

# Chapitre un

## MODELISATION ET COMMANDE DES ROBOTS MANIPULATEURS

<b>1.1. Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1.2. Changements des coordonnées directs</b>	<b>9</b>
<b>1.3. Changements de coordonnées inverse</b>	<b>17</b>
<b>1.4 Commande dynamique</b>	<b>23</b>
<b>1.5 Conclusion</b>	<b>29</b>

## **MODELISATION ET COMMANDE DES ROBOTS MANIPULATEURS**

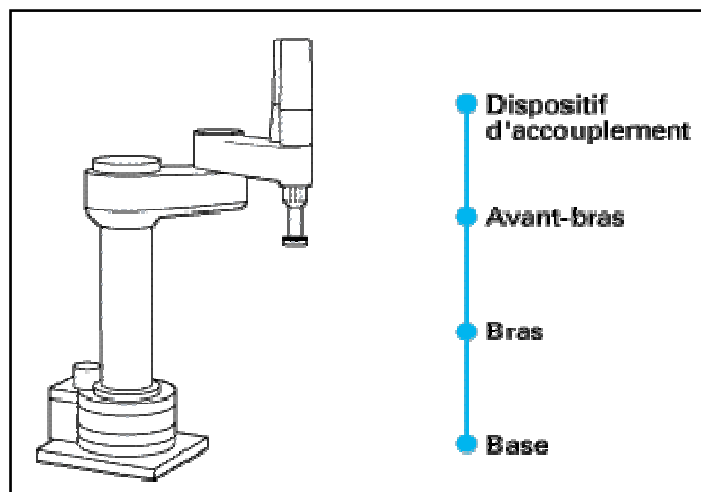
### **1.1. Introduction**

Depuis quelques décennies, la recherche dans la robotique s'est concentrée presque entièrement sur la commande des robots manipulateurs.

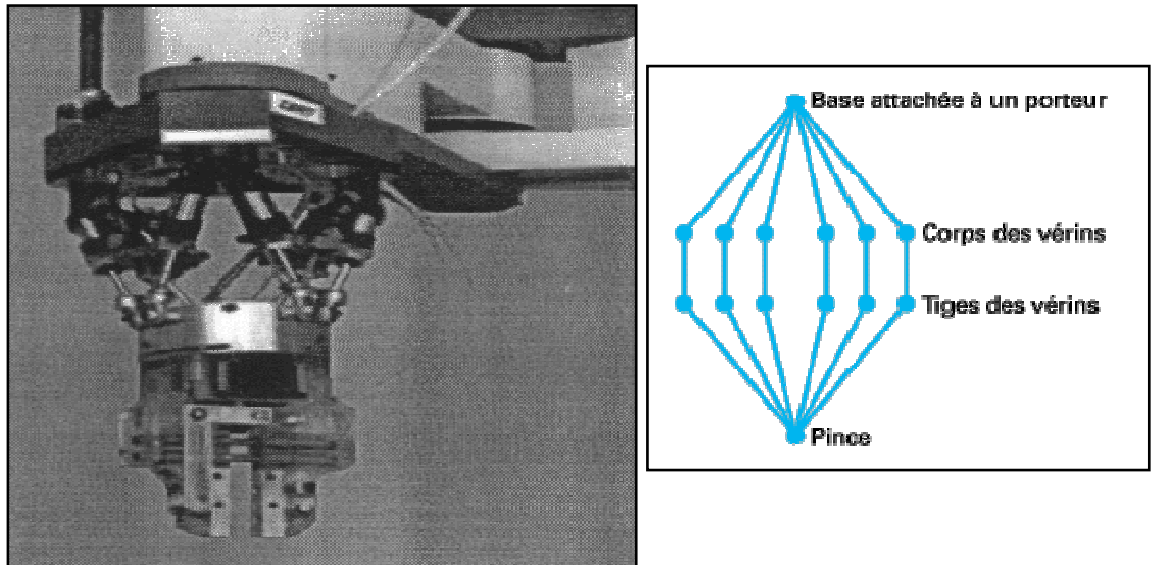
Récemment le besoin pour des manipulations complexes et l'évolution des dispositifs tels que les effecteurs à plusieurs doigts et les plates-formes à plusieurs pieds a engendré un large domaine de recherche dans l'étude des systèmes robotiques. Cependant la pièce maîtresse de ces systèmes est le robot manipulateur.

Un robot manipulateur se compose de plusieurs liaisons connectées par des articulations pour former un bras.

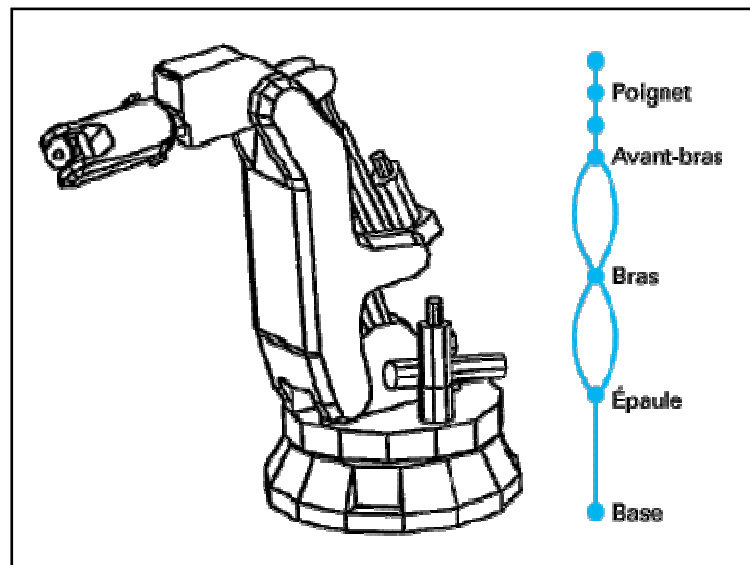
On peut retrouver trois formes de manipulateurs en fonction de la manière dont les liaisons sont connectées : une forme sérielle et une autre parallèle et une autre mixte [2].



**Figure 1.1** - Exemple de structure série.



**Figure 1.2** - Exemple de structure parallèle



**Figure 1.3** - Exemple de structure mixte

La plupart des robots utilisés actuellement sont des robots ayant des liaisons connectées stérilement .

Les robots manipulateurs sériels, dans leur formes de base, sont des chaînes cinématiques ouvertes composées de liaisons rigides ou flexibles connectées par des articulations : ces robots peuvent se déplacer circulairement dans l'espace par des mouvements générés par des articulations commandées par les actionneurs.

Typiquement chaque articulation possède un degré de liberté et elle est de type rotoïde ou prismatique dépendant du mouvement permis entre les deux articulations et qui peut être un mouvement de rotation ou un mouvement de translation.

Soit  $N$  le nombre de degrés de liberté recherché (c'est le nombre nécessaire de moteurs). On a :

$$N = \sum_{\text{liaisons } i} N_i - 6b \quad (1.1)$$

Avec  $N_i$  nombre de degrés de liberté de la liaison  $i$ ,  $b$  nombre de boucles cinématiques (nombre de corps qu'il faut couper pour rendre le graphe du mécanisme arborescent).

Soit  $n$  le nombre de corps mobiles. Les équations de Newton contiennent donc  $6n$  inconnues, par exemple les efforts à exercer pour obtenir des mouvements donnés (ou tout simplement l'équilibre statique). Toutefois, à chaque articulation  $i$ ,  $N_i$  composantes du tenseur des efforts sont nulles d'après l'hypothèse de non-frottement. Il reste donc  $N$  inconnues que l'on doit imposer par des moteurs, avec :

$$N = 6n - \sum_{\text{liaisons } i} (6 - N_i) \quad (1.2)$$

Un paramètre important d'un manipulateur est le nombre de degrés de libertés (nombre d'articulations) qu'il possède pour déplacer et orienter un objet dans un espace à trois dimensions.

Un mécanisme doit avoir au moins six degrés de libertés dont trois pour positionner l'organe effecteur vers un point prescrit dans l'espace de la tâche du manipulateur et les trois autres pour l'orienter proprement à cette position, ainsi un bras ayant six articulations (six degrés de libertés).

La configuration articulaire correspondant à une position et une orientation données de l'organe effecteur peut être unique à quelques variations finies [2].

Le bras humain peut être considéré comme ayant six articulations principales permettant six mouvements dont deux se trouvent au niveau de l'épaule (un mouvement de rapprochement et

d'éloignement du corps et l'autre en avant et en arrière) et deux autres existent au niveau du coude ( un mouvement d'extension et de pliage du bras et l'autre un mouvement de rotation de la position frontale du bras autour de l'axe reliant le coude au poignet ), les deux derniers mouvements résident au niveau du poignet (mouvement d'élévation/abaissement et un mouvement de balayage).

