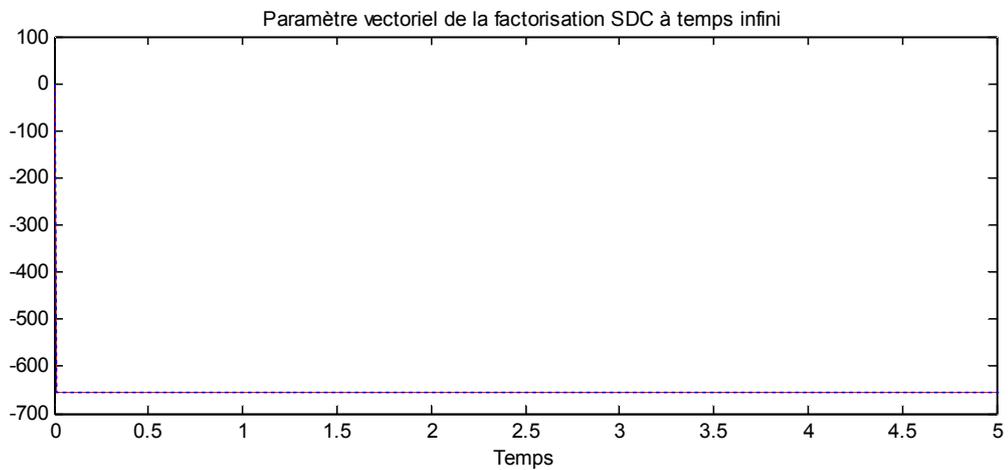


Figure III.5 : Trajectoires optimale et suboptimale de la commande

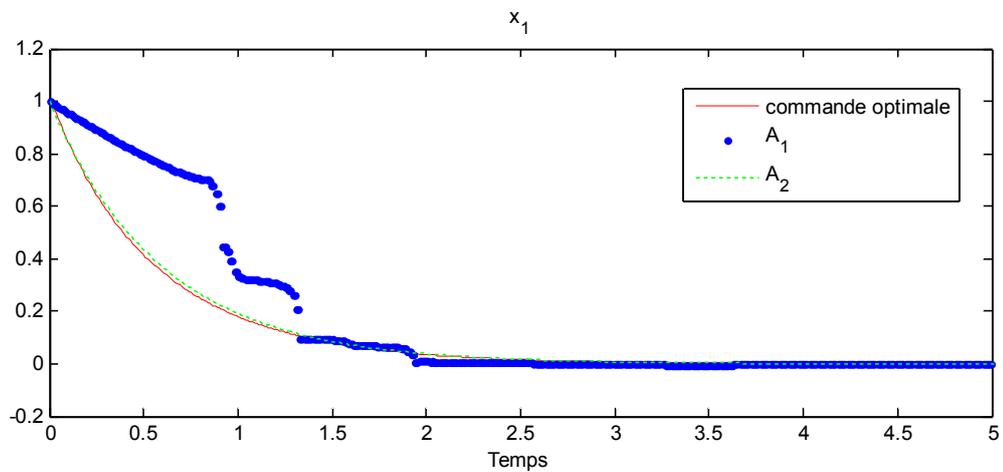


**Figure III.6 :** Condition nécessaire de l'optimalité dans le temps



**Figure III.7 :** Paramètre vectoriel optimal de la factorisation SDC  $\alpha$

Alors pour la procédure 2, nous avons les courbes suivantes :



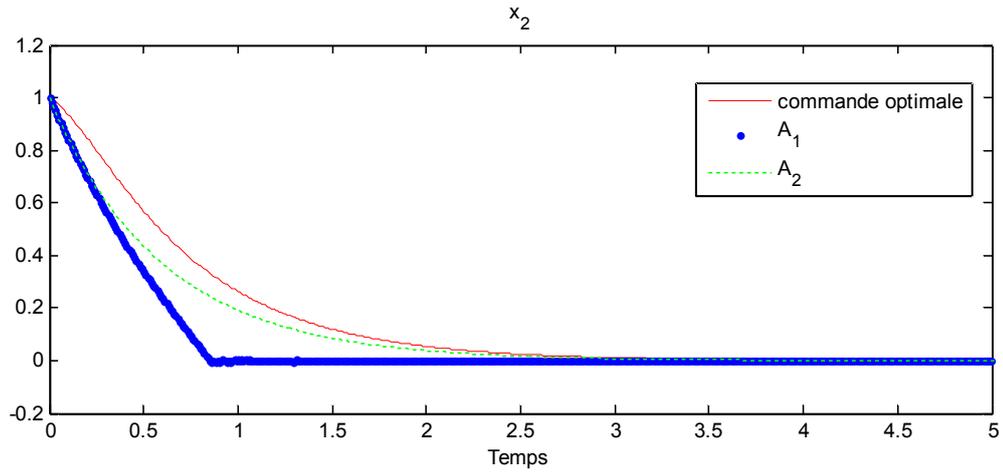


Figure III.8 : Trajectoires optimale et suboptimale d'état

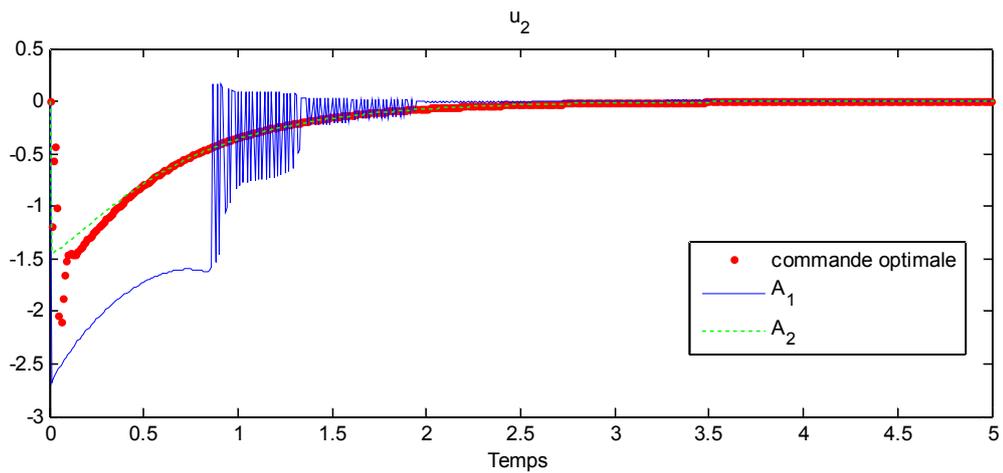
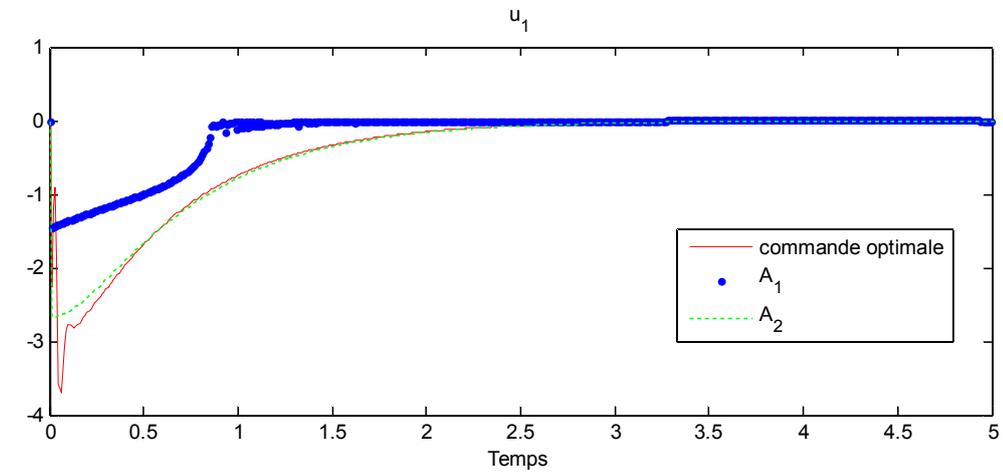
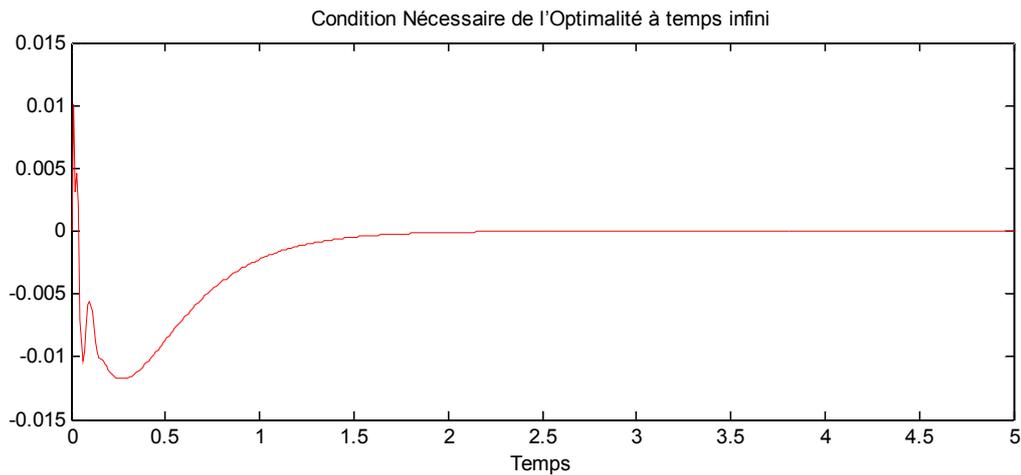
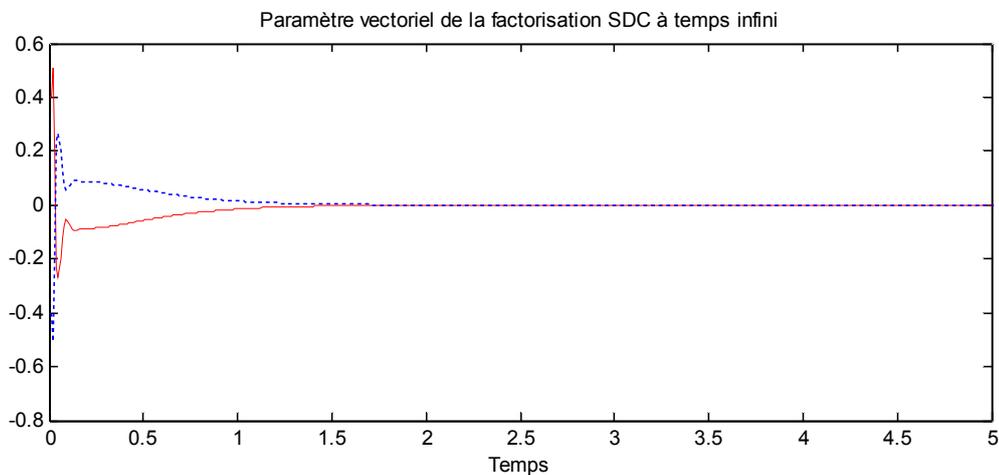


Figure III.9 : Trajectoires optimale et suboptimale de la commande



**Figure III.10 :** Condition nécessaire de l'optimalité dans le temps



**Figure III.11 :** Paramètre vectoriel optimal de la factorisation SDC  $\alpha$

La différence entre les deux procédures est apparue clairement. Pour la procédure 1, généralement les trajectoires d'état et de commande optimales convergent à l'origine rapidement en comparaison avec les trajectoires suboptimales, avec des dépassements des commandes pas nécessaires relativement à ceux des suboptimales.

Pour la procédure 2, on peut voir que les trajectoires (de commande et d'état) optimales se fendent et convergent rapidement vers les trajectoires suboptimales de la matrice  $A_2$ , avant que ces derniers n'atteignent zéro, avec des dépassements des commandes optimales plus grandes que ceux des suboptimales, contrairement à la procédure 1. La procédure 2 donne de cette expérience un comportement proche du comportement suboptimal de la matrice  $A_2$ .

### III.3. Conclusion

La régulation non linéaire via la technique de l'équation de Riccati dépendante de l'état (SDRE) est prise en considération. Une forme simple de condition suffisante pour satisfaire les conditions nécessaires du premier ordre de l'optimalité de la régulation non linéaire SDRE a été dérivée. En utilisant la condition nécessaire simplifiée de l'optimalité, nous avons proposé et validé un algorithme de solution numérique locale au problème optimal.

Il a été montré que dans certaines conditions, la méthode produit une commande globalement et asymptotiquement stabilisante et est robuste aux variations des paramètres. En outre, la méthode n'annule pas la non linéarité bénéfique. Pour un ensemble donné de conditions initiales, il a été démontré qu'une paramétrisation optimale de la forme  $A(x, \alpha)$  peut être calculée et donne la commande non linéaire optimale en forme de rétroaction.

Les commandes de régulation basées sur les solutions de l'équation de Riccati dépendante de l'état (SDRE) ont été montrées pour offrir des performances élevées, mais elles souffrent de propriétés de stabilité non prouvées, si les conditions illustrées précédemment pour la stabilité globale ne sont pas disponibles.

Les plans de recherche dans ce domaine comprennent l'application de cette technique de commande en combinaison avec d'autres méthodes de commande, similaires à celle de [62]. Le but de cette investigation serait de combiner les méthodes de telle manière que la vitesse et l'efficacité de la théorie de l'optimalité en fonction des algorithmes SDRE soient largement conservées alors que les propriétés de la stabilité et de la robustesse d'un algorithme différent sont fusionnées en elle, de sorte que les qualités de performance de commande constatées dans les exemples précédents peuvent être étendues avec confiance sur un domaine beaucoup plus vaste, comme nous le verrons dans les chapitres subséquents (IV et V).

---

## **CHAPITRE IV:**

# **Commandes non linéaires via la satisfaction à base CLF**

---

## IV.1. Introduction

Le design de Lyapunov a été, depuis son introduction en 1982, un outil important pour la conception de système de commande non linéaire, la stabilité et l'analyse de performance. La seconde méthode de Lyapunov est la méthode la plus commune pour prouver qu'un système en boucle fermée est asymptotiquement stable, généralement cela requiert que le concepteur construit une loi de commande, puis trouver une fonction des états définie positive dont la dérivée est négative le long des trajectoires du système. Dans le design de Lyapunov l'idée de base est que, en choisissant d'abord une fonction de Lyapunov candidate, puis la loi de commande de feedback peut être spécifiée telle qu'elle rend la dérivée de la fonction de Lyapunov candidate spécifiée définie négative ou semi-définie négative. Comme ces fonctions et commandes sont appelées fonctions de commande de Lyapunov (CLFs) et commandes stabilisantes basées sur CLF respectivement.

Ce chapitre présente une paramétrisation des lois de commande basées sur CLF qui permet la construction de contrôleurs à haute performance tout en garantissant la stabilité, les marges de gain robuste, et l'optimalité inverse. Cette paramétrisation est étendue à des systèmes aux perturbations via la notion de stabilité entrée-état et CLFs entrée-état.

L'outil principal qui est utilisé pour dériver cette paramétrisation est la théorie de satisfaction. La satisfaction est une méthode d'évaluation des décisions de commandes basées sur les coûts et les bénéfices qui découlent du choix d'une valeur de commande particulière, où les bénéfices d'une valeur de commande sont définis en termes de stabilité de Lyapunov de la boucle fermée pour cette paramétrisation, l'ensemble de satisfaction peut être utilisé pour paramétrer la classe entière des lois de commande qui rendent le système stable par rapport à cette fonction de Lyapunov.

## IV.2. Commandes de satisfaction à base CLF

Cette section présente une paramétrisation des lois de commande à base CLF qui permet la construction des contrôleurs tout en garantissant la stabilité, les marges de gain robuste, et l'optimalité. Le principal outil qui est utilisé pour dériver cette paramétrisation est la théorie de satisfaction qui repose sur la fonction de commande de Lyapunov. Un examen des fonctions de commande de Lyapunov et de la satisfaction est fait.

Avant, considérons le système non linéaire affine :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x} = f(x(t)) + g(x(t)) u(x(t)). \quad (\text{IV-1})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ , et  $u \in \mathbb{R}^m$ . On suppose que  $f$  et  $g$  sont des fonctions localement lipschitziennes, et que  $f(0) = 0$ .

L'existence et l'unicité des solutions de (IV-1) sont garanties lorsque le système dynamique  $\dot{x} = f + gu$  est localement lipschitzienne continu [63], donc nous supposons tout au long de cette section que  $f(x)$  et  $g(x)$  sont des fonctions continues localement lipschitziennes. De plus, nous désirons un signal de commande qui soit localement lipschitzienne loin de l'origine. Dans la section suivante l'exigence que la commande soit lipschitzienne sera détendue à la condition que cela soit continue, même si cela signifie que les solutions de (IV-1) peuvent ne pas être uniques.

### IV.2.1. Fonctions de commande de Lyapunov

La seconde méthode de Lyapunov est la méthode la plus commune pour prouver qu'un système en boucle fermée est asymptotiquement stable, généralement cela requiert que le concepteur construit une loi de commande, puis trouver une fonction des états définie positive dont la dérivée est négative le long des trajectoires du système.

Inversement dans ce chapitre, la seconde méthode de Lyapunov suppose la solution à notre problème, qui est la construction d'une loi de commande stabilisante. Un outil plus utile faciliterait la conception d'une loi de commande en plus de fournir une analyse de stabilité, et des fonctions de commande de Lyapunov (CLFs) ont été développées à cette fin.

Définition IV-1[64]:

Une fonction  $C^1 V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite une fonction de commande de Lyapunov (CLF) pour le système si  $V(x)$  est définie positive, radialement non bornée, et si

$$\inf_u \dot{V} = V_x^T (f + gu) < 0, \quad (\text{IV-2})$$

pour tout  $x \neq 0$ .

Cette définition est motivée par la considération suivante. Supposons qu'on a une fonction  $V$  définie positive et on veut s'assurer si cette fonction peut être utilisée comme une fonction de Lyapunov pour un système que nous tenons à le stabiliser. Pour déterminer si cela est possible, nous calculons la dérivée temporelle de cette fonction le long des trajectoires du système, c'est à dire, s'il est possible de rendre la dérivée négative à chaque point par un choix approprié de  $u$ , alors nous aurons atteint notre objectif et on peut stabiliser le système avec une fonction de Lyapunov  $V$  en vertu de ces actions de commande. C'est exactement la condition donnée en (IV-2).

Une condition équivalente sur le dérivé temporelle de  $V$  est que :

$$V_x^T g = 0 \implies V_x^T f < 0.$$

On voit que l'ensemble où  $V_x^T g = 0$  est significatif, parce que dans cet ensemble le système incontrôlable a la propriété  $V_x^T f < 0$ . Toutefois, si  $V_x^T f > 0$  lorsque  $V_x^T g = 0$ , alors  $V(x)$  n'est pas une CLF et ne peut pas être utilisée pour un design de feedback de stabilisation (une observation qui permet d'éliminer les mauvaises CLFs candidates).

Lorsque  $V(x)$  est une CLF, il ya de nombreuses lois de commande qui rendent  $\dot{V}(x, u(x))$  définie négative, dont l'une est donnée par une formule due à Sontag (1989). La construction d'une CLF est un problème difficile, qui a été résolu pour des classes spéciales de systèmes (linéarisation par retour, retour strict et systèmes feed-forward, etc.). Cela a été abondamment étudiée dans la littérature et références incluses. Nous n'allons pas se préoccuper de ce sujet. On supposera tout au long de ce chapitre qu'une CLF est déjà connue pour le système d'intérêt et accordera une attention particulière aux techniques de conception d'un contrôleur de stabilisation.

La propriété suivante doit être ajoutée afin d'assurer l'existence d'une commande presque lisse (continue à l'origine).

#### Définition IV-2[65]

La CLF  $V$  satisfait la petite propriété de commande s'il existe une loi de commande  $\alpha_c(x)$  continue dans  $\mathbb{R}^n$  telle que :

$$V_x^T f + V_x^T g \alpha_c < 0, \forall x \neq 0.$$

Cependant la connaissance d'une CLF est essentielle pour construire une commande stabilisante, c'est une condition suffisante: en donnant une CLF connue, il y a beaucoup de voies de dériver une loi de commande particulière.

Ce chapitre introduit la théorie de satisfaction qui consiste à développer une paramétrisation complète des stratégies de commande basées sur la CLF. Cela réduit la conception de lois de commande stabilisante et à performance élevée à la sélection de quelques paramètres de la satisfaction, tout en garantissant que la classe de commandes générées par une telle sélection représente toute la famille de lois de commande stabilisante de Lyapunov.

## IV.2.2. Satisfaction

Le paradigme de satisfaction appelle à la définition de deux fonctions d'utilité: la fonction de selectabilité  $p_s(u, x)$ , et la fonction de rejectabilité  $p_r(u, x)$ . Ces fonctions d'utilité dépendantes de l'état sont définies sur l'ensemble des valeurs de commande admissibles, et elles représentent des mesures du bénéfice et du coût, respectivement, à chaque valeur de commande.

Par conséquent, la selectabilité doit être grande pour des valeurs de commande qui sont souhaitables dans un certain sens, et la rejectabilité doit être grande pour des valeurs de commande qui sont coûteux à mettre en œuvre.

En outre, on définit  $0 < b(x) < \infty$  comme l'indice de sélectivité, éventuellement un paramètre dépendant de l'état qui quantifie le minimum de compromis entre coûts et bénéfices.

Après avoir défini la selectabilité, la rejectabilité et le rapport acceptable des deux mesures, il est possible de définir un ensemble sur l'espace de commande dont les éléments rapportent un rapport acceptable de coût/bénéfice.

### Définition IV-3[65]

L'ensemble de satisfaction  $S_b(x)$  est défini comme étant l'ensemble des valeurs de commande de telle sorte que la selectabilité multipliée par l'indice de sélectivité soit supérieure à la rejectabilité, soit :

$$S_b(x) = \left\{ u \in \mathbb{R}^m : p_s(u, x) > \frac{1}{b} p_r(u, x) \right\}.$$

En d'autres termes, l'ensemble satisfaisant est l'ensemble de toutes les valeurs de commande ponctuelle où les bénéfices instantanées de l'application de cette action l'emportent sur les coûts instantanés.

Noter que  $S_b(x)$  est un ensemble de valeurs de commande qui est défini ponctuellement à chaque état, et l'indice  $b$  indique que l'ensemble de satisfaction est paramétrée par la valeur de  $b$ : les grandes valeurs de l'indice de sélectivité réduisent la rejectabilité et il en résulte des ensembles de satisfaction plus larges, tandis que les petites valeurs de  $b$  renforcent la pondération à la rejectabilité et il en résulte des ensembles de satisfaction plus petits.

Jusqu'ici nous n'avons présenté aucune supposition qui garantit que  $S_b(x)$  s'est bien comporté, il peut être vide ou non lié. Des stratégies puissantes de commande peuvent être mises en application si quelques suppositions sont effectuées pour assurer certains de ces propriétés de régularité.

On s'intéresse au cas où  $S_b(x)$  est un ensemble contigu.

#### Lemme IV-1[65]

Si pour chaque  $x$ ,  $p_s(u, x)$  est une fonction concave en  $u$  et  $p_r(u, x)$  est une fonction convexe en  $u$ , alors  $S_b(x)$  est un ensemble convexe (et donc relié).

Preuve:

Nous devons montrer que si  $u_1, u_2 \in S_b(x)$ , alors  $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in S_b(x)$  pour  $\lambda \in [0,1]$ . Par définition, nous avons :

$$u_i \in S_b(x) \Rightarrow p_s(u_i, x) > \frac{1}{b} p_r(u_i, x), \quad i = 1, 2$$

$$\Rightarrow p_s(u_i, x) - \frac{1}{b} p_r(u_i, x) > 0, \quad i = 1, 2$$

$$\Rightarrow \lambda (p_s(u_1, x) - \frac{1}{b} p_r(u_1, x)) + (1 - \lambda) (p_s(u_2, x) - \frac{1}{b} p_r(u_2, x)) > 0,$$

Pour  $\lambda \in [0,1]$ . La concavité de  $p_s$  et la convexité de  $p_r$  impliquent que pour  $\lambda \in [0,1]$ ,

$$p_s(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2, x) \geq \lambda p_s(u_1, x) + (1 - \lambda) p_s(u_2, x)$$

$$p_r(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2, x) \leq \lambda p_r(u_1, x) + (1 - \lambda) p_r(u_2, x).$$

En utilisant ces faits dans l'expression ci-dessus on aura :

$$p_s(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2, x) - \frac{1}{b} p_r(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2, x) > 0,$$

ce qui implique que  $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in S_b(x)$ .

Ce résultat implique que  $S_b(x)$  est convexe et donc connecté. Afin de s'assurer que  $S_b(x)$  est non vide,  $p_s$  et  $p_r$  doivent d'abord être spécifiées.

Puisque la stabilité asymptotique est équivalente à notre exigence minimum qu'un système est régulé à l'origine, nous allons associer la notion de selectabilité avec la stabilité de Lyapunov. Donc le bénéfice d'une valeur de commande sera proportionnel à la diminution instantanée qu'il cause dans une CLF. La notion de la rejectabilité sera associée à un coût instantané, une fonction définie positive de l'état et de la commande.

En particulier, nous avons :

$$p_s(u, x) = -V_x^T(f + gu), \tag{IV-3}$$

où  $V(x)$  est une CLF pour le système d'intérêt. Evidemment, seules les commandes de stabilisation feront  $p_s(u, x)$  positive, et nous sommes assurés qu'il existe toujours une commande  $u$  telle que  $p_s > 0$  par la définition IV-1.

On choisit le critère de rejectabilité comme suit :

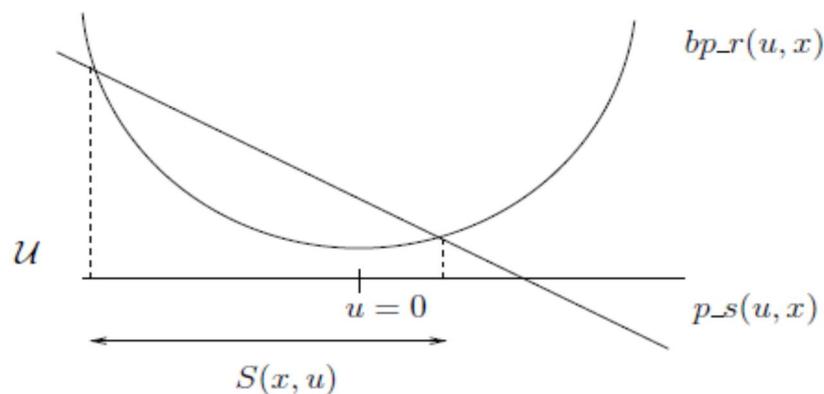
$$p_r(u, x) = l(x) + u^T R(x)u, \tag{IV-4}$$

où  $R(x) = R(x)^T > 0$  est une fonction matricielle définie positive dont les éléments sont localement lipschitziennes et  $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction non négative localement lipschitzienne. La rejectabilité devient ainsi large pour de grandes valeurs de commande ou pour des régions de l'espace d'état où  $l(x)$  est grande.

Noter que les conditions du lemme IV-1 sont satisfaites parce que  $p_s(u, x) = -V_x^T f - V_x^T g u$  est une fonction linéaire en  $u$  et est par conséquent concave, et  $p_r(u, x) = l(x) + u^T R(x)u$  est convexe en  $u$ . Pour ces choix l'ensemble de satisfaction devient :

$$S_b(x) = \left\{ u \in \mathbb{R}^m : -V_x^T(f + gu) > \frac{1}{b}(l(x) + u^T R(x)u) \right\}. \tag{IV-5}$$

La figure IV-1 illustre  $p_s$ ,  $p_r$  et  $S_b(x)$  pour un état  $x$  particulier dans le cas d'une seule entrée  $u \in \mathbb{R}$ .



**Figure IV-1:** Fonctions de la selectabilité et de la rejectabilité en fonction de  $u$ , pour  $x$  donné, et l'ensemble de satisfaction résultant

Il est important de noter que  $S_b$  est quadratique en  $u$ . Ce fait va être exploité pour fournir une description de forme fermée  $S_b$ . En outre,  $S_b(x)$  peut être vu comme une mappe d'ensemble-évalué. Il mappe un état  $(x)$  sur un ensemble dans l'espace de commande, et ce mappage est paramétré par la valeur de  $b(x)$ .

Le théorème suivant caractérise complètement l'ensemble de satisfaction pour les fonctions de sélectivité et de rejectabilité particulières choisies ci-dessus.

#### Théorème IV-1[65]

Si  $p_s(u, x) = -V_x^T (f + gu)$  et  $p_r(u, x) = l(x) + u^T R(x)u$ , alors l'ensemble de satisfaction est non vide si et seulement si  $b$  satisfait l'inégalité :

$$l + bV_x^T f - \frac{1}{4} b^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x < 0. \quad (\text{IV-6})$$

En outre, si  $S_b(x)$  est non vide, il est donné par :

$$S_b(x) = \left\{ u = -\frac{1}{2} b R^{-1} g^T V_x + R^{-\frac{1}{2}} v \sqrt{\frac{1}{4} b^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x - l - b V_x^T f} : v \in B(\mathbb{R}^m) \right\}, \quad (\text{IV-7})$$

où  $(\mathbb{R}^m) = \{\xi \in \mathbb{R}^m : \|\xi\| < 1\}$ .

Notez que cette formule fournit un mappage à partir de la boule d'unité ouverte à l'ensemble de satisfaction.

La preuve de ce théorème dépend du lemme suivant qui fournit une généralisation de la formule quadratique.

#### Lemme IV-2[65]

Si  $A = A^T > 0$ , alors l'ensemble de solutions à l'inégalité quadratique :

$$\xi^T A \xi + d^T \xi + c < 0$$

où  $\xi \in \mathbb{R}^s$ , est non vide si et seulement si :

$$\frac{1}{4} d^T A^{-1} d - c > 0,$$

et est donné par :

$$\xi = -\frac{1}{2}A^{-1}d + A^{-1/2}v \sqrt{\frac{1}{4}d^T A^{-1}d - c},$$

où  $v \in B(\mathbb{R}^s) = \{\xi \in \mathbb{R}^s : \|\xi\| < 1\}$ .

Preuve:

Puisque  $A = A^T > 0$ , elle est inversible et peut être factorisée en tant que  $A = A^{1/2}A^{1/2}$  où  $A^{1/2}$  est également symétrique et inversible [66]. En complétant le carré on obtient :

$$\xi^T A \xi + d^T \xi + c = (A^{1/2} \xi + \frac{1}{2}A^{-1/2}d)^T (A^{1/2} \xi + \frac{1}{2}A^{-1/2}d) + c - \frac{1}{4}d^T A^{-1}d.$$

Donc

$$\begin{aligned} \xi^T A \xi + d^T \xi + c < 0 &\Leftrightarrow (A^{1/2} \xi + \frac{1}{2}A^{-1/2}d)^T (A^{1/2} \xi + \frac{1}{2}A^{-1/2}d) < \frac{1}{4}d^T A^{-1}d - c \\ &\Leftrightarrow \left\| A^{1/2} \xi + \frac{1}{2}A^{-1/2}d \right\|^2 < \frac{1}{4}d^T A^{-1}d - c. \end{aligned}$$

Évidemment, le côté gauche de cette expression est positif ce qui implique qu'il existe une solution si et seulement si  $(\frac{1}{4})d^T A^{-1}d - c > 0$ , dans ce cas nous aurons :

$$\left\| A^{1/2} \xi + \frac{1}{2}A^{-1/2}d \right\| < \sqrt{\frac{1}{4}d^T A^{-1}d - c}.$$

Noter que l'expression ci-dessus contraint l'amplitude mais pas la direction de  $A^{1/2} \xi + \frac{1}{2}A^{-1/2}d$ .

