

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département Génie mécanique  
Ref :.....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: الهندسة الميكانيكية  
المرجع:.....

Thèse présentée en vue de l'obtention  
Du diplôme de  
**Doctorat en : Génie mécanique**

**Spécialité (Option) : Matériaux et Structures**

---

**Etude numérique par éléments finis de l'effet de la  
température sur la vibration et la stabilité des plaques  
stratifiées**

---

Présentée par :  
**Houdayfa OUNIS**

Soutenue publiquement le 18/11/2015

**Devant le jury composé de :**

Dr. HECINI Mabrouk  
Dr. TATI Abdelouahab  
Dr. BELOUNAR Lamine  
Dr. HAMMADI Fodhil  
Dr. AZOUAOUI Krime

Professeur  
Professeur  
Professeur  
Professeur  
Professeur

Président  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

Université de Biskra  
Université de Biskra  
Université de Biskra  
Université de Béchar  
USTHB-Alger

A mes parents

A mon frère et mes sœurs

A Yasmina

Et a tous mes amis

## **Remerciement**

Nous remercions ALLAH LE TOUT PUISSANT de nous avoir aidé et éclairé dans notre travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au professeur Abdelouahab TATI, mon directeur de thèse, en premier lieu pour avoir cru en moi et d'avoir été plus qu'un directeur, mais un second père.

Je remercie chaleureusement l'ensemble des membres de jurys. Sincère remerciement au Professeur Mabrouk HECINI pour avoir été mon enseignant et d'avoir accepté de présider le jury. Je suis extrêmement reconnaissant envers messieurs les Professeurs Lamine BELOUNAR, Fodhil HAMMADI et Krimo AZOUAOUI, pour avoir accepté d'être rapporteur de ce manuscrit

Je tiens à remercier Monsieur Adel BENCHABANE, Professeur à l'université de Biskra, pour son soutien scientifique et moral durant tout mon parcours universitaire.

Je remercie également l'ensemble des professeurs du département de génie mécanique de l'université de Biskra et ceux des laboratoires LGEM et LGM, en particulier messieurs Kamal AOUAS et Adnane LABED.

Je tiens à remercier monsieur le Docteur Mohamed Ouejdi BELARBI, mon collègue mon ami et mon frère.

Je tiens aussi à exprimer mon extrême reconnaissance à monsieur Salah Eddine MIHI, d'avoir été l'étincelle dans l'ombre

En fin, nous remercions toutes les personnes qui nous ont aidés ne serait-ce qu'avec un mot d'encouragement.

## ملخص

إن استعمال المواد المركبة يتفوق يوماً بعد يوم على المواد التقليدية وذلك في جميع القطاعات الصناعية تقريباً. في كثير من الأحيان، تكون الهياكل المصنوعة من المواد المركبة عرضة للأحمال حرارية خطيرة التي قد تؤثر تأثيراً كبيراً على سلوكها. إن الهدف من هذا العمل هو دراسة أثر الحرارة على الاهتزازات واستقرار الصفائح ذات الطبقات المصنوعة من المواد المركبة باستعمال طريقة العناصر المنتهية .

كرس الجزء الأول من هذا العمل لدراسة الانبعاج الحراري للصفائح الرقيقة ذات الطبقات، ومن أجل ذلك تم تعديل عنصر منتهي يحتوي على أربعة عقد واثنان وثلاثون درجة حرية، وقد تمت صياغته اعتماداً على النظرية الكلاسيكية للصفائح ذات الطبقات. بينت مقارنة النتائج المتحصل عليها مع النتائج المتاحة في المراجع دقة وسرعة تقارب العنصر المنتهي المستعمل .

تم في هذا الجزء تقديم دراسة لإظهار أثر بعض الخصائص على سلوك الانبعاج الحراري لصفائح ذات طبقات. وتم الأخذ بعين الاعتبار في هذه الدراسة نوع المادة ، الشروط الحدودية ، التقسيم الطبقي ، زاوية التوجيه ، أبعاد الصفائح ، عدد الطبقات ، نسبة تباين الخصائص الميكانيكية واثرتقوب .بالتالي تم استنتاج أن درجة الحرارة الحرجة يمكنها أن تتأثر بشكل كبير من قبل الخصائص المعتبرة .