Les bras robotiques peuvent être cinématiquement conçus redondants en leur conférant des degrés de libertés supplémentaires dans l'espace articulaire, ainsi un manipulateur est redondant quand le nombre  $n$  de ses articulation est supérieur à la dimension de l'espace de la tâche (travail)  $m$ .

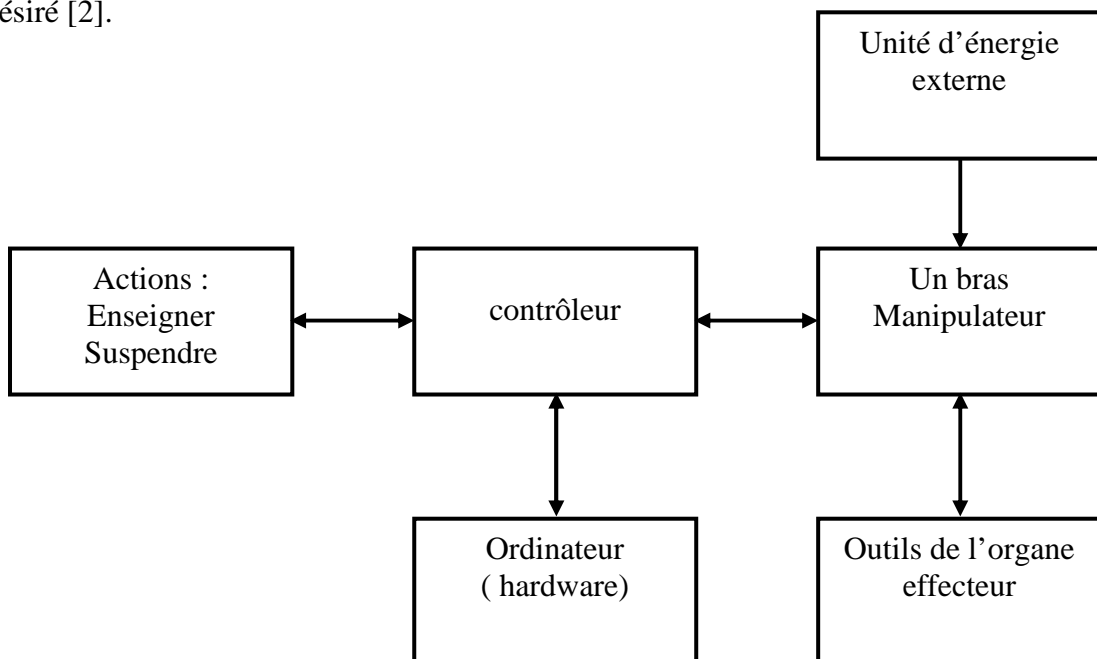
Un manipulateur redondant est caractérisé par le fait qu'il peut avoir un nombre infini de configurations au niveau articulaire correspondant à plus de positions de l'organe effecteur dans l'espace du travail.

Alors que ce surplus de degrés de libertés complique la programmation et les stratégies de contrôle par contre il augmente considérablement l'utilité du robot.

Mathématiquement, un bras robotique est décrit par ses équations cinématiques et dynamiques, la cinématique d'un bras introduit l'étude des relations entre les positions, vitesses et les accélérations de ses différentes parties; l'analyse cinématique est nécessaire pour la planification et l'exécution des mouvements désirés du manipulateur aussi bien que par des calculs dynamiques .

Les équations dynamiques d'un bras décrivent son évolution dans le temps en réponse à des forces externes, et des couples agissant sur ses actionneurs. Cependant un système robotique n'est pas seulement un bras manipulateur, en plus du bras, le système renferme aussi une source d'énergie externe, un outillage de l'extrémité du bras, des capteurs externes et internes, des servomécanismes, un ordinateur interface et le contrôleur (Figure 1.4).

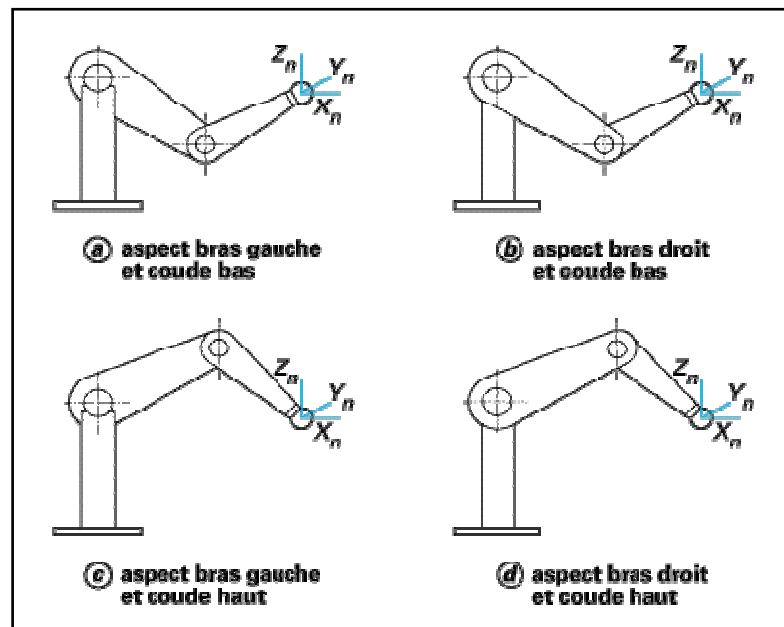
Le contrôleur d'un robot peut être pris comme le cerveau qui commande les mouvements mécaniques du bras : il est responsable, en se basant sur les modèles cinématiques et dynamiques du bras et les mesures captées, de la génération de directives contrôlant les actionneurs des articulations, nécessaire pour la génération du mouvement désiré [2].



**Figure 1.4** - composantes d'un système robotique à un seul bras

## 1.2. Changements des coordonnées directs

On associe à chaque corps  $i$  du mécanisme un repère orthonormé direct  $\{X_i, Y_i, Z_i\}$  noté  $R_i$ . Les repères particuliers sont d'une part celui de la base  $\{X_0, Y_0, Z_0\}$  noté  $R_0$  et d'autre part celui,  $R_n$ , de l'organe terminal  $\{X_n, Y_n, Z_n\}$ . Le repère de la base occupe une position et une orientation connues par rapport à un repère fixe si le robot est à un poste fixe dans un atelier, ou lié à un véhicule porteur sur lequel la base est fixée rigidement. Le dernier repère  $R_n$  peut être aussi bien lié au dispositif d'accouplement de l'effecteur qu'à ce dernier qui lui est rigidement attaché. Sa situation instantanée s'appelle une pose.



**Figure 1.5** - Divers aspects pour une même pose du bras du robot PUMA

C'est l'action sur  $N$  effecteurs qui permet de situer l'organe terminal par rapport à un repère lié à la base et/ou d'exercer au moyen de cet organe des efforts sur l'environnement. On note généralement  $q_1, q_2 \dots q_N$  les variables de position (angulaire ou linéaire) des effecteurs actionnant les articulations actives que nous avons recensées dans la section précédente. Ces variables définissent la configuration instantanée du mécanisme. La Figure 1.5 démontre qu'une même pose peut être obtenue par plusieurs configurations. Nous avons appelé **aspects** les classes de configurations différentes [3].

### 1.2.1. Modèle géométrique direct

Il exprime la position et l'orientation du repère de référence  $R$  outil lié à l'outil, relativement à un repère fixe — celui de la base  $R_0$  par exemple — en fonction des variables articulaires motorisées (et asservies électroniquement)  $q_1, q_2 \dots q_N$  du mécanisme. L'élément

fondamental qui décrit la position et l'orientation d'un repère  $R_i$ , d'origine  $O_i$ , dans un repère  $R_j$  peut se mettre sous la forme d'une matrice de dimensions (4,4) :

$${}^jT_i = \begin{bmatrix} [\vec{X}_i]_j & [\vec{Y}_i]_j & [\vec{Z}_i]_j & [\overrightarrow{O_jO_i}]_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

où les composantes des vecteurs sont mesurées dans le repère  $R_j$ .

Dans cette matrice (4,4), on remarque que la quatrième colonne est la représentation d'un vecteur en coordonnées « homogènes » (quatre composantes) [4].

La matrice (3,3) suivante :

$${}^jR_i = \begin{bmatrix} [\vec{X}_i]_j & [\vec{Y}_i]_j & [\vec{Z}_i]_j \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

représente la rotation entre les deux repères. Ses éléments sont les cosinus directeurs : les cosinus des angles respectifs entre les vecteurs unitaires du repère  $R_i$  et ceux du repère  $R_j$ .