Donc

$$\left\| A^{1/2} \xi + \frac{1}{2}A^{-1/2}d \right\| < \sqrt{\frac{1}{4}d^T A^{-1}d - c}$$

$$\Leftrightarrow A^{1/2} \xi + \frac{1}{2}A^{-1/2}d = v \sqrt{\frac{1}{4}d^T A^{-1}d - c}, \quad v \in B(\mathbb{R}^s)$$

$$\Leftrightarrow A^{1/2} \xi = -\frac{1}{2}A^{-1/2}d + v \sqrt{\frac{1}{4}d^T A^{-1}d - c}, \quad v \in B(\mathbb{R}^s)$$

$$\Leftrightarrow \xi = -\frac{1}{2}A^{-1}d + A^{-1/2}v \sqrt{\frac{1}{4}d^T A^{-1}d - c}, \quad v \in B(\mathbb{R}^s).$$

Preuve du théorème IV-1: L'ensemble de satisfaction est donné par :

$$S_b(x) = \{u \in \mathbb{R}^m : bp_s(u, x) \geq p_r(u, x)\}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ u \in \mathbb{R}^m : -V_x^T f - V_x^T g u \geq \frac{1}{b} l + \frac{1}{b} u^T R u \right\} \\
&= \left\{ u \in \mathbb{R}^m : u^T \left( \frac{R}{b} \right) u + (g^T V_x)^T u + \left( \frac{1}{b} l + V_x^T f \right) \leq 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Le théorème résulte donc du lemme IV-2 avec :

$$A = \frac{R}{b}, \quad d = g^T V_x, \quad c = \frac{1}{b} l + V_x^T f.$$

Le théorème IV-1 montre que l'indice de sélectivité  $b(x)$  joue un rôle critique dans la taille de  $S_b(x)$ .

Le lemme suivant montre que pour chaque  $x \neq 0$ ,  $b$  peut toujours être choisi de telle sorte que l'ensemble de satisfaction ne soit pas vide. À cette fin, on définit :

$$\underline{b}(x) \triangleq \begin{cases} \frac{l}{-V_x^T f}, & \text{si } V_x^T g = 0 \\ \frac{2V_x^T f + 2\sqrt{(V_x^T f)^2 + lV_x^T g R^{-1} g^T V_x}}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x}, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{IV-8})$$

#### Lemme IV-3[65]

Pour chaque  $x \neq 0$ ,  $\underline{b}(x) \geq 0$  et  $b > \underline{b}(x)$  implique que  $S_b(x) \neq \emptyset$ . En outre, si  $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfait la propriété :

$$(g^T V_x \neq 0 \text{ et } V_x^T(x)f(x) = 0) \implies l(x) > 0, \quad (\text{IV-9})$$

alors  $\underline{b}(x)$  est localement lipschitzienne à  $\mathbb{R}^n/\{0\}$ .

Preuve :

Si  $g^T V_x = 0$ , alors puisque  $V$  est une CLF,  $V_x^T f < 0$ , donc l'équation (IV-6) est satisfaite si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&-l - bV_x^T f > 0 \\
&\Leftrightarrow b > \frac{l}{-V_x^T f} \geq 0.
\end{aligned}$$

Si  $g^T V_x \neq 0$ , alors l'équation (IV-6) est satisfaite si et seulement si :

$$b^2 - \left( \frac{4V_x^T f}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right) b - \left( \frac{4l}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left( b - \left( \frac{2V_x^T f}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right) \right)^2 > \left( \frac{4l}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right) + \left( \frac{2V_x^T f}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right)^2.$$

Limiter l'attention vers des solutions positives, cette inégalité est réalisable si et seulement si :

$$b > \left( \frac{2V_x^T f}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right) + \sqrt{\left( \frac{4l}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right) + \left( \frac{2V_x^T f}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right)^2}$$

$$\Leftrightarrow b > \frac{2V_x^T f + 2\sqrt{(V_x^T f)^2 + lV_x^T g R^{-1} g^T V_x}}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x},$$

ce qui est clairement supérieur ou égal à zéro.

Pour montrer que  $\underline{b}(x)$  est localement lipschitzienne à  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  [65]. Tout d'abord il faut montrer que la fonction :

$$\phi(a, c, l) = \begin{cases} -\frac{l}{a}, & \text{si } c = 0 \text{ et } a < 0 \\ \frac{2a + 2\sqrt{a^2 + lc}}{c}, & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

est lisse ( $C_\infty$ ) à l'ensemble  $P = \{(a, c, l) \in \mathbb{R}^3 / l \geq 0 \text{ et } c \geq 0 \text{ et } (c = 0 \Rightarrow a < 0) \text{ et } ((c \neq 0 \text{ et } a = 0) \Rightarrow l > 0)\}$ .

Définir la fonction :

$$F(a, c, l, p) = l + pa - \frac{1}{4}p^2 c$$

qui est lisse à P dans l'ensemble de ses arguments. Par substitution directe, il est facile de montrer que  $F(a, c, l, p, \phi(a, c, l)) = 0$  pour tout  $(a, c, l) \in P$ . Si  $c = 0$ , alors :

$$\frac{\partial F(a, c, l, p, \phi(a, c, l))}{\partial p} = a$$

qui est strictement inférieure à zéro puisque V est une CLF. Si  $c \neq 0$ , alors

$$\frac{\partial F(a, c, l, p, \phi(a, c, l))}{\partial p} = -\sqrt{a^2 + lc}$$

qui, par l'équation (IV-9) est non nulle sur  $P$ . Par conséquent par le théorème de fonction implicite,  $\phi(a, c, l)$  est lisse sur  $P$ . Puisque  $V_x^T f$ ,  $V_x^T g R^{-1} g^T V_x$  et  $l$  sont localement lipschitziennes à  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $\underline{b} = \phi(V_x^T f, V_x^T g R^{-1} g^T V_x, l)$  est également localement lipschitzienne à  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Nous avons alors montré que  $S_b(x)$  est toujours convexe, et qu'il peut être rendu non-vidé en tout point  $x \neq 0$ . Nous avons également montré que  $S_b$  est paramétrisé par la boule unité dans l'espace des valeurs de commande ( $\mathbb{R}^m$ ). Nous souhaitons définir ponctuellement un ensemble qui consiste en l'union de tous les ensembles  $S_b(x)$  sur toutes les valeurs de  $b > \underline{b}$  à tout  $x \neq 0$ .

#### Définition IV-4 [65]

$$S(x) \triangleq \bigcup_b S_b(x) : b(x) > \underline{b}(x).$$

On a

$$\sigma_1(x, b) \triangleq \frac{1}{2} b R^{-1} g^T V_x$$

$$\sigma_2(x, b) \triangleq R^{-1/2} \sqrt{\frac{1}{4} b^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x - l - b V_x^T f},$$

l'indice  $b$  à  $S$  peut être éliminé, et l'ensemble de satisfaction pour  $x \neq 0$ , peut être caractérisé comme suit :

$$S(x) = \{u = -\sigma_1(x, b) + \sigma_2(x, b)v : b(x) > \underline{b}(x), \|v\| < 1\}. \quad (\text{IV-10})$$

Le lemme IV-3 garantit que  $S(x)$  est non vide pour  $x \neq 0$ . Par ailleurs, nous avons montré que l'ensemble de satisfaction peut être complètement paramétré par  $b \in \mathbb{R}$  et  $v \in \mathbb{R}^m$ .

### IV.2.3. Commandes de satisfaction

Après avoir défini l'ensemble de satisfaction basé sur une comparaison ponctuelle de  $\dot{V}$  et un coût fonctionnel, nous allons maintenant définir des sélections presque lisses à partir de cet ensemble comme les commandes de la satisfaction. On va montrer que de telles commandes garantissent la stabilité asymptotique.

Définition IV-5[65]

Le mappage  $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est appelée une commande de la satisfaction si :

1.  $k(0) = 0$ ,
2.  $k(x) \in S(x)$  pour tout  $x \neq 0$ ,
3.  $k$  est localement lipschitzienne à  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Théorème IV-2[65]

Si  $k(x)$  est une commande de la satisfaction alors le système en boucle fermée  $\dot{x} = f + gk$  est uniformément asymptotiquement stable.

La preuve de ce théorème dépend du lemme suivant [67].

Lemme IV-4

Supposons que  $F(x)$  est localement lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et  $F(0) = 0$ . S'il existe une fonction définie positive, continûment différentiable, radialement non bornée  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $V_x^T F < 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

Preuve du théorème IV-2:

Puisque  $f$ ,  $g$  et  $k$  sont localement lipschitziennes sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $f+gk$  est aussi localement lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  [63]. Puisque  $f(0) = 0$  et  $k(0) = 0$ ,  $(f+gk)(0) = 0$ . Puisque  $k(x) \in S(x)$  pour tout  $x \neq 0$ ,

$$V_x^T (f+gk) < -l - k^T R k \leq 0.$$

Le théorème résulte donc du lemme IV-4.

Le théorème suivant paramétrise l'ensemble des commandes de la satisfaction.

Théorème IV-3 [64, 65] Si

1.  $V$  est une CLF,
2.  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est localement lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et satisfait  $\|v(x)\| < 1$ ,
3.  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  est localement lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et satisfait  $b(x) > \underline{b}(x)$ ,

alors :

$$k(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ -\sigma_1(x, b(x)) + \sigma_2(x, b(x))v(x), & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{IV-11})$$

est une commande de la satisfaction.

En outre, si  $V$  satisfait la petite propriété de la commande et dans un voisinage proche de l'origine,  $b(x) = \eta(x)\underline{b}(x)$  où  $1 < \eta(x) < N < \infty$ , et  $R(x)$  satisfait  $\underline{r}I \leq R(x) \leq \bar{r}I$ ,  $\forall x$ , où  $\underline{r}$  et  $\bar{r}$  sont des constantes positives, alors  $k$  est continu à l'origine.

Preuve:

A partir de l'équation (IV-11) et la définition de  $S(x)$ , il est clair que  $k(0) = 0$  et  $k(x) \in S(x)$  pour tout  $x \neq 0$ . Puisque la multiplication, l'addition, et la composition des fonctions localement lipschitziennes est localement lipschitzienne,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont localement lipschitziennes sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Par conséquent  $k(x)$  est une commande de la satisfaction.

Pour prouver la continuité à l'origine, nous supposons que  $V$  satisfait la petite propriété de la commande. On va montrer que près de l'origine  $k(x)$  est borné par une fonction continue qui est nulle à l'origine. Étant donné que :

$$\begin{aligned} \|k(x)\| &\leq \|\sigma_1(x, b(x))\| + \|\sigma_2(x, b(x))v(x)\| \\ &\leq \|\sigma_1(x, b(x))\| + \|\sigma_2(x, b(x))\| \end{aligned}$$

nous allons obtenir des bornes séparément sur  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Pour simplifier la notation on met  $a = V_x^T f$  et  $d = g^T V_x$ .

Considérons d'abord le cas où  $d = g^T V_x \neq 0$ . Puisque  $V$  satisfait la petite propriété de la commande, il existe  $\alpha_c(x)$  continu avec  $\alpha_c(0) = 0$  tel que :

$$a + d^T \alpha_c < 0, \quad \forall x \neq 0,$$

ce qui implique que  $|a| / \|d\| < \|\alpha_c\|$ . Donc  $\sigma_1$  peut être borné comme suit:

$$\begin{aligned} \|\sigma_1\| &= \left\| \frac{1}{2} \eta \underline{b} R^{-1} d \right\| \\ &\leq N \frac{1}{\underline{r}} \left\| \frac{1}{2} \underline{b} d \right\| \\ &\leq N \frac{1}{\underline{r}} \left\| \left( \frac{a + \sqrt{a^2 + l d^T R^{-1} d}}{d^T R^{-1} d} \right) d \right\| \\ &\leq N \frac{1}{\underline{r}} \left[ \frac{|a| \|d\|}{\frac{1}{\bar{r}} \|d\|^2} + \frac{\|d\| \sqrt{a^2 + l \frac{1}{\underline{r}} \|d\|^2}}{\frac{1}{\bar{r}} \|d\|^2} \right] \end{aligned}$$

$$\leq N \frac{\bar{r}}{\underline{r}} \left[ \|\alpha_c\| + \sqrt{\|\alpha_c\|^2 + l \frac{1}{\underline{r}}} \right].$$

De même,  $\sigma_2$  peut être borné comme suit :

$$\begin{aligned} \|\sigma_2\|^2 &\leq \frac{1}{\underline{r}} \left\| \frac{1}{4} \eta^2 \underline{b}^2 d^T R^{-1} d - l - \eta \underline{b} a \right\| \\ &\leq \frac{1}{\underline{r}} \left\| 2(\eta^2 - \eta) \left( \frac{a^2}{d^T R^{-1} d} + \frac{a \sqrt{a^2 + l d^T R^{-1} d}}{d^T R^{-1} d} \right) + (\eta^2 - 1) l \right\| \\ &\leq 2(N^2 - N) \frac{1}{\underline{r}} \left[ \bar{r} \|\alpha_c\|^2 + \bar{r} \|\alpha_c\| \sqrt{\|\alpha_c\|^2 + l \frac{1}{\underline{r}}} \right] + \frac{1}{\underline{r}} (N^2 - 1) l. \end{aligned}$$

Autrement, supposons que  $d = g^T V_x = 0$ . Il est clair que  $\|\sigma_1\| = 0$ , et  $\sigma_2$  peut être borné comme suit :

$$\begin{aligned} \|\sigma_2\|^2 &\leq \frac{1}{\underline{r}} \|-l - ba\| \\ &\leq \frac{1}{\underline{r}} \|-l - \eta \underline{b} a\| \\ &\leq \frac{1}{\underline{r}} \|-l - \eta \left(-\frac{l}{a}\right) a\| \\ &\leq \frac{1}{\underline{r}} (N - 1) l. \end{aligned}$$

Par conséquent  $k$  est continu en  $x = 0$ .

La signification de cette paramétrisation de la satisfaction est qu'elle fournisse la flexibilité au concepteur dans le choix d'une loi de commande basée sur la CLF. Au lieu de définir une autre formule universelle qui mappe une CLF à une commande spécifique, cette paramétrisation de la satisfaction permet au concepteur de créer une nouvelle « formule universelle » pour toutes les applications d'intérêt.

#### IV.2.4. Robustesse aux perturbations d'entrée

Nous avons montré que toutes les commandes de la satisfaction assurent la stabilité asymptotique et que pour une CLF  $V(x)$  donnée satisfaisant la propriété petite de commande, l'ensemble des commandes presque lisses générées par  $V$  sont paramétrées par deux fonctions localement lipschitziennes  $b(x)$  et  $v(x)$ . Dans cette section nous traiterons la robustesse des commandes de la satisfaction à des perturbations non-dynamique à l'entrée.

Définition IV-6 [64]

Une loi de commande asymptotiquement stabilisante,  $u = q(x)$ , a des marges de stabilité  $(m_1, m_2)$  où :

$$-1 \leq m_1 < m_2 \leq \infty ,$$

si pour tout  $\alpha \in (m_1, m_2)$ ,  $u = (1 + \alpha)q(x)$ ,  $u$  stabilise aussi le système asymptotiquement.

Dans cette section, nous allons montrer qu'un sous-ensemble bien défini de commandes de la satisfaction a des marges de stabilité de  $(-\frac{1}{2}, \infty)$ .

Définition IV-7[65]

L'ensemble de satisfaction robuste noté  $S_R(x)$  est défini comme suit :

$$S_R(x) = \{u \in S(x) : V_x^T g R^{-1/2} v \leq 0\}$$

$$\{u = -\sigma_1(x, b) + \sigma_2(x, b)v : b > \underline{b}(x), \|v\| < 1, V_x^T g R^{-1/2} v \leq 0\}.$$

Donc, l'ensemble de satisfaction robuste est le sous-ensemble de  $S$  lorsque l'angle entre  $v$  et  $V_x^T g R^{-1/2}$  est supérieur à  $\frac{\pi}{2}$ . Nous allons maintenant définir les commandes de satisfaction robuste comme des sélections lisses de  $S_R$ .

Définition IV-8[65]

Le mappage  $k_R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est appelé une commande de la satisfaction robuste si :

1.  $k_R(0) = 0$ ,
2.  $k_R(x) \in S_R(x)$  pour chaque  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,
3.  $k_R$  est localement lipschitzienne en  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Théorème IV-4[65]

Si  $k_R$  est une commande de satisfaction robuste, alors il a des marges de stabilité égal à  $(-\frac{1}{2}, \infty)$ .

Preuve:

Par définition,  $k_R$  satisfait l'inégalité suivante :

$$V_x^T f + V_x^T g k_R < -\frac{1}{b} l - \frac{1}{b} k_R^T R k_R.$$

En ajoutant  $\alpha V_x^T g k_R$  aux deux côtés on aura :

$$V_x^T f + (1 + \alpha)V_x^T g k_R < -\frac{1}{b}l - \frac{1}{b}k_R^T R k_R + \alpha V_x^T g k_R. \quad (\text{IV-12})$$

Une condition suffisante pour la stabilité asymptotique est que le côté droit de l'équation (IV-12) est non positif pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Nous devons montrer que cette condition est satisfaite pour tout  $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ .

Notant que :

$$k_R(x) = -\sigma_1 + \sigma_2 v = -\frac{1}{2}bR^{-1}g^T V_x + \hat{\sigma}_2 R^{-1/2}v,$$

où

$$\hat{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{1}{4}b^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x - l - b V_x^T f},$$

donne :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{b}l - \frac{1}{b}k_R^T R k_R + \alpha V_x^T g k_R \\ &= -\frac{1}{b}(l + \hat{\sigma}_2^2 v^T v) - \frac{b}{2}\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)V_x^T g R^{-1} g^T V_x \\ &+ \hat{\sigma}_2(1 + \alpha)V_x^T g R^{-\frac{1}{2}}v. \end{aligned}$$

Le premier terme est toujours non positif. Le deuxième terme est non positif si  $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ , dans ce cas le troisième terme est non positif si  $V_x^T g R^{-\frac{1}{2}}v \leq 0$ .

La paramétrisation de l'ensemble de satisfaction en termes de  $(b, v)$  est une paramétrisation redondante puisque  $S(x) \subset \mathbb{R}^m$  et  $(b, v^T)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$ . Par conséquent, si  $\omega \in S(x)$ , il peut y avoir plusieurs paires  $(b, v)$  telles que :

$$\omega = -\sigma_1(b) + \sigma_2(b)v.$$

#### Théorème IV-5[65]

Supposons que  $R^{-1/2}g^T V_x \neq 0$ , la SVD (décomposition en valeurs singulières) de  $V_x^T g R^{-1/2}$  est donnée par :

$$V_x^T g R^{-\frac{1}{2}} = U_1(\Sigma \ 0) \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix},$$

et l'espace nul de  $R^{-1/2}g^T V_x$  est désigné par  $\mathcal{N}\left(R^{-\frac{1}{2}}g^T V_x\right)$ . Alors  $\omega \in S_R$  si et seulement si il existe une paramétrisation unique  $(\hat{b}, \hat{v}) \in \mathbb{R}^m$  où  $\hat{b} > \underline{b}$ ,  $\hat{v} \in \mathcal{N}\left(R^{-\frac{1}{2}}g^T V_x\right) \subset \mathbb{R}^{m-1}$ , et  $\|\hat{v}\| \leq \|R^{-1/2}\|$ , de telle sorte que :

$$\omega = -\sigma_1(\hat{b}) + \sigma_2(\hat{b})V_2 \hat{v}.$$

Preuve:

Pour montrer la nécessité, on a  $\omega \in S_R$ . Par le théorème d'orthogonalité [66]  $\omega$  s'écrit de manière unique comme suit :

$$\omega = \omega_{\parallel} + \omega_{\perp},$$

Où  $\omega_{\parallel} \in \text{span}\left(R^{-\frac{1}{2}}g^T V_x\right)$  et  $\omega_{\perp} \in \mathcal{N}\left(R^{-\frac{1}{2}}g^T V_x\right)$ . Étant donné que :

$$S_R \cap \text{span}\left(R^{-\frac{1}{2}}g^T V_x\right) = \left\{ u = -\frac{b}{2}R^{-\frac{1}{2}}g^T V_x : b > \hat{b} \right\},$$

Il existe  $\hat{b}$  unique tel que  $-\sigma_1(\hat{b}) = \omega_{\parallel}$ . Puisque  $\omega \in S_R \subset S$ , étant donné  $\hat{b}$ , il existe  $\tilde{v} \in B(\mathbb{R}^m)$  unique tel que  $\omega_{\perp} = \sigma_2(\hat{b})R^{-1/2}\tilde{v}$ . soit  $\hat{v} = V_2^T R^{-1/2}\tilde{v}$  (notez que  $\hat{v}$  est définie de façon unique), alors :

$$\begin{aligned} \|\hat{v}\| &= \left\| V_2^T R^{-\frac{1}{2}}\tilde{v} \right\| \\ &= \left\| R^{-\frac{1}{2}}\tilde{v} \right\| \\ &\leq \left\| R^{-\frac{1}{2}} \right\| \|\tilde{v}\| \\ &\leq \left\| R^{-\frac{1}{2}} \right\|. \end{aligned}$$

Pour montrer la suffisance, supposons qu'il existe une paramétrisation unique  $(\hat{b}, \hat{v})$  telle que

$$\omega = -\sigma_1(\hat{b}) + \sigma_2(\hat{b})V_2 \hat{v}.$$

Soit  $v = R^{1/2}V_2 \hat{v} \in \mathbb{R}^m$ . Puisque  $V_2$  est orthogonale,  $\|v\| \leq \|R^{1/2}\| \|V_2 \hat{v}\| = \|R^{1/2}\| \|\hat{v}\| \leq 1$ . Puisque  $\hat{b} > \underline{b}$ ,  $\omega \in S(x)$ . En outre,  $V_x^T g R^{-1/2} \hat{v} = V_x^T g R^{-1/2} V_2^T R^{-1/2} v = 0$ . Par conséquent  $\omega \in S_R$ .

Le théorème suivant paramétrise l'ensemble des commandes de la satisfaction robuste.

Théorème IV-6 [65] Si :

1.  $V$  est une CLF,
2.  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$  est localement lipschitzienne en  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et satisfait  $\|v(x)\| \leq \|R^{-\frac{1}{2}}\|$ ,
3.  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  est localement lipschitzienne en  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et satisfait  $b > \underline{b}(x)$ ,
4.  $V_2(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times (m-1)}$  est une matrice orthogonale localement lipschitzienne qui s'étend sur l'espace nul de  $V_x^T g R^{-\frac{1}{2}}$ ,

alors :

$$k_R(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ -\sigma_1(x, b(x)) + \sigma_2(x, b(x))V_2(x)v(x), & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{IV-13})$$

est une commande de la satisfaction robuste.

Noter que ces paramètres de la satisfaction robuste ( $b$  et  $v$ ) sont les mêmes paramètres utilisés pour l'ensemble de satisfaction généré par  $V(x)$ . La seule différence est que la limite sur  $v$  est modifiée légèrement, et  $v$  entre par  $V_2(x)$ .

### IV.2.5. Optimalité inverse

Après avoir prouvé que toutes les commandes de satisfaction robuste ont des marges de gain de type de Kalman, Il est naturel de s'interroger si elles sont aussi optimales par rapport à une fonction de coût significatif.

Ce concept qui consiste premièrement à concevoir une loi de commande puis de trouver une fonction de coût pour laquelle la commande est optimale a été réintroduit dans la littérature par Freeman et Kokotovic dans [68], et il est appelé optimalité inverse.

L'optimalité inverse est une propriété beaucoup plus faible que l'optimalité, principalement parce que l'indice du coût pour lequel la loi de commande est optimale est défini seulement a posteriori. Donc, le concepteur a une influence sur l'indice de performance qui est minimisé.

Dans cette section, nous montrons que toutes les lois de commande de la satisfaction robuste sont optimales inverse, ce qui sera d'abord défini en termes de l'équation de Hamilton-Jacobi.

Définition IV-9 [65]

Une loi de commande  $q(x)$  qui stabilise asymptotiquement le système  $\dot{x} = f + gq$  est dite optimale inverse s'il existe une fonction  $W(x)$  définie positive radialement non bornée, une fonction définie positive  $m(x)$  et une fonction définie positive symétrique  $\hat{R}(x)$  de telle sorte que :

$$q(x) = -\frac{1}{2}\hat{R}^{-1}(x)g^T W_x,$$

où  $W$  satisfait l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$W_x^T f + m - \frac{1}{4}W_x^T g \hat{R}^{-1} g^T W_x = 0$$

punctuellement à chaque  $x$ .

Notez que cette définition est équivalente à  $q(x)$  minimisant l'indice du coût suivant:

$$J(u) = \int m(x) + u^T R(x)u. \quad (\text{IV-14})$$

Le lemme suivant joue un rôle nécessaire pour prouver l'optimalité inverse.

Lemme IV-5[65]

Si  $g^T V_x \neq 0$  alors toute commande de satisfaction robuste peut être écrite comme suit :

$$k_R(x) = -\frac{1}{2}\tilde{R}^{-1}(x)g^T V_x, \text{ où } \tilde{R}(x) \text{ est une fonction matricielle définie positive.}$$

Preuve:

Tout d'abord définir le vecteur fondamental  $v_f = -\frac{b+1}{2}g^T V_x$ . Nous savons que :

$$v_f^T k_R = \frac{(b+1)b}{4}V_x^T g R^{-1} g^T V_x - \frac{(b+1)\hat{\sigma}_2}{2}V_x^T g R^{-1/2} v > 0$$

Parce que  $k_R \in S_R$  implique  $V_x^T g R^{-1/2} v \leq 0$ . Puisque  $v_f^T k_R = \|v_f\| \|k_R\| \cos \theta$  (où  $\theta$  l'angle entre  $v_f$  et  $k_R$ ), donc nous savons que  $\cos \theta > 0$  ou que  $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ . Pour le cas trivial où  $\theta = 0$ , nous pouvons simplement mettre  $\tilde{R}^{-1}(x) = \frac{\|k_R\|}{\left(\frac{2}{b+1}\right)\|v_f\|}$ . Supposons cependant que  $k_R$  n'est pas parallèle à

$v_f$ . Notre objectif est de construire une matrice  $P = P^T > 0$  telle que  $Pv_f = k_R$  pour tout  $x \neq 0$ .

On commence par définir une nouvelle base orthonormale pour  $\mathbb{R}^m$ . Le premier vecteur de base  $b_1 = \frac{k_R}{\|k_R\|}$  est un vecteur unitaire dans la direction de  $k_R$ . Le second vecteur de base,

$$b_2 = \frac{-\frac{v_f^T k_R}{k_R^T k_R} k_R + v_f}{\left\| -\frac{v_f^T k_R}{k_R^T k_R} k_R + v_f \right\|},$$

est un vecteur unitaire compris dans le plan tendu  $k_R$  et  $v_f$  avec  $b_2$  orthogonal à  $k_R$ .

Les restes des nouveaux vecteurs de base ( $b_3 \dots b_m$ ) peuvent être générés par un algorithme de Gram-Schmidt tels que ( $b_1 \dots b_m$ ) constituent une base orthonormale complète. Définir la matrice de transformation,  $T = [b_1, b_2, \dots, b_m]$ , et notez que  $T^{-1} = T^T$ .

Dans ce nouveau système de coordonnées, le vecteur  $k_R$  devient  $\hat{k}_R = [\|k_R\|, 0, \dots, 0]$ .

De même,  $v_f$  devient  $\hat{v}_f = \|v_f\| [\cos \theta, \sin \theta, 0, \dots, 0]$ . Nous allons maintenant construire  $R_0 = R_0^T > 0$  pour faire pivoter  $\hat{v}_f$  sur  $\hat{k}_R$ . Puisque tous les éléments de  $v_f$  et  $k_R$  sont nuls à l'exception des deux premiers, soit  $R_0 = \begin{bmatrix} \hat{R}_0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$  où  $\hat{R}_0 = \begin{bmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{bmatrix}$ . Nous devons donc avoir :

$$\begin{bmatrix} \|k_R\| \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{bmatrix} \|v_f\| \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix},$$

ce qui implique les équations suivantes:

$$\alpha \cos \theta + \delta \sin \theta = \frac{\|k_R\|}{\|v_f\|},$$

$$\delta \cos \theta + \beta \sin \theta = 0.$$

En outre, la définitivité positive de  $R_0$  requiert que:

$$\alpha\beta - \delta^2 > 0, \text{ et } \alpha > 0.$$

$$\text{En mettant } \delta = -\sin \theta, \beta = \cos \theta \text{ et } \alpha = \frac{\frac{\|k_R\|}{\|v_f\|} + \sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

(où  $|\theta| < \frac{\pi}{2}$  assure que  $\alpha$  est bien définie), nous voyons que toutes les équations sont satisfaites.

Définir  $P = T^T R_0 T$ , alors :

$$P v_f = T^T R_0 T v_f = T^T R_0 \hat{v}_f = T^T \hat{k}_R = k_R.$$

Par construction  $P = P^T > 0$ . Soit  $\tilde{R}(x) = \left(\frac{1}{b+1}\right)P^{-1}(x)$  ce qui montre que tout  $k_R$  peut être écrit sous la forme désirée.

Nous pouvons ignorer le cas où  $V_x^T g = 0$  parce que cette condition implique que la valeur de commande de la satisfaction robuste sera également nulle.

### Théorème IV-7 [65]

Toute loi de commande de satisfaction robuste est optimale inverse.

Preuve: [65]

On a  $k_R(x)$  une loi de commande de la satisfaction robuste. Du lemme IV-5, il existe une fonction matricielle définie positive  $\tilde{R}$  de telle sorte que  $k_R = -\frac{1}{2}\tilde{R}^{-1}g^T V_x$ . Puisque  $\frac{1}{2}k_R$  est asymptotiquement stabilisant, nous savons que :

$$V_x^T f - \frac{1}{4}V_x^T g \tilde{R}^{-1} g^T V_x < 0.$$

Choisissant

$$m(x) = -V_x^T f + \frac{1}{4}V_x^T g \tilde{R}^{-1} g^T V_x > 0,$$

$W(x) = V(x)$  et  $\hat{R}(x) = \tilde{R}(x)$ , il est facile de vérifier que l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$W_x^T f - \frac{1}{4}W_x^T g \hat{R}^{-1} g^T W_x + m(x) = 0,$$

est satisfaite à tout  $x$ .

Il est à noter que la pondération de l'état  $m(x)$  dans l'indice du coût (IV-14) est elle-même fonction de la CLF  $V(x)$ . Cela implique que le choix de  $V$  et ses paramètres auront un effet important sur le type de performance atteinte par des commandes de la satisfaction robuste.

Bien que ce soit toujours vrai, le chapitre V explique comment la satisfaction permet au concepteur de spécifier a priori un indice de coût à minimiser que ne dépend pas de la CLF  $V$ .

## **IV.3. Stabilisation entrée-état**

Après avoir établi la paramétrisation de la satisfaction et de la satisfaction robuste pour une CLFV, il est maintenant possible d'étendre la puissance et la flexibilité de cette approche à des

systèmes présentant des perturbations via la notion de stabilité entrée-état (ISS) et CLFs entrée-état (ISS-CLFs) pour traiter des problèmes autres que la régulation.

La prise en considération de l'impact des entrées est particulièrement importante car ce sont elles qui, conjointement aux conditions initiales, influent sur l'état du système, et donc sur les sorties. En 1989, Sontag propose le concept de stabilité entrée-état (ISS Input-to-State Stability) pour prendre en compte ce fait important (Sontag, 1989). L'idée consiste donc à définir une notion de stabilité qui reprend le thème de la stabilité au sens de Lyapunov tout en tenant compte des entrées du système étudié.

La stabilisation entrée-état (ISS) a été intensément étudiée [69, 70, 71], et elle se prête à l'approche de la satisfaction due à l'existence des ISS-CLFs.

La forme et le contenu de cette section suivra de près celle de la section IV.2. Certaines des preuves sont presque exactement identiques; ils ne seront pas répétées ici, mais ils seront inclus dans l'annexe. Il convient de noter que la définition de la stabilité entrée-état [65, 72] présuppose une continuité à l'origine. Cela signifie que la satisfaction de la forme ISS de la petite propriété de commande doit toujours être assumée. En plus la condition de lisse (ou plus particulièrement lipschitzness local) est détendue en cette section à la continuité simple. Bien que cette relaxation sape l'unicité des solutions obtenues, la définition de la ISS exige seulement l'existence d'une solution.

### IV.3.1. Stabilité entrée-état et ISS-CLFs

Considérons le système non linéaire affine :

$$\dot{x} = F(x) + g_1(x)d \quad (\text{IV-15})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$  et  $d \in \mathbb{R}^r$ .