خصص الجزء الثاني من هذا العمل لدراسة أثر الحرارة على اهتزازات الصفائح ذات طبقات، حيث أخذ بعين الاعتبار أثران للحرارة ألا وهما : أثر الحرارة على الخصائص الميكانيكية و أثر الاجهادات الحرارية، من أجل ذلك تم استعمال وتعديل عنصر منتهي لأخذ بعين الاعتبار أثر الحرارة ، هذا العنصر المنتهي تم إنشائه اعتماداً على نموذج DDM .

بعد التأكد من دقة العنصر المنتهي، تم تقديم دراسة حول أثر الحرارة على الترددات الطبيعية للاهتزاز الصفائح ذات الطبقات. بينت الدراسة أن الترددات الطبيعية للاهتزاز تتناقص بتزايد درجة الحرارة ، زيادة على ذلك إذا كانت درجة الحرارة المطبقة على الصفيحة تتوافق مع درجة الحرارة الحرجة للانبعاج، فإن الترددات الطبيعية للاهتزاز تتحول إلى الصفر .

**الكلمات المفتاحية:** المواد المركبة، الصفائح ذات الطبقات، أثر الحرارة، الانبعاج الحراري، الاهتزازات، العناصر المحدودة

## Résumé

De jour en jour, l'utilisation des matériaux composites prend de l'ampleur vis-à-vis des matériaux traditionnels, dans pratiquement tous les secteurs industriels. Souvent, les structures en matériaux composites sont sujettes à de sérieux chargements thermiques qui peuvent affecter significativement le comportement de ce type de structures. L'objectif de ce travail est d'étudier l'effet de la température sur les vibrations et la stabilité des plaques composites stratifiées en utilisant la méthode des éléments finis.

La première partie de ce travail est consacrée à l'étude du flambement thermique des plaques composites stratifiées minces. Un élément fini qui a été, précédemment, développé pour la flexion et le flambement mécanique est étendu vers l'étude du flambement thermique des plaques minces. Basé sur la théorie classique des stratifiées, l'élément contient quatre nœuds avec trente-deux degrés de liberté. La validation de l'élément a montré que ce dernier présente une bonne précision et rapidité de convergence. De plus, dans cette partie, une vaste étude paramétrique sur le flambement thermique de plaques stratifiées est présentée. Dans cette étude, plusieurs paramètres ont été pris en considération, tel que, le type du matériau, les conditions aux limites, la stratification, le rapport d'aspect, le rapport d'anisotropie et la présence d'ouverture. Il a été conclu que la température critique de flambement peut être significativement affectée par les paramètres considérés.

La deuxième partie de ce travail est destinée à l'étude de l'effet de la température sur les vibrations des plaques composites stratifiées. Deux effets sont considérés simultanément, à savoir: L'effet de la dépendance des propriétés matérielles à la température et l'effet des contraintes thermiques. A cet effet, un élément fini basé sur le modèle DDM (*Displacement Discret Mindlin*) a été utilisé et modifié pour prendre en compte les effets de la température. Après validation de la précision de l'élément, une étude sur les effets de la température sur les fréquences propres de vibration des plaques composites stratifiées est présentée. L'étude a montré que, dans la plupart des cas, les fréquences propres de vibration diminuent avec l'augmentation de la température. D'autre part, si la température infligée à la plaque coïncide avec la température critique de flambement, les fréquences propres tendent vers zéro.

**Mots-clefs:** matériaux composite, plaques stratifiées, effet de la température, flambement thermique, vibration, méthode des éléments finis

## **Abstract**

The use of composites materials is growing up compared to the traditional materials, in basically all the industrial domains. Those structures are often facing serious thermal loads that may significantly affect their behaviour. The objective of this work is to study the effect of temperature on the vibrations and the stability of laminated composite plates using the finite element method.