Pour spécifier une rotation, cette matrice présente un nombre surabondant de paramètres (neuf) qui doivent être reliés par les six contraintes exprimant que le repère est orthonormé. On peut donc en pratique ne spécifier que trois paramètres, par exemple les angles de lacet ( $l$ ), tangage ( $q$ ) et roulis ( $r$ ) par analogie avec la terminologie des pilotes de véhicules, d'avions notamment. La Figure 1.6 montre la définition de ces angles, ce qui donne la matrice de rotation :

$$\begin{aligned} {}^jR_i &= \begin{bmatrix} \cos\lambda_{ji} & -\sin\lambda_{ji} & 0 \\ \sin\lambda_{ji} & \cos\lambda_{ji} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{ji} & -\sin\theta_{ji} \\ 0 & -\sin\theta_{ji} & \cos\theta_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\rho_{ji} & 0 & \sin\rho_{ji} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\rho_{ji} & 0 & \cos\rho_{ji} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\lambda_{ji} - \cos\rho_{ji} - \sin\lambda_{ji} \sin\theta_{ji} \sin\rho_{ji} & -\sin\lambda_{ji} \cos\theta_{ji} & \cos\lambda_{ji} \sin\rho_{ji} + \sin\lambda_{ji} \sin\theta_{ji} \cos\rho_{ji} \\ \cos\lambda_{ji} - \cos\rho_{ji} + \cos\lambda_{ji} \sin\theta_{ji} \sin\rho_{ji} & \cos\lambda_{ji} \cos\theta_{ji} & \cos\lambda_{ji} \sin\rho_{ji} + \cos\lambda_{ji} \sin\theta_{ji} \cos\rho_{ji} \\ -\cos\theta_{ji} \sin\rho_{ji} & \sin\theta_{ji} & \cos\theta_{ji} \cos\rho_{ji} \end{bmatrix} \quad (1.5) \end{aligned}$$

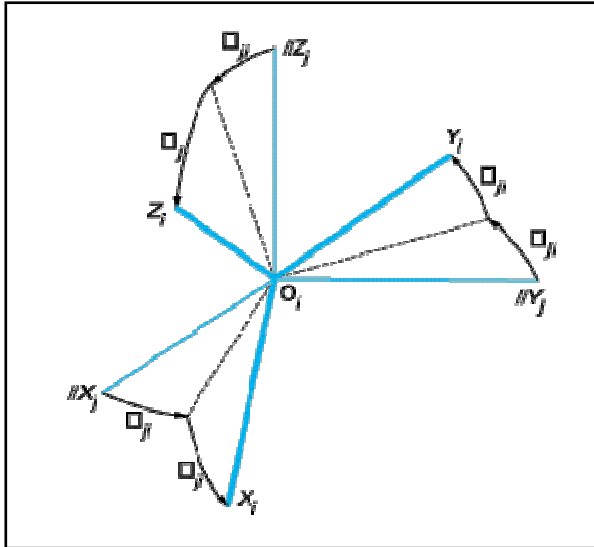


Figure 1.6 - Angles de lacet, tangage et roulis

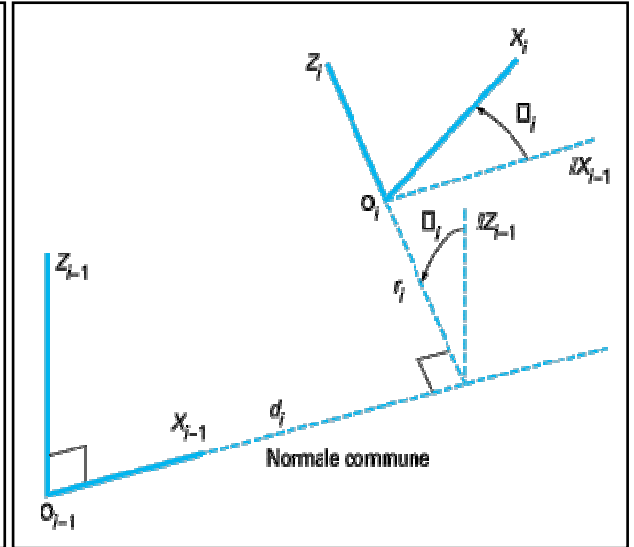


Figure 1.7 - Paramètres de Denavit et Hartenberg

### 1.2.1.1. Structures arborescentes

On considère les chaînes qui relient la base à chaque outil. Dans le repère de la base, la position et l'orientation de ce dernier s'obtiennent par un produit de matrices (4,4), correspondant à la composition des changements de repères successifs le long de la chaîne. Par exemple, pour une seule chaîne de  $n$  corps :

$${}^0T_{outil} = {}^0T_1 {}^1T_2 \dots {}^{n-1}T_n {}^nT_{outil} \quad (1.6)$$

Il est usuel de représenter les matrices de transformations qui font passer d'un corps au suivant au moyen du formalisme de Denavit et Hartenberg modifié par Khalil [4]. Chaque articulation  $i$  est alors motorisée, en pratique par un moteur linéaire ou rotatif. Il doit y avoir  $n$  moteurs.

La figure 1.7 montre les paramètres intervenant dans la transformation.

Ces paramètres sont :

- $\alpha_i$  angle entre  $Z_{i-1}$  et  $Z_i$  (rotation autour de  $X_{i-1}$ ) ;
- $d_i$  distance entre  $Z_{i-1}$  et  $Z_i$  le long de  $X_{i-1}$  ;
- $\theta_i$  angle entre  $X_{i-1}$  et  $X_i$  (rotation autour de  $Z_i$ ) ;
- $r_i$  distance entre  $X_{i-1}$  et  $X_i$  le long de  $Z_i$  .

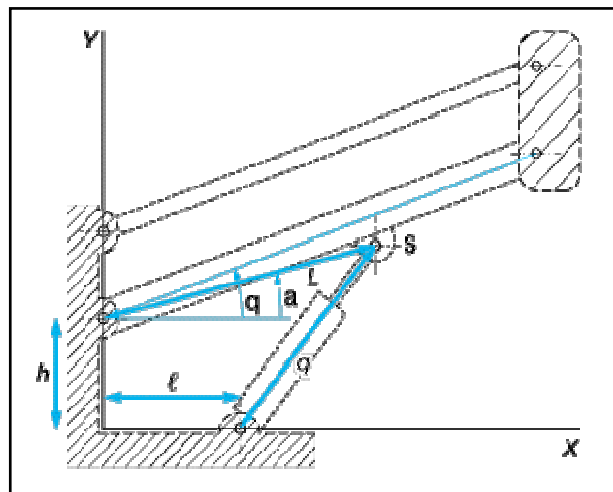


La variable articulaire active  $\alpha_i$  associée à l'articulation  $i$  est soit  $\theta_i$  (articulation rotoïde), soit  $d_i$  (articulation prismatique). La composition des transformations élémentaires conduisant du repère  $R_{i-1}$  au repère  $R_i$  conduit à la matrice de passage (composantes exprimées dans  $R_{i-1}$ ):

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & d_i \\ \cos\alpha_i \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i & -r_i \sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \cos\theta_i & \cos\alpha_i & r_i \cos\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

### 1.2.1.2 Robots manipulateurs avec boucles cinématiques planes

Dans ce cas, il existe encore toujours une chaîne cinématique « principale » entre la base et l'organe terminal. C'est elle qui assure la précision de la pose. On peut encore décrire la situation de l'outil, par rapport à la base, par le produit des matrices de la chaîne principale. Mais alors certaines variables articulaires (paramètres  $\theta_i$  ou  $d_i$  de la formulation de Denavit et Hartenberg) ne sont plus directement actionnées par les « axes »  $q_i$  des moteurs. Lorsque les boucles sont planes, il est aisé de calculer les variables articulaires en fonction des  $q_i$  et de porter ce résultat dans les matrices de passage de la chaîne principale.



**Figure 1.8 - Résolution d'une boucle**

D'après les notations de la Figure 1.8, on obtient alors :

$$\begin{cases} X_s = L \cos \alpha \\ Y_s = h + L \sin \alpha \\ q^2 = (X_s - l)^2 + Y_s^2 \end{cases} \quad \text{d'où } q = \sqrt{L^2 + l^2 + h^2 - 2L(l \cos \theta - h \sin \alpha)} \quad (1.8)$$

Inversement, il nous faut à pour en déduire l'angle articulaire  $q$ .