#### Définition IV-10 [73]

Le système d'équation  $\dot{x} = f(x, d)$  est stable au sens entrée-état (ISS) par rapport à l'entrée  $u$  s'il existe une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  et une fonction  $\chi$  de classe  $\mathcal{K}$  telles que, pour tout vecteur initial  $x_0$  et pour toute entrée  $d$  continue et bornée à tout instant, la solution du système existe et vérifie la condition :

$$|x(t)| \leq \beta(|x_0|, t) + \chi(\sup_{0 \leq \tau \leq t} |d(\tau)|). \quad (\text{IV-16})$$

**Remarque IV-1[74]** Il est possible d'utiliser de manière équivalente la fonction "max" à la place du signe "+" de l'addition, dans l'estimation de cette borne. C'est-à-dire :

$$|x(t)| \leq \max \{ \beta(|x(0)|, t), \chi(|d|_\infty) \}.$$

$\chi(\cdot)$  est appelée la limite ultime du système (IV-15).

Par rapport à la stabilité asymptotique traditionnelle, la contrainte liée à la propriété de la ISS est plus forte puisqu'il s'agit de garantir que l'état reste borné si l'entrée est bornée, ce qui est loin d'être évident pour les systèmes non linéaires en général. Une autre propriété intéressante est que la convergence asymptotique du signal d'entrée  $u$  vers 0 implique la convergence asymptotique vers 0 de  $x$ .

Pour  $u \equiv 0$ , l'inégalité (IV-16) se réduit à  $|x(t)| \leq \beta(|x_0|, t)$ . Cela implique que si le système est stable entrée-état, la solution triviale du système libre  $\dot{x} = f(x, 0)$  est alors stable.

Maintenant, considérons le système autonome suivant :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + g_1(x)d, \quad (\text{IV-17})$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ , avec entrée de commande  $u \in \mathbb{R}^m$ , et entrée exogène  $d \in \mathbb{R}^r$ . On supposera que  $f, g$  et  $g_1$  sont des fonctions localement lipschitziennes et que  $f(0) = 0$ . Le système (IV-17) sera appelé stabilisable entrée-état (ISS) s'il existe une loi de commande continue  $u = q(x)$  avec  $q(0) = 0$ , de sorte que le système en boucle fermée est stable entrée-état par rapport à la perturbation  $d$ .

Une fonction continûment différentiable  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite fonction de Lyapunov de commande stabilisante entrée-état (ISS-CLF) [65] pour le système (IV-17) si  $V$  est définie positive, radialement non bornée, et s'il existe une fonction  $\rho$  du classe  $\mathcal{K}_\infty$  telle que l'implication suivante soit vérifiée  $\forall x \neq 0$  et  $\forall d \in \mathbb{R}^r$ :

$$|x| \geq \rho(|d|) \Rightarrow \inf_{u \in \mathbb{R}^m} V_x^T (f + gu + g_1 d) < 0. \quad (\text{IV-18})$$

#### **Lemme IV-6[65]**

Une paire  $(V, \rho)$ , où  $V(x)$  est définie positive et radialement non bornée, et  $\rho \in \mathcal{K}_\infty$  satisfait l'équation (IV-18) si et seulement si :

$$V_x^T g = 0 \Rightarrow V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) < 0, \forall x \neq 0. \quad (\text{IV-19})$$

Encore une fois l'ensemble  $V_x^T g = 0$  est critique parce qu'il exige que  $V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) < 0$ , ce qui signifie que  $V_x^T f$  doit être suffisamment négative pour surmonter l'effet des perturbations limitées par  $|d| < \rho^{-1}(|x|)$ .

Pour les systèmes avec des perturbations stochastiques, Krsti'c et Deng (1998) ont introduit une notion de «stabilité bruit à état» et la CLF correspondante compatible avec ce type de stabilisation.

#### Définition IV-11[65]

La ISS-CLF  $V$  satisfait la petite propriété de commande s'il existe une loi de commande  $\alpha_c(x)$  continue dans  $\mathbb{R}^n$  telle que :

$$V_x^T f + V_x^T g \alpha_c + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) < 0, \forall x \neq 0.$$

où  $\rho$  satisfait aux exigences de (IV-18).

#### Théorème IV-8[65]

Le système (IV-17) est stabilisable entrée-état si et seulement s'il existe une ISS-CLF avec la petite propriété de commande.

Finalement, on peut énoncer le résultat fondamental qui sera utilisé dans le reste de ce chapitre pour assurer la stabilité entrée-état.

#### Théorème IV-9[65]

Étant donné que la ISS-CLF  $V$  satisfait la petite propriété de commande, le système de (IV-17) sera stable entrée-état si et seulement si  $u = k$  est une loi de commande continue avec  $k(0) = 0$  et telle que :

$$V_x^T f + V_x^T g k + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) < 0, \forall x \neq 0. \quad (\text{IV-20})$$

Preuve: Voir lemme IV-6.

#### Définition IV-12[65]

On dit qu'une loi de commande est stabilisante entrée-état par rapport à  $V$  ( $\text{ISS}_V$ ), si elle satisfait aux exigences du théorème IV-9.

Il est clair que nous sommes maintenant dans la mesure d'appliquer une paramétrisation très semblable à celle formulée dans la section IV.2, nous avons une fonction définie positive  $V$  dont la

dérivée doit être rendue négative à chaque état non nul, et la dynamique du système est affine dans la commande.

### IV.3.2. Commandes de satisfaction-ISS

On commence par définir l'ensemble de satisfaction pour les problèmes de la ISS de la même manière que dans la section IV.2, sauf que le terme  $V_x^T f$  est remplacé par le terme  $V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)$  comme suit :

$$S_b(x) = \{u \in \mathbb{R}^m : -V_x^T(f + gu) - |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) > \frac{1}{b}(l(x) + u^T R(x)u)\}. \quad (\text{IV-21})$$

Le lemme suivant caractérise complètement l'ensemble de satisfaction pour la ISS.

#### Théorème IV-10[65]

Si  $p_s(u, x) = -V_x^T(f + gu) - |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)$  et  $p_r(u, x) = l(x) + u^T R(x)u$ , alors l'ensemble de satisfaction est non vide si et seulement si  $b(x)$  satisfait l'inégalité :

$$\frac{1}{4} b^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x - l - b(V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)) \geq 0. \quad (\text{IV-22})$$

En outre, si  $S_b(x)$  est non vide, elle est donnée par :

$$S_b(x) = \left\{ u = -\frac{1}{2} b R^{-1} g^T V_x + R^{-\frac{1}{2}} v \sqrt{\frac{1}{4} b^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x - l - b(V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|))} : \|v\| < 1 \right\}. \quad (\text{IV-23})$$

Preuve: Voir l'annexe.

Le théorème IV-10 montre que l'indice de sélectivité  $b(x)$  joue un rôle critique dans la taille de  $S_b(x)$ . Le lemme suivant montre que pour chaque  $x \neq 0$ ,  $b$  peut toujours être choisi de telle sorte que l'ensemble de satisfaction ne soit pas vide. À cette fin, on définit :

$$\underline{b}(x) \triangleq \begin{cases} \chi_1(x), & \text{si } V_x^T g = 0 \\ \chi_2(x), & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{IV-24})$$

où

$$\chi_1(x) = -\frac{l}{V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)}$$

$$\chi_2(x) = \frac{2(V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|))}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} + \frac{2\sqrt{(V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|))^2 + |V_x^T g R^{-1} g^T V_x}}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x}.$$

**Lemme IV-7[65]**

Pour tout  $x \neq 0$   $\underline{b}(x) \geq 0$ , et  $b > \underline{b}(x)$  implique que  $S_b(x) \neq \emptyset$ .

Preuve: Voir l'annexe.

On a :

$$\sigma_1(x, b) \triangleq \frac{1}{2} b R^{-1} g^T V_x$$

$$\sigma_2(x, b) \triangleq R^{-1/2} \left[ \frac{1}{4} b^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x - l - b(V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)) \right]^{1/2},$$

l'indice  $b$  sur  $S$  peut être éliminé, et l'ensemble de satisfaction pour  $x \neq 0$  (pour toutes les valeurs valides de  $b$  ou en d'autres termes  $S = \bigcup_{b > \underline{b}} S_b$ ) peut être caractérisé comme suit:

$$S(x) = \{u = -\sigma_1(x, b) + \sigma_2(x, b)v : b(x) > \underline{b}(x), \|v\| < 1\}. \quad (\text{IV-25})$$

Le lemme IV-7 garantit que  $S(x)$  est non vide pour  $x \neq 0$ . En outre, nous avons montré que l'ensemble de satisfaction peut être paramétré par  $b \in \mathbb{R}$  et  $v \in \mathbb{R}^m$ .

Après avoir spécifié l'ensemble de satisfaction-ISS, nous allons définir une classe de commandes qui sont dérivées de  $S(x)$ .

**Définition IV-13[65]**

Le mappage  $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est appelé une commande de la satisfaction-ISS si :

1.  $k(0) = 0$ ,
2.  $k(x) \in S(x)$  pour chaque  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,
3.  $k(x)$  est continu.

Les commandes de la satisfaction-ISS (continues partout) peuvent être vues comme des sélections de mappe de l'ensemble évalué  $S(x)$ .

**Théorème IV-11[65]**

Si  $k(x)$  est une commande de la satisfaction-ISS alors  $k$  est  $ISS_V$ , et donc le système en boucle fermée  $\dot{x} = f + gk + g_1 d$  est stable entrée-état.

Preuve:

elle résulte directement de la continuité de  $k$  sur  $\mathbb{R}^n$  et le fait que  $V_x^T f + V_x^T g k + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) < 0$  pour tous les états non nuls.

Le théorème suivant paramétrise l'ensemble des commandes de la satisfaction-ISS.

Théorème IV-12[65] Si

1.  $V$  est une ISS-CLF qui satisfait la petite propriété de commande,
2.  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  est continu en  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et satisfait  $\underline{b}(x) < b(x)$ ,
3. dans un voisinage proche de l'origine, nous avons  $b(x) = \eta(x)\underline{b}(x)$  où  $1 < \eta(x) < N < \infty$ ,
4.  $R(x)$  satisfait  $\underline{r}I \leq R(x) \leq \bar{r}I, \forall x$  où  $\underline{r}$  et  $\bar{r}$  sont des constantes positives,
5.  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est continue en  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et satisfait  $\|v(x)\| < 1$ ,

alors :

$$k(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ -\sigma_1(x, b(x)) + \sigma_2(x, b(x))v(x), & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{IV-26})$$

est une commande de la satisfaction-ISS.

Preuve:

A partir de l'équation (IV-26) et la définition de  $S(x)$ , il est clair que  $k(0) = 0$  et  $k(x) \in S(x)$  pour tout  $x \neq 0$ . Car la multiplication, l'addition, et la composition des fonctions continues est continue,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont continus sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Par conséquent  $k(x)$  est une commande de la satisfaction-ISS.

Supposons que  $V$  satisfait la petite propriété de commande. Nous allons montrer que le voisinage de l'origine  $k(x)$  est borné supérieur par une fonction continue qui est nulle à l'origine. Car :

$$\begin{aligned} \|k(x)\| &\leq \|\sigma_1(x, b(x))\| + \|\sigma_2(x, b(x))v(x)\| \\ &\leq \|\sigma_1(x, b(x))\| + \|\sigma_2(x, b(x))\| \end{aligned}$$

nous allons obtenir des bornes séparément sur  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Pour simplifier la notation mettons :

$$a = V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) \text{ et } d = g^T V_x.$$

Considérons d'abord le cas où  $d = g^T V_x \neq 0$ . Puisque  $V$  satisfait la petite propriété de commande, il existe  $\alpha_c(x)$  continu avec  $\alpha_c(0) = 0$  tel que :

$$a + d^T \alpha_c < 0, \quad \forall x \neq 0,$$

ce qui implique que  $|a| / \|d\| < \|\alpha_c\|$ . Par conséquent  $\sigma_1$  peut être borné comme suit :

$$\begin{aligned} \|\sigma_1\| &= \left\| \frac{1}{2} \eta \underline{b} \mathbb{R}^{-1} d \right\| \\ &\leq N \frac{1}{\underline{r}} \left\| \frac{1}{2} \underline{b} d \right\| \\ &\leq N \frac{1}{\underline{r}} \left\| \left( \frac{a + \sqrt{a^2 + l d^T \mathbb{R}^{-1} d}}{d^T \mathbb{R}^{-1} d} \right) d \right\| \\ &\leq N \frac{1}{\underline{r}} \left[ \frac{|a| \|d\|}{\frac{1}{\underline{r}} \|d\|^2} + \frac{\|d\| \sqrt{a^2 + \frac{l}{\underline{r}} \|d\|^2}}{\frac{1}{\underline{r}} \|d\|^2} \right] \\ &\leq N \frac{\bar{r}}{\underline{r}} \left[ \|\alpha_c\| + \sqrt{\|\alpha_c\|^2 + \frac{l}{\underline{r}}} \right]. \end{aligned}$$

De même,  $\sigma_2$  peut être borné comme suit :

$$\begin{aligned} \|\sigma_2\|^2 &\leq \frac{1}{\underline{r}} \left\| \frac{1}{4} \eta^2 \underline{b}^2 d^T \mathbb{R}^{-1} d - l - \eta \underline{b} a \right\| \\ &\leq \frac{1}{\underline{r}} \left\| 2(\eta^2 - \eta) \left( \frac{a^2}{d^T \mathbb{R}^{-1} d} + \frac{a \sqrt{a^2 + l d^T \mathbb{R}^{-1} d}}{d^T \mathbb{R}^{-1} d} \right) + (\eta^2 - 1) l \right\| \\ &\leq 2(N^2 - N) \frac{1}{\underline{r}} \left[ \bar{r} \|\alpha_c\|^2 + \bar{r} \|\alpha_c\| \sqrt{\|\alpha_c\|^2 + l \frac{1}{\underline{r}}} \right] + \frac{1}{\underline{r}} (N^2 - 1) l. \end{aligned}$$

Autrement, supposons que  $d = g^T V_x = 0$ . Alors il est clair que  $\|\sigma_1\| = 0$  et  $\sigma_2$  peut être borné comme suit :

$$\begin{aligned} \|\sigma_2\|^2 &\leq \frac{1}{\underline{r}} \|-l - ba\| \\ &\leq \frac{1}{\underline{r}} \|-l - \eta \underline{b} a\| \\ &\leq \frac{1}{\underline{r}} \|-l - \eta \left(-\frac{l}{a}\right) a\| \\ &\leq \frac{1}{\underline{r}} (N - 1) l. \end{aligned}$$

Par conséquent  $k$  est continu en  $x = 0$ .

La dernière préoccupation est la complétude de la paramétrisation de la satisfaction-ISS: toutes les commandes  $ISS_V$  sont-elles aussi des commandes de la satisfaction?

Le théorème suivant démontre que la satisfaction-ISS est en effet, une paramétrisation complète des commandes  $ISS_V$ .

### Théorème IV-13[65]

Si  $q(x)$  est une commande  $ISS_V$  pour (IV-17), alors  $q(x)$  est une commande de la satisfaction-ISS.

Preuve:

Les conditions (1) et (3) de la définition IV-13 sont trivialement satisfaites et il reste à montrer que  $q(x) \in S(x)$  à chaque  $x \neq 0$ . Cela peut être fait en montrant que  $q$  satisfait la condition fondamentale de la satisfaction :

$$V_x^T f + V_x^T g q + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) < -\frac{1}{b(x)} (l + q^T R(x) q)$$

à chaque  $x \neq 0$  pour un certain  $b(x) > 0$ .

Comme  $q$  est ISS on sait que :

$$\begin{aligned} V_x^T f + V_x^T g q + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) &< 0 \\ \Leftrightarrow V_x^T f + V_x^T g q + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) &= -N(x), \end{aligned}$$

où  $N(x) > 0$ . Pour  $l(x) = 0$  et  $R(x) = I$ , la condition de la satisfaction requiert que  $-N(x) < -\frac{1}{b(x)} u^T u$  qui est vrai si et seulement si  $b(x) > \frac{u^T u}{N(x)}$ . Comme  $b(x)$  est toujours positif loin de l'origine, nous savons que  $u \in S(x)$  pour tout  $b(x) > \frac{q^T q}{N(x)}$ .

### **IV.3.3. Robustesse aux perturbations d'entrée**

Nous avons montré que toutes les commandes de la satisfaction-ISS fournissent la stabilité entrée-état et que pour une donnée ISS-CLF  $V(x)$  satisfaisant la propriété petite de commande, l'ensemble des commandes générées par  $V$  sont paramétrées par deux fonctions continues  $b(x)$  et  $v(x)$ . Dans cette section nous allons examiner les effets des perturbations d'entrée (sous la forme d'un gain sur la commande) sur la stabilité entrée-état des commandes de la satisfaction-ISS.

Définition IV-14[65]

Une loi de commande stabilisante entrée-état,  $u = q(x)$ , a les marges de stabilité  $(m_1, m_2)$  où  $-1 \leq m_1 < m_2 \leq \infty$ ,

si pour chaque  $\alpha \in (m_1, m_2)$ ,  $u = (1 + \alpha) q(x)$ , stabilise également entrée-état le système.

Dans cette section, nous allons montrer qu'un sous-ensemble bien défini des commandes de la satisfaction-ISS ont des marges de stabilité de  $(-\frac{1}{2}, \infty)$ .

Définition IV-15[65]

L'ensemble de la satisfaction-ISS robuste, noté  $S_r(x)$ , est défini comme suit :

$$\begin{aligned} S_r(x) &= \{u \in S(x) : V_x^T g R^{-1/2} v \leq 0\} \\ &= \{u = -\sigma_1(x, b) + \sigma_2(x, b)v : b > \underline{b}(x), \|v\| < 1, V_x^T g R^{-1/2} v \leq 0\}. \end{aligned}$$

Définition IV-16[65]

Le mappage  $k_R: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est appelé une commande de la satisfaction-ISS robuste si :

1.  $k_R(0) = 0$ ,
2.  $k_R(x) \in S_r(x)$  pour chaque  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,
3.  $k_R$  est continu.

Théorème IV-14[65]

Si  $k_R$  est une commande de la satisfaction-ISS robuste alors il s'agit d'une commande de la satisfaction-ISS avec des marges de stabilité égal à  $(-\frac{1}{2}, \infty)$ .

Preuve:

Puisque  $S_r(x) \subset S(x), \forall x \neq 0, k_R$  est une commande de la satisfaction-ISS. Par conséquent,  $k_R$  satisfait l'inégalité suivante lorsque  $x \neq 0$  :

$$V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) + V_x^T g k_R < -\frac{1}{b} l - \frac{1}{b} k_R^T R k_R.$$

Ajoutant  $\alpha V_x^T g k_R$  aux deux côtés nous aurons :

$$V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) + (1 + \alpha) V_x^T g k_R < -\frac{1}{b} l - \frac{1}{b} k_R^T R k_R + \alpha V_x^T g k_R. \quad (\text{IV-27})$$

Une condition suffisante pour que la stabilité asymptotique soit réalisable est que le côté droit de l'équation IV-27 soit non positif pour tout  $x \neq 0$ . Nous devons montrer que cette condition est satisfaite pour tout  $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ . Notons que :

$$k_R(x) = -\sigma_1 + \sigma_2 v = -\frac{1}{2} b R^{-1} g^T V_x + \hat{\sigma}_2 R^{-1/2} v,$$

où

$$\hat{\sigma}_2 = \left[ \frac{1}{4} b^2 V_x^T g R^{-1} g^T V_x - l - b(V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)) \right]^{1/2},$$

donne :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{b} l - \frac{1}{b} k_R^T R k_R + \alpha V_x^T g k_R \\ &= -\frac{1}{b} (l + \hat{\sigma}_2^2 v^T v) - \frac{b}{2} \left( \frac{1}{2} + \alpha \right) V_x^T g R^{-1} g^T V_x \\ & \quad + \hat{\sigma}_2 (1 + \alpha) V_x^T g R^{-\frac{1}{2}} v. \end{aligned}$$

Le premier terme est toujours non positif. Le second terme est non positif si  $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ , dans ce cas le troisième terme est non positif si  $V_x^T g R^{-1/2} v \leq 0$ .

La paramétrisation de l'ensemble de satisfaction en termes de  $(b, v)$  est une paramétrisation redondante puisque  $S(x) \subset \mathbb{R}^m$  et  $(b, v^T)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$ . Par conséquent, si  $\omega \in S(x)$ , il peut y avoir plusieurs paires  $(b, v)$  telle que  $\omega = -\sigma_1(b) + \sigma_2(b)v$ .

Nous utilisons le théorème IV-5 pour construire un appropriée  $V_2$  pour remédier à ce problème.

Le théorème suivant paramétrise l'ensemble des commandes de la satisfaction-ISS robustes.

**Théorème IV-15 [65]** Si

1.  $V$  est une ISS-CLF qui satisfait la propriété petite de commande,
2.  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  est continu en  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et satisfait  $b(x) > \underline{b}(x)$ ,
3. dans le voisinage proche de l'origine nous avons  $b(x) = \eta(x) \underline{b}(x)$  où  $1 < \eta(x) < N < \infty$ ,
4.  $R(x)$  satisfait  $\underline{r}I \leq R(x) \leq \bar{r}I, \forall x$ , où  $\underline{r}$  et  $\bar{r}$  sont des constantes positives,

5.  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$  est continue en  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et satisfait  $\|v(x)\| \leq \left\| R^{-\frac{1}{2}} \right\|$ ,
6.  $V_2(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times (m-1)}$  est une matrice orthogonale localement lipschitzienne qui s'étend sur l'espace nul de  $V_x^T g R^{-\frac{1}{2}}$ ,

alors :

$$k_R(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ -\sigma_1(x, b(x)) + \sigma_2(x, b(x))V_2(x)v(x), & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{IV-28})$$

est une commande de la satisfaction-ISS robuste.

Preuve: Comme dans la preuve du théorème IV-12.

### IV.3.4. Optimalité inverse

Dans cette section nous montrons que toutes les lois de commande de la satisfaction-ISS robuste résolvent le problème d'affectation de gain optimal inverse posé par Krstic et Deng.

#### Définition IV-17[65, 75]

Une loi de commande continue  $\hat{q}(x)$  avec  $\hat{q}(0) = 0$  est appelée à résoudre le problème d'affectation de gain optimal inverse pour le système  $\dot{x} = f + gq + g_1d$ , s'il existe une fonction  $\hat{\gamma}$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$  dont la dérivée  $\hat{\gamma}'$  est aussi une fonction de classe  $\mathcal{K}_\infty$ , une fonction matricielle évaluée  $\hat{R}(x)$  telle que  $\hat{R}(x) = \hat{R}^T(x) > 0$  pour tout  $x$ , et des fonctions définies positives  $\hat{l}(x)$  et  $E(x)$  radialement non bornées, qui minimisent la fonction de coût :

$$J(\hat{q}) = \sup_{d \in \mathcal{D}} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ E(x) + \int_0^t \hat{l} + \hat{q}^T \hat{R} \hat{q} - \hat{\gamma}'(|d|) d\tau \right] \right\} \quad (\text{IV-29})$$

où  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des fonctions de  $x$  localement bornées.

Le lemme suivant est établi pour l'optimalité inverse.

#### Théorème IV-16[75]

Soit  $\ell\gamma$  qui désigne la transformation de Legendre-Fenchel :

$$\begin{aligned} \ell\gamma(r) &= r(\gamma')^{-1}(r) - \gamma((\gamma')^{-1}(r)) \\ &= \int_0^r (\gamma')^{-1}(s) ds, \end{aligned}$$

où  $(\gamma')^{-1}(r)$  est la fonction inverse de  $\frac{d\gamma(r)}{dr}$ .

Considérons le système auxiliaire de (IV-17) :

$$\dot{x} = f + gu + g_1 \ell \gamma (2|V_x^T g_1|) \frac{V_x^T g_1}{V_x^T g_1 g_1^T V_x} \quad (\text{IV-30})$$

Soit  $V(x)$  une fonction de Lyapunov candidate, et  $\gamma$  satisfait les conditions de la définition IV-17.

Supposons qu'il existe une fonction matricielle évaluée  $R_2(x) = R_2^T(x) > 0$  telle que la loi de commande

$$u = \alpha(x) = -R_2^{-1}(x)(L_g V)^T \quad (\text{IV-31})$$

stabilise globalement et asymptotiquement (IV-30) par rapport à  $V(x)$ .

Alors, la loi de commande:

$$u = \alpha^*(x) = \beta \alpha(x) = -\beta R_2^{-1}(x)(L_g V)^T \quad (\text{IV-32})$$

avec tout  $\beta \geq 2$  résout le problème d'assignation de gain optimale inverse pour (IV-17) en minimisant la fonction de coût:

$$J(u) = \sup_{d \in \mathcal{D}} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ 2\beta V(x(t)) + \int_0^t \left( l(x) + u^T R_2(x) u - \beta \lambda \gamma \left( \frac{|d|}{\lambda} \right) \right) d\tau \right] \right\} \quad (\text{IV-33})$$

pour tout  $\lambda \in (0, 2]$ , où :

$$\begin{aligned} l(x) = & -2\beta [L_f V + \ell \gamma (2|L_{g_1} V|) - L_{g_2} V R_2^{-1}(L_{g_2} V)^T] + \beta(2 - \lambda) \ell \gamma (2|L_{g_1} V|) \\ & + \beta(\beta - 2) L_{g_2} V R_2^{-1}(L_{g_2} V)^T. \end{aligned} \quad (\text{IV-34})$$

Notez que ce théorème prouve non seulement la condition dans laquelle une loi de commande sera inverse optimale, mais il précise également la fonction de coût qui est minimisée.

Preuve[75]:

Puisque la loi de commande (IV-31) stabilise (IV-30), il existe une fonction continue définie positive  $W: \mathbb{R}^n \rightarrow R_+$  telle que

$$L_f V + \ell \gamma (2|L_{g_1} V|) - L_{g_2} V R_2^{-1}(L_{g_2} V)^T \leq -W(x). \quad (\text{IV-35})$$

On a alors

$$l(x) \geq 2\beta W(x) + \beta(2 - \lambda) \ell \gamma (2|L_{g_1} V|) + \beta(\beta - 2) L_{g_2} V R_2^{-1}(L_{g_2} V)^T. \quad (\text{IV-36})$$

Puisque  $\lambda \leq 2, \beta \geq 2$ ,  $W(x)$  est définie positive, et  $\ell\gamma$  est une fonction de classe  $\mathcal{K}_\infty$ , on conclut que  $l(x)$  est aussi définie positive. Par conséquent,  $J(u)$  défini dans (IV-33) est un coût significatif fonctionnel qui met la pénalité sur  $x, u$ , et  $d$ . En substituant  $l(x)$  dans (IV-33), il s'ensuit que nous aurons (IV-38), où

$$d^*(x) = \lambda(\gamma')^{-1}(2|L_{g_1}V|) \frac{(L_{g_1}V)^T}{|L_{g_1}V|}. \quad (\text{IV-37})$$

$$J(u) = \sup_{d \in \mathcal{D}} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ 2\beta V(x(t)) + \int_0^t \left( -2\beta L_f V - \beta \lambda \ell\gamma(2|L_{g_1}V|) + \beta^2 L_{g_2} V R_2^{-1} (L_{g_2} V)^T + u^T R_2 u - \beta \lambda \gamma\left(\frac{|d|}{\lambda}\right) \right) d\tau \right] \right\}$$

$$= \sup_{d \in \mathcal{D}} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ 2\beta V(x(t)) - 2\beta \int_0^t (L_f V + L_{g_1} V d + L_{g_2} V u) d\tau \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^t (u^T R_2 u + 2\beta L_{g_2} V u + \beta^2 L_{g_2} V R_2^{-1} (L_{g_2} V)^T) d\tau \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^t \left( \beta \lambda \gamma\left(\frac{|d|}{\lambda}\right) - 2\beta L_{g_1} V d + \beta \lambda \ell\gamma(2|L_{g_1}V|) \right) d\tau \right] \right\}$$

$$= \sup_{d \in \mathcal{D}} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ 2\beta V(x(t)) - 2\beta \int_0^t dV \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^t (u - \alpha^*)^T R_2 (u - \alpha^*)^T d\tau \right. \right. \\ \left. \left. - \beta \int_0^t \left[ \lambda \gamma\left(\frac{|d|}{\lambda}\right) - \lambda \gamma\left(\frac{|d^*|}{\lambda}\right) - \lambda \gamma' \left(\frac{|d^*|}{\lambda}\right) \frac{(d^*)^T}{\lambda |d^*|} (d^* - d) \right] d\tau \right] \right\}$$

=

$$2\beta V(x(0)) + \int_0^\infty (u - \alpha^*)^T R_2 (u - \alpha^*)^T dt + \\ \beta \lambda \sup_{d \in \mathcal{D}} \left\{ \int_0^\infty \underbrace{\left[ -\gamma\left(\frac{|d|}{\lambda}\right) + \gamma\left(\frac{|d^*|}{\lambda}\right) - \gamma' \left(\frac{|d^*|}{\lambda}\right) \frac{(d^*)^T}{\lambda |d^*|} (d^* - d) \right]}_{\Pi(d, d^*)} dt \right\} \quad (\text{IV-38})$$

Par la propriété 4 du lemme A-1 (voir l'annexe),  $\Pi(d, d^*)$  elle peut être réécrite comme suit :

$$\Pi(d, d^*) = -\gamma\left(\frac{|d|}{\lambda}\right) - \ell\gamma\left(\gamma'\left(\frac{|d^*|}{\lambda}\right)\right) + \gamma'\left(\frac{|d^*|}{\lambda}\right) \frac{(d^*)^T d}{|d^*| \lambda}. \quad (\text{IV-39})$$

Alors, par le lemme A-2 (voir l'annexe), nous avons

$$\Pi(d, d^*) \leq -\gamma \left( \frac{|d|}{\lambda} \right) - \ell \gamma \left( \gamma' \left( \frac{|d^*|}{\lambda} \right) \right) + \gamma \left( \frac{|d|}{\lambda} \right) + \ell \gamma \left( \gamma' \left( \frac{|d^*|}{\lambda} \right) \right) = 0 \quad (\text{IV-40})$$

et  $\Pi(d, d^*) = 0$  si et seulement si  $\frac{d}{\lambda} = (\gamma')^{-1} \left( \gamma' \left( \frac{|d^*|}{\lambda} \right) \right) \frac{d^*}{|d^*|}$ , ce qu'est

$$\Pi(d, d^*) = 0 \text{ si } d = d^*. \quad (\text{IV-41})$$

Alors

$$\sup_{a \in \mathcal{D}} \int_0^\infty \Pi(d, d^*) dt = 0 \quad (\text{IV-42})$$

et le "pire cas" de perturbation est donné par (IV-37). Le minimum de (IV-38) est atteint avec  $u = \alpha^*$ . D'où la loi de commande (IV-32) minimise la fonction de coût (IV-33). La valeur de la fonction (IV-29) est  $J^*(x) = 2\beta V(x)$ .

Le paramètre  $\beta \geq 2$  dans l'énoncé du théorème IV-16 représente un degré de liberté de conception. Le paramètre  $\lambda$  (à noter qu'il paramétrise non seulement la pénalité de la perturbation mais aussi la pénalité sur l'état,  $l(x)$ ) indique que la même loi de commande est optimale inverse par rapport à une famille entière de différents coûts fonctionnels.

Remarque IV-2: Même s'il n'est pas explicite dans la preuve du théorème IV-16,  $V(x)$  résout la famille d'équations HJI suivante:

$$L_f V - \frac{\beta}{2} L_{g_2} V R_2^{-1}(x) (L_{g_2} V)^T + \frac{\lambda}{2} \ell \gamma(2|L_{g_1} V|) + \frac{l(x)}{2\beta} = 0. \quad (\text{IV-43})$$

Paramétrée par  $(\beta, \lambda) \in [2, \infty) \times (0, 2]$ . Il est facile de voir à partir de la preuve du théorème ci-dessus que pour des conditions initiales nulles, le niveau d'atténuation de perturbation atteint est

$$\int_0^\infty [l(x) + u^T R_2(x) u] dt \leq \beta \lambda \int_0^\infty \gamma \left( \frac{|d|}{\lambda} \right) dt. \quad (\text{IV-44})$$

### Théorème IV-17 [65]

Toute loi de commande de la satisfaction-ISS robuste résout le problème d'affectation de gain optimal inverse.