The first part of this work is devoted to the study of the thermal buckling of thin laminated composite plates. A finite element previously developed for the bending and mechanical buckling, is extended to investigate the thermal buckling behaviour of thin laminated composite plates. Based upon the classical plate theory, the present finite element has four nodes with thirty-two degrees of freedom. The validation of the present finite element showed that the proposed element offers a good precision and convergence speed. Also in this section, an extensive parametric study on thermal buckling of laminated plates is presented. In this study, several parameters were taken into account, such as, material type, boundary conditions, stratification, aspect ratio, anisotropy ratio and the presence of cut-outs. It was concluded that the critical buckling temperature can be significantly affected by the considered parameters.

The second part of this work is intended to study the effect of temperature on the vibration of laminated composites plates. Two effects are considered simultaneously, namely: The effect of the temperature-dependent-properties and the effect of thermal stresses. For this purpose, a finite element based on the DDM model (Discrete Mindlin Displacement) was used and modified to take into account the effects of temperature. After validating the accuracy of the element, a study on the effects of temperature on the vibration frequencies of laminated composites plates is presented. The study showed that in most cases the natural frequencies of vibration decreases with the increasing in temperature. On the other hand, if the temperature imposed to the plate coincides with the critical temperature of buckling, the natural frequencies tend to zero.

**Keywords:** composite materials, laminated plates, temperature effect, thermal buckling, vibration, finite element method.

## Table des Matières

<b>Remerciement</b> .....	<b>I</b>
<b>ملخص</b> .....	<b>II</b>
<b>Résumé</b> .....	<b>III</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>IV</b>
<b>Liste des Figures</b> .....	<b>VIII</b>
<b>Liste des tableaux</b> .....	<b>XII</b>
<b>Introduction générale</b> .....	<b>1</b>

### Première partie : Flambement thermique des plaques composites stratifiées minces

<b>P1.I. Introduction</b> .....	<b>7</b>
P1.I.1. Origines du flambement thermique.....	7
P1.I.2. Flambement thermique des plaques composites: synthèse bibliographique.....	7
<b>P1.II. Objectifs de la première partie:</b> .....	<b>13</b>

#### Chapitre 1: Formulation élément fini

<b>1.1. Introduction</b> .....	<b>15</b>
<b>1.2. L'élément membranaire</b> .....	<b>15</b>
1.2.1. Approximation géométrique .....	15
1.2.2. Champ des déplacements .....	15
<b>1.3. L'élément plaque:</b> .....	<b>16</b>
1.3.1. Fonctions d'interpolations de l'élément de référence .....	16
1.3.2. Fonctions d'interpolations de l'élément réel .....	17
<b>1.4. Construction de l'élément combiné</b> .....	<b>19</b>
1.4.1. Relations cinématiques .....	19
1.4.2. Loi de comportement .....	20
1.4.3. Energie potentielle de déformation et travail des forces appliquées.....	22

**1.5. Conclusion..... 25**

**Chapitre 2: Validation et Etude paramétrique**

**2.1. Introduction ..... 27**

**2.2. Validation de l'élément fini ..... 28**

2.2.1. Plaques isotropes..... 28

2.2.2. Plaques stratifiées..... 30

**2.3. Etude paramétrique ..... 33**

2.3.1. Effet du rapport d'aspect a/b ..... 33

2.3.2. Effet du nombre de couches..... 44

2.3.3. L'effet de l'anisotropie..... 46

**2.4. Conclusion..... 54**

**Chapitre 3: Plaques composites stratifiées avec ouverture**

**3.1. Introduction ..... 57**

**3.2. Résultats et discussions ..... 58**

**3.3. Conclusion..... 71**

**Deuxième partie : Effets de la température sur les vibrations des plaques  
composites stratifiées**

**P2.I. Introduction ..... 73**

**P2.II. Synthèse bibliographique ..... 73**

P2.II.1. Vibration et effet de la température sur les propriétés matérielles..... 73