On l'obtient théoriquement à partir de :

$$l \cos \alpha - h \sin \alpha = \frac{L^2 + l^2 + h^2 + q^2}{2L} \quad (1.9)$$

Pour cela, on introduit l'angle  $\beta$  tel que :  $\sin \beta = \frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2}}$  et  $\cos \beta = \frac{h}{\sqrt{l^2 + h^2}}$

On doit donc avoir :

$$\sin(\beta - \alpha) = \frac{L^2 + l^2 + h^2 - q^2}{2L\sqrt{l^2 + h^2}} \quad (1.10)$$

qui ne peut avoir une solution donnant  $\alpha$  que si la fraction du second membre est comprise entre  $-1$  et  $+1$ . On voit donc qu'un cas limite est obtenu lorsque :

$$(L \pm q)^2 = h^2 + l^2 \quad (1.11)$$

correspondant théoriquement aux positions du vérin agissant selon l'axe qui porte le segment de longueur  $L$ . Dans de telles positions le mouvement de la tige du vérin est impossible. En pratique, les butées du mécanisme font que l'on ne se trouve pas dans de tels cas. Toutefois, ce problème se posera de manière encore plus cruciale dans les robots parallèles [5].

Un autre cas courant simple, qui lui ne présente pas de singularité, est la prise en compte éventuelle des transmissions (réducteurs à engrenages, courroies, câbles, etc.) entre des moteurs et les articulations commandées. Les relations entre les variables des moteurs et les variables articulaires sont alors linéaires.

### 1.2.1.3. Robots parallèles

Pour positionner et orienter l'organe terminal dans l'espace, un robot parallèle doit avoir six articulations motorisées, mais il a obligatoirement en plus un grand nombre d'articulations passives. Plusieurs chaînes complexes conduisent de la base à l'organe terminal. Si l'on désire le modèle géométrique direct, on ne peut pas l'obtenir analytiquement. En effet, il faut écrire les matrices de passage de toutes les chaînes (au nombre de six) puis exprimer comme contraintes que toutes ces transformations fournissent la même pose de l'organe terminal. Cela nécessite des calculs numériques complexes utilisés uniquement dans les systèmes de CAO (conception assistée par ordinateur), et c'est pourquoi les automaticiens préfèrent inverser le modèle géométrique inverse qui est, lui, relativement facile à obtenir pour une structure parallèle, quand les « bras » ne présentent pas de singularité.

### 1.2.2. Modèle cinématique direct

Ce modèle décrit les vitesses de l'organe terminal en fonction des dérivées, par rapport au temps, des variables actives. La vitesse instantanée du corps solide qui constitue l'organe terminal (en supposant pour simplifier qu'il n'y en a qu'un) relativement à la base est entièrement déterminée par la vitesse :

$$\dot{\vec{O}}_{outil} = \left[ \frac{d\vec{O}_0 O_{outil}}{dt} \right]_0 \quad (1.12)$$

du point de référence de l'organe terminal par rapport au repère de la base, et par la vitesse de rotation instantanée  $[\vec{\Omega}_{outil}]_0 = [\vec{\Omega}_n]_0$  de cet organe terminal.

Il faut noter que les composantes de ce dernier vecteur ne sont pas les dérivées, par rapport au temps, de vraies variables d'orientation, comme les angles de roulis, tangage et lacet, bien qu'elles leur soient liées [3]. Il en est de même des dérivées des cosinus directeurs de la matrice d'orientation de l'organe terminal. Le choix de la vitesse instantanée de rotation permet dans un premier temps de s'affranchir d'un quelconque ensemble de variables d'orientation.

#### 1.2.2.1 Structure de chaîne

Ce cas peut être facilement généralisé à une structure arborescente : il suffit de considérer chaque chaîne qui conduit de la base à un corps terminal.

Les vitesses de l'organe terminal sont obtenues par composition des vitesses des corps constituant la chaîne cinématique.

Si l'articulation active  $i$  est rotoïde, on a  $q_i = \theta_i$ , et alors :

$$\begin{cases} [\vec{\Omega}_i]_0 = [\vec{\Omega}_{i-1}]_0 + \dot{q}_i [\vec{Z}_i]_0 \\ [\dot{\vec{O}}_i]_0 = [\dot{\vec{O}}_{i-1}]_0 + [\vec{\Omega}_i \wedge (d_i \vec{X}_{i-1} + r_i \vec{Z}_i)]_0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Si l'articulation active  $i$  est prismatique, on a  $q_i = r_i$  et l'on peut écrire :

$$\begin{cases} [\vec{\Omega}_i]_0 = [\vec{\Omega}_{i-1}]_0 + \\ [\dot{\vec{O}}_i]_0 = [\dot{\vec{O}}_{i-1}]_0 + \dot{q}_i [\vec{Z}_i]_0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Les équations (1.13) et (1.14), appliquées successivement depuis la base jusqu'à l'extrémité de la chaîne, permettent d'exprimer les vitesses de l'organe terminal en fonction des dérivées des variables de configuration. Sous forme matricielle, on a :

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{O}}_n \\ \vec{\Omega}_n \end{bmatrix}_0 = J_0(Q) \dot{Q} \quad (1.15)$$

Avec  $J_0$  matrice de dimension  $(6, n)$ , c'est-à-dire  $(6, 6)$  pour un robot non redondant  $Q$  vecteur – matrice colonne  $(n, 1)$  dont les composantes sont les  $q_i$ . La matrice  $J_0$  est fonction des  $q_i$  puisque les équations qui permettent de calculer les vitesses dans le repère de la base font intervenir les matrices de passage  ${}^{i-1}T_i$  qui contiennent ces variables de configuration.

Si l'on veut maintenant calculer les dérivées, par rapport au temps, de coordonnées opérationnelles mesurables, par exemple les coordonnées cartésiennes du point de référence de l'organe terminal et les angles de roulis, tangage et lacet de son repère de référence, il faut exprimer en particulier les relations entre la vitesse angulaire  $[\vec{\Omega}_n]_0$  et les dérivées des variables d'orientation. On peut commencer simplement par faire intervenir la matrice des cosinus directeurs et sa dérivée. On démontre [3] que l'on peut écrire en particulier pour le corps  $n$  :

$${}^0\dot{R}_n = \tilde{\Omega}_n {}^0R_n \quad (1.16)$$

Puisqu'une matrice de rotation est orthogonale, on en déduit les expressions des composantes de la vitesse angulaire par la formule :

$$\tilde{\Omega}_n = {}^0\dot{R}_n {}^0R_n^{-1} = {}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T \quad (1.17)$$

où l'exposant T dénote la transposition de matrice.

La relation (1.5) est l'expression d'une matrice de rotation en fonction des angles de roulis, tangage et lacet (paragraphe 1.2.1). Il suffit de la dériver par rapport au temps et d'appliquer l'équation (1.17) pour obtenir les relations entre les dérivées des variables d'orientation et les dérivées des variables articulaires. Dans le cas présent où l'on s'intéresse au corps terminal, on a :

$${}^0R_n = \begin{bmatrix} \cos\lambda_{0n} \cos\rho_{0n} - \sin\lambda_{0n} \sin\theta_{0n} \sin\rho_{0n} & -\sin\lambda_{0n} \cos\theta_{0n} & \cos\lambda_{0n} \cos\rho_{0n} + \sin\lambda_{0n} \sin\theta_{0n} \cos\rho_{0n} \\ \cos\lambda_{0n} \cos\rho_{0n} + \cos\lambda_{0n} \sin\theta_{0n} \sin\rho_{0n} & \sin\lambda_{0n} \cos\theta_{0n} & \sin\lambda_{0n} \sin\rho_{0n} - \cos\lambda_{0n} \sin\theta_{0n} \cos\rho_{0n} \\ \cos\theta_{0n} \sin\rho_{0n} & \sin\theta_{0n} & \cos\theta_{0n} \cos\rho_{0n} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Les trois premières composantes d'un vecteur « vitesse des coordonnées opérationnelles » sont tout naturellement les composantes de la vitesse du point de référence terminal dans le repère de la base. On obtient ainsi finalement une relation de la forme :

$$\dot{X}_{6,1} = J(Q) \dot{Q}_{n,1} \quad (1.19)$$

$J(Q)$  est ainsi la matrice jacobienne de la fonction vectorielle  $f$  qui définirait un modèle géométrique direct de la forme :

$$X = f(Q) \quad (1.20)$$

### 1.2.2.2. Structures avec des boucles simples

Comme il a été écrit plus haut (paragraphe 1.2.1.2. ), il existe une chaîne principale qui conduit de la base vers l'extrémité, mais alors certaines articulations de cette chaîne sont passives (non motorisées directement). Il est cependant possible, au paragraphe 1.2.2.1. d'écrire un modèle cinématique direct en fonction de toutes les variables articulaires, motorisées ou non, de la chaîne principale, puis d'utiliser les relations entre les variables des articulations passives et les coordonnées  $q_i$  motrices, ainsi que les dérivées, pour « éliminer » les premières et obtenir une matrice jacobienne comme dans l'équation (1.19) .