Nous avons besoin du lemme suivant, qui montre que toute valeur de commande qui se trouve dans l'ensemble de satisfaction-ISS robuste peut être écrite sous la forme désirée.

Lemme IV-8[65]

Pour tout  $x$  tel que  $g^T V_x \neq 0$ , chaque commande de la satisfaction-ISS robuste peut être écrite comme  $k_R(x) = -\frac{1}{2} \tilde{R}^{-1}(x) g^T V_x$ , où  $\tilde{R}(x)$  est une fonction matricielle définie positive.

Preuve:

Comme dans le lemme IV-5, sauf que  $V_x^T f$  est remplacé par  $V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)$ .

Preuve du théorème IV-17: Le lemme IV-8 montre que toutes les lois de commande de la satisfaction-ISS robuste peuvent être écrites comme  $k_R(x) = -\frac{1}{2} \tilde{R}^{-1}(x) g^T V_x$ .

Si l'on peut montrer que pour une commande de la satisfaction-ISS robuste arbitraire,  $\frac{1}{2} k_R$  stabilise globalement et asymptotiquement le système auxiliaire dans le théorème IV-16 alors la preuve sera réalisée.

Notons d'abord que  $u = \frac{1}{2} k_R$  stabilise entrée-état  $\dot{x} = f + gu + g_1 d$  :

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{u=\frac{1}{2}k_R} &= V_x^T \left( f + g_1 d + \frac{1}{2} g k_R \right) \\ &\Leftrightarrow V_x^T f + \frac{1}{2} V_x^T g k_R + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) < 0 \\ &\Leftrightarrow V_x^T \left( f + \frac{1}{2} g k_R \right) + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) = -W(x) \end{aligned}$$

où  $W(x)$  est positive pour tout  $x$  non nul.

Puisque  $|V_x^T g_1|$  s'évanouit à l'origine  $x = 0$ , il existe une fonction  $\pi$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$  telle que  $|V_x^T g_1| \leq \pi(|x|)$ . En outre, puisque  $\rho \circ \pi$  est dans la classe  $\mathcal{K}_\infty$ , il existe une fonction  $\xi$  de classe  $\mathcal{K}_\infty$  dont la dérivée  $\xi'$  est aussi une fonction de classe  $\mathcal{K}_\infty$ , telle que :

$$\xi(2r) \leq r \rho^{-1}(\pi^{-1}(r)).$$

On définit  $\gamma = \ell \xi$ , et nous notons que  $\ell \ell \xi = \xi$  par les propriétés de la transformation de Legendre-Fenchel. Cela implique que :

$$\ell \gamma(2r) \leq r \rho^{-1}(\pi^{-1}(r)).$$

Examinant le système auxiliaire (IV-30) en utilisant la commande  $\frac{1}{2} k_R$  nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{u=\frac{1}{2}k_R} &= V_x^T \left( f + \frac{1}{2} g k_R \right) + \ell \gamma(2|V_x^T g_1|) \\ &\leq V_x^T \left( f + \frac{1}{2} g k_R \right) + |V_x^T g_1| \rho^{-1} \circ \pi^{-1}(|V_x^T g_1|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq V_x^T \left( f + \frac{1}{2} g k_R \right) + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) \\ &= -W(x). \end{aligned}$$

Donc, le système (IV-30) est asymptotiquement stable par rapport à  $V(x)$  par la loi de commande  $\frac{1}{2} k_R(x)$ , où  $k_R(x)$  est une commande de la satisfaction-ISS robuste arbitraire.

## IV.4. Conclusion

La paramétrisation de la satisfaction des lois de commande basées sur la CLF repose sur deux éléments cruciaux: il doit exister une certaine forme de la CLF pour le système, et le système doit être affine à l'entrée de commande.

Le principal avantage de cette stratégie est que les commandes basées sur la CLF ont de bonnes propriétés analytiques: elles sont garanties pour stabiliser le système en boucle fermée, et elles peuvent garantir l'optimalité et les marges de gain souhaitables (la robustesse aux perturbations non dynamiques à l'entrée). L'inconvénient des commandes basées sur la CLF, c'est qu'elles ne fournissent pas, en général, un niveau élevé de performance, lorsque la performance est définie par le concepteur a priori sous la forme d'un indice de coût ou certains comportements désirés.

Nous avons montré que toutes les commandes de la satisfaction assurent la stabilité asymptotique pour une CLF  $V(x)$  donnée satisfaisante la petite propriété de commande, l'ensemble des commandes presque lisses générées par  $V$  sont paramétrées par deux fonctions localement lipschitziennes  $b(x)$  et  $v(x)$ .

Cette paramétrisation est étendue à des systèmes aux perturbations via la notion de stabilité entrée-état et CLFs entrée-état et les mêmes résultats sont obtenus pour les lois de commande ISS à base de la CLF. L'exigence de lissage (ou plus précisément lipschitzness locale) est étendue dans ce cas à la continuité simple. Bien que cette relaxation sape l'unicité des solutions obtenues, la définition de la ISS exige seulement l'existence d'une solution.

Cependant, l'optimalité inverse ne confère pas au concepteur de créer des lois de commande à haute performance, mais plutôt permet au concepteur de connaître qu'une loi de commande est optimale par rapport à un indice de coût. Mais cela n'aide pas à construire une commande qui se comporte bien dans la manière précisée a priori et la performance de grand signal des commandes basées sur la CLF constitue parfois un problème.

Le chapitre V traite ce sujet par la stratégie de sélection, que la combinaison d'une loi de commande arbitraire et la satisfaction basée sur la CLF peut conduire à des lois de commande qui sont stables, optimales inverse, robustes aux perturbations d'entrée et de haute performance.

---

**CHAPITRE V:**

**Stabilité assurée via la  
satisfaction**

---

## V.1. Introduction

Une méthode pour générer une loi de commande stabilisante pour un système non linéaire est abordée dans le chapitre IV qui trouve une fonction de commande de Lyapunov (CLF) pour le système, puis extrait une commande particulière de cette CLF.

Le principal avantage de cette stratégie est que les commandes à base CLF ont de bonnes propriétés analytiques, elles sont garanties pour stabiliser le système en boucle fermée, et elles peuvent garantir l'optimalité et les marges de gain souhaitables. L'inconvénient des commandes à base CLF est qu'en général elles ne fournissent pas un haut niveau de performance, lorsque la performance est définie par le concepteur a priori sous la forme d'un indice des coûts ou certains comportements désirés.

D'autre part, il ya beaucoup de stratégies de commande non linéaire qui fournissent un niveau élevé de performance, telles que la commande prédictive à base de modèle, la technique de l'équation de Riccati dépendante de l'état, la commande par logique floue, ou la commande par réseau de neurones. Le principal inconvénient de ces approches est qu'elles manquent des résultats analytiques, le concepteur n'est pas assuré que ces lois de commande fournissent l'optimalité, les marges de gain robustes, ou encore la stabilité du système en boucle fermée.

La méthode de combinaison de ces techniques et la satisfaction à base CLF est indiquée pour obtenir des lois de commande qui sont stables, optimales-inverse, robuste aux perturbations d'entrée et de haute performance. Nous exploitons la puissance de l'approche SDRE dans ce chapitre pour fournir des performances élevées à notre paramétrisation des lois de commande stabilisantes, et dans le processus on fournit une manière de garantir la stabilité des lois de commande basées sur SDRE.

Dans ce chapitre, une interprétation graphique des contrôleurs non linéaires à base CLF est présentée ce qui aide à la compréhension de la stabilité de Lyapunov et permet de visualiser la signification des marges de stabilité et la propriété d'être une commande optimale fondée sur Lyapunov. La relation entre autre des approches basées sur la CLF, la formule de Sontag, la commande de min-norme de Freeman et Kokotovic est expliquée dans ce contexte.

## V.2. Structure de l'ensemble de satisfaction

Dans cette section, nous examinons brièvement la structure mathématique de l'ensemble de satisfaction.  $S(x)$  peut être vu comme une mappe d'ensemble évalué qui mappe l'état à une région dans l'espace de commande  $\mathbb{R}^m$ . Il sera montré que  $S \in \mathbb{R}^m$  est un demi-espace ouvert contenant toutes les valeurs de commande  $ISS_V$  pour un  $x$  donné. Tout d'abord, notez que toute loi de commande  $ISS_V$  peut être écrite sous la forme  $u = -\beta(x)g^T V_x + \xi(x)$ , où  $\xi(x)$  est orthogonal à  $g^T V_x$ . Cette décomposition en un élément parallèle au vecteur  $-g^T V_x$  et un élément perpendiculaire à celui-ci, contribuera à éclairer la structure de  $S(x)$ . Le résultat suivant illustre que la stabilisation entrée-état est équivalente à une contrainte ponctuelle de produit intérieur sur la commande.

### Lemme V-1 [65]

Si  $V$  est une ISS-CLF, la loi de commande continue  $\hat{u} = -\beta(x) g^T V_x + \xi(x)$ , où  $\xi(x)$  satisfait  $\xi^T g^T V_x = 0$  à chaque  $x$  et  $\hat{u}(0) = 0$ , est une commande  $ISS_V$  si et seulement si :

$$V_x^T g \neq 0 \Rightarrow \beta(x) > \frac{V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)}{V_x^T g g^T V_x}. \quad (\text{V.1})$$

Preuve :

Lorsque  $V_x^T g = 0$ ,  $\dot{V} < 0$  car  $V$  est une ISS-CLF. Pour le cas où  $V_x^T g \neq 0$ , la suffisance et la nécessité de la condition sur  $\beta$  peuvent être vues comme suit :

$$\begin{aligned} \beta(x) > \frac{V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)}{V_x^T g g^T V_x} \\ \Leftrightarrow -\beta V_x^T g g^T V_x < -V_x^T f - |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) \\ \Leftrightarrow V_x^T g \hat{u} < -V_x^T f - |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) \\ \Leftrightarrow V_x^T f + V_x^T g \hat{u} + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) < 0. \end{aligned}$$

La contrainte sur  $\beta$  peut être visualisée géométriquement comme suit. Il existe une région de l'espace de commande à chaque  $x$  fixe qui contient tous les valeurs de commande qui rendent  $\dot{V}$  négative. Cette région (notée  $S_V$ ) est un demi-espace ouvert, et elle est bornée par un hyper-plan qui est perpendiculaire au vecteur  $-g^T V_x$ . Cette région de stabilisation de  $\mathbb{R}^m$  constitue un ensemble dépendant de l'état.

Définition V-1 [65]

L'ensemble de stabilisation, notée  $S_V$  est :

$$S_V(x) = \begin{cases} \hat{S}_V(x), & \text{si } V_x^T g \neq 0 \\ \mathbb{R}^m, & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

où

$$\hat{S}_V(x) = \left\{ -\beta(x)g^T V_x + \xi(x) : \beta(x) > \frac{V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)}{V_x^T g g^T V_x}, \xi^T g^T V_x = 0 \right\}.$$

Puisque  $V_x^T g$ ,  $V_x^T f$  et  $|V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)$  sont toutes continues en  $x$ , nous savons que  $S_V(x)$  est également continu dans l'état. Le théorème suivant montre que l'ensemble de satisfaction contient toutes les valeurs de stabilisation possibles à un état donné par rapport à une CLF connue.

Théorème V-1 [65]  $S(x) \equiv S_V(x)$ .

Preuve :

Pour une valeur arbitraire  $k \in S$ , nous avons :

$$V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) + V_x^T g k < -\frac{1}{b}(l + k^T R k)$$

pour  $b \geq \underline{b} > 0$ . Puisque  $-\frac{1}{b}(l + k^T R k) < 0, k \in S_V$ . Inversement, soit  $q$  un élément quelconque de  $S_V$ , donc :

$$V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) + V_x^T g q < 0$$

ce qui implique que pour chaque valeur de  $l > 0$  et  $R > 0$ , il existe  $b \geq \underline{b} > 0$  tel que :

$$V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) + V_x^T g q < -\frac{1}{b}(l + q^T R q).$$

Il est important de noter que le théorème V-1 montre que  $S(x)$  est une mappe d'ensemble évalué continu qui est ouvert, illimité, demi-plan, et dont la limite est explicitement connue.

### V.3. Approche de satisfaction comme une formule globale

L'utilisation de la CLF est standard dans la pratique. Dans ce contexte les formules universelles sont un objet mathématique naturel pour étude. Les formules universelles produisent directement la commande nécessaire à partir de la dérivée de la CLF et des données qui définissent le système. Ces

techniques offrent en principe une approche extrêmement puissante pour la stabilisation non linéaire et leur utilisation permet d'éviter une minimisation ponctuelle.

Lorsque  $V(x)$  est une CLF, il ya de nombreuses lois de commande qui rendent  $\dot{V}(x, u(x))$  définie négative, deux d'entre eux sont données par la formule de Sontag et la formule de min-norme de Freeman et Kokotovic.

Comme décrit dans [72], la formule de Sontag pour la stabilité entrée-état est donnée par :

$$k(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } V_x^T g = 0 \\ -\frac{\omega + \sqrt{\omega^2 + (V_x^T g g^T V_x)^2}}{V_x^T g g^T V_x} g^T V_x, & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

où  $\omega = V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)$ .

Notez que cette formule correspond à un point de  $\mathbb{R}^m$  qui se trouve dans l'espace large de  $g^T V_x$ ;  $u_{\text{sontag}} = -\beta g^T V_x$  avec

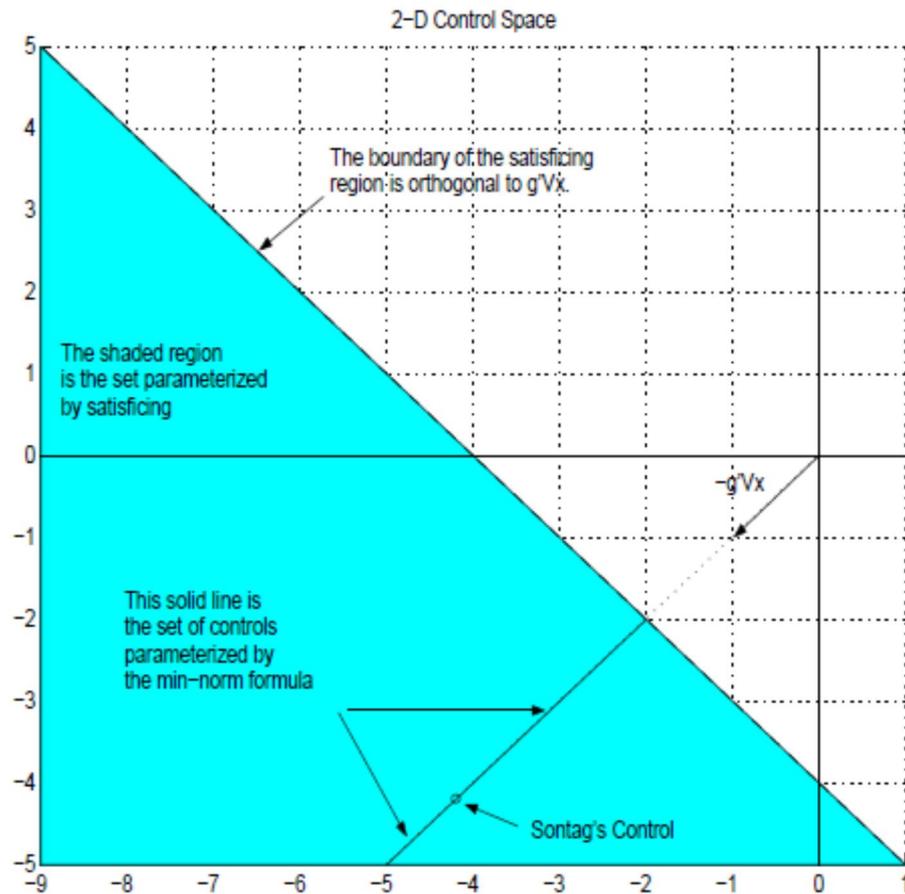
$$\beta = \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 + (V_x^T g g^T V_x)^2}}{V_x^T g g^T V_x} > \frac{\omega}{V_x^T g g^T V_x}.$$

Puisque la formule de Sontag est continue et est ISS par rapport à  $V$ , le théorème V-1 assure que c'est aussi une commande de la satisfaction. Vu alternativement, l'équation (V.26) peut être rendue égale à la version ISS de la formule de Sontag lorsque  $R = I$ ,  $l = V_x^T g g^T V_x$ ,  $v(x) = 0$ , et  $b(x) = \underline{b}(x)$ .

La figure V.1 montre le point correspondant à la formule de Sontag dans snapshot d'un espace de commande à deux dimensions à un état fixe. Les valeurs de la figure sont les suivantes :  $V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) = 2$  et  $V_x^T g = [1, 1]^T$ .

La formule de min-norme ponctuelle de Freeman et Kokotovic [68] peut être écrite pour fournir une stabilité entrée-état comme suit :

$$k(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } V_x^T f \leq 0 \\ -\frac{(V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) + \alpha_V)}{V_x^T g g^T V_x} g^T V_x, & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (\text{V.3})$$



**Figure V.1 :** Espace de commande à un état et un temps fixes

qui peut être vue comme une généralisation de la formule de Sontag. En effet, la commande de min-norme ponctuelle englobe la formule de Sontag en introduisant la fonction scalaire définie positive  $\alpha_V$  qui paramétrise tous les commandes ISS qui se trouvent dans la gamme de l'espace de  $g^T V_x$ . En choisissant  $\alpha_V = \sqrt{\omega^2 + (V_x^T g g^T V_x)^2}$  la formule de Sontag est récupérée. La région paramétrée par la formule de min-norme est indiquée par une ligne solide à la figure V.1. La commande de min-norme est clairement  $ISS_V$  et est donc garantie (par le théorème V-1) pour être une commande de satisfaction-ISS. Les valeurs de commande de min-norme se situent dans  $S$  à chaque état comme le montre la figure V.1.

Par conséquent l'équation (V.26) peut être considérée comme une généralisation de la forme entrée-état des deux formules, la formule de Sontag et la formule de min-norme de Freeman et Kokotovic.

L'approche de la satisfaction englobe les deux formules, la formule de Sontag et la formule de min-norme par un paramétrage complet de toute la région de l'espace de commande qui rend  $V_x^T f + V_x^T g u + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)$  négative pour un état arbitraire non nul.

La région de l'espace de commande paramétrée par l'approche de la satisfaction est la région ombrée indiquée sur la figure V.1. Notons qu'elle diffère ponctuellement des solutions de min-norme de Freeman et Kokotovic en ce que la satisfaction permet à un composant de la commande d'être orthogonal à  $g^T V_x$  offrant donc une liberté maximale pour le concepteur de commande de choisir un contrôleur de haute performance qui est garanti d'être  $ISS_V$ .

#### V.4. Structure de l'ensemble de satisfaction robuste

Dans la section V.2 nous avons montré que  $S(x)$  est un demi-espace ouvert dans  $\mathbb{R}^m$ . Dans cette section, nous montrons qu'un résultat similaire est valable pour l'union de tous  $S_r(x)$  sur l'ensemble des matrices de pondération  $R(x)$  définies positives symétriques ponctuellement.

Il est clair à partir de l'équation (IV.25) et de la définition IV-15 au chapitre IV que  $S_r(x)$  est dépendant du choix de  $l$  et  $R$ . Puisque  $l(x)$  et  $R(x)$  sont choisies par le concepteur, la région maximale des valeurs de commande possibles qui peuvent être des éléments d'un ensemble de la satisfaction robuste peut être trouvée en prenant l'union des ensembles  $S_r(x; l(x), R(x))$  sur tous les choix valides de  $l(x)$  et  $R(x)$ , tout comme  $S(x)$  et  $S_r(x)$  sont l'union de l'ensemble de satisfaction sur tous les choix valides de  $b(x)$ .

Nous notons d'abord qu'en prenant l'union des ensembles tel que  $b > \underline{b}$ , le choix de la fonction  $l(x)$  devient sans objet.

##### Lemme V-2 [65]

$S_r$  à un certain état  $x$ , indépendant de la valeur de  $l(x)$  dans cet état.

Preuve:

théorème V-1 implique que  $S(x)$  est indépendant de  $R(x)$  et de  $l(x)$ . À partir de la définition IV-7 nous avons :

$$S_r(x) = \{u \in S(x) : V_x^T g R^{-1/2} v \leq 0\},$$

ce qui implique que  $S_r$  est indépendant de  $l(x)$ , mais dépend de  $R(x)$  en raison de la contrainte ajoutée  $V_x^T g R^{-1/2} v \leq 0$ .

Le théorème suivant montre que l'union de  $S_r(x; R)$  sur toute  $R(x)$  définie positive symétrique est égale à un demi-espace dans  $\mathbb{R}^m$ .

**Lemme V-3 [65]**

Pour chaque  $x$  tel que  $V_x^T g \neq 0$ , l'union ponctuelle de  $S_r(x; R(x))$  sur tous les matrices ponctuellement définies positives symétriques  $R(x)$  est donnée par :

$$\mathcal{G}_r(x) \triangleq \bigcup_R S_r(x; R) = \left\{ -\beta g^T V_x + \xi : \beta > \max \left( 2 \frac{V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)}{V_x^T g g^T V_x}, 0 \right), \xi^T g^T V_x = 0 \right\}.$$

Preuve :

Fixer  $x \in \mathbb{R}^n$  et soit  $k_1 \in \mathcal{G}_r(x)$  un élément quelconque de  $\mathcal{G}_r(x)$ . Par hypothèse, la magnitude du composant de  $k_1$  qui est parallèle à  $-g^T V_x$ , notée  $\beta_{k_1}$ , doit satisfaire à :

$$\beta_{k_1} > \max \left( 2 \frac{V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)}{V_x^T g g^T V_x}, 0 \right) \geq 0,$$

ce qui implique que l'angle entre  $k_1$  et le vecteur  $-g^T V_x$  est inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ . Par conséquent, des arguments similaires à la preuve du lemme IV-5 montrent qu'il existe une matrice  $R_1$  symétrique définie positive telle que  $k_1 = -R_1^{-1} g^T V_x$ .

En conséquence,  $k_1$  est dans  $S_r(x; R_1)$ , avec  $v = 0$ , si

$$\|k_1\| > \left\| -\sigma_1(\underline{b}, R_1) \right\| = \left\| -\frac{\underline{b}(R_1)}{2} R_1^{-1} g^T V_x \right\|. \quad (\text{V.4})$$

Puisque le lemme V-2 garantit que  $S_r(x)$  est indépendant de  $l(x)$ , sans perte de généralité, nous pouvons sélectionner  $l(x) \equiv 0$ . Dans l'équation (IV-24) si  $V_x^T g = 0$  alors  $\underline{b} = 0$ . Aussi notons que si  $V_x^T g \neq 0$  et  $V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) \leq 0$  alors  $\underline{b} = 0$ . D'autre part, si  $V_x^T g \neq 0$  et  $V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) > 0$  alors

$$\underline{b} = \frac{4(V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|))}{V_x^T g R_1^{-1} g^T V_x}.$$

L'équation (V.4) est donc trivialement satisfaite sauf si  $V_x^T g \neq 0$  et  $V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) > 0$ .

Étant donné que  $k_1$  et  $-\sigma_1(R_1)$  sont parallèles, on a :

$$\begin{aligned}
\|k_1\| &> \|-\sigma_1(\underline{b}, R_1)\| \\
\Leftrightarrow \|\beta_{k_1}\| &> \left\| \frac{V_x^T g \sigma_1}{V_x^T g g^T V_x} \right\| \\
\Leftrightarrow \beta_{k_1} &> \frac{V_x^T g \sigma_1}{V_x^T g g^T V_x} \\
\Leftrightarrow \beta_{k_1} &> \frac{\underline{b}(R_1) V_x^T g R_1^{-1} g^T V_x}{2 V_x^T g g^T V_x} \\
\Leftrightarrow \beta_{k_1} &> \frac{2(V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)) V_x^T g R_1^{-1} g^T V_x}{V_x^T g R_1^{-1} g^T V_x V_x^T g g^T V_x} \\
\Leftrightarrow \beta_{k_1} &> \frac{2(V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|))}{V_x^T g g^T V_x},
\end{aligned}$$

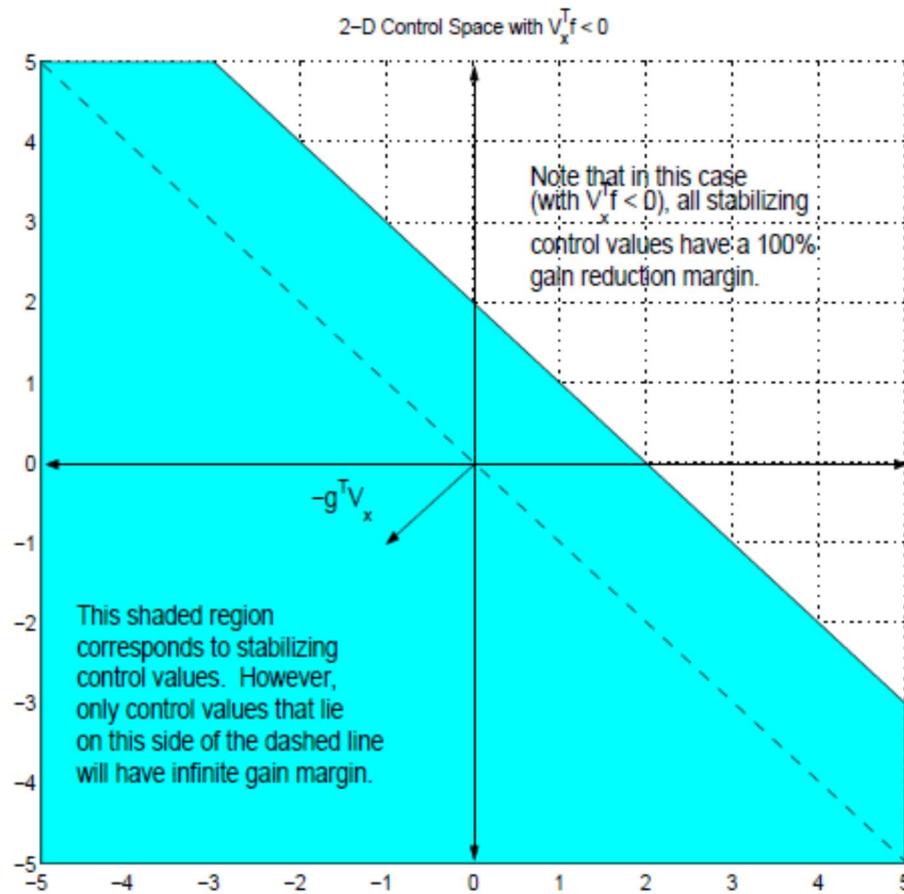
A l'inverse, fixer  $x \in \mathbb{R}^n$  et soit  $k_2 \in S_r(x; R_2)$  un élément quelconque de  $S_r(x; R_2)$ , où  $R_2$  est une matrice arbitraire symétrique, définie positive. Si  $\beta_{k_2}$  désigne le composant de  $k_2$  qui est parallèle à  $-g^T V_x$  ( $k_2 = -\beta_{k_2} g^T V_x + \xi, \xi \perp g^T V_x$ ). Il reste à démontrer que

$$\beta_{k_2} > \max\left(2 \frac{V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)}{V_x^T g g^T V_x}, 0\right).$$

Étant donné que  $k_2$  est un élément d'un ensemble de la satisfaction robuste, le théorème IV-4 assure qu'il a une marge de gain infinie, ce qui garantit que  $\beta_{k_2} > 0$ . De la même manière, le théorème IV-4 implique que  $k_2$  doit avoir une marge de cinquante pour cent de réduction du gain, ce qui implique que  $\frac{1}{2} k_2$  est stabilisant entrée-état.

Par conséquent, nous avons:

$$\begin{aligned}
V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) + \frac{1}{2} V_x^T g k_2 &< 0 \\
\Leftrightarrow V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) &< \frac{1}{2} \beta_{k_2} V_x^T g g^T V_x \\
\Leftrightarrow 2 \frac{V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)}{V_x^T g g^T V_x} &< \beta_{k_2}.
\end{aligned}$$



**Figure V.2 :** Espace de commande à un état et un temps fixes

Le théorème suivant est un résultat fondamental des chapitres VI et V.

Théorème V-2 [65]

Si  $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une loi de commande continue telle que  $k(0) = 0$  et  $k(x) \in \mathcal{G}_r(x)$  pour chaque  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , donc le système en boucle fermée est stable entrée-état, optimal inverse, et possède des marges de stabilité égale à  $(-\frac{1}{2}, \infty)$ .

Preuve:

Puisque  $\mathcal{G}_r(x)$  est un ensemble ouvert, la continuité de  $k(x)$  assure qu'il existe une fonction continue  $l(x)$  semi-définie positive et une fonction matricielle  $R(x)$  définie positive symétrique ponctuellement continue telle que  $k(x) \in S_r(x; l(x), R(x))$  pour chaque  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Par conséquent, le théorème résulte directement de la définition IV-16, le théorème IV-4 et le théorème IV-7.

Par conséquent, les marges de gain de type de Kalman et l'optimalité inverse peuvent être comprises par un portrait ponctuel de l'espace de commande. Les figures V.2 et V.3 illustrent ce concept.

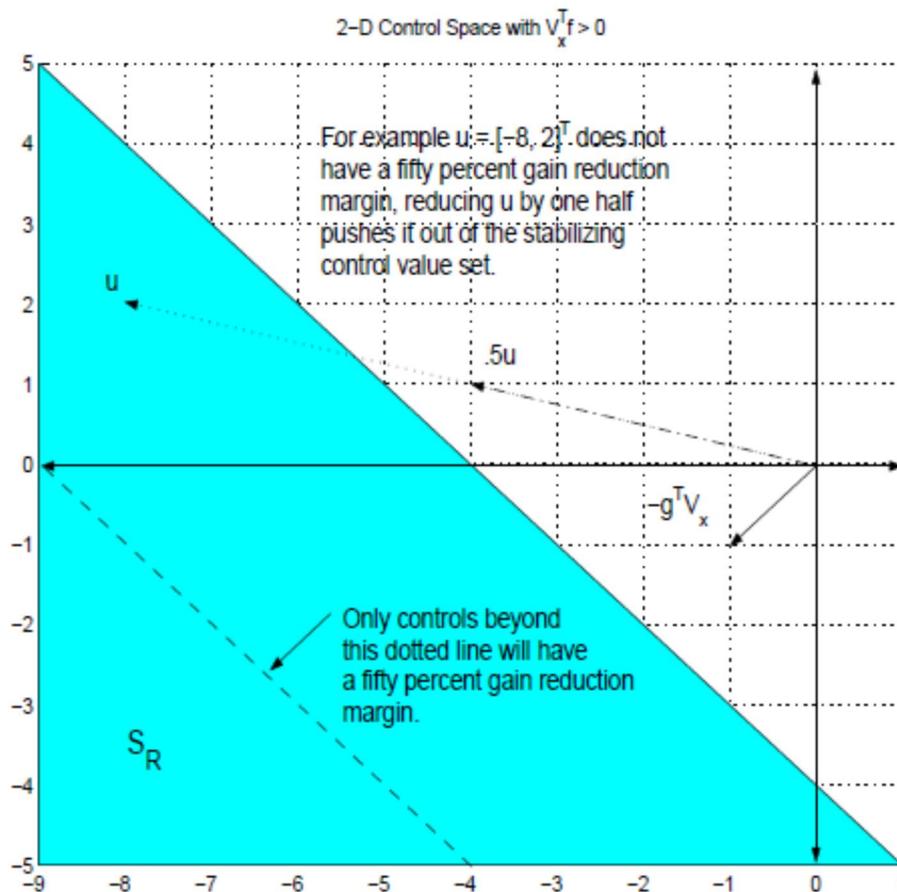


Figure V.3 : Espace de commande à un état et un temps fixes

## V.5. Projection sur un ensemble de satisfaction

Toute loi de commande peut servir à guider la sélection d'une commande de satisfaction. Cette "loi de guidage" doit posséder des exigences minimales de régularité (c'est à dire qu'elle doit être continue pour la ISS, ou localement lipschitzienne pour des problèmes de régulation), mais elle est autrement sans contraintes. La «loi de guidage» est généralement choisie car elle fonctionne très bien, mais elle a le potentiel de déstabiliser le système. Quelques exemples de lois de guidage pourraient servir de commande prédictive à base de modèle, des lois de commande par logique floue, ou par réseau de neurones.

La loi de guidage choisit les fonctions de sélection ponctuellement. En particulier, si la loi de guidage à un certain état se situe à l'intérieur de  $S$ , alors les fonctions de sélection sont choisies de

telle sorte que la valeur de commande de satisfaction soit égale à la valeur de la loi de guidage. Si la valeur de la loi de guidage se situe en dehors de  $S$ , alors elle est projetée sur la surface de  $S$  et les fonctions de sélection sont choisies de telle sorte que la valeur de commande revient sur la surface de  $S$ .

Étant donné que  $S$  et  $S_R$  sont des ensembles ouverts, cette technique de projection requiert une petite modification. Une valeur petite scalaire  $\epsilon$  doit être choisie. La limite de  $S$  est alors approximée comme suit :

$$\hat{\delta}S \triangleq \{u \in \mathbb{R}^m: -u^T g^T V_x > V_x^T f + \epsilon\}$$

Puisque les limites de  $S$  et  $S_R$  sont des hyperplans, effectuer la projection sur ces ensembles est relativement simple. Dans le cas où le but est de projeter une loi de guidage arbitraire ( $u_g$ ) sur  $S$ , on calcule  $\beta = \frac{-u^T g^T V_x}{V_x^T g g^T V_x}$ . Si  $\beta > \frac{V_x^T f}{V_x^T g g^T V_x}$  alors  $u_g \in S$  et on ne fait rien. Si, toutefois,  $\beta \leq \frac{V_x^T f}{V_x^T g g^T V_x}$ , donc on augmente  $u_g$  comme suit [64, 65]:

$$\hat{u}_g = u_g - \left( \frac{V_x^T f}{V_x^T g g^T V_x} - \beta + \epsilon \right) g^T V_x, \quad (\text{V.5})$$

où  $\epsilon$  est un nombre très petit. Cela garantit que  $\hat{u}_g \in S$ .

Dans le cas où le but est de projeter une loi de guidage ( $u_g$ ) sur  $S_R$  nous devons de nouveau calculer  $\beta$ . Si  $\beta(x) > \max(0, \frac{2V_x^T f}{V_x^T g g^T V_x})$  alors il est déjà un élément de  $S_R$ . Si, toutefois,  $\beta \leq \max(0, \frac{2V_x^T f}{V_x^T g g^T V_x})$  alors on augmente  $u_g$  [65] comme suit :

$$\hat{u}_g = u_g - \left( \max(0, \frac{2V_x^T f}{V_x^T g g^T V_x}) - \beta + \epsilon \right) g^T V_x, \quad (\text{V.6})$$

où  $\epsilon$  est un nombre très petit. Cela garantit que  $\hat{u}_g \in S_R$ .

Vu d'une autre façon, cette approche sélectionne les paramètres de satisfaction telle que la distance entre  $S$  ou  $S_R$  et une valeur de commande de guidage est minimisée à chaque état. Donc, la commande finale (de satisfaction)  $\hat{u}$  peut aussi s'écrire [65]:

$$\hat{u}(x) = \arg \min_{u(x) \in \mathcal{S}(x)} \|u(x) - u_g(x)\|$$

ou

(V.7)

$$\hat{u}(x) = \arg \min_{u(x) \in \mathcal{S}_R(x)} \|u(x) - u_g(x)\|$$

### V.5.1. Optimisation locale à base SDRE

La stratégie de sélection qui sera utilisée pour sélectionner une loi de commande de satisfaction dans cette section est la technique du SDRE, l'équation de Riccati dépendante de l'état (SDRE) comme nous l'avons vu dans le chapitre (III) est dérivée de la structure des commandes optimales linéaires quadratiques; en mettant le système dans une forme linéaire, puis la résolution l'équation de commande optimale associée (Riccati) ponctuellement. Pourtant la haute performance qui réalise cette technique souffre de propriétés de stabilité non prouvées.

Pour remédier à ce problème, l'approche de la performance démontrée est combinée avec les propriétés analytiques de satisfaction (par la projection sur un ensemble de satisfaction) pour produire une méthode générant de hautes performances, des lois de commande optimale inverse basées sur Lyapunov.

Considérons le système suivant non linéaire affine à plusieurs entrées. C.-à-d. :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (V.8)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $f(0)=0$ . On supposera que  $f$  et  $g$  sont localement des fonctions lipschitziennes, et le but sera de réguler l'état  $x$  à l'origine.

Par la factorisation de système (V.8) de telle sorte qu'il apparaît à tout état linéaire fixe :

$$f(x) \triangleq A(x)x \quad (V.9)$$

$$g(x) \triangleq B(x). \quad (V.10)$$

Vu de cette manière, les gains de commande à n'importe quel état  $x$  peuvent être calculés en utilisant la théorie de commande optimale standard linéaire, en résolvant l'équation algébrique de Riccati :

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0, \quad (V.11)$$

Ponctuellement à chaque état, et pour les hypothèses à énoncées dans le chapitre III, le gain de commande devient  $u = -K(x)x = -R^{-1}B^T(x)P(x)x$ .

En général, la technique du SDRE requiert que (V.11) est à résoudre à chaque état, tandis que dans le cas linéaire, elle doit être résolue une fois. Une autre différence est que dans le cas linéaire, la solution de (V.11) garantit une loi de commande stabilisante (et optimale), alors que dans le cas non linéaire la stabilité asymptotique du système en boucle fermée n'a pas été prouvée (sauf que dans les cas où les conditions illustrées dans le chapitres III sont disponibles).

## V.6. Exemples illustratifs

Dans cette section, nous allons présenter des exemples où le paradigme de satisfaction est utilisé pour assurer la stabilité d'un contrôleur SDRE aux systèmes linéaires et non linéaires.

### V.6.1. Commande d'attitude de véhicule spatial par la satisfaction à base du SDRE

Dans cette section, nous allons montrer un exemple où le paradigme de satisfaction est utilisé pour assurer la stabilité et l'optimalité inverse d'un contrôleur SDRE. Considérons le problème de la régulation de l'attitude et des vitesses angulaires d'un satellite à l'origine (où le modèle utilisé ici est tiré de [76, 77]). Soit  $\omega \in \mathbb{R}^3$  les vitesses angulaires et soit  $\xi \in \mathbb{R}^3$  le vecteur de gibbs des angles. Les équations du mouvement décrivant l'attitude du satellite peuvent être écrites comme suit :

$$H\dot{\omega} = p \times \omega + u$$

$$\dot{\xi} = Z(\xi)\omega,$$

où  $H = H^T > 0$  est la matrice d'inertie,  $u \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur de commande des couples induits,

$$Z(\xi) \triangleq \frac{1}{2}[I + \xi\xi^T + \xi \times],$$

$p = C(\xi)p^l$  avec  $p^l$  le vecteur constant de moment angulaire, et

$$C(\xi) \triangleq 2(1 + \xi\xi^T)^{-1}[I + \xi\xi^T - \xi \times] - I.$$

Notons que  $[p \times]$  désigne l'opération de produit vectoriel :

$$[p \times] \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous définissons l'état  $x$  comme  $x \triangleq \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}$ , et par différenciation nous obtenons la représentation suivante de l'espace d'état :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \ddot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ (\dot{Z}Z^{-1} + ZH^{-1}p \times Z^{-1})\dot{\xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ ZH^{-1} \end{bmatrix} u. \quad (\text{V.12})$$

L'équation (V.12) peut être moulée en une forme SDRE ( $\dot{x} = A(x) + B(x)u$ ) en définissant les matrices dépendantes de l'état  $A(x)$  et  $B(x)$  comme suit:

$$A \triangleq \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & \dot{Z}Z^{-1} + ZH^{-1}p \times Z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$B \triangleq \begin{bmatrix} 0_3 \\ ZH^{-1} \end{bmatrix}$$

Une CLF du système est donnée par [76]:

$$V(x) = \frac{1}{2} (\dot{\xi}^T Z^{-T} H Z^{-1} \dot{\xi} + x^T x).$$

Pour notre simulation, nous avons choisi l'état initial comme  $x_0 = [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 1, -3, 2]$ , et nous mettons la matrice d'inertie [76]

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

et le vecteur constant de moment angulaire [77]

$$p^l = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La commande initiale  $u_{SDRE}$  a été générée en utilisant la technique du SDRE (avec  $R(x) = I_3$  et  $Q(x) = I_6$ ), et ce signal a été minimalement augmenté à chaque  $x$  par la méthode décrite précédemment de l'équation (V.6) de telle sorte que la loi de commande résultante est une commande de satisfaction robuste.

La figure V.4 illustre les états du système et la norme de la différence entre la commande (SDRE) initiale et la commande (de satisfaction) augmentée. Remarquer que pour la plupart du

temps  $u_{SDRE} \in \mathcal{S}_R$ . Ces résultats prouvent que les bénéfices de performance de l'approche SDRE sont maintenus tandis que les propriétés analytiques de satisfaction ont été ajoutées.

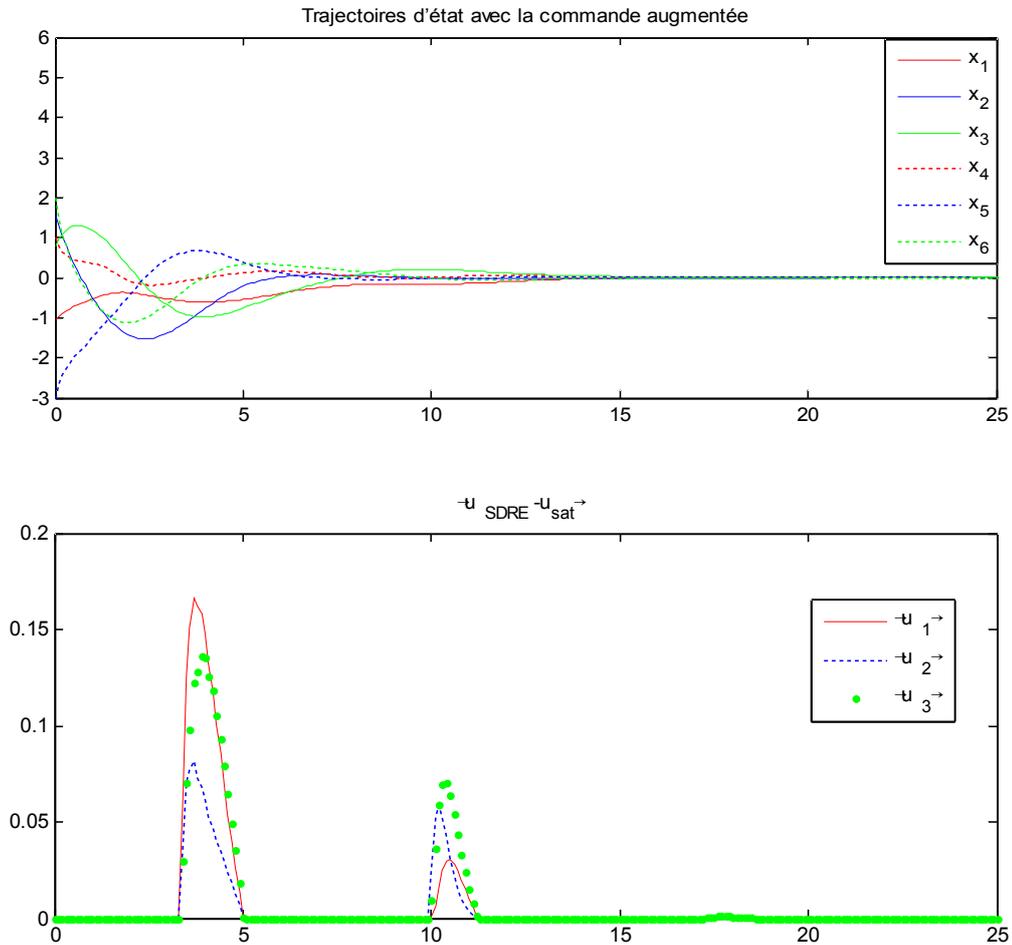


Figure V.4 : Commande augmentée du SDRE du véhicule spatial

### V.6.2. Exploitation l'espace nul de $V_x^T g$

Une illustration de l'amélioration de la performance potentielle est offerte, en ajoutant un composant de commande dans l'espace nul de  $-g^T V_x$ .

Considérons le système linéaire [65] commandable suivant :

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{V.13}$$

où

$$A \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il est facile de vérifier qu'une CLF valide pour ce système est  $V(x) = x^T x$ . Définit un indice de performance :

$$J(x_0, u) = \int_0^{\infty} x^T Q x + u^T u,$$

où  $Q \triangleq \text{diag}(1,2,1)$ , et désigne la commande qui minimise  $J$  comme  $u = -R^{-1}B^T P x$  où  $P$  est la solution symétrique définie positive de l'équation algébrique de Riccati associée.

Notre première commande à base CLF,  $u_1(x) = -\eta(x)g^T V_x + \xi(x)$  (où  $\xi(x)$  est perpendiculaire à  $-g^T V_x$ ) va exploiter l'espace nul de  $g^T V_x = B^T x$  en utilisant la commande optimale pour trouver une fonction appropriée  $\xi(x)$  :

$$\xi(x) \triangleq u^*(x) + \frac{-V_x^T g u^*}{V_x^T g g^T V_x} g^T V_x.$$

A noter que cette opération sélectionne simplement le composant de  $u^*(x)$  qui est perpendiculaire à  $-g^T V_x$  et affecte cette valeur à  $\xi(x)$ . Nous assurerons que  $u_1$  se stabilise en choisissant

$$\eta(x) = \frac{V_x^T f + x^T x}{V_x^T g g^T V_x},$$

ce qui satisfait clairement le lemme V-1.

Nous allons comparer la performance de  $u_1(x)$  avec la performance d'une autre commande  $u_2(x)$  fondée sur la même CLF.  $u_2(x)$  cependant sera contrainte de s'allonger dans la direction de  $-g^T V_x$ . Afin d'être juste, nous allons mettre l'amplitude de  $u_2(x)$  égale à l'amplitude de  $u_1(x)$  de sorte que  $u_1$  et  $u_2$  exercent la même autorité de commande, c.-à-d :

$$u_2 = -\frac{\|u_1\|}{\|V_x^T g\|} g^T V_x.$$

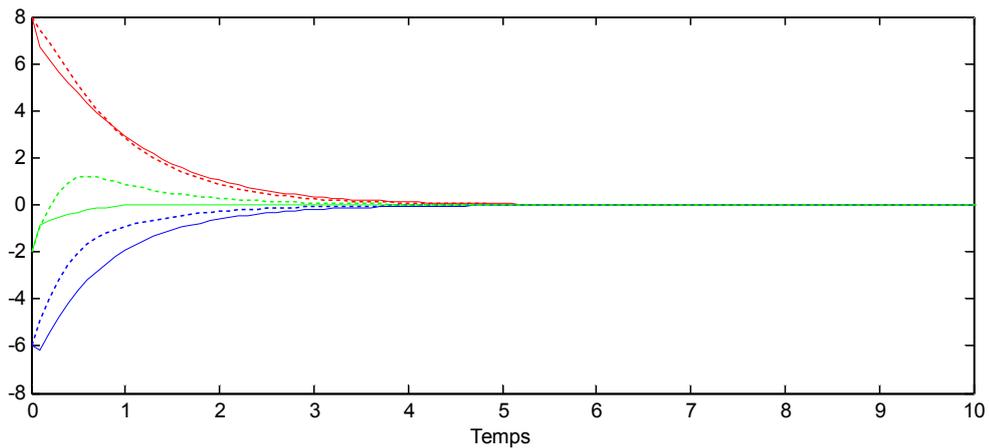
La figure V.5 montre les trajectoires d'état avec  $u = u_1(x)$  (solide) et  $u = u_2(x)$  (en pointillé). Même s'il peut sembler que  $u_2$  fait un meilleur job de la régulation du système, une inspection de la performance des commandes, telle que mesurée par notre indice du coût,  $J(x)$ , révèle le contraire. Spécifiquement, le coût associé à  $u_1$  (la loi de commande qui exploitait l'espace-nul) était

$$J(x_0, u_1) = 296.3,$$

alors que le coût associé à  $u_2$  était

$$J(x_0, u_2) = 404.4.$$

L'état initial a été choisi arbitrairement pour être  $x_0 = [8 \ -6 \ -2]$ , mais cette simulation a été répétée de nombreuses fois avec une grande variation dans les états initiaux et  $u_1(x)$  a toujours offert une performance supérieure.



**Figure V.5 :** Évolution d'état sous  $u_1$  et  $u_2$

Cette simulation montre que les lois de commande à base CLF de haute performance devraient exploiter l'espace nul de  $g^T V_x$  d'une certaine manière.

## V.7. Application du guidage de missile via SDRE et satisfaction combinées

Dans cette section, nous examinons le problème de guidage non linéaire pour des missiles contre des cibles manœuvrables aérodynamiquement commandés, que nous souhaitons résoudre par les méthodes des chapitres (III, IV et V). Tout d'abord, on présente les équations du mouvement décrites dans le système de référence de ligne of sight (ligne de vision), puis des simulations numériques pour une grande accélération des cibles manœuvrables sont réalisées.

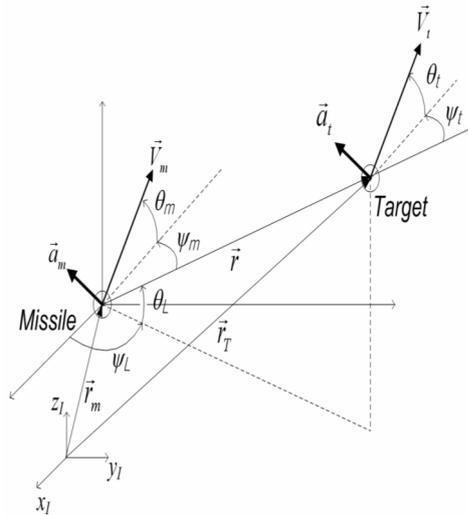
### V.7.1. Cinématique de missile

Cette section présente les équations dynamiques du mouvement (MOE) utilisées dans le problème d'interception de missiles.

### V.7.1.1. Équations du mouvement

L'engagement géométrique tridimensionnel entre le missile et la cible manœuvrable est représenté sur la figure V.6. Ici,  $\vec{v}_m$  ( $\vec{v}_t$ ) et  $\vec{a}_m$  ( $\vec{a}_t$ ) qui désignent le vecteur de la vitesse et de l'accélération du missile (cible), respectivement. Quatre systèmes de coordonnées de référence sont utilisés pour définir les équations du mouvement : le système de référence inertiel (I), le système de référence de line of sight c.-à-d. ligne de vision (L) avec vecteur d'unité  $[i_L, j_L, k_L]^T$ , le système de référence de la vitesse du missile (M) avec  $[i_m, j_m, k_m]^T$ , et le système de référence de la vitesse de la cible (T) avec  $[i_t, j_t, k_t]^T$ .

Les angles  $\psi_L$  et  $\theta_L$  désignent les angles d'azimut et d'élévation de LOS dans le système de référence inertiel respectivement, et  $\psi_m$  ( $\psi_t$ ) et  $\theta_m$  ( $\theta_t$ ), les angles d'azimut et d'élévation de vitesse du missile (cible) dans le système de référence LOS.



**Figure V.6 :** Géométrie d'interception en 3-D

On suppose que le missile et la cible sont aérodynamiquement commandés. Pour confirmer ces hypothèses, le vecteur d'accélération de chaque véhicule doit être normal à la vitesse, tel qu'il est exprimé dans les équations suivantes :

$$\vec{a}_m \triangleq a_{my}j_m + a_{mz}k_m, \quad (V-14)$$

$$\vec{a}_t \triangleq a_{ty}j_t + a_{tz}k_t.$$

Le vecteur de distance relative du missile vers la cible  $\vec{r}$  est donné par :

$$\vec{r} = r\vec{l}_L = \vec{r}_t - \vec{r}_m \quad (\text{V-15})$$

où  $\vec{r}_m$  et  $\vec{r}_t$  désignent les vecteurs de position du missile et de la cible respectivement.

Les équations du mouvement de l'engagement peuvent être données comme suit [78] :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V_t c\theta_t c\Psi_t - V_m c\theta_m c\Psi_m, \\ \dot{\theta}_m &= \frac{a_{mz}}{V_m} + \frac{s\Psi_m t\theta_L}{r} (V_t c\theta_t s\Psi_t - V_m c\theta_m s\Psi_m) \\ &\quad - \frac{c\Psi_m}{r} (V_t s\theta_t - V_m s\theta_m), \\ \dot{\Psi}_m &= \frac{a_{my}}{V_m c\theta_m} - \frac{1}{r} \left( \frac{s\theta_m c\Psi_m t\theta_L}{c\theta_m} + 1 \right) (V_t c\theta_t s\Psi_t - V_m c\theta_m s\Psi_m) \\ &\quad - \frac{s\theta_m s\Psi_m}{rc\theta_m} (V_t s\theta_t - V_m s\theta_m), \\ \dot{\theta}_t &= \frac{a_{tz}}{V_t} + \frac{s\Psi_t t\theta_L}{r} (V_t c\theta_t s\Psi_t - V_m c\theta_m s\Psi_m) \\ &\quad - \frac{c\Psi_t}{r} (V_t s\theta_t - V_m s\theta_m), \\ \dot{\Psi}_t &= \frac{a_{ty}}{V_t c\theta_t} - \frac{1}{r} \left( \frac{s\theta_t c\Psi_t t\theta_L}{c\theta_t} + 1 \right) (V_t c\theta_t s\Psi_t - V_m c\theta_m s\Psi_m) \\ &\quad - \frac{s\theta_t s\Psi_t}{rc\theta_t} (V_t s\theta_t - V_m s\theta_m), \end{aligned} \quad (\text{V-16})$$

$$\dot{\theta}_L = (V_t s\theta_t - V_m s\theta_m)/r,$$

$$\dot{\Psi}_L = (V_t c\theta_t s\Psi_t - V_m c\theta_m s\Psi_m)/r.$$

On considère les composantes suivantes de la vitesse relative dans le système de référence L :

$$\begin{aligned} v_x &\triangleq V_t c\theta_t c\Psi_t - V_m c\theta_m c\Psi_m, \\ v_y &\triangleq V_t c\theta_t s\Psi_t - V_m c\theta_m s\Psi_m, \\ v_z &\triangleq V_t s\theta_t - V_m s\theta_m. \end{aligned} \quad (\text{V-17})$$

Puisque  $\Psi_L$  n'affecte pas le comportement des autres états, elle peut être ignorée dans l'analyse. En utilisant (V-17), les équations du mouvement données en (V-16) sont grandement simplifiées et le système obtenu est affine en commande et peut être exprimé par :

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u + G_1(x)d. \quad (\text{V-18})$$

De sorte que

$$x = [r \quad v_x \quad v_y \quad v_z \quad \theta_L]^T, \quad (\text{V-19})$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} v_x \\ (v_y^2 + v_z^2)/r \\ (v_z t \theta_L - v_x) v_y / r \\ -(v_y^2 \theta_L + v_x v_z) / r \\ v_z / r \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V-20})$$

et

$$u = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T, \quad (\text{V-21})$$

$$d = [d_x \quad d_y \quad d_z]^T \quad (\text{V-22})$$

où

$$\begin{aligned} u_x &= (a_{mz} s \theta_m c \Psi_m + a_{my} s \Psi_m), \\ u_y &= (a_{mz} s \theta_m s \Psi_m - a_{my} c \Psi_m), \\ u_z &= -(a_{mz} c \theta_m). \end{aligned} \quad (\text{V-23})$$

et

$$\begin{aligned} d_x &= (-a_{tz} s \theta_t c \Psi_t - a_{tz} s \Psi_t), \\ d_y &= (-a_{tz} s \theta_t s \Psi_t + a_{ty} c \Psi_t), \\ d_z &= (a_{tz} c \theta_t). \end{aligned} \quad (\text{V-24})$$

Tels que  $[u_x, u_y, u_z]$  et  $[d_x, d_y, d_z]$  sont les composantes d'accélération du missile et de la cible respectivement aux axes  $x$ ,  $y$ , et  $z$  du système de référence LOS. Les équations d'accélération données en (V-23) représentent clairement la relation entre la commande de guidage et la commande d'accélération du missile. En mettant  $[\dot{d}_x, \dot{d}_y, \dot{d}_z] = [w_1, w_2, w_3]$  où  $(w_1, w_2, w_3)$  sont des procédés des perturbations gaussiennes avec les caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= (w_1, w_2, w_3) \\
E(w_1) &= 0, E(w_2) = 0, E(w_3) = 0 \\
E(\vec{w}(\xi_2), \vec{w}(\xi_1)) &= \sigma_T^2 \delta(\xi_2 - \xi_1) I_{3 \times 3}
\end{aligned} \tag{V-25}$$

où  $\sigma_T^2$  est la variance du bruit de processus.

## V.7.2. Simulation et interprétation

Dans cette section on donne les résultats de la simulation numérique avec Matlab en appliquant les méthodes numériques introduites dans les chapitres III, IV et V sur le système cinématique du missile pour le but de comparaison et de test de la validité.

Le système est affine en commande et peut être exprimé comme suit :

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u + G_1(x)d \tag{V-26}$$

En mettant

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3/x_1 & x_4/x_1 & 0 \\ 0 & -x_3/x_1 & 0 & (x_3 \tan(x_5))/x_1 & 0 \\ 0 & -x_4/x_1 & -(x_3 \tan(x_5))/x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/x_1 & 0 \end{bmatrix}, B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous supposons pour le système que les paires  $\{A(x), B(x)\}$  et  $\{A(x), H(x)\}$  sont contrôlables et observables respectivement pour tout  $x$  (voir le chapitre III). Pour ce cas l'équation de Riccati a une solution unique définie positive  $P(x)$  et la commande du SDRE devient  $\hat{k}(x) = R^{-1}B^T(x)P(x)x$ .

Pour le contrôleur augmenté on a :

$$k(x) = \arg \min_{u(x) \in S_R(x)} \|\hat{k}(x) - u(x)\| \tag{V-27}$$

où  $k(x)$  est la commande augmentée et  $\hat{k}(x)$  est la commande du SDRE.

Les conditions initiales du missile et de la cible dans le système de référence inertiel pour la simulation non linéaire sont données par :

- Pour le missile:  $x_m(0) = y_m(0) = z_m(0) = 0$  m,  $V_m = 294.4$  m/s.
- Pour la cible:  $x_t(0) = 4000$  m,  $y_t(0) = 0$  m,  $z_t(0) = -3000$  m,  $V_t = 199.965$  m/s.

Une accélération de bruit blanc de la cible au niveau 10g dans les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  du système de référence LOS est prise en considération de sorte que la commande sur les trois axes ne dépassent pas 50g ( $u_{lim} = 50g$ ). Toutes les simulations ont été exécutées avec Matlab.

### V.7.2.1. Résultats de simulation

Les figures suivantes illustrent les résultats de la simulation en utilisant les trois commandes, celle du SDRE, de satisfaction et les deux combinées (la commande augmentée). On peut voir que la commande augmentée est identique à la commande originale (SDRE) dans certains temps. Excepté que la commande augmentée est garantie stable et optimale inverse tandis que la commande du SDRE n'a aucune garantie. Par conséquent la performance du SDRE est maintenue avec des bonnes propriétés analytiques qui sont additionnées.

On peut voir que l'approche de satisfaction n'acquiert pas beaucoup d'efforts des commandes tant que le temps d'interception est plus long (24.48 s) en comparaison avec les autres méthodes. Au contraire la commande SDRE souffre de problème de vibration (chattering) de manière claire pour moins de temps d'interception (16.35 s), et cela à cause du renforcement de la commande sur les trois axes qui ne doit pas passer 50g.

En combinant ces deux techniques il résulte moins de chattering et moins d'énergie des commandes qui convergent rapidement à zéros, pour un temps d'interception plus petit (4.55 s).