Prenons l'exemple simple de boucles planes déjà vu (paragraphe 1.2.1.2. ), et introduisons les paramètres de dimensions (voir Figure 1.7 ). La variable active est la longueur  $q$  du vérin et la variable passive de la chaîne principale est par exemple l'angle  $q$  . Ce dernier est égal à l'angle  $a$  plus un angle constant. Le repère  $\{X, Y\}$  est par exemple un repère local. La relation (1.8) :

$$q = \sqrt{L^2 + l^2 + h^2 - 2L(l \cos \alpha - h \sin \alpha)}$$

a été utilisée pour obtenir le modèle géométrique direct équation (1.20) . Par dérivation de ce dernier, on obtient l'expression de  $dq$  en fonction de  $dq$  , en dehors des cas limites (singularités ). En effet, on a dans ces cas :

$$\cos(b - a) = 0, \text{ et } dq/dq = da/dq \text{ n'est pas défini.}$$

### 1.2.2.3. Robots parallèles

Comme le modèle géométrique direct, le modèle cinématique direct ne s'obtient pas simplement pour de tels mécanismes. On préfère inverser le modèle cinématique inverse qui est, lui, relativement facile à obtenir (paragraphe 1.3.1.3.).

### 1.3. Changements de coordonnées inverse

L'organe terminal d'un robot manipulateur doit effectuer des mouvements et/ou exercer des efforts dans un repère qui est lié à l'espace opérationnel (l'atelier). L'opérateur qui programme un robot par des moyens évolués lui fournit des instructions définies dans cet espace. Par contre, même s'il est doté de capteurs extérieurs (de position, de force) permettant de l'asservir localement à la tâche, le robot a ses asservissements élémentaires bouclés sur les informations issues de ses capteurs internes (articulaires) et mesurant plus ou moins directement les  $q_i$  et/ou les  $g_i$ . L'armoire de commande du robot doit donc contenir un module (un programme implanté sur ordinateur numérique) qui calcule les consignes à envoyer aux asservissements « articulaires » en fonction des valeurs des variables de position, d'orientation et/ou d'efforts désirées dans l'espace opérationnel. Ces calculs font appel aux modèles théoriques des transformations de coordonnées inverses. Une condition nécessaire d'existence de ces modèles (nombre fini de solutions) est que le robot ne soit pas redondant vis-à-vis de la tâche : le nombre de variables opérationnelles spécifiées est égal à  $N$ , nombre de degrés de liberté du mécanisme.

#### 1.3.1. Modèle géométrique inverse

En supposant les asservissements parfaits, on a égalité de leurs sorties  $q_i$  et des consignes de position correspondantes. Il s'agit ici de calculer, si elle existe, l'application réciproque  $f^{-1}$  de celle du modèle géométrique direct l'équation (1.20).

Aucune solution réelle n'existe en dehors de ce que l'on nomme l'espace de travail du robot. De plus, il peut exister plusieurs solutions en nombre fini (voir Figure 1.4) ou en nombre infini dans les singularités de la matrice jacobienne  $J$  associée à  $f$ .

En dehors des singularités, et sans tenir compte des butées mécaniques, il est impossible dans le cas général de savoir si un mécanisme donné est soluble et quel est le nombre de solutions quand il l'est. On peut toutefois avoir des informations dans des cas simples en étudiant analytiquement le déterminant de la matrice jacobienne :  $\det J$  [3]. Pour un robot série à six axes rotoïdes, dont les trois axes du poignet sont concourants, il peut y avoir théoriquement trente-deux solutions différentes  $Q$  (aspects) pour une pose donnée.

##### 1.3.1.1. Structures série

Pour un grand nombre de robots manipulateurs dont les trois axes du poignet sont concourants, il est possible de résoudre analytiquement le problème inverse par étapes.

La position du point de référence de l'outil et l'orientation de l'outil sont données relativement au repère atelier. À un déplacement constant près, on peut considérer ici que ce

dernier est confondu avec le repère de la base du robot. Les données sont ainsi  $[\vec{O}_{outil}]_0$  et  ${}^0R_{outil}$ . Par ailleurs, la situation de l'outil dans le repère de référence du corps 6 est fixe. On en déduit les coordonnées du point d'intersection  $O_4 = O_5 = O_6$  des axes du poignet :

$$[\vec{O}_6]_0 = [\vec{O}_{outil}]_0 - {}^0R_{outil} [\vec{O}_{outil} - \vec{O}_6]_6 \quad (1.21)$$

La position du poignet permet alors de résoudre le « bras » et d'obtenir, en dehors des cas singuliers, la (ou les) solution(s) admissible(s) pour  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$ . À chaque solution correspond une matrice de rotation  ${}^0R_3$ . Comme l'on a :

$${}^0R_{outil} = {}^0R_3 {}^3R_6 {}^6R_{outil} \quad (1.22)$$

on en déduit :

$${}^3R_6 = {}^3R_0 {}^0R_{outil} {}^{outil}R_6 \quad (1.23)$$

Cette dernière matrice ne fait intervenir que  $q_4$ ,  $q_5$  et  $q_6$ , que l'on calcule alors.

### 1.3.1.2. Robots avec des boucles

On calcule alors le modèle géométrique inverse pour la chaîne principale, puis on remplace les coordonnées articulaires passives par leurs expressions en fonction des variables motorisées, comme au paragraphe 1.2.1.2 La présence de boucles cinématiques augmente le nombre de solutions théoriques et par là même la complexité des calculs. En pratique, on ne retient que les solutions techniquement réalisables.

### 1.3.1.3. Robots parallèles

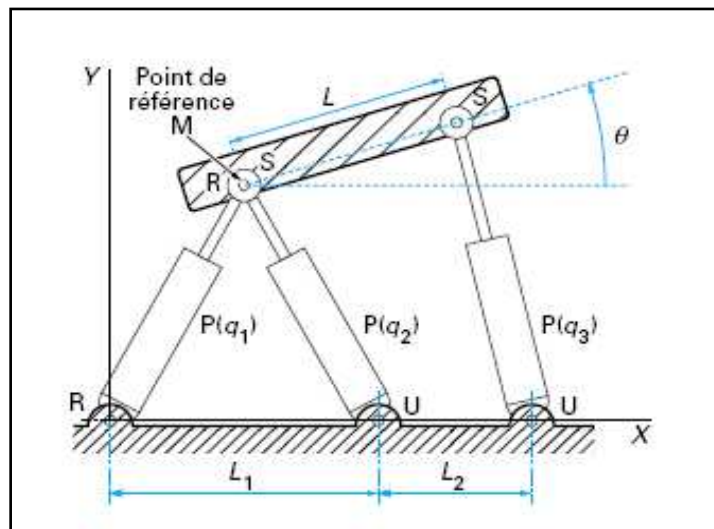


Figure 1.9 – Mécanisme parallèle à trois degrés de liberté

Dans ce cas, la position et l'orientation de l'organe terminal qui porte l'outil sont assurées par les configurations des divers « bras » qui y conduisent, en partant de la base. Prenons le cas d'un robot à six degrés de liberté et à six bras (par exemple celui de la Figure 1.3). Il y a cinq boucles et donc, d'après la formule (1.1), la somme des degrés de liberté de l'ensemble des articulations des bras est égale à  $6+(6 \times 5) = 36$ . Pour que le système soit correctement défini, il faut six degrés de liberté par bras, que les bras soient identiques ou non, et chacun d'entre eux peut alors être résolu par la méthode donnée au paragraphe 1.3.1.1.

Ici encore, on peut avoir des singularités. Nous détaillerons ce problème à propos des modèles cinématiques (paragraphe 1.3.2). D'autre part, des contraintes technologiques peuvent éliminer des solutions, qui sont hors du volume de travail du robot.

Considérons l'exemple simple de la Figure 1.8. Ce mécanisme comporte :

- ✓ trois articulations prismatiques actives P (vérins) ;
- ✓ deux rotoïdes R qui assurent, avec la première prismatique, la précision de positionnement et d'orientation de la plate-forme mobile ;
- ✓ deux rotules S ; deux cardans U.

L'ensemble comporte donc  $N=15-6 \times 2=3$  degrés de liberté. On voit en effet que normalement, on peut positionner (point  $M$ ) et orienter (angle  $q$ ) l'axe de la plate-forme dans le plan de la figure en agissant sur les vérins.

on a noté  $q_i$  la longueur totale du vérin  $i$ .