○ Régulation non linéaire via la méthode SDRE

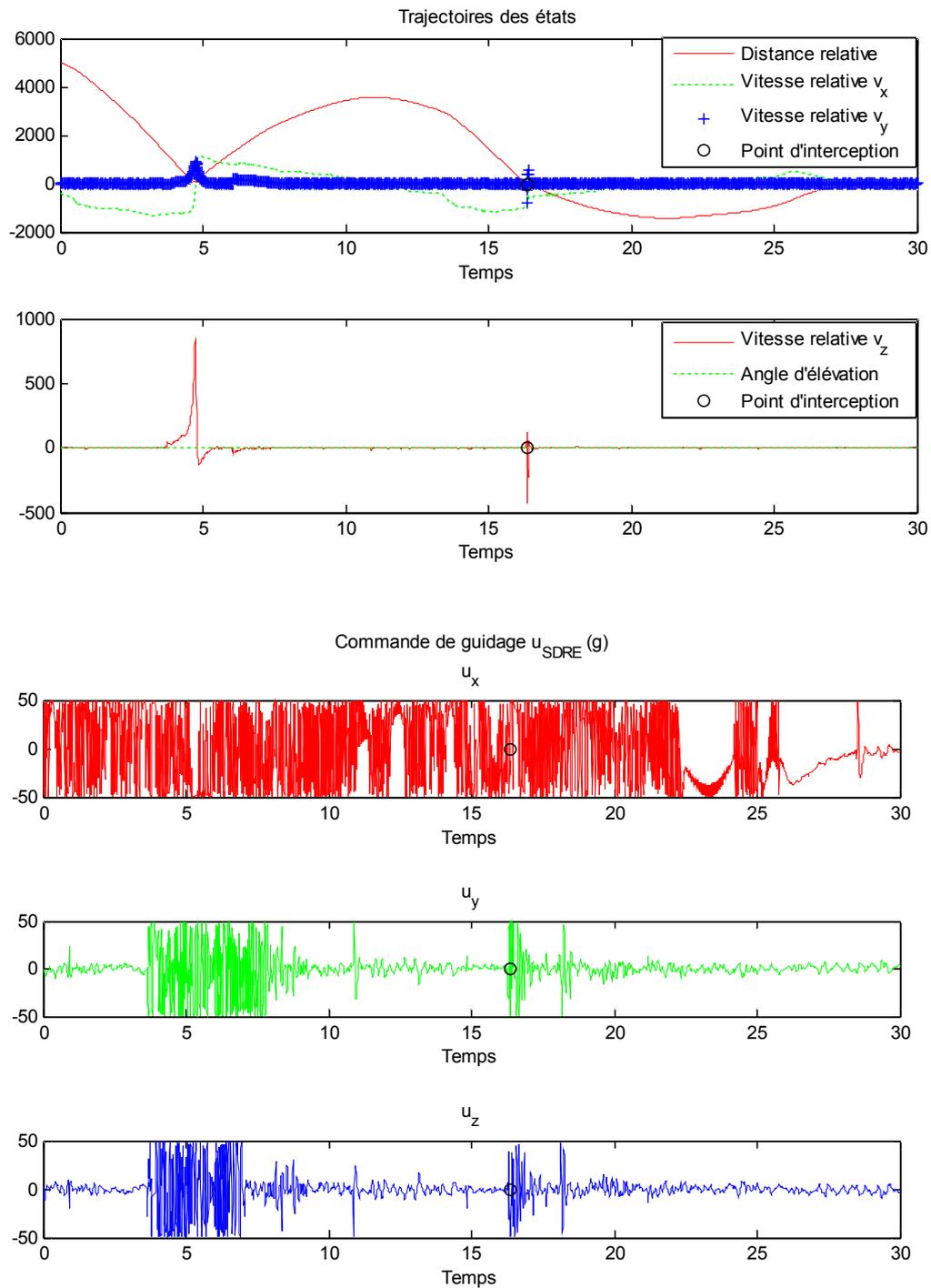


Figure V.7: Guidage du missile par la commande de régulation SDRE

○ Commande de satisfaction à base de CLF

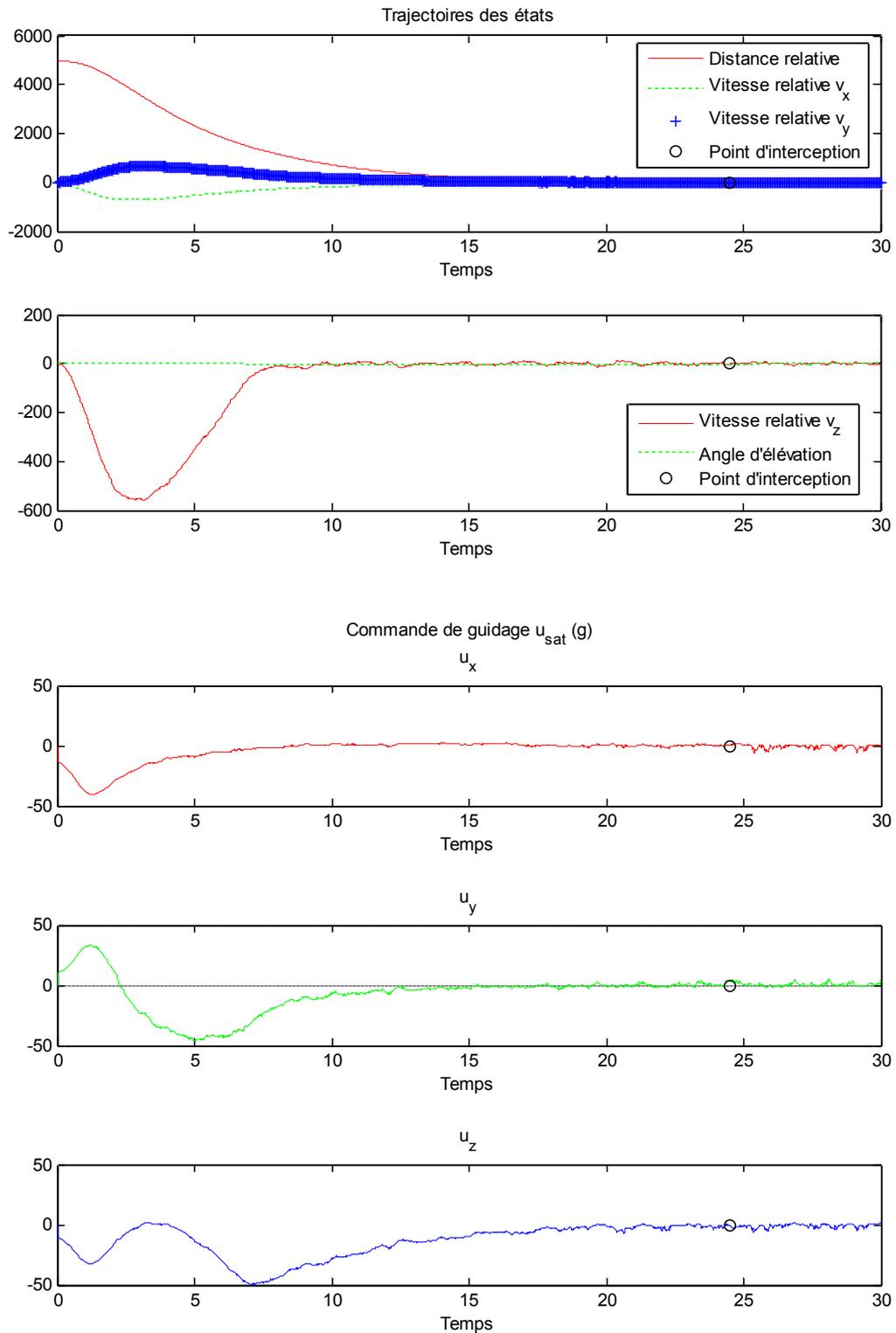
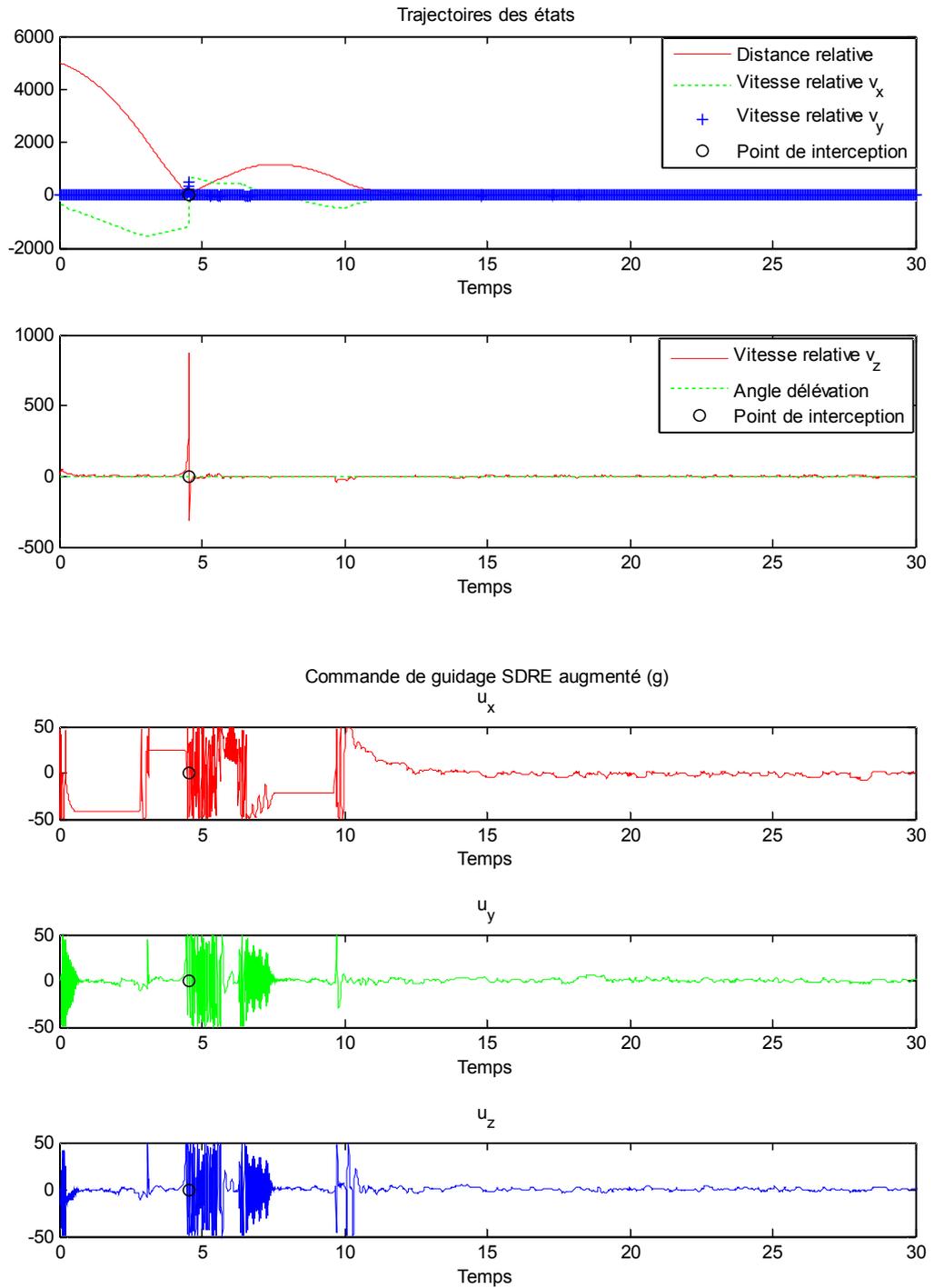
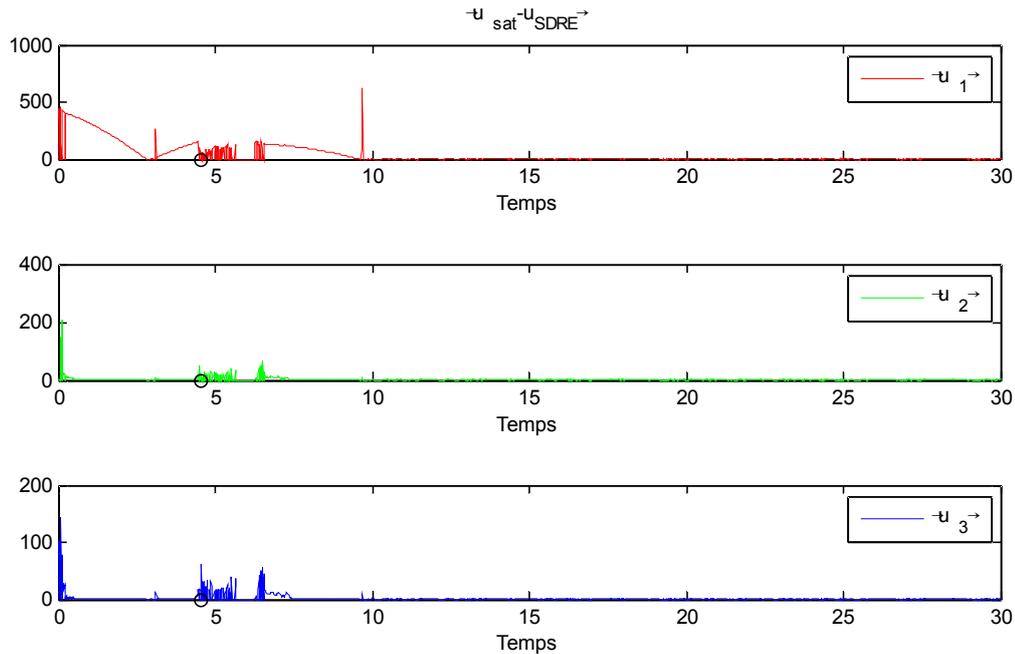


Figure V.8: Guidage du missile par la commande de satisfaction

○ **Commande augmentée via la combinaison de la régulation non linéaire SDRE et la satisfaction**





**Figure V.9:** Guidage du missile par la commande SDRE augmentée

## V.8. Conclusion

La paramétrisation de satisfaction englobe complètement la formule de Sontag, la formule de min-norme ponctuelle de Freeman et Kokotovic, et toute autre formule universelle à base CLF en paramétrant un demi-espace entier dans l'espace de commande. Une paramétrisation complète alternative est également présentée, à base d'un composant de commande qui est parallèle au vecteur  $g^T V_x$  et celui qui lui est orthogonal qui peut être ajouté pour améliorer la performance.

Une grande région de stabilisation de l'espace de commande a été, jusqu'à présent, inexploitée dans la conception des lois de commande basées sur la CLF. Il sera montré comment la paramétrisation de satisfaction exploite pleinement cette région de l'espace de commande, et fournit beaucoup plus de souplesse que les deux formules de Sontag et de min-norme ponctuelle.

La satisfaction à base de la CLF a été également montrée pour fournir une méthode de propriétés analytiques désirables pour les techniques de conception non linéaire populaires comme la commande SDRE. On montre comment une stratégie de commande de haute performance qui souffre de propriétés analytiques inconnues peut être projetée ponctuellement sur l'ensemble de satisfaction pour garantir la stabilité ou l'optimalité inverse.

Les commandes de satisfaction et satisfaction robuste résultant recouvrent les performances offertes par ces techniques, mais elles restent aussi stabilisantes et stabilisantes optimales inverse respectivement.

---

## **CHAPITRE VI:**

# **Filtre de Kalman unscented**

---

## VI.1. Introduction

Le filtre de Kalman (KF) est considéré comme une technique de référence pour les problèmes d'estimation linéaire, menant à la solution MMSE (Minimum Mean Square Error), de manière récursive grâce aux modèles d'état du système dynamique [79, 80, 81]. Dans le cas d'une dynamique non-linéaire le problème d'estimation récursive devient difficile. Le filtre de Kalman étendu (EKF - Extended Kalman Filter) reste une solution populaire car il évite le coût de calcul important habituellement exigé par des approches quasi-optimales telles que le filtre particulaire. Le EKF se base sur la propagation de la distribution des états par linéarisation au premier ordre du système non-linéaire, en gardant la même structure que le filtre de Kalman classique. Bien que le EKF puisse faire face aux systèmes faiblement non-linéaires, de larges erreurs peuvent être commises sur les moments a posteriori (moyenne et covariance) en présence de non-linéarité importante. Cette limite de la linéarisation peut être résolue à l'aide d'un filtre IEKF (Iterated - EKF) mais avec une augmentation du coût de calcul.

Plusieurs méthodes de filtrage de Kalman non-linéaires ont été proposées récemment pour éviter les limitations imposées par le EKF, sans un coût de calcul additionnel significatif. Le filtre de Kalman unscented, a été proposé pour tenter de résoudre ces problèmes. Cela se fait par l'utilisation d'approche d'échantillonnage déterministe, pour approximer le gain optimal et les termes de prédiction. Le filtre de Kalman à base d'échantillonnage déterministe surpasse le EKF, non seulement en termes de précision de l'estimation, mais aussi dans la robustesse du filtre et la facilité de l'implémentation, sans un coût de calcul additionnel [82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92].

Le filtre de Kalman unscented (UKF) est un algorithme de filtrage efficace dérivé pour calculer des solutions approximatives pour des problèmes de filtrage non-linéaires optimales à temps discret. Il a été appliqué avec succès à de nombreux problèmes pratiques.

Dans ce chapitre, nous allons d'abord introduire le filtre de Kalman unscented (UKF), montrer comment il est motivé et dérivé, et spécifier complètement son exécution algorithmique. Nous continuons en montrant comment nous avons étendu l'algorithme UKF en dérivant numériquement des formes stables et efficaces de la racine carrée du UKF, ainsi que l'application de ces formes pour suivi de véhicule de rentrée. L'expérience confirme non seulement l'exactitude et l'utilité de l'algorithme UKF, mais aussi ses performances en contraste par rapport à celle du EKF sur le même problème.

## VI.2. Filtre de Kalman via la transformation unscented

Le filtre de Kalman unscented qui a été introduit par Julier [89] permet de s'affranchir de la linéarisation du modèle de prédiction et de mesures. En effet il repose sur une transformation non linéaire dite "Unscented transformation", dans laquelle la distribution de probabilité de l'état est représentée par un jeu de points (sigma points) choisi pour paramétriser la moyenne et la covariance de la distribution. Cet ensemble de points est ensuite propagé dans le modèle de prédiction non linéarisé, la moyenne ainsi que la covariance a posteriori sont approximées au deuxième ordre de l'expansion en série de Taylor.

### VI.2.1. Filtre de Kalman unscented

Le filtre de Kalman unscented (UKF) [93] est un algorithme de filtrage à temps discret, qui utilise la transformation unscented pour calculer des solutions approximatives aux problèmes de filtrage comme dans cette forme :

$$x_k = f_d(x_{k-1}, k-1) + q_{k-1} \tag{VI.1}$$

$$y_k = h_d(x_k, k) + r_k,$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système,  $y_k \in \mathbb{R}^m$  est la mesure,  $q_{k-1} \in \mathbb{R}^n$  est un bruit d'un processus gaussien  $q_{k-1} \sim N(0, Q_{k-1})$ ,  $r_k \in \mathbb{R}^m$  est un bruit de la mesure gaussienne  $r_k \sim N(0, R_k)$ , et les fonctions non linéaires  $f_d$  et  $h_d$  sont respectivement la dynamique associée et la fonction d'observation.

La moyenne et la covariance de l'état initial  $x_0$  sont  $m_0$  et  $P_0$ , respectivement.

Le but de filtrage (Bayésien) discret consiste à calculer récursivement la distribution a posteriori  $p(x(t_k) | y_1, \dots, y_k)$ , (VI.2)

ou au moins les moments pertinents de la distribution (par exemple la moyenne et la covariance), où  $t_k$  est l'instant de mesure de  $y_k$ .

Si la fonction  $p(x|y)$  est connue, alors une observation (ou mesure) de la grandeur Y permet la connaissance statistique de la variable X. C'est l'outil de base de l'estimation [94]. La construction de  $p(x|y)$  donne la connaissance statistique complète de  $x$ . Dans une application pratique, on cherche plutôt à donner une valeur à  $x$  qui soit la plus proche possible de la valeur vraie. C'est le but des estimateurs. Ils sont construits à partir de la densité de probabilité  $p(x|y)$ .

En termes de transformation unscented  $UT(\bullet)$ , dans les étapes du filtre de Kalman unscented, la prédiction et la mise à jour peuvent être écrites comme suit [93]:

- Prédiction: Calcul de la moyenne d'état prédite  $m_k^-$  et de la covariance prédite  $P_k^-$ :

$$[m_k^-, \tilde{P}_k] = UT(f_d, m_{k-1}, P_{k-1}) \quad (VI.3)$$

$$P_k^- = \tilde{P}_k + Q_{k-1}.$$

- Mise à jour: Calcul de la moyenne de mesure prédite  $\mu_k$ , la covariance de la mesure  $S_k$ , et la cross covariance de l'état et de la mesure  $C_k$ :

$$[\mu_k, \tilde{S}_k, C_k] = UT(h_d, m_k^-, P_k^-) \quad (VI.4)$$

$$S_k = \tilde{S}_k + R_k$$

Donc le calcul du gain du filtre  $K_k$ , de la moyenne d'état  $m_k$  et de la covariance  $P_k$ , conditionnelle à la mesure  $y_k$ :

$$\begin{aligned} K_k &= C_k S_k^- \\ m_k &= m_k^- + K_k [y_k - \mu_k] \\ P_k &= P_k^- - K_k S_k C_k^T. \end{aligned} \quad (VI.5)$$

Le filtrage démarre à partir de la moyenne initiale  $m_0$  et de la covariance  $P_0$ .

## VI.2.2. Transformation unscented UT et choix du sigma points

Afin de représenter au mieux la distribution des erreurs, il convient de choisir adéquatement un ensemble de points  $X_i$  ainsi que les poids qui leur sont associés  $W_i$ . La construction des sigma points repose sur le principe de la transformation unscented.

On considère la fonction non linéaire  $h \rightarrow y = h(x)$  de la variable aléatoire  $x \in R^n$  de moyenne  $\bar{x}$  et de covariance  $P_{xx}$ . Pour calculer la statistique de la variable  $y$  qui a été subie la transformation  $h$ , un jeu de  $(2n + 1)$  sigma points doit être formulé [95] :

$$\begin{aligned} X_0 &= \bar{x} & W_0 &= \kappa / (n + \kappa) & i &= 0 \\ X_i &= \bar{x} + (\sqrt{(n + \kappa) P_{xx}})_i & W_i &= 1/2(n + \kappa) & i &= 1, \dots, n \\ X_i &= \bar{x} - (\sqrt{(n + \kappa) P_{xx}})_{i-n} & W_i &= 1/2(n + \kappa) & i &= n+1, \dots, 2n \end{aligned} \quad (VI-6)$$

où  $\kappa$  est un paramètre d'échelle utilisé pour limiter la dispersion des point dans l'espace d'état et  $(\sqrt{(n + \kappa)P_{xx}})_i$  représente la  $i^{me}$  ligne ou colonne de la matrice carrée, et  $W_{(i)}$  est le poids associé. Ces vecteurs de sigma points sont propagés sans linéarisation par :

$$Y_i = h(X_i) \quad i = 0, \dots, 2n \quad (\text{VI.7})$$

Par conséquent la moyenne et la covariance estimées de  $y$  sont ensuite approximées respectivement en utilisant les sigma points déterminés précédemment :

$$\bar{y} = \sum_{i=0}^{2n} W_i Y_i \quad (\text{VI.8})$$

$$P_{yy} = \sum_{i=0}^{2n} W_i (Y_i - \bar{y})(Y_i - \bar{y})^T$$

Dans la définition de l'ensemble du sigma points (VI.6) par la transformation UT le choix du paramètre  $\kappa$  fournit un extra degré de liberté de tel sort qu'il capture l'influence des moments supérieurs sur l'approximation, comme il permet aussi de limiter la dispersion des points dans l'espace d'état en cas où le modèle est fortement non linéaire. Ainsi la distance des sigma points  $X_i$  par rapport à  $\bar{x}$ ,  $|X_i - \bar{x}|$  est proportionnelle à la valeur  $\sqrt{(n + \kappa)}$ . Alors quand  $\kappa = 0$  la distance proportionnelle à  $\sqrt{(n)}$ , tandis que si  $\kappa > 0$  les points s'éloignent de la moyenne  $\bar{x}$ , et avec une valeur strictement négative de  $\kappa$ , on retrouve un effet de rapprochement vers  $\bar{x}$ . Quoique le paramètre  $\kappa$  peut être positif ou négatif, une valeur négative peut conduire à l'obtention d'une matrice de covariance semi-définie négative. Pour cette raison la transformation "Sigma Point Scaling Methods" introduite dans le paragraphe suivant va s'occuper à l'étude de la matrice de covariance non-positive.

### VI.2.3. Transformation scaled-unscented

Enfin il existe une solution proposée dans [96] où un nouvel ensemble de points est proposé avec un paramètre de décalage :

$$X_s^{(i)} = X^{(0)} + \alpha(X^{(i)} - X^{(0)}), \quad i = 0 \dots 2n, \quad (0 < \alpha < 1) \quad (\text{VI.9})$$

Cette nouvelle transformation porte le nom de transformation scaled-unscented. Les auteurs ont démontré que le nouveau paramètre de décalage  $\alpha$  introduit ne va pas influencer de manière négative l'estimation de la statistique de la variable transformée  $(\bar{y}, P_{yy})$ , avec une expression

exacte jusqu'au deuxième ordre des moments de la v.a. initiale (variable aléatoire initiale), et une pondération des autres moments supérieurs grâce à  $\alpha$ . Enfin les auteurs ont proposé un ensemble de points qui intègre ce décalage ainsi que les nouvelles pondérations associées [97] :

$$\begin{aligned}
 X_0 &= \bar{x} & W_{(m)}^{(0)} &= \frac{\lambda}{n+\lambda} \\
 X_i &= \bar{x} + (\sqrt{(n+\lambda)P_{xx}})_i & i=1,\dots,n & W_{(c)}^{(0)} &= \frac{\lambda}{n+\lambda} + (1-\alpha^2 + \beta) \\
 X_i &= \bar{x} - (\sqrt{(n+\lambda)P_{xx}})_i & i=n+1,\dots,2n & W_{(m)}^{(i)} = W_{(c)}^{(i)} &= \frac{1}{2(n+\lambda)} \quad i=1,\dots,2n
 \end{aligned} \tag{VI.10}$$

où

$$\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n \tag{VI.11}$$

est le paramètre d'échelle,  $\kappa$  est le second paramètre d'échelle en ce cas (qui est habituellement choisi  $(3-n)$  [84]) et les pondérations désignées par  $W_{(m)}^{(i)}$  et  $W_{(c)}^{(i)}$  sont associées au calcul de la moyenne et de la covariance, respectivement.

L'expression du point central  $X_0$  garantit une matrice de covariance définie semi-positive. Le choix des paramètres qui apparaissent dans le calcul de l'ensemble de points se fait de la manière suivante [97] :

- afin d'avoir une matrice de covariance définie semi-positive, on prendra  $\kappa \geq 0$ . Il s'avère que la valeur de  $\kappa$  n'est pas critique, de telle sorte que  $\kappa = 0$  correspond généralement à tous les cas d'estimation;
- le paramètre  $0 < \alpha < 1$  va jouer directement sur la dimension de l'ellipsoïde de distribution des sigma points. Ainsi de façon idéale sa valeur doit être petite ( $10^{-4} \leq \alpha \leq 1$  [84]) pour limiter l'influence de certains effets de non-linéarité dans les régions éloignées de la valeur estimée;
- le dernier paramètre introduit  $\beta$ , est choisi positif pour avoir une certaine connaissance des moments d'ordre supérieur de la statistique initiale dans le modèle. Par exemple pour une hypothèse de distribution initiale gaussienne nous prendrons  $\beta = 2$ .

#### VI.2.4. Modèle d'estimation récursive UKF

Dans cette section, la transformation scaled unscented qui permet de paramétriser la moyenne et la covariance de l'état du système en question, est appelée comme une stratégie directe dans l'estimation récursive des deux modèles de prédiction et de mesure. Dans cette approche nommée

aussi le filtre de Kalman scaled unscente le vecteur d'état original  $x_k \in R^n$  est augmenté en ajoutant les vecteurs associés aux bruits dynamiques  $v_k \in R^{r_v}$  et de mesure  $n_k \in R^{r_n}$ . Notons que ces bruits additifs  $\{v_k, n_k\}$  sont considérés centrés, gaussiens, non corrélés et associés aux covariances  $R_v$  et  $R_n$  respectivement. Le vecteur final et la matrice de covariance sont écrits sous la forme suivante :

$$x_k^a = \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \\ \eta_k \end{bmatrix}; P_{k/k}^a = \begin{bmatrix} P_{k/k} & 0 & 0 \\ 0 & R_v & 0 \\ 0 & 0 & R_n \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.12})$$

La dimension effective de cette variable d'état aléatoire augmentée est maintenant  $L = L_x + L_v + L_n$ , c.-à-d.;  $x_k^a \in R^{L_x + L_v + L_n}$ , où  $L_x$  est la dimension d'état original,  $L_v$  est la dimension du processus de bruit et  $L_n$  est la dimension de bruit d'observation.

**Algorithme UKF :** Les différentes étapes de calcul pour une itération du filtre sont présentées ci-dessous :

---

**Algorithm VI.1 [98] : Le filtre de Kalman unscented (UKF)**

---

- *Initialisation :*  $\hat{x}_0 = E[x_0], \quad P_{x0} = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]$   
 $\hat{x}_0^a = E[x^a] = [\hat{x}_0^T \ 0 \ 0]^T, \quad P_0^a = E[(x_0^a - \hat{x}_0^a)(x_0^a - \hat{x}_0^a)^T] = \begin{bmatrix} P_{x0} & 0 & 0 \\ 0 & R_v & 0 \\ 0 & 0 & R_n \end{bmatrix}$

- *Pour*  $k = 1, \dots, \infty$  :

1. Construction de l'ensemble des sigma points en utilisant les relations (VI.10) :

$$\mathcal{X}_{k-1}^a = [\hat{x}_{k-1}^a \quad \hat{x}_{k-1}^a + \gamma\sqrt{P_{k-1}^a} \quad \hat{x}_{k-1}^a - \gamma\sqrt{P_{k-1}^a}] \quad (\text{VI.13})$$

2. Propagation de l'ensemble des points construit à travers la fonction de processus:

$$\mathcal{X}_{k \setminus k-1}^x = f(\mathcal{X}_{k-1}^x, \mathcal{X}_{k-1}^v, u_{k-1}) \quad (\text{VI.14})$$

3. Calcul de la valeur estimée et de la covariance des erreurs prédites :

$$\hat{x}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \mathcal{X}_{i, k \setminus k-1}^x \quad (\text{VI.15})$$

$$P_{xk}^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\mathcal{X}_{i, k \setminus k-1}^x - \hat{x}_k^-)(\mathcal{X}_{i, k \setminus k-1}^x - \hat{x}_k^-)^T \quad (\text{VI.16})$$

4. Propagation des sigma points à travers le modèle d'observation :

$$\mathbf{y}_{k \setminus k-1} = h(\mathbf{x}_{k \setminus k-1}^x, \mathbf{x}_{k-1}^n) \quad (\text{VI-17})$$

5. Calcul de l'observation prédite, de la covariance de l'innovation et de la matrice de cross-covariance :

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \mathbf{y}_{i,k \setminus k-1} \quad (\text{VI-18})$$

$$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{y}}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\mathbf{y}_{i,k \setminus k-1} - \hat{\mathbf{y}}_k^-) (\mathbf{y}_{i,k \setminus k-1} - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \quad (\text{VI-19})$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\mathbf{x}_{i,k \setminus k-1}^x - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\mathbf{y}_{i,k \setminus k-1} - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \quad (\text{VI-20})$$

6. Expression du gain de Kalman et calcul final de l'état estimé et de la covariance des erreurs:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{y}}_k}^{-1} \quad (\text{VI-21})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-) \quad (\text{VI-22})$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{y}}_k} \mathbf{K}_k^T \quad (\text{VI-23})$$

- Paramètres:  $\mathbf{x}^a = [\mathbf{x}^T \mathbf{v}^T \mathbf{n}^T]^T$ ,  $\mathbf{x}^a = [(\mathbf{x}^x)^T (\mathbf{x}^v)^T (\mathbf{x}^n)^T]$ ,  $\gamma = \sqrt{L + \lambda}$  est un paramètre d'échelle composé et  $\lambda$  est donnée par l'Eq.VI.11,  $L$  est la dimension des états augmentés,  $\mathbf{R}_v$  est la covariance du bruit de processus,  $\mathbf{R}_n$  est la covariance du bruit d'observation, et  $W_i$  sont les poids tel que calculés dans l'Eq.VI.10.

Avec les expressions qui caractérisent l'implémentation récursive du filtrage de Kalman, le développement de la structure classique du filtrage de type scaled-unscented est accompli. On souligne encore une fois que la solution choisie pour former l'ensemble des points sigma n'est pas unique.

### VI.3. Variations d'implémentation

Dans cette section, on introduit les extensions et les formes implementationales alternatives du UKF, qui, dépendent de la forme spécifique du problème d'estimation d'état, et qui mène à des économies de coûts computationnels ainsi que l'augmentation de la robustesse numérique. Le cas échéant, la vérification expérimentale est donnée.

#### VI.3.1. Formes du bruit additif

Pour le cas spécial (mais souvent rencontré) où le bruit de processus et de mesure sont purement additifs, la complexité de calcul du UKF peut être réduite. Dans un tel cas, l'état du système n'a pas besoin d'être augmenté avec le bruit de variable aléatoire. Ceci permet de réduire la dimension des

sigma points, ainsi que le nombre total des sigma points utilisés. Les covariances des sources de bruit sont ensuite incorporées dans la matrice de covariance d'état en utilisant une procédure additive simple. Cette implémentation est donnée dans l'algorithme VI.2. La complexité de l'algorithme est d'ordre  $L^3$ , où  $L$  est la dimension de l'état. C'est la même complexité que le EKF.

---

**Algorithm VI.2 [99] : Le filtre de Kalman unscented (UKF) - le cas du bruit additif**


---

- *Initialisation* :  $\hat{\mathbf{x}}_0 = E[\mathbf{x}_0]$  ,  $\mathbf{P}_{\mathbf{x}0} = E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]$

- *Pour*  $k = 1, \dots, \infty$  :

1. Construction de l'ensemble de sigma points en utilisant les relations (VI.10) :

$$\mathbf{X}_{k-1} = [\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \gamma\sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}_{k-1}}} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \gamma\sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}_{k-1}}}] \quad (\text{VI.24})$$

2. Propagation de l'ensemble des points construit à travers la fonction de processus:

$$\mathbf{X}_{k \setminus k-1}^* = f(\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad (\text{VI.25})$$

3. Calcul de la valeur estimée, de la covariance des erreurs prédites et des sigma points augmentés :

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \mathbf{X}_{i, k \setminus k-1}^* \quad (\text{VI.26})$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\mathbf{X}_{i, k \setminus k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{X}_{i, k \setminus k-1}^* - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T + \mathbf{R}_v \quad (\text{VI.27})$$

$$\mathbf{X}_{k \setminus k-1} = [\hat{\mathbf{x}}_k^- \quad \hat{\mathbf{x}}_k^- + \gamma\sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^-} \quad \hat{\mathbf{x}}_k^- - \gamma\sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^-}] \quad (\text{VI.28})$$

4. Propagation des sigma points à travers le modèle d'observation :

$$\mathbf{Y}_{k \setminus k-1} = h(\mathbf{X}_{k \setminus k-1}) \quad (\text{VI.29})$$

5. Calcul de l'observation prédite, de la covariance de l'innovation et de la matrice de cross-covariance:

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \mathbf{Y}_{i, k \setminus k-1} \quad (\text{VI.30})$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\mathbf{Y}_{i, k \setminus k-1} - \hat{\mathbf{y}}_k^-)(\mathbf{Y}_{i, k \setminus k-1} - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T + \mathbf{R}_n \quad (\text{VI.31})$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\mathbf{X}_{i, k \setminus k-1} - \hat{\mathbf{x}}_k^-)(\mathbf{Y}_{i, k \setminus k-1} - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \quad (\text{VI.32})$$

6. Expression du gain de Kalman et calcul final de l'état estimé et de la covariance des erreurs:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} \mathbf{P}_{\mathbf{y}_k}^{-1} \quad (\text{VI.33})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-) \quad (\text{VI.34})$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{y}}_k} \mathbf{K}_k^T \quad (\text{VI.35})$$

- Paramètres:  $\gamma = \sqrt{L + \lambda}$  est un paramètre d'échelle composé et  $\lambda$  est donnée par l'Eq. VI.11,  $L$  est la dimension d'état,  $\mathbf{R}_v$  est la covariance du bruit de processus,  $\mathbf{R}_n$  est la covariance du bruit d'observation, et  $W_i$  sont les poids tel que calculés dans l'Eq. VI.10. L'augmentation de l'ensemble de sigma points: Dans (VI.28), les sigma points sont augmentés par des points additionnels provenant de la racine carrée matricielle de covariance du bruit du processus, afin d'incorporer l'effet du bruit sur les sigma points observés  $\mathbf{y}$ . Cela nécessite la mise  $L \rightarrow 2L$  et recalculer les pondérations différentes  $W_i$  en conséquence. Alternativement, nous pouvons redessiner un nouvel ensemble complet de sigma points, c.-à-d.  $\mathcal{X}_{k \setminus k-1} = [\hat{\mathbf{x}}_k^- \quad \hat{\mathbf{x}}_k^- + \gamma \sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^-} \quad \hat{\mathbf{x}}_k^- - \gamma \sqrt{\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k}^-}]$ . Cette approche alternative résulte en moins des sigma points utilisés, mais supprime également toutes les informations des moments perdus capturés par les sigma points originaux propagés.

Un certain nombre de variations à des fins numériques sont également possibles. Par exemple, la racine carrée matricielle, qui peut être mis en œuvre directement à l'aide d'une factorisation de Cholesky, est en général de l'ordre  $\frac{1}{6}L^3$ . Cependant, les matrices de covariance sont exprimées de manière récursive, et donc la racine carrée peut être calculée de façon que  $M \times L^2$  (où  $M$  est la dimension de la sortie  $\mathbf{y}_k$ ) en effectuant une mise à jour récursive de la factorisation de Cholesky. Les détails sur l'implémentation efficace de la racine carrée récursive du UKF sont donnés dans la section suivante.

### VI.3.2. Formes de la racine carrée

L'une des opérations les plus coûteuses dans le UKF est le calcul de la matrice de la racine carrée de la covariance d'état à chaque pas de temps pour former l'ensemble de sigma points (voir l'équation VI.13). De ce fait et la nécessité d'une meilleure stabilité numérique (en particulier lors de la mise à jour de covariance d'état), nous avons dérivé numériquement des formes de racine carrée efficaces du UKF [98]. Ces formes se propagent et mettent à jour la racine carrée de la covariance d'état directement sous la forme factorisée de Cholesky, en utilisant l'approche des sigma points et les techniques d'algèbres linéaire suivantes: La décomposition QR, la mise à jour de facteur de Cholesky et les moindres carrés efficaces à base de pivot. Le UKF de la racine carrée (SR-UKF) présente une précision égale (ou légèrement meilleure) de l'estimation en comparaison

avec le UKF, et une stabilité numérique accrue constamment (toutes les matrices de covariance qu'en résulte sont garanties de rester définies positives).

Dans l'implémentation de Kalman standard, la covariance d'état  $P_{x_k}$  est calculée de manière récursive. Le UKF nécessite de prendre la racine carrée matricielle  $S_{x_k} S_{x_k}^T = P_{x_k}$ , à chaque pas de temps, qui est  $\mathcal{O}(L^3/6)$  en utilisant une factorisation de Cholesky. Dans le UKF de la racine carrée (SR-UKF),  $S_k$  sera propagée directement, en évitant la nécessité de refactoriser à chaque pas de temps. L'algorithme sera en général toujours  $\mathcal{O}(L^3)$  pour l'estimation d'état, mais avec l'amélioration des propriétés numériques (par exemple, la matrice de covariance d'état est garantie semi-définie positive).

Comme indiqué précédemment, le SR-UKF utilise les trois puissantes techniques d'algèbre linéaire, pour plus de détails théoriques et de l'implémentation, voir ci-dessous [98]:

- **Décomposition QR**: La décomposition QR ou factorisation d'une matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{L \times N}$  est donnée par :

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{Q}\mathbf{R},$$

où  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  est orthogonale,  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N \times L}$  est triangulaire supérieure et  $N \geq L$ . La partie triangulaire supérieure de  $\mathbf{R}$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}$ , est la transposée du facteur de Cholesky de  $\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ , c'est à dire  $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{S}^T$ , de telle sorte que  $\tilde{\mathbf{R}}^T \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ . Nous utilisons la notation abrégée  $\text{qr}\{\cdot\}$  pour la décomposition QR d'une matrice où  $\tilde{\mathbf{R}}$  est retournée. La complexité computationnelle d'une décomposition QR est  $\mathcal{O}(NL^2)$ . A noter que l'exécution d'une factorisation de Cholesky directement sur  $\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$  est  $\mathcal{O}(L^3/6)$  plus  $\mathcal{O}(NL^2)$  pour former  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ .

- **Mise à jour du Facteur de Cholesky**: Si  $\mathbf{S}$  est le facteur de Cholesky triangulaire inférieure originale de  $\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ , alors la mise à jour du facteur de Cholesky de rang 1 (ou downdate)

$$\check{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \pm \sqrt{v} \mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

est notée comme :

$$\check{\mathbf{S}} = \text{cholupdate}\{\mathbf{S}, \mathbf{u}, \pm v\}.$$

Si  $\mathbf{u}$  est une matrice et non un vecteur, alors le résultat est  $M$  mises à jour consécutives du facteur de Cholesky en utilisant les  $M$  colonnes de  $\mathbf{u}$ . Cet algorithme (disponible en Matlab comme `cholupdate`) est seulement  $\mathcal{O}(L^2)$  par mise à jour.

- **Moindres carrés efficaces** : La solution de l'équation

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

correspond aussi à la solution du problème des moindres carrés surdéterminé  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Ceci peut être résolu efficacement à l'aide d'une décomposition QR triangulaire avec pivotant (implémenté par l'opérateur de Matlab `"/`).

Les spécifications complètes pour le filtre de la racine carrée sont données dans les algorithmes VI.3 à VI.4 pour l'estimation d'état. Ci-dessous, nous décrivons les éléments clés des algorithmes de la racine carrée, et comment ils contrastent avec les implémentations standards.

### Racine carrée pour l'estimation d'état

Comme dans le UKF, le filtre est initialisé par le calcul de la racine carrée matricielle de la covariance d'état puis par une factorisation de Cholesky. Cependant le facteur de Cholesky propagé et mis à jour est ensuite utilisé dans les itérations subséquentes pour former directement les sigma points. Dans l'équation VI.40 la mise à jour du temps du facteur de Cholesky,  $\mathbf{S}_x^-$ , est calculée en utilisant une décomposition de QR de la matrice composée contenant les sigma points pondérés propagés. La mise à jour subséquente de Cholesky (ou downdate) dans l'équation VI.41 est nécessaire pour le SR-UKF puisque le poids,  $W_0^{(c)}$ , peut être négatif. Ces deux étapes remplacent la mise à jour du temps de  $\mathbf{P}_x^-$  dans l'équation VI.16, et est également  $\mathcal{O}(L^3)$ .

La même approche de deux étapes est appliquée au calcul du facteur de Cholesky,  $\mathbf{S}_{\tilde{y}}$ , de la covariance d'erreur d'observation dans les équations VI.44 et VI.45. Cette étape est  $\mathcal{O}(LM^2)$ , où  $M$  est la dimension d'observation. Contrairement à la façon dont le gain de Kalman est calculé dans le UKF (voir l'équation VI.21), nous avons maintenant utilisé [98] l'expansion de l'équation suivante VI.21 :

$$\mathbf{K}_k(\mathbf{S}_{\tilde{y}_k}\mathbf{S}_{\tilde{y}_k}^T) = \mathbf{P}_{x_k y_k}. \quad (\text{VI.36})$$

Finalement, la mise à jour de mesure postérieure du facteur de Cholesky de la matrice de covariance d'état est calculée dans l'équation VI.50 en appliquant  $M$  downdate séquentiel de Cholesky à  $\mathbf{S}_x^-$ . Les vecteurs downdate sont les colonnes de  $\mathbf{U} = \mathbf{K}_k\mathbf{S}_{\tilde{y}_k}$ . Celle-ci remplace la mise à jour postérieure de  $\mathbf{P}_{x_k}^-$  dans l'équation VI.23, et est également  $\mathcal{O}(LM^2)$ .

---

**Algorithme VI.3 [98] : Le UKF de la racine carrée (SR-UKF) - la forme générale d'estimation d'état**


---

- *Initialisation* :  $\hat{\mathbf{x}}_0 = E[\mathbf{x}_0]$  ,  $S_{\mathbf{x}0} = \text{chol}\{E[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T]\}$  ,  $S_v = \sqrt{R_v}$  ,  $S_n = \sqrt{R_n}$   
 $\hat{\mathbf{x}}_0^a = E[\mathbf{x}^a] = [\hat{\mathbf{x}}_0 \ 0 \ 0]^T$  ,  $S_0^a = \text{chol}\{E[(\mathbf{x}_0^a - \hat{\mathbf{x}}_0^a)(\mathbf{x}_0^a - \hat{\mathbf{x}}_0^a)^T]\} = \begin{bmatrix} S_{\mathbf{x}0} & 0 & 0 \\ 0 & S_v & 0 \\ 0 & 0 & S_n \end{bmatrix}$

- *Pour*  $k = 1, \dots, \infty$  :

1. Calcule des sigma-points :

$$\mathbf{x}_{k-1}^a = [\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a + \gamma S_{\mathbf{x}_{k-1}}^a \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a - \gamma S_{\mathbf{x}_{k-1}}^a] \quad (\text{VI.37})$$

2. Équations de mise à jour de temps :

$$\mathbf{x}_{k \setminus k-1}^x = f(\mathbf{x}_{k-1}^x, \mathbf{x}_{k-1}^v, \mathbf{u}_{k-1}) \quad (\text{VI.38})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \mathbf{x}_{i,k \setminus k-1}^x \quad (\text{VI.39})$$

$$S_{\mathbf{x}_k}^- = \text{qr} \left\{ \left[ \sqrt{W_1^{(c)}} (\mathbf{x}_{1:2L,k \setminus k-1}^x - \hat{\mathbf{x}}_k^-) \right] \right\} \quad (\text{VI.40})$$

$$S_{\mathbf{x}_k}^- = \text{cholupdate} \{ S_{\mathbf{x}_k}^-, \mathbf{x}_{0,k \setminus k-1}^x - \hat{\mathbf{x}}_k^-, W_0^{(c)} \} \quad (\text{VI.41})$$

$$\mathbf{y}_{k \setminus k-1} = h(\mathbf{x}_{k \setminus k-1}^x, \mathbf{x}_{k-1}^n) \quad (\text{VI.42})$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \mathbf{y}_{i,k \setminus k-1} \quad (\text{VI.43})$$

3. Équations de mise à jour de mesure :

$$S_{\tilde{\mathbf{y}}_k} = \text{qr} \left\{ \left[ \sqrt{W_1^{(c)}} (\mathbf{y}_{1:2L,k \setminus k-1} - \hat{\mathbf{y}}_k^-) \right] \right\} \quad (\text{VI.44})$$

$$S_{\tilde{\mathbf{y}}_k} = \text{cholupdate} \{ S_{\tilde{\mathbf{y}}_k}, \mathbf{y}_{0,k \setminus k-1} - \hat{\mathbf{y}}_k^-, W_0^{(c)} \} \quad (\text{VI.45})$$

$$P_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\mathbf{x}_{i,k \setminus k-1}^x - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\mathbf{y}_{i,k \setminus k-1} - \hat{\mathbf{y}}_k^-)^T \quad (\text{VI.46})$$

$$K_k = (P_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} / S_{\tilde{\mathbf{y}}_k}^T) / S_{\tilde{\mathbf{y}}_k} \quad (\text{VI.47})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + K_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-) \quad (\text{VI.48})$$

$$U = K_k S_{\tilde{\mathbf{y}}_k} \quad (\text{VI.49})$$

$$S_{\mathbf{x}_k} = \text{cholupdate} \{ S_{\mathbf{x}_k}^-, U, -1 \} \quad (\text{VI.50})$$

- Paramètres:  $\mathbf{x}^a = [\mathbf{x}^T \ \mathbf{v}^T \ \mathbf{n}^T]^T$  ,  $\mathbf{x}^a = [(\mathbf{x}^x)^T \ (\mathbf{x}^v)^T \ (\mathbf{x}^n)^T]$  ,  $\gamma = \sqrt{L + \lambda}$  est un paramètre d'échelle composé et  $\lambda$  est donnée par l'Eq. VI.11,  $L$  est la dimension d'état augmenté,  $R_v$  est

la covariance du bruit de processus,  $R_n$  est la covariance du bruit d'observation, et  $W_i$  sont les poids tels que calculés dans l'Eq.VI.10.

---

**Algorithme VI.4 [99] : Le UKF de la racine carrée (SR-UKF) - estimation d'état (bruit additif)**

---

- *Initialisation:*  $\hat{x}_0 = E[x_0]$  ,  $S_{x_0} = \text{chol}\{E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]\}$  ,  $S_v = \sqrt{R_v}$  ,  $S_n = \sqrt{R_n}$
- *Pour*  $k = 1, \dots, \infty$  :

1. Calcul des sigma-points:

$$\mathcal{X}_{k-1} = [\hat{x}_{k-1} \quad \hat{x}_{k-1} + \gamma S_{x_{k-1}} \quad \hat{x}_{k-1} - \gamma S_{x_{k-1}}] \quad (\text{VI.51})$$

2. Équations de mise à jour de temps :

$$\mathcal{X}_{k \setminus k-1}^* = f(\mathcal{X}_{k-1}, u_{k-1}) \quad (\text{VI.52})$$

$$\hat{x}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \mathcal{X}_{i, k \setminus k-1}^* \quad (\text{VI.53})$$

$$S_{x_k}^- = \text{qr} \left\{ \left[ \sqrt{W_1^{(c)}} (\mathcal{X}_{1:2L, k \setminus k-1}^* - \hat{x}_k^-) \quad S_v \right] \right\} \quad (\text{VI.54})$$

$$S_{x_k}^- = \text{cholupdate} \{ S_{x_k}^-, \mathcal{X}_{0, k \setminus k-1}^* - \hat{x}_k^-, W_0^{(c)} \} \quad (\text{VI.55})$$

$$\text{(augmentés)} \quad \mathcal{X}_{k \setminus k-1} = [\hat{x}_k^- \quad \hat{x}_k^- + \gamma S_{x_k}^- \quad \hat{x}_k^- - \gamma S_{x_k}^-] \quad (\text{VI.56})$$

$$\mathbf{y}_{k \setminus k-1} = h(\mathcal{X}_{k \setminus k-1}) \quad (\text{VI.57})$$

$$\hat{y}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \mathbf{y}_{i, k \setminus k-1} \quad (\text{VI.58})$$

3. Équations de mise à jour de mesure:

$$S_{y_k} = \text{qr} \left\{ \left[ \sqrt{W_1^{(c)}} (\mathbf{y}_{1:2L, k \setminus k-1} - \hat{y}_k^-) \quad S_n \right] \right\} \quad (\text{VI.59})$$

$$S_{y_k} = \text{cholupdate} \{ S_{y_k}, \mathbf{y}_{0, k \setminus k-1} - \hat{y}_k^-, W_0^{(c)} \} \quad (\text{VI.60})$$

$$P_{x_k y_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\mathcal{X}_{i, k \setminus k-1}^x - \hat{x}_k^-) (\mathbf{y}_{i, k \setminus k-1} - \hat{y}_k^-)^T \quad (\text{VI.61})$$

$$K_k = (P_{x_k y_k} / S_{y_k}^T) / S_{y_k} \quad (\text{VI.62})$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - \hat{y}_k^-) \quad (\text{VI.63})$$

$$U = K_k S_{y_k} \quad (\text{VI.64})$$

$$S_{x_k} = \text{cholupdate} \{ S_{x_k}^-, U, -1 \} \quad (\text{VI.65})$$

- Paramètres:  $\gamma = \sqrt{L + \lambda}$  est un paramètre d'échelle composé et  $\lambda$  est donnée par l'Eq. VI.11,  $L$  est la dimension d'état,  $R_v$  est la covariance du bruit de processus,  $R_n$  est la covariance du bruit d'observation, et  $W_i$  sont les poids tel que calculés dans l'Eq. VI.10. L'augmentation de l'ensemble de sigma points: Dans (VI.56) l'ensemble de sigma points est augmenté de la même façon que dans l'algorithme VI.2. Cette approche alternative réduit le nombre des sigma points utilisés, mais supprime également toutes les informations des moments perdus capturés par les sigma points originaux propagés.

#### VI.4. Suivi de véhicule de rentrée

Nous considérons ici le problème de suivi de rentrée, où un radar est utilisé pour le suivi d'un véhicule spatial, qui entre dans l'atmosphère à une vitesse très élevée. Ce type de problème a été identifié par un certain nombre d'auteurs [100, 101, 102] comme étant particulièrement stressant pour les filtres et les suiveurs en raison de la non-linéarité fortement manifestée par les forces qui agissent sur le véhicule. Le problème de rentrée a été utilisé pour démontrer la performance du UKF dans [103] et de légères corrections aux équations et des paramètres de simulation ont ensuite été publiés dans [104].

Les équations stochastiques de mouvement pour le véhicule spatial sont données comme dans [93] :

$$\begin{aligned}
 R(t) &= \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} \\
 V(t) &= \sqrt{x_3^2(t) + x_4^2(t)} \\
 b &= b_0 \exp(x_5(t)) \\
 D(t) &= b(t) \exp\left(\frac{R_0 - R}{H_0}\right) V(t) \\
 G(t) &= -\frac{Gm_0}{R^3(t)} \\
 \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_3(t) \\
 \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_4(t) \\
 \frac{dx_3(t)}{dt} &= D(t)x_3(t) + G(t)x_1(t) + \omega_1(t)
 \end{aligned} \tag{VI.66}$$

$$\frac{dx_4(t)}{dt} = D(t)x_4(t) + G(t)x_2(t) + \omega_2(t)$$

$$\frac{dx_5(t)}{dt} = \omega_3(t)$$

où  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$ , et  $\omega_3(t)$  sont des bruits de processus blancs Gaussiens avec la densité spectrale jointe connue. Les constantes sont [93, 103] :

$$b_0 = -0.59783$$

$$H_0 = 13.406$$

$$Gm_0 = 3.9860 \times 10^5 \tag{VI.67}$$

$$R_0 = 6374.$$

Dans [93, 103], le radar mesure 10 fois par seconde et la covariance de bruit du processus discret simulée a été :

$$Q(k) = \begin{bmatrix} 2.4064 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 2.4064 \times 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{VI.68}$$

Si on interprète le modèle dynamique (VI.66), comme un modèle continu initialement, on peut supposer que la covariance discrétisée est en fait une approximation d'un processus non-linéaire à temps continu conduit par un bruit de processus continu avec une densité spectrale  $Q_c$ .

Dans cette interprétation, il est raisonnable de supposer que la relation entre la covariance discrète et la densité spectrale à temps continu est approximativement  $Q(k) \approx Q_c \Delta t$  où  $\Delta t = 0.1$  s est le taux d'échantillonnage utilisé dans [93, 103].

Dans l'implémentation actuelle du filtre, le terme du coin inférieur droit de la covariance du bruit de processus modélisé a été fixé à la valeur  $10^{-6}$ . Ce terme de bruit additionnel restreint a été utilisé pour le paramètre constant pour améliorer la stabilité du filtre comme cela a été fait dans [104]. Cette modification de la covariance du bruit de processus discret est noté  $Q'(k)$  et la densité spectrale correspondante est désignée comme  $Q'_c$ .

Le mouvement du véhicule est mesuré par un radar, qui est situé à  $(x_r, y_r) = (R_0, 0)$ . Il est capable de mesurer la distance et le roulement à une fréquence de 10 Hz, où on a :

$$r_r(k) = \sqrt{(x_1(k) - x_r)^2 + (x_2(k) - y_r)^2} + v_1(k) \quad (\text{VI.69})$$

$$\theta(k) = \tan^{-1} \left( \frac{x_2(k) - y_r}{x_1(k) - x_r} \right) + v_2(k)$$

$v_1(k)$  et  $v_2(k)$  sont des bruits des processus non corrélés de moyenne nulle avec des variances de 1 m et 17 mrd, respectivement [103].

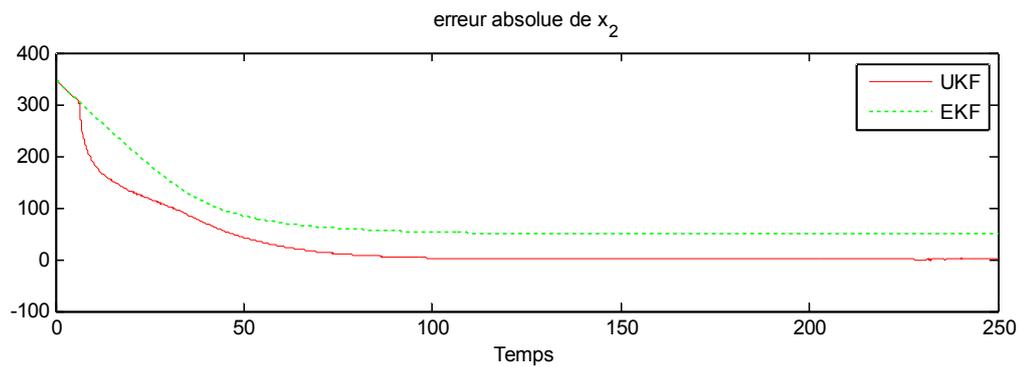
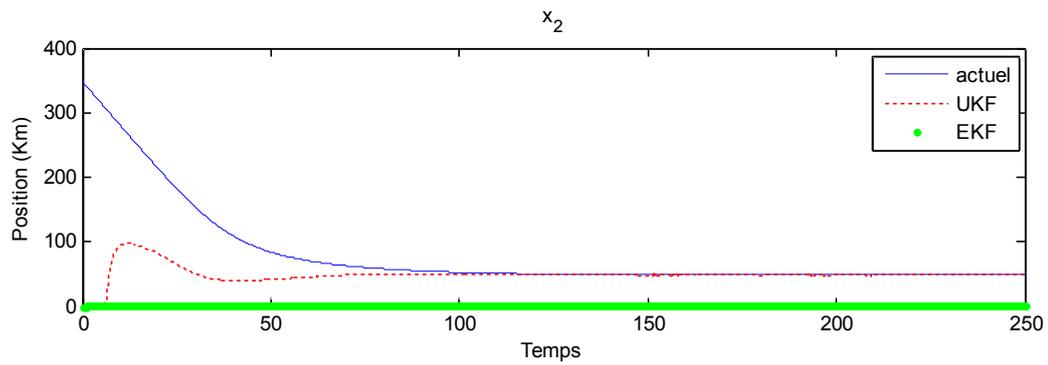
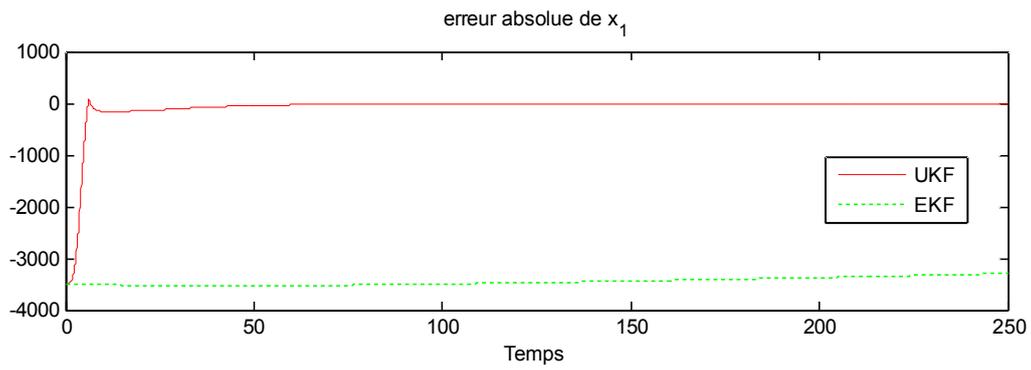
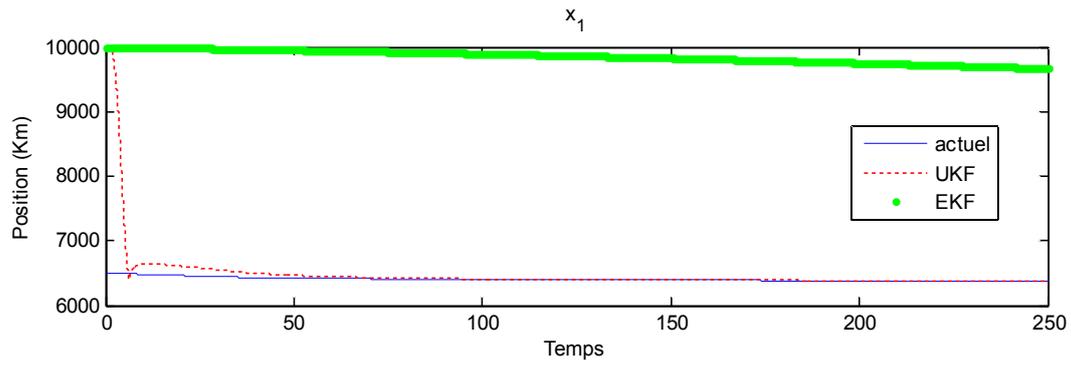
Le UKF discret (DUKF) a été implémenté en utilisant 10 étapes d'intégration de Runge-Kutta entre les mesures. Les paramètres d'algorithme de transformation unscented ont été choisis tels que :  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 2$ ,  $\kappa = -2$ .

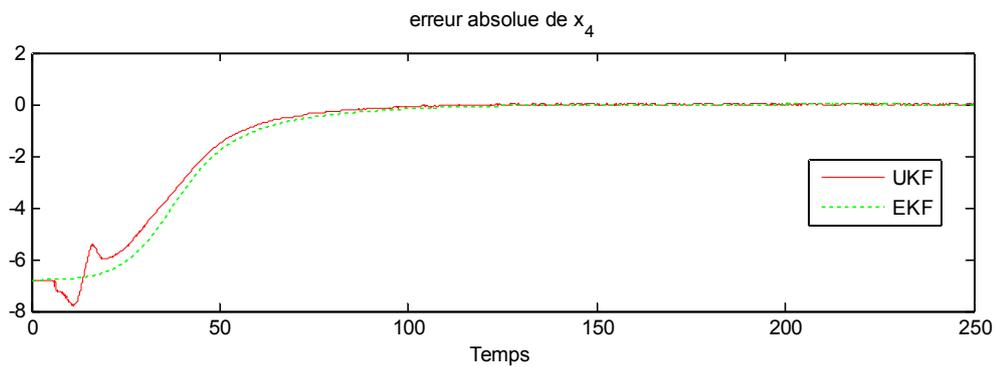
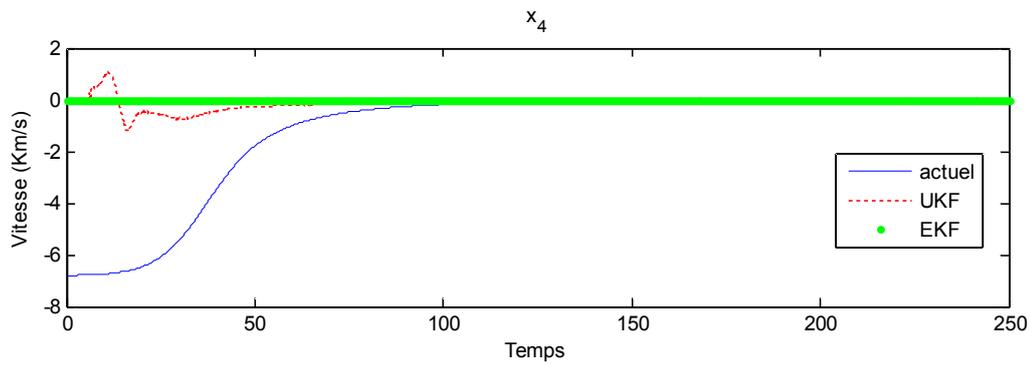
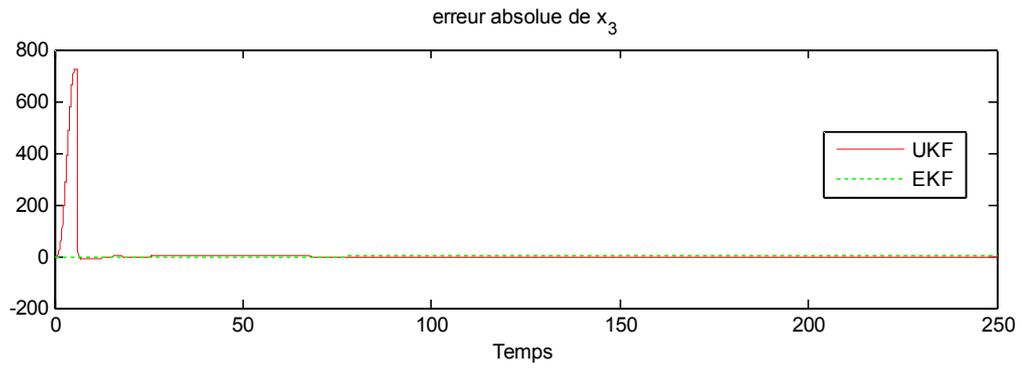
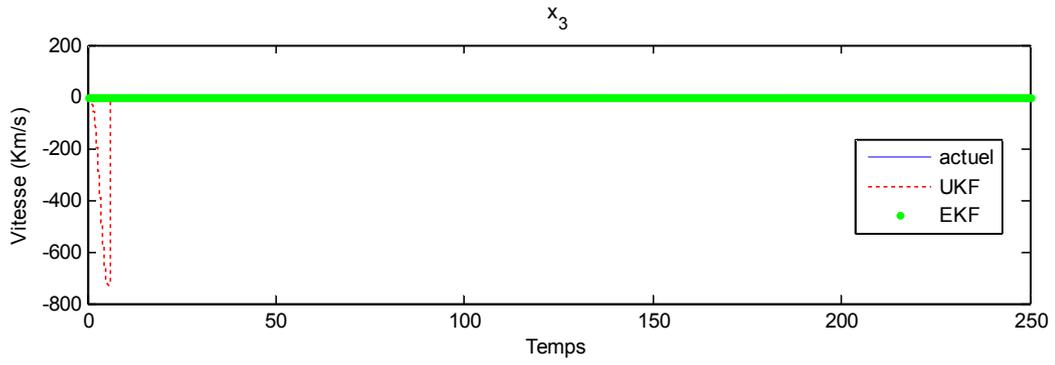
Les conditions initiales qui assumées pour le filtre sont :

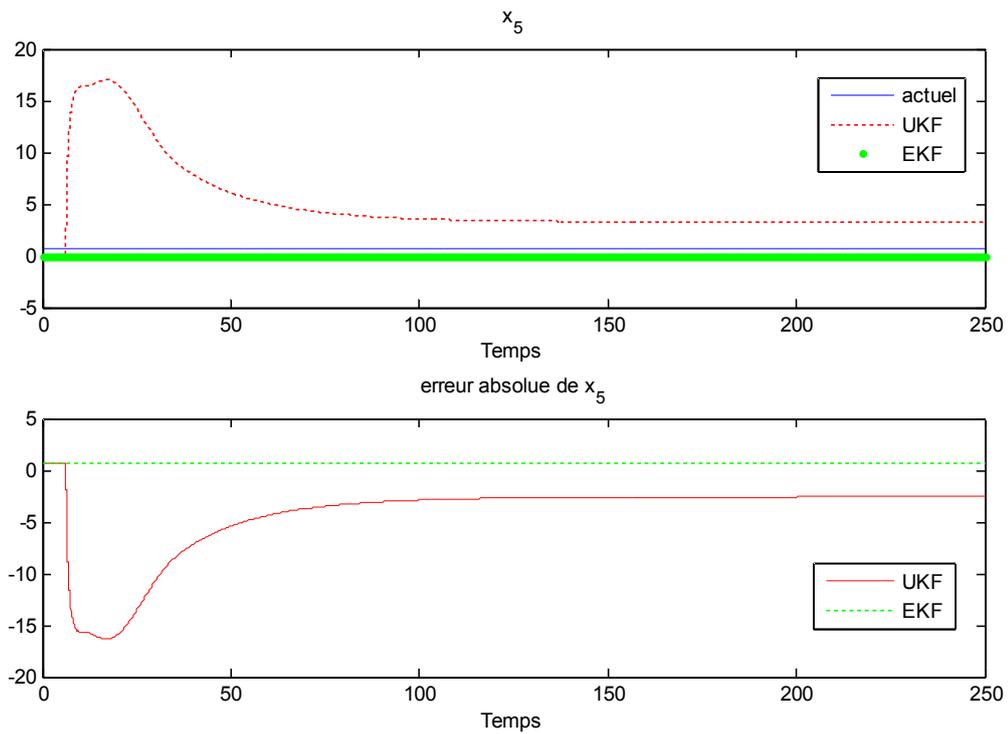
$$\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 10000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P(0) = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La performance du filtre est représentée sur la figure VI.1 et le table VI.1. Dans tous les cas, on peut voir que l'estimation du filtre unscented est très précise, et il est possible d'avoir confiance dans les estimations du filtre. En outre, on peut constater que le EKF est fortement biaisé. Cette mauvaise performance est le résultat direct de la linéarisation, où les approximations d'extension de la série de Taylor ne fonctionnent pas bien.