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{X_M^2 + Y_M^2} \\ q_2 = \sqrt{(L_1 - X_M)^2 + Y_M^2} \\ q_3 = \sqrt{(L_1 + L_2 - X_M - L \cos \theta)^2 + (Y_M + L \sin \theta)^2} \end{cases} \quad (1.24)$$

Ce modèle mathématique correspond à une configuration exécutable si et seulement si :

$$q_{i \min} \leq q_i \leq q_{i \max} \text{ pour } i = 1, 2, 3$$

ce qui correspond à une pose de la plate-forme appartenant à l'espace de travail.

On remarque toutefois que théoriquement, si par exemple  $Y_M = 0$ , on se trouve en singularité : si le mécanisme y arrive, aidé par la gravité par exemple, il ne peut en sortir activement et reste avec  $Y_M = 0$ .

On obtient également d'autres configurations singulières quand l'axe du troisième vérin est aligné avec celui de la plate-forme. On ne peut alors pas modifier  $q$  sans changer la position du point  $M$ .



### 1.3.2. Modèle cinématique inverse

Ce modèle est nécessaire quand on spécifie la loi de vitesse de l'organe terminal dans le repère atelier (ou plus simplement celui de la base du robot) pour en déduire les lois d'évolution des variables articulaires asservies. Le problème revient donc à inverser la matrice jacobienne  $J$ , quand c'est possible.

#### 1.3.2.1. Structures série

Dans ce cas, on a toujours besoin de calculer au préalable le modèle géométrique inverse. En effet, on a théoriquement deux façons d'obtenir le modèle cinématique inverse :

- ✓ par dérivation du modèle géométrique inverse ;
- ✓ par inversion de la matrice jacobienne  $J$ .

On obtient ainsi, en dehors des singularités, une relation de la forme :

$$\dot{Q} = J^{-1}(Q)\dot{X} \quad (1.25)$$

avec  $J^{-1}$  l'inverse de la jacobienne fonction de  $Q$ . Dans un deuxième temps, il faut donc utiliser le modèle géométrique inverse pour remplacer les  $q_i$  par leurs valeurs numériques ou, quand c'est possible, par leurs expressions en fonction de  $X$ . Dans le cas de robots série, les singularités de la matrice jacobienne (solutions de l'équation  $\det J = 0$ ) correspondent à des pertes de mobilité : les mouvements admissibles appartiennent à des sous-espaces de l'espace des vitesses, normalement de dimension 6 pour la majorité des robots.[1]

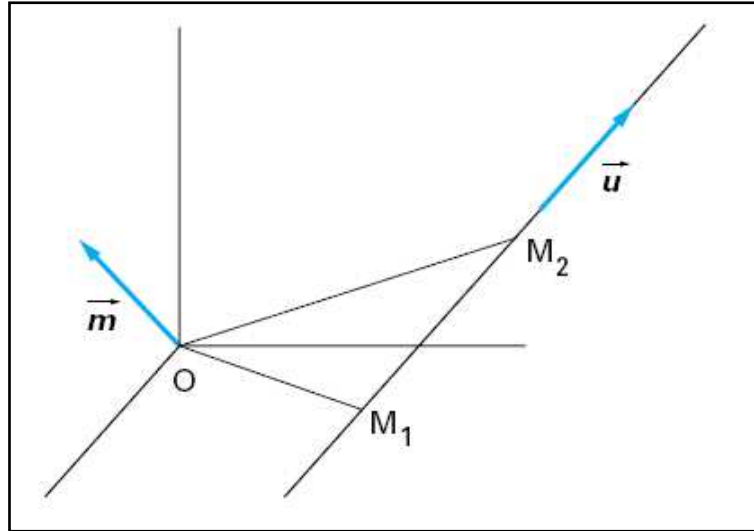
#### 1.3.2.2. Robots avec des boucles simples

On a étudié ce cas pour le modèle géométrique inverse. On peut traiter de tels robots comme les robots série, en considérant la chaîne principale, puis remplacer dans l'expression de  $dX/dt$  les dérivées des variables articulaires passives de la chaîne principale par leurs expressions en fonction des dérivées  $dq_i/dt$  des variables actives. Ces dernières expressions sont obtenues en dérivant les relations géométriques dans les boucles.

Dans la fabrication du mécanisme, on fait en sorte que les boucles n'introduisent pas de singularités propres. Comme dans le cas d'un robot à structure de chaîne, les configurations singulières sont obtenues quand le déterminant de la matrice jacobienne est nul.

#### 1.3.2.3. Robots parallèles

Une première façon d'obtenir le modèle cinématique inverse des robots parallèles consiste à dériver le modèle géométrique inverse.



**Figure 1.10** – Coordonnées de Plücker

Une autre façon élégante fait appel aux coordonnées de Plücker [6]. Tout actionneur  $i$  associé à une variable active  $q_i$  produit une force ou un couple  $g_i$  le long ou autour de l'axe correspondant.

Cet effort, si le mécanisme est supposé sans frottement, contribue au vecteur  $F$  des efforts exercés par le corps terminal sur son environnement. Considérons le modèle différentiel inverse que l'on recherche. Il est de la forme :

$$dQ = GdX \quad (1.26)$$

avec  $G$  l'inverse de la matrice jacobienne du modèle direct. Appliquons le principe des travaux virtuels : pour cela, on considère des déplacements virtuels  $dQ$  et  $dX$  compatibles avec les contraintes du mécanisme et l'on écrit l'égalité des travaux des forces pour ces déplacements :

$$F^T dX = \Gamma^T dQ \quad (1.27)$$

Donc 
$$F^T dX = \Gamma^T GdX \quad (1.28)$$

d'où 
$$F = G^T \Gamma \quad (1.29)$$

Il suffit donc de savoir exprimer la force et le moment résultant au niveau de l'organe terminal en fonction des efforts actifs pour obtenir la matrice  $G$ .

On considère pour cela les coordonnées de Plücker d'une droite (Figure 1.10).

Soit, dans l'espace à trois dimensions, une droite définie par deux de ses points distinct  $M_1$  et  $M_2$ , et  $O$  l'origine d'un repère de référence  $R_0$ . On considère deux vecteurs qui sont des invariants de la ligne :

le vecteur unitaire  $\vec{u}$

son moment par rapport à  $O$  :  $\vec{m} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}$

où  $M$  est un point de la droite.

Les composantes de ces deux vecteurs fondamentaux s'obtiennent à partir des coordonnées de Plücker de la droite. Ces dernières sont les six composantes du vecteur colonne :

$$U = \begin{bmatrix} [\overrightarrow{M_1 M_2}]_{R_0} \\ [\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}]_{R_0} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

On a en effet :

$$V = \frac{U}{\|M_1 M_2\|} = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{m} \end{bmatrix}_{R_0} \quad (1.31)$$

On peut associer un tel vecteur à l'axe de chaque articulation motorisée. On obtient ainsi pour un robot à six axes  $V_1$  à  $V_6$ .

On va montrer que l'on a, dans le cas de moteurs linéaires [6] :  $G^T = [V_1 \dots V_6]$ .

Le système mécanique étant en équilibre statique, on a :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=6} \gamma_i \vec{u}_i = \vec{F} \\ \sum_{i=1}^{i=6} \overrightarrow{OO_i} \wedge \gamma_i \vec{u}_i = \vec{M} \end{cases} \quad (1.32)$$

où  $O$  est le point de référence choisi.

En notations matricielles, les équations (1.32) donnent :

$$[V_1 V_2 \dots V_6] \Gamma = \begin{bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M} \end{bmatrix}_{R_0}$$

Donc, en dehors des singularités, on a :

$$G = J^{-1} = [V_1 V_2 \dots V_6]^T$$

La dérivation des équations du modèle géométrique inverse donne :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial X_M} & \frac{\partial q_1}{\partial Y_M} & \frac{\partial q_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial q_2}{\partial X_M} & \frac{\partial q_2}{\partial Y_M} & \frac{\partial q_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial q_3}{\partial \theta} & \frac{\partial q_3}{\partial Y_M} & \frac{\partial q_3}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_M}{\sqrt{X_M^2 + Y_M^2}} & \frac{Y_M}{\sqrt{X_M^2 + Y_M^2}} & 0 \\ \frac{-L_1 - X_M}{\sqrt{(L_1 - X_M)^2 + Y_M^2}} & \frac{Y_M}{\sqrt{(L_1 - X_M)^2 + Y_M^2}} & 0 \\ \frac{L \cos \theta + X_M - L_1 - L_2}{q_3} & \frac{Y_M + L \sin \theta}{q_3} & \frac{L \sin \theta (L_1 + L_2 - X_M) + L Y_M \cos \theta}{q_3} \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

**Nota:** dans la troisième ligne, on a écrit  $q_3$  au lieu de  $\sqrt{(L_1 + L_2 - X_M - L \cos \theta)^2 + (Y_M + L \sin \theta)^2}$  pour alléger l'écriture.

Si maintenant on considère les coordonnées de Plücker des axes des vérins, en se limitant aux composantes non nulles (deux pour le vecteur unitaire dans le plan de la figure et une pour son moment le long de l'axe perpendiculaire à ce plan) et en choisissant  $M$  comme point de référence, on obtient bien :

$$V_1 = \begin{bmatrix} \frac{X_M}{q_1} \\ \frac{Y_M}{q_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} \frac{X_M - L_1}{q_2} \\ \frac{Y_M}{q_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} \frac{L \cos \theta + X_M - L_1 - L_2}{q_3} \\ \frac{Y_M + L \sin \theta}{q_3} \\ \left[ \begin{matrix} L \cos \theta \\ L \sin \theta \end{matrix} \right] \wedge \begin{bmatrix} \frac{L \cos \theta + X_M - L_1 - L_2}{q_3} \\ \frac{Y_M + L \sin \theta}{q_3} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

#### 1.4. Commande dynamique

Un robot manipulateur est une structure mécanique complexe dont les inerties par rapport aux axes articulaires varient non seulement en fonction de la charge terminale, mais aussi en fonction de la configuration. Les effets de la pesanteur varient également avec cette dernière. Quand les articulations (les « axes ») sont actionnées par l'intermédiaire de forts rapports de réduction, l'inertie vue par les moteurs varie peu. En effet, l'inertie de la charge ramenée au moteur est divisée par le carré du rapport de réduction. Dans ces cas, les asservissements peuvent être assurés axe par axe par des réseaux classiques, PID notamment

(proportionnel, intégral et dérivé). Toutefois, une augmentation des rapports de réduction entraîne une perte de rendement et un surdimensionnement des moteurs.

Pour des motorisations avec de faibles rapports de réduction ou même «à entraînement direct» (direct-drive), les moteurs doivent compenser les variations des forces d'inertie et de gravité fonctions de la configuration, et des commandes non linéaires sont alors intéressantes pour assurer des performances constantes dans toutes les conditions de fonctionnement. Une autre possibilité est d'utiliser un mode de commande robuste, par exemple les systèmes dits «à structure variable», mais les rapidités de réponse correspondantes sont médiocres en général. Une «commande dynamique» est un asservissement non linéaire dont les paramètres utilisent un modèle de la dynamique du robot.

### 1.4.1. Modèles théoriques de la dynamique

Les deux principaux formalismes utilisés pour obtenir les équations différentielles qui décrivent le comportement d'un mécanisme à plusieurs corps articulés sont le formalisme de Newton (théorèmes généraux de la mécanique classique) et celui de Lagrange.

#### 1.4.1.1. Équations de Newton

Soit  $\vec{G}_i$  le vecteur définissant la position du centre d'inertie  $G_i$  du corps  $i$  dans un repère fixe,  $\vec{I}_i$  le tenseur d'inertie central (au centre d'inertie) de ce corps, et  $m_i$  sa masse,  $\vec{\Omega}_i$  le vecteur vitesse angulaire instantanée de ce corps,  $\{(\vec{F}_i)_{ext}, (\vec{M}_i)_{ext}\}$  le torseur résultant (force et moment) en  $G_i$  des forces extérieures à ce corps considéré isolément.

Les équations fondamentales de la dynamique s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{G}}_i) = (\vec{F}_i)_{ext} \\ \frac{d}{dt}(\vec{I}_i \bullet \vec{\Omega}_i) = \vec{I}_i \bullet \dot{\vec{\Omega}}_i + \vec{\Omega}_i \wedge (\vec{I}_i \bullet \vec{\Omega}_i) = (\vec{M}_i)_{ext} \end{cases} \quad (1.35)$$

En l'absence de forces provenant de l'environnement, les forces agissant sur ce corps sont celles au niveau de ses articulations avec les autres corps de la structure mécanique. Au point  $O_i$ , on a la force  $\vec{F}_i$  et le moment  $\vec{m}_i$ .

Pour un manipulateur à structure de chaîne, en introduisant les vecteurs :

$$\begin{cases} \vec{L}_i = \overrightarrow{O_i O_{i+1}} \\ \vec{d}_i = \overrightarrow{O_i G_i} \end{cases}$$

on peut écrire :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_i = \vec{\Omega}_{i+1} + \bar{\sigma}_i \dot{q}_i \vec{Z}_i \\ \vec{O}_i = \vec{O}_{i-1} + \vec{\Omega}_{i+1} \wedge \vec{L}_{i-1} + \sigma_i \dot{q}_i \vec{Z}_i \end{cases} \quad (1.36)$$

d'où, par dérivation :

$$\begin{cases} \dot{\vec{\Omega}}_i = \dot{\vec{\Omega}}_{i+1} + \bar{\sigma}_i (\ddot{q}_i \vec{Z}_i + \dot{q}_i \vec{\Omega}_{i-1} \wedge \vec{Z}_i) \\ \ddot{\vec{O}}_i = \ddot{\vec{O}}_{i-1} + \dot{\vec{\Omega}}_{i+1} \wedge \vec{L}_{i-1} + \vec{\Omega}_{i-1} \wedge (\vec{\Omega}_{i-1} \wedge \vec{L}_{i-1} + \sigma_i \dot{q}_i \vec{Z}_i) + \sigma_i (\ddot{q}_i \vec{Z}_i + \dot{q}_i \vec{\Omega}_{i-1} \wedge \vec{Z}_i) \\ = \ddot{\vec{O}}_{i-1} + \dot{\vec{\Omega}}_{i+1} \wedge \vec{L}_{i-1} + \vec{\Omega}_{i-1} \wedge (\vec{\Omega}_{i-1} \wedge \vec{L}_{i-1}) + \sigma_i (\ddot{q}_i \vec{Z}_i + 2\dot{q}_i \vec{\Omega}_{i-1} \wedge \vec{Z}_i) \end{cases} \quad (1.37)$$

Avec  $\sigma_i = 0$  si l'articulation  $i$  est rotoïde,  
 $\sigma_i = 1$  si l'articulation  $i$  est prismatique,  
 $\bar{\sigma}_i = 1 - \sigma_i$

Les équations (1.37) s'appellent « récurrences avant », car pour la chaîne on part de la base pour aller vers l'extrémité.

On en déduit les accélérations des centres d'inertie :

$$\ddot{\vec{G}}_i = \ddot{\vec{O}}_{i-1} + \dot{\vec{\Omega}}_{i+1} \wedge \vec{d}_i + \vec{\Omega}_i \wedge (\vec{\Omega}_i \wedge \vec{d}_i) \quad (1.38)$$

d'où le vecteur résultant des forces extérieures en ce point en utilisant la première équation de Newton (1.35) équation a.

Le moment résultant s'obtient à partir de la seconde équation de Newton (1.35) équation b, connaissant les vitesses angulaires (1.36) et leurs dérivées (1.37)

On en déduit les efforts aux articulations par des récurrences « arrière » (en partant de l'extrémité pour revenir vers la base) :

$$\begin{cases} \vec{f}_i = (\vec{F}_i)_{ext} + \vec{f}_{i+1} \\ \vec{m}_i = (\vec{M}_i)_{ext} + \vec{m}_{i+1} + \vec{L}_{i+1} \wedge \vec{f}_{i+1} + \vec{d}_i \wedge (\vec{F}_i)_{ext} \end{cases} \quad (1.39)$$

Ces équations peuvent être étendues sans trop de difficultés aux structures arborescentes, il suffit de considérer tous les « successeurs » de chaque corps  $i$  (multiplication des points tels que  $O_{i+1}$  et des efforts transmis aux articulations). Pour les structures présentant des boucles et pour les robots parallèles, il suffit d'ouvrir fictivement les boucles, les équations s'appliquent puisque chaque corps est considéré comme isolé et qu'il y a autant d'inconnues que d'équations (pour une topologie correcte et hors singularités).

Dans cette formulation des équations de la dynamique, l'effet de la pesanteur est introduit par une accélération verticale de la base du robot. Si le robot manipulateur est situé sur un véhicule dont le mouvement est connu, on peut donc également introduire les fonctions

du temps correspondantes (vitesses et accélérations) dans les premières récurrences directes qui partent de la base.

### 1.4.1.2. Équations de Lagrange

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir directement les relations entre les efforts moteurs aux articulations et les mouvements. Par rapport aux équations de Newton, on perd au passage les informations sur les efforts de réaction aux articulations qui sont utiles au dimensionnement des parties mécaniques, mais n'interviennent pas dans un modèle utile à la commande automatique puisque les corps sont supposés indéformables.