Finalement, dans ce problème particulier, le filtre unscented descret est une bonne alternative au filtre de Kalman étendu dans les modèles où les approximations de l'expansion en série de Taylor ne fonctionnent pas bien. Conformément aux simulations, les approximations générées par le filtre unscented sont meilleures.







**Figure VI.1:** Estimation d'état pour le problème du véhicule de rentrée en utilisant le filtre de Kalman unscented et étendu

Filter	RMSE
DUKF	2.6715
DEKF	3.2915e+003

**Tableau VI.1 :** Valeurs du RMSE pour le problème du véhicule de rentrée

## VI.5. Conclusion

Dans ce chapitre, le filtre de Kalman unscented (UKF) a été introduit comme une alternative au EKF pour l'inférence probabiliste gaussienne approximative.

La technique sous-jacente unificatrice pour le UKF (l'approche des sigma-points) a été introduite comme une méthode de calcul des statistiques d'une variable aléatoire qui subit une transformation non linéaire. Ces calculs constituent le noyau des équations de mise à jour de temps et de mesure de Kalman. Nous avons montré comment le UKF employant l'approche des sigma-points comme la composante algorithmique de base pour le calcul des statistiques gaussiennes postérieures nécessaires.

Un certain nombre de variations implementationales du UKF sont dérivés pour fournir une meilleure efficacité computationnelle et une robustesse numérique accrue. Comme l'estimation d'état dans le cas du bruit additif, à l'addition des formes de la racine carrée (robustes) stables numériquement ont été calculées en utilisant la factorisation de Cholesky en vue d'accroître l'efficacité de calcul.

Il ya un nombre d'avantages évidents pour le UKF. Tout d'abord, tandis que les équations spécifiant le UKF peuvent sembler plus compliquées que le EKF, la complexité réelle de calcul est équivalente. Pour l'estimation d'état, les deux algorithmes sont en général de l'ordre  $L^3$  (où  $L$  est la dimension de l'état). En outre, un avantage distinct du UKF est sa facilité d'application. En contraste avec le EKF, pas de dérivés analytique (Jacobiennes ou Hessiens) qui doivent être calculées. Pour appliquer le EKF à de tels systèmes, les dérivés doivent être obtenues soit auprès d'une dérivation analytique fondée sur des principes du système, ou à travers des méthodes numériques coûteuses et souvent imprécises. En revanche, le UKF s'appuie uniquement sur des évaluations fonctionnelles par l'utilisation d'échantillons élaborés de façon déterministe.

Même si le UKF a des avantages évidents par rapport au EKF, il ya encore un certain nombre de limitations. Comme dans le EKF, il fait une hypothèse gaussienne de la densité de probabilité de la variable d'état aléatoire. Souvent, cette hypothèse est valable, et de nombreuses applications du monde réel ont été appliquées avec succès sur la base de cette hypothèse. Cependant, pour certains problèmes (par exemple le suivi d'objet multimodal), une hypothèse gaussienne ne suffira pas et le UKF (ou EKF) ne peut pas être appliqué en toute confiance. Finalement, une autre limitation d'exécution conduisant à une certaine incertitude, c'est la nécessité de choisir les trois paramètres de la transformation unscented (c-à-d  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\kappa$ ). [84] Ont tenté de fournir quelques lignes directrices

sur la façon de choisir ces paramètres, le choix optimal dépend évidemment des spécificités du problème à portée de main, et n'est pas entièrement comprise.

## **Conclusion Générale**

Dans la présente thèse, deux commandes non linéaires pour le système affine en commande ont été traitées et exécutées pour l'application de guidage de missiles contre les cibles manœuvrables aérodynamiquement commandés. Une des deux commandes est la méthode de l'équation de Riccati dépendante de l'état. Cette approche permet au concepteur d'utiliser des méthodes de commande optimale linéaire telle que la méthode LQR pour la synthèse de systèmes de commande non linéaires en mettant les équations de mouvement dans une structure en forme linéaire. La simulation sur des exemples simples fournit une preuve de la performance de la méthode SDRE. En générale, la méthode semble bien fonctionner mais des preuves théoriques rigoureuses manquent dans ce domaine.

La commande fondée sur la solution de l'équation de Riccati dépendante de l'état (SDRE) a été montrée pour offrir une haute performance, mais elle souffre de propriétés de stabilité non prouvées sauf dans certaines conditions qui sont mentionnées dans la thèse. Dans le cas de l'état scalaire, il est démontré que l'approche SDRE donne la solution globalement optimale. Dans le cas multivariable, la condition nécessaire simplifiée pour l'optimalité a été obtenue, où la solution en boucle fermée est au moins un optimum local et peut être un optimum global.

D'autre part, la seconde méthode basée sur l'approche de satisfaction CLF offre la flexibilité maximale au concepteur dans le choix d'un contrôleur de satisfaction particulier, tout en garantissant que tout choix valide est stabilisant (ou stabilisant optimal inverse). L'inconvénient de la commande basée sur la CLF, c'est qu'elle ne fournisse pas, en général, un niveau élevé de performance lorsque elle est définie par le concepteur a priori sous la forme d'un indice de coût ou certains comportements désirés.

Une stratégie générale de sélection est présentée, en expliquant comment la satisfaction peut être combinée avec une loi de commande arbitraire, par une simple démarche en effectuant une projection ponctuelle sur l'ensemble de satisfaction. Les lois des commandes de satisfaction et satisfaction robuste résultant recouvrent les performances offertes par ces techniques (commande arbitraire), mais elles restent aussi stabilisantes et stabilisantes optimales inverse respectivement.

Dans cette thèse, la performance démontrée de l'approche SDRE est combinée avec les propriétés analytiques de la satisfaction à l'application de guidage pour produire une loi de guidage de haute performance optimale inverse et à la capturabilité globale.

Finalement, le filtre de Kalman unscented (UKF) a aussi été introduit pour l'estimation d'état comme une alternative au filtre de Kalman étendu (EKF) pour l'inférence probabiliste gaussienne approximative avec des extensions telles que le cas du bruit additif et la forme de la racine carée de Cholesky pour une meilleure stabilité numérique.

## Annexe

### A. Commandes non linéaires via la satisfaction à base CLF

#### A.1. Preuve du théorème IV-10

L'ensemble de satisfaction entrée-état est donné par

$$\begin{aligned} S_b(x) &= \left\{ u \in \mathbb{R}^m : p_s(u, x) \geq \frac{1}{b} p_r(u, x) \right\} \\ &= \left\{ u \in \mathbb{R}^m : -V_x^T f - V_x^T g u - |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) \geq \frac{1}{b} (l + u^T R u) \right\} \\ &= \left\{ u \in \mathbb{R}^m : u^T \left( \frac{R}{b} \right) u + (g^T V_x)^T u + \frac{1}{b} l + V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

#### A.2. Preuve du lemme IV-7

Si  $g^T V_x = 0$ , et puisque  $V$  est une ISS-CLF,  $V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|) < 0$  lorsque  $|x| \geq \rho(|x|)$ , donc l'équation (IV-22) est satisfaite si et seulement si :

$$\begin{aligned} -l - b(V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow b &\geq -\frac{l}{V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)} \geq 0. \end{aligned}$$

Si  $g^T V_x \neq 0$ , alors l'équation (IV-22) est satisfaite si et seulement si :

$$\begin{aligned} b^2 - \left( \frac{4V_x^T f + 4|V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right) b - \left( \frac{4l}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right) &> 0 \\ \Leftrightarrow \left( b - \left( \frac{2V_x^T f + 2|V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right) \right)^2 &> \left( \frac{4l}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right) + \left( \frac{2V_x^T f + 2|V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right)^2. \end{aligned}$$

Limiter l'attention vers des solutions positives, cette inégalité est réalisable si et seulement si :

$$\begin{aligned} b &> \left( \frac{2V_x^T f + 2|V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right) + \sqrt{\left( \frac{4l}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right) + \left( \frac{2V_x^T f + 2|V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} \right)^2} \\ \Leftrightarrow b &> \frac{2(V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|))}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x} + \frac{2\sqrt{(V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|))^2 + l V_x^T g R^{-1} g^T V_x}}{V_x^T g R^{-1} g^T V_x}, \end{aligned}$$

ce qui est clairement supérieur ou égal à zéro.

Pour montrer que  $\underline{h}(x)$  est localement lipschitzienne à  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  [65]. Tout d'abord il faut montrer que la fonction :

$$\phi(a, c, l) = \begin{cases} -\frac{l}{a}, & \text{si } c = 0 \text{ et } a < 0 \\ \frac{2a + 2\sqrt{a^2 + lc}}{c}, & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

est lisse ( $C_\infty$ ) à l'ensemble  $P = \{(a, c, l) \in \mathbb{R}^3 / l \geq 0 \text{ et } c \geq 0 \text{ et } (c = 0 \Rightarrow a < 0) \text{ et } ((c \neq 0 \text{ et } a = 0) \Rightarrow l > 0)\}$ .

Définir la fonction :

$$F(a, c, l, p) = l + pa - \frac{1}{4}p^2 c$$

qui est lisse à  $P$  dans l'ensemble de ses arguments. Par substitution directe, il est facile de montrer que  $F(a, c, l, p, \phi(a, c, l)) = 0$  pour tout  $(a, c, l) \in P$ . Si  $c = 0$ , alors :

$$\frac{\partial F(a, c, l, p, \phi(a, c, l))}{\partial p} = a$$

qui est strictement inférieure à zéro puisque  $V$  est une ISS-CLF. Si  $c \neq 0$ , alors :

$$\frac{\partial F(a, c, l, p, \phi(a, c, l))}{\partial p} = -\sqrt{(a^2 + lc)}$$

qui est non nulle sur  $P$ . Par conséquent le théorème de fonction implicite,  $\phi(a, c, l)$  est lisse sur  $P$ . Puisque  $V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)$ ,  $V_x^T g R^{-1} g^T V_x$  et  $l$  sont localement lipschitziennes à  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $\underline{h} = \phi(V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|), V_x^T g R^{-1} g^T V_x, l)$  est également localement lipschitzienne à  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

### A.3. Lemme A-1

#### Lemme A-1 [75]

Si  $\gamma$  et son dérivé  $\gamma'$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{K}_\infty$ , alors la transformation de Legendre-Fenchel satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} 1. \quad \ell\gamma(r) &= r(\gamma')^{-1}(r) - \gamma((\gamma')^{-1}(r)) \\ &= \int_0^r (\gamma')^{-1}(s) ds \end{aligned}$$

2.  $\ell\ell\gamma = \gamma$
3.  $\ell\gamma$  est une fonction de classe  $\mathcal{K}_\infty$
4.  $\ell\gamma(\gamma'(r)) = r\gamma'(r) - \gamma(r)$ .

#### A.4. Lemme A-2

Lemme A-2 (l'Inégalité de Young [75])

Pour tous vecteurs  $x$  et  $y$ , la suivante est vérifiée :

$$x^T y \leq \gamma(|x|) + \ell\gamma(|y|)$$

et l'égalité est réalisée si et seulement si

$$y = \gamma'(|x|) \frac{x}{|x|} \text{ pour } = (\gamma')^{-1}(|y|) \frac{y}{|y|}.$$

## **Bibliographie**

- [1] "Introduction au pilotage d'un véhicule autonome".
- [2] Abhijit Das. "Nonlinear design of 3-axes autopilote for short range skid-to-turn surface to surface homing missiles", Thèse de Master, Electrical Engineering at Indian Institute of Technology Kharagpur, May 2006.
- [3] Özgören, M. K., "Seminar Notes on Dynamics and Control of Guided Missiles", Middle East Technical University Continuing Education Center, February 21, 1991.
- [4] Lin, C. F., "Modern Navigation, Guidance and Control Processing", Prentice Hall Publication, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [5] Heap, E., "Methodology of Research into Command-to-Line-of-Sight and Homing Guidance", Proceeding of the Royal Aircraft Establishment, Farnborough, Hants, U.K., 1995.
- [6] Zarchan, P., "Tactical and Strategic Missile Guidance", Vol. 157, Progress in Aeronautics and Astronautics, AIAA, Washington DC, 1994.
- [7] Berglund, E., "Guidance and Control Technology", RTO SCI Lecture Series on Technologies for Future Precision Strike Missile Systems, Atlanta, USA, pp. 1-10, March 2000.
- [8] Pastrick, H. L., Seltzer, S. M. and Warren, M. E., "Guidance Laws for Short- Range Tactical Missiles", Journal of Guidance and Control, Vol. 4, No. 2, March- April 1981.
- [9] Frarr, D. j., "Control of Missile Airframes", British Aerospace Dynamics Group Report, 1979.
- [10] Shinar, J., "Homing of Rolling Missile against a Manoeuvring Target", Israel Journal of Technology, Vol. 11, No. 3, pp. 117-130, 1973.
- [11] Lin, C. L. and Chen, Y. Y., "Design of Advanced Guidance Law against High Speed Attacking Target", Proceeding of National Science Council, ROC(A), Vol. 23, No. 1, pp. 60-74, 1999.
- [12] Yang, C. D., Hsiao, F.B. and Yeh, F. B., "Generalized Guidance Law for Homing Missiles", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-25, No. 2, pp. 197-212, March 1989.
- [13] Nesline, F. W. and Zarchan, P., "A New Look at Classical vs Modern Homing Missile Guidance", AIAA Guidance and Control Conference, Boulder, Colo., August 6-8, 1979.
- [14] Guelman, M., "Missile Acceleration in Proportional Navigation", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, pp. 462-463, May 1973.
- [15] Choi, J. Y., Chwa, D. and Cho, H. P., "Nonlinear Adaptive Guidance Considering Target Uncertainties and Control Loop Dynamics", IEEE Proceedings, 2001.
- [16] Özkan, B., Özgören, M. K. and Mahmutyazıcıoğlu, G., "Guidance and Control of a Homing Missile Pursuing a Moving Target" (in Turkish), the Advanced Technologies in Aeronautics

- Symposium (HİTEK-2004), İstanbul, Türkiye, December 9-10, 2004.
- [17] Özkan, B., Özgören, M. K. and Mahmutyazıcıoğlu, G., “Comparison of the Well-Known Guidance Methods for Laser Guided Missiles” (in Turkish), the Proceedings of the 12th National Machine Theory Symposium (UMTS-2005), Kayseri, T held in June, 2005 in Kayseri, Türkiye, pp. 431-440, June 9-11, 2005.
- [18] Guidance and Control Systems, Naval Weapon Systems Presentation, October 2001.
- [19] Zarchan, P., “Ballistic Missile Defense Guidance and Control Issues”, Science and Global Security, Vol. 8, pp. 99-124, 1998.
- [20] Kirk, D. E., Optimal Control Theory-An Introduction, Prentice-Hall Inc., 1970.
- [21] Shinar, J. and Shima, T., “Nonorthodox Guidance Law Development Approach for Intercepting Maneuvering Targets”, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 25, No. 4, pp. 658-666, July-August 2002.
- [22] Kim, K. B. and Kwon, W. H., “Differential Game Missile Guidance Laws via Receding Horizon Control without Time-to-Go”, Proceeding of School of Electrical Engineering, Seoul National University, Korea, 1997.
- [23] Kim, K. B., Yoon, T. W. and Kwon, W. H., “Receding Horizon Guidance Laws for Constrained Missiles with Autopilot Lags”, Control Engineering Practice, No.9, pp. 1107-1115, 2001.
- [24] Shinar, J., “On the Optimal Estimator of Randomly Maneuvering Targets for Terminal Guidance”, Proceedings 16th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, Saint-Petersburg, Russia, Vol. 2, pp.11-16, June 14-18, 2004.
- [25] Song, C., Ryoo, C. K., Tahk, M. J. and Cho, H., “Optimal Guidance Law for Impact Angle Control”, Proceedings 16th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, Saint-Petersburg, Russia, Vol. 2, pp. 91-96, June 14-18, 2004.
- [26] Tsao, L. P. and Lin, C. S., “A New Optimal Guidance Law for Short-Range Homing Missiles”, Proceedings of the National Science Council ROC(A), Vol. 24, No. 6, pp. 422-426, 2000.
- [27] Xin, M., Balakrishnan, S. N. and Ohlmeyer, E. J., “Integrated Guidance and Control of Missiles with  $\theta$ -D Method”, Proceeding of the Naval Surface Weapon Center, USA, 2002.
- [28] Menon, P. K., Sweriduk, G. D. and Ohlmeyer, E. J., “Optimal Fixed- Interval Integrated Guidance-Control Laws for Hit-to-Kill Missiles”, AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Austin, USA, August 11-14, 2003.
- [29] Lin, C. L. and Su, H. W., “Intelligent Control Theory in Guidance and Control System Design: an Overview”, Proceedings of the National Science Council ROC(A), Vol. 24, No. 1, pp. 15-30, 2000.
- [30] Menon, P. K. and Yousefpor, M., “Design of Nonlinear Autopilots for High Angle of Attack Missiles”, Proceeding of the Optimal Synthesis, 1996.
- [31] Blakelock, J. H., Automatic Control of Aircraft and Missiles, John Wiley & Sons Inc., 1965.

- 
- [32] Sreenuch, T., Tsourdos, A., Hughes, E. J. and White, B. A., "Multi-Objective Frequency Loop-Shaping of a Lateral Missile Autopilot", Proceedings 16th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, Saint-Petersburg, Russia, Vol. 2, pp. 17-22, June 14-18, 2004.
- [33] Janardhanan, S. and Bandyopadhyay, B., "Tracking of LTI Systems with Unstable Zero Dynamics using Multirate Output Feedback based Sliding Mode Control", Proceeding of the Interdisciplinary Programme in Systems and Control Engineering, Indian Institute of Technology, Bombay, India, 2004.
- [34] Goodwin, G. C., "A Brief Overview of Nonlinear Control", Proceeding of the Centre for Integrated Dynamics and Control, Department of Electrical and Computer Engineering, The University of Newcastle, Australia, 2002.
- [35] Helton, J. W. and James, M. R., "Extending  $H_\infty$  Control to Nonlinear Systems", Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 38, No.1, pp. 93-96, October 2, 2000.
- [36] Sharma, M. and Ward, D. G., "Flight-Path Angle Control via Neuro-Adaptive Backstepping", Report of the American Institute of Aeronautics and Astronautics, USA, 2002.
- [37] Menon, P. K. and Ohlmeyer, E. J., "Computer-Aided Synthesis of Nonlinear Autopilots for Missiles", Nonlinear Studies, Vol. 11, No. 2, pp. 173-198, 2004.
- [38] Thukral, A. and Innocenti, M., "A Sliding Mode Missile Pitch Autopilot Synthesis for High Angle of Attack Maneuvering", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 6, No. 3, pp. 359-371, May 1998.
- [39] Zhou, K. and Doyle, J. C., Essentials of Robust Control, Prentice-Hall Inc., 1998.
- [40] Kuljaca, O., Swamy, N., Lewis, F. L. and Kwan, C. M., "Design and Implementation of Industrial Neural Network Controller Using Backstepping", Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida, USA, pp. 2709-2714, December 2001.
- [41] Kim, K., "The Control of Nonlinear Nonminimum Phase Systems", Report of the Coordinate Systems Laboratory, Electrical and Computer Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, USA, December 8, 2000.
- [42] Shtessel, Y. B. and Shkolnikov, I. A., "Non-Minimum Phase Tracking on Sliding Modes", Proceeding of the Department of Alabama in Huntsville, USA, 1998.
- [43] Calise, A. J., Sharma, M. and Corban, J. E., "An Adaptive Autopilot Design for Guided Munitions", Proceeding of American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2000.
- [44] Chen, G. and Ying, H., "On the Stability of Fuzzy PI Control Systems", Proceeding of the Institute of Space Systems Operations, University of Houston, USA, 1993.
- [45] White, B. A., Blumel, A. L. and Hughes, E. J., "A Robust Fuzzy Autopilot Design using Multi-Criteria Optimization", International Journal of Fuzzy Systems, Vol. 2, No. 2, pp. 129-138, June 2000.
- [46] Sutton, R. and Craven, P. J., "A Fuzzy Autopilot Design Approach That Utilizes Non-Linear

- Consequent Terms”, *Journal of Marine Science and Technology*, Vol. 9, No. 2, pp. 65-74, 2001.
- [47] Muhammet Sert. « A Rule based missile evasion method for fighter aircrafts ». The Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University. May 2008.
- [48] George M. Siouris. *Missile guidance and control systems*. Springer-Verlag New York, Inc, 2004.
- [49] B. Stevens, and F. Lewis. *Aircraft control and simulation*. Wiley Interscience, NY, 1992.
- [50] P. H. Zipfel. *Modeling and simulation of aerospace vehicle dynamics*. AIAA Education Series, VA, 2000.
- [51] Ali Erdem Özcan. « Autopilot and guidance for anti-tank imaging infrared guided missiles ». The Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University. October 2008.
- [52] Bülent Özcan. « Dynamic modeling, guidance, and control of homing missiles ». The Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University. September 2005.
- [53] Mark G. Snyder. « Nonlinear stabilization and control of medium range surface to air interceptor missiles ». B.S. in Electrical Engineering University of Central Florida, 2009.
- [54] Johan Dahlgren. « Robust nonlinear control design for a missile using backstepping ». 27th January 2003.
- [55] B.D.O. Anderson and J.B. Moore, *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*, Prentice Hall, 1989.
- [56] Cloutier, J. R., “Adaptive Matched Augmented Proportional Navigation”, *Proceedings of the AIAA Missile Sciences Conference*, Monterey, CA, November 1994.
- [57] Cloutier, J. R., “State-Dependent Riccati Equation Techniques: An Overview”, *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, June 4-6, Albuquerque, NM.
- [58] Cloutier, J. R., D’Souza, C.N., and Mracek, C.P., “Nonlinear Regulation and Nonlinear  $H_\infty$  Control Via the State-Dependent Riccati Equation Technique”, *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace*, Daytona Beach, FL, May 1996.
- [59] Kelly D. Hammet, B.S., M.S. Captain, USAF, “Control of Nonlinear Systems via State Feedback State-Dependent Riccati Equation Techniques”, *The Faculty of the Graduate School of Engineering of the Air Force Institute of Technology Air University*, June 1997.
- [60] Qu, Z., Cloutier, J.R., and Mracek, C.P., “A New Suboptimal Nonlinear Control Design Technique” submitted to the 13th IFAC World Congress, San Francisco, CA, July 1996.
- [61] Freeman, R.A. and Kokotovic, P.A., “Optimal Nonlinear Controllers for Feedback Linearizable Systems” 1994 Workshop on Robust Control via Variable Structure and Lyapunov Techniques, Benevento, Italy, September 1994.
- [62] Sznaier, M., Cloutier, J., Hull, R., Jacques, D., and Mracek, C., “Receding Horizon Control Lyapunov Function Approach to Suboptimal Regulation of Nonlinear Systems”, *Journal of*

- Guidance, Control, and Dynamics, Vol 23, pp. 399-405 (2000).
- [63] Hassan K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing Company, New York, 1996.
- [64] J. Willard Curtis and Randal W. Beard, "Ensuring Stability of State-dependent Riccati Equation Controllers Via Satisficing", in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control Las Vegas, Nevada USA, December 2002*.
- [65] J. Willard Curtis III, « A Generalization of Sontag's Formula for High-Performance CLF Based Control », Department of Electrical and Computer Engineering, Brigham Young University, June 15, 2002.
- [66] T. Moon and W. Stirling, *Mathematical Methods and Algorithms*, Prentice Hall Inc., 2000.
- [67] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*, Springer Verlag, 1998.
- [68] R. A. Freeman and P. V. Kokotovic, *Robust Nonlinear Control Design: State-Space and Lyapunov Techniques*, *Systems and Control: Foundations and Applications*. Birkhauser, 1996.
- [69] Daniel Liberzon, Eduardo Sontag, and Yuan Wang, "Universal construction of feedback laws achieving iss and integral-iss disturbance attenuation," *Systems and Control Letters*, vol. 46, pp. 111–127, 2002.
- [70] A. Teel and L. Praly, "On assigning the derivative of a disturbance attenuation control Lyapunov function," *Math. Control Signals and Systems*, vol. 13, pp. 95–124, 2000.
- [71] M. Malisoff and E. Sontag, "Universal formulas for CLF's with respect to Minkowski balls," in *Proceedings of the European Control Conference, Brussels, Belgium, July 1997*.
- [72] M. Krstic and H. Deng, *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems*, *Communications and Control Engineering*. Springer Verlag, 1998.
- [73] Jérôme Jouffroy, « Stabilité et systèmes non linéaires : Réflexions sur l'analyse de contraction », l'université de Savoie, 28 Octobre 2002.
- [74] Nima Yeganefar, « Définitions et Analyse de Stabilités pour les Systèmes à Retard Non Linéaires », l'université des sciences et technologies de Lille et par l'école centrale de Lille, 24 Novembre 2006.
- [75] Miroslav Krstić and Zhong-Hua Li, "Inverse Optimal Design of Input-to-State Stabilizing Nonlinear Controllers", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, NO.3, March 1998.
- [76] J. Willard Curtis and Randal W. Beard, "Stability Results for Modified State-dependent Riccati Equation Controllers", The National Science Foundation, Number 9732917.
- [77] Jean Jacques E. Slotine and Weiping Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991.
- [78] Chang-Kyung Ryoo, Yoon-Hwan Kim, Min-Jea Tahk, and Keeyoung Choi. "A Missile Guidance Law Based on Sontag's Formula to Intercept Maneuvering Targets", *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 5, no. 4, pp. 397-409, August 2007.

- 
- [79] R. E. Kalman. "A new approach to linear filtering and prediction problems". ASME. Journal of Basic Engineering, 82:35–45, 1960.
- [80] A. Gelb. Applied Optimal Estimation. The M.I.T. Press, 1980.
- [81] Y. Bar-Shalom and X.-R. Li. Estimation and Tracking - Principles, Techniques and Software. Artech House, 1993.
- [82] Wan, E. A., and van der Merwe, R." The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation". In Proceedings of IEEE Symposium on Adaptive Systems for Signal Processing Communications and Control (AS-SPCC) (Lake Louise, Alberta, Canada, October 2000), pp. 153–158.
- [83] Wan, E., van der Merwe, R., and Nelson, A. "Dual Estimation and the Unscented Transformation". In Neural Information Processing Systems 12 (Nov 2000), S. A. Solla, T. K. Leen, and K. R. Müller, Eds., MIT Press, pp. 666–672.
- [84] Haykin, S., Ed. Kalman Filtering and Neural Networks. Adaptive and Learning Systems for Signal Processing, Communications, and Control. Wiley, 2001, ch. 7 - The Unscented Kalman Filter, E. A. Wan and R. van der Merwe, pp. 221–280.
- [85] van der Merwe, R., and Wan, E. "Efficient Derivative-Free Kalman Filters for Online Learning". In Proceedings of the 9th European Symposium on Artificial Neural Networks (ESANN) (Bruges, Belgium, Apr 2001), pp. 205–210.
- [86] van der Merwe, R., and Wan, E. "The square-root unscented Kalman filter for state and parameter estimation". In Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP) (Salt Lake City, UT, May 2001), vol. 6, pp. 3461–3464.
- [87] Julier, S., Uhlmann, J., and Durrant-Whyte, H. "A new approach for filtering nonlinear systems". In Proceedings of the American Control Conference (1995), pp. 1628–1632.
- [88] Julier, S. J., and Uhlmann, J. K. « A General Method for Approximating Nonlinear Transformations of Probability Distributions ». Tech. rep., RRG, Dept. of Engineering Science, University of Oxford, Nov 1996.
- [89] Julier, S. J., and Uhlmann, J. K. "A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems". In Proc. SPIE - Int. Soc. Opt. Eng. (USA) (Orlando, FL, April 1997), vol. 3068, pp. 182–193.
- [90] Julier, S. J. "A Skewed Approach to Filtering". In SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets (Orlando, Florida, April 1998), vol. 3373, SPIE, pp. 271–282.
- [91] Norgaard, M., Poulsen, N., and Ravn, O. "New Developments in State Estimation for Nonlinear Systems". Automatica 36, 11 (November 2000), 1627–1638.
- [92] Ito, K., and Xiong, K." Gaussian Filters for Nonlinear Filtering Problems". IEEE Transactions on Automatic Control 45, 5 (May 2000), 910–927.
- [93] Simo Särkkä. "On unscented Kalman filtering for state Estimation of continuous-time nonlinear

- systems”. IEEE Transactions on Automatic Control, October 2007.
- [94] Mathieu Flament. « Apport du filtrage particulaire au recalage altimétrique dans un contexte de navigation hybride ». École Doctorale «Sciences et Technologies de l’Information, des Télécommunications et des Systèmes ». 2 Décembre 2009.
- [95] YAHIA Moussa. « Elaboration d’algorithmes de masquage pour les systèmes de communication chaotique ». Université Mentouri–Constantine. 19 Avril 2012.
- [96] S. Julier, J. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte. ‘‘A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators’’. IEEE Trans. Automat. Control, 45(3):477–482, 2000.
- [97] Mihai Bogdan Luca. « Apports du chaos et des estimateurs d’états pour la transmission sécurisée de l’information ». Laboratoire d’Electronique et Systèmes de Télécommunications. Université de Bretagne Occidentale. 6 Novembre 2006.
- [98] Rudolph van der Merwe. « Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models ». Faculty of the OGI School of Science & Engineering at Oregon Health & Science University April. Electrical and Computer Engineering. April 2004.
- [99] Rudolph van der Merwe and Eric A. Wan. ‘‘The square-root unscented Kalman filter for state and parameter estimation’’. Oregon Graduate Institute of Science and Technology 20000 NW Walker Road, Beaverton, Oregon 97006, USA frvdmerwe.
- [100] P. J. Costa, ‘‘Adaptive model architecture and extended Kalman–Bucy filters’’. IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 30, pp.525–533, Apr. 1994.
- [101] M. Athans, R. P. Wishner, and A. Bertolini, ‘‘Suboptimal state estimation for continuous-time nonlinear systems from discrete noisy measurements,’’ IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-13, pp. 504–518, Oct. 1968.
- [102] R. K. Mehra, ‘‘A comparison of several nonlinear filters for reentry vehicle tracking,’’ IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-16, pp. 307–319, Aug. 1971.
- [103] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, ‘‘Unscented filtering and nonlinear estimation,’’ Proceedings of the IEEE, vol. 92(3), pp. 401–422, March 2004.
- [104] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, ‘‘Corrections to unscented filtering and nonlinear estimation,’’ Proceedings of the IEEE, vol. 92(12), pp. 1958– 1958, December 2004.