Il s'agit de  $N$  équations différentielles non linéaires du second ordre obtenues à partir de :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \gamma_i \text{ avec } i = 1, \dots, N \quad (1.40)$$

avec  $L = E_c - E_p$  fonction de Lagrange, différence entre l'énergie cinétique  $E_c$  et l'énergie potentielle  $E_p$  du mécanisme,

$\gamma_i$  « force généralisée » correspondant à la variable articulaire  $q_i$ . Elle inclut toutes les forces non conservatives, c'est-à-dire non seulement la force motrice ou le couple moteur selon le cas, mais aussi les forces ou couples de frottement.

Pour tous les systèmes mécaniques, l'énergie cinétique est une forme quadratique des vitesses:

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{Q}^T A(Q) \dot{Q} \quad (1.41)$$

où  $A(Q)$  est une matrice symétrique définie positive dépendant des masses et des inerties de chaque corps du mécanisme, et de la configuration  $Q$ . En effet :

$$E_c = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{G}}_i \bullet \dot{\vec{G}}_i) + \frac{1}{2} \bar{\Omega}_i \bullet (\bar{I}_i \bullet \bar{\Omega}_i) \quad (1.42)$$

et on a vu que les vitesses de translation et de rotation de chaque corps sont des fonctions linéaires des vitesses articulaires.

D'autre part, l'énergie potentielle est fonction de la configuration du mécanisme (potentiel de gravité, énergie dans des ressorts compensateurs) :

$$E_p = E_p(Q) \quad (1.43)$$

Il en résulte que les équations de Lagrange peuvent s'écrire :

$$A(Q)\ddot{Q} + B(Q, \dot{Q}) + C(Q) = \Gamma \quad (1.44)$$

où le premier vecteur représente les forces ou couples d'inertie sur les articulations motorisées, le deuxième (du second degré par rapport aux vitesses) correspond aux effets centrifuges et de Coriolis, le troisième traduit les efforts dus à la pesanteur et aux ressorts.

### 1.4.2.1 Commande dynamique

La matrice  $A(Q)$  n'est généralement pas diagonale (il y a des couplages inertiels entre corps) et dépend fortement de la configuration  $Q$ . De plus, aux grandes vitesses, les forces centrifuges et de Coriolis [vecteur  $B(Q)$ ] peuvent être importantes. Pour ces raisons, l'utilisation d'asservissements linéaires classiques contrôlant séparément chaque axe conduit à des performances de rapidité et de précision inconstantes et difficiles à estimer étant donné le caractère fortement non linéaire du processus commandé. Cet inconvénient peut être notablement réduit par des schémas de commande automatique utilisant le modèle dynamique du mécanisme.

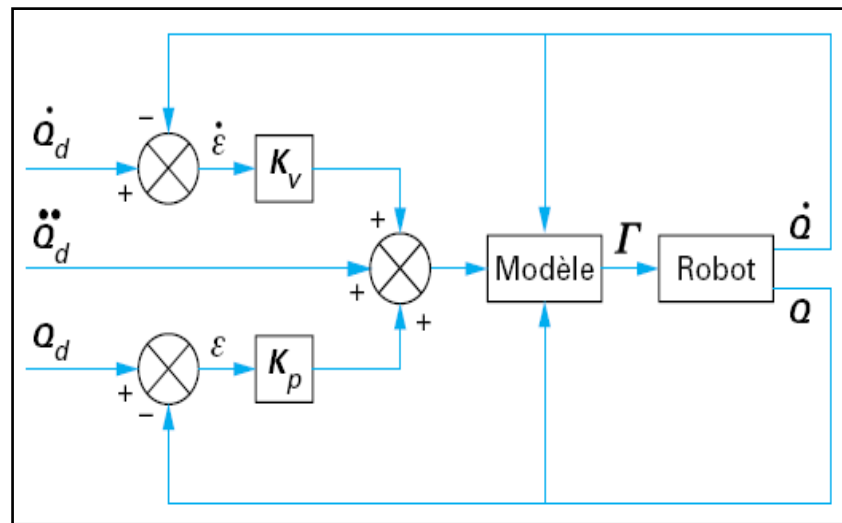


Figure 1.11– Commande dynamique théorique

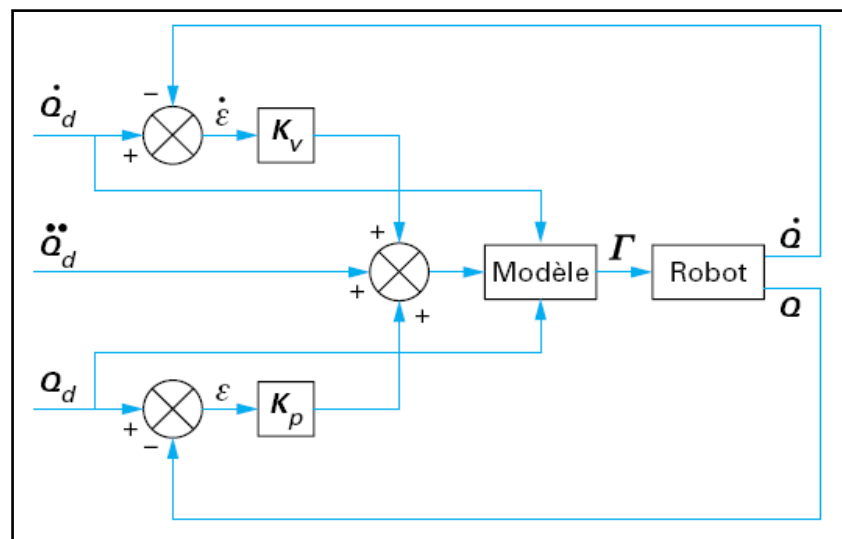


Figure 1.12– Commande dynamique calculée à partir de la consigne



### 1.4.2.1. Commande théorique

méthode des couples calculés Ce schéma de commande, représenté sur la figure 11, utilise une loi non linéaire pour découpler et linéariser les équations différentielles qui décrivent les mouvements articulaires. Les couples et forces de commande sont calculés à partir du modèle dynamique :

$$\Gamma = A_m(Q)[K_p(Q_d - Q) + K_v(\dot{Q}_d - \dot{Q}) + \ddot{Q}_d] + B_m(Q, \dot{Q}) + C_m(Q) \quad (1.45)$$

avec  $Q_d = Q_d(t)$  évolution du vecteur de consigne (valeurs désirées) des asservissements articulaires,  $m$  indice indiquant que  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont estimés (modèles).

Pour un modèle parfait, l'évolution du vecteur des erreurs articulaires  $\varepsilon = (Q_d - Q)$  est régie par l'équation :

$$\ddot{\varepsilon} + K_v \dot{\varepsilon} + K_p \varepsilon = 0 \quad (1.46)$$

En choisissant alors les matrices  $K_p$  et  $K_v$  diagonales, les erreurs articulaires sont découplées et chacune se comporte comme un système du second ordre dont on peut fixer la rapidité de réponse (choix de  $K_p$ ) et l'amortissement (choix de  $K_v$ , étant donné  $K_p$ ).

### 1.4.2.2. Commande avec prédicteur

Si le modèle est très imparfait et si les erreurs initiales sont importantes, le comportement non linéaire des erreurs (vecteur  $e$ ) correspondant à la méthode précédente est difficilement prévisible. Bien que l'on puisse théoriquement assurer la stabilité, on risque d'avoir des dépassements non souhaités, susceptibles de provoquer des collisions entre le robot et son environnement. Pour éviter cela, au lieu d'utiliser le modèle dynamique calculé à partir de l'état mesuré du robot (positions et vitesses articulaires), on utilise celui calculé à partir de l'état désiré. On évite ainsi un rébouclage non linéaire. Les efforts au niveau des articulations sont alors calculés par :

$$\Gamma = A_m(Q_d)[K_p(Q_d - Q) + K_v(\dot{Q}_d - \dot{Q}) + \ddot{Q}_d] + B_m(Q_d, \dot{Q}) + C_m(Q_d) \quad (1.47)$$

qui correspond au schéma de la figure 19. Pour un modèle parfait et des erreurs initiales petites, on retrouve la réponse de la commande théorique. En outre, quand les mouvements désirés sont connus à l'avance, les termes correcteurs peuvent être précalculés hors ligne.

## 1.5. Conclusion

Dans ce chapitre on a donné quelque notion sur les bras manipulateurs et leurs structures ainsi la classification des ces bras selon les types de porteur et les types d'articulation et leur Changements de coordonnées (Direct et Inverse) utilisées et ainsi que quelque lois des commandes employées dans le domaine de la robotique.

La commande par le contrôle floue et neuro-floue d'un bras manipulateurs sera l'objet des chapitres suivants.