P2.II.2. Vibration et contraintes thermiques ..... 74

**P2.III. Objectifs de la deuxième partie..... 76**

**Chapitre 4: Formulation élément fini**

**4.1. Introduction ..... 79**

**4.2. Formulation de l'élément fini DMQP/ml ..... 80**

4.2.1. Champ de déplacement: ..... 80

4.2.2.	Champ de déformations .....	82
4.2.3.	Elimination des variables $\Delta\beta_{sk}$ .....	85
4.2.4.	Lois de comportement .....	92
4.2.5.	Energie potentielle de déformation et travail des forces appliquées.....	95
4.2.6.	Matrice de rigidité élémentaire et vecteur forces.....	96
4.2.7.	Matrice de masse élémentaire.....	97
<b>4.3.</b>	<b>Procédure de solution .....</b>	<b>98</b>
<b>4.4.</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>99</b>
<b>Chapitre 5: Validation et Etude paramétrique</b>		
<b>5.1.</b>	<b>Introduction.....</b>	<b>101</b>
<b>5.2.</b>	<b>Validation.....</b>	<b>101</b>
5.2.1.	Vibrations libres de Plaques isotropes .....	101
5.2.2.	Vibrations libres de plaques composites stratifiées .....	103
5.2.3.	Vibrations libres de plaques composites soumis à un changement de température.....	105
5.2.4.	Convergence de la température critique de flambement.....	108
<b>5.3.</b>	<b>Etude paramétrique .....</b>	<b>110</b>
5.3.1.	Effets de la température sur les fréquences propres de plaques composite stratifiées .....	110
5.3.2.	Effet du rapport d'aspect et de la température sur la vibration de plaques composite stratifiées .....	115
5.3.3.	Effets de la température sur les fréquences propres de vibration de plaques stratifiées en T300/5208 .....	118
<b>5.4.</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>124</b>
<b>Conclusion générale .....</b>		<b>125</b>
<b>Références Bibliographiques.....</b>		<b>131</b>

## Liste des Figures

Figure 1. 1: Élément membranaire .....	16
Figure 2. 1: Dimensions de la plaque .....	28
Figure 2. 2: Effet du rapport d'aspect $a/b$ sur la température critique d'une plaque stratifiée croisée simplement appuyée.....	34
Figure 2. 3: Effet du rapport d'aspect $a/b$ sur la température critique d'une plaque stratifiée croisée encastree.....	35
Figure 2. 4: Effet du rapport d'aspect $a/b$ sur la température critique d'une plaque stratifiée croisée encastree-simplement appuyée. ....	36
Figure 2. 5: Effet du rapport d'aspect $a/b$ sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée T300/5208 simplement appuyée. ....	37
Figure 2. 6: Effet du rapport d'aspect $a/b$ sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée E-glass/Epoxy simplement appuyée.....	38
Figure 2. 7: Effet du rapport d'aspect $a/b$ sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée AS/3501-6 simplement appuyée. ....	39
Figure 2. 8: Effet du rapport d'aspect $a/b$ sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée T300/5208 encastree. ....	40
Figure 2. 9: Effet du rapport d'aspect $a/b$ sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée E-glass/Epoxy encastree.....	40
Figure 2. 10: Effet du rapport d'aspect $a/b$ sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée AS4/3501-6 encastree. ....	41
Figure 2. 11: Effet du rapport d'aspect $a/b$ sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée T300/5208 encastree-simplement appuyée. ....	42

Figure 2. 12: Effet du rapport d'aspect $a/b$ sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée E-glass/Epoxy encastrée-simplement appuyée. ....	43
Figure 2. 13: Effet du rapport d'aspect $a/b$ sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée AS4/3501-6 encastrée-simplement appuyée. ....	43
Figure 2. 14: L'effet du nombre de couches sur les températures critiques de flambement de plaques stratifiées équilibrées simplement appuyée (SS). ....	45
Figure 2. 15: L'effet du nombre de couches sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée encastrée (CC). ....	45
Figure 2. 16: L'effet du nombre de couches sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée encastrée-simplement appuyée (CS). ....	46
Figure 2. 17: L'effet du rapport $E_L/E_T$ sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée encastrée (CC). ....	48
Figure 2. 18: L'effet du rapport $E_L/E_T$ sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée simplement appuyée (SS). ....	48
Figure 2. 19: L'effet du rapport $E_L/E_T$ sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée encastrée-simplement appuyée (CS). ....	49
Figure 2. 20: L'effet du rapport $E_L/E_T$ sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée encastrée-libre (CF). ....	50
Figure 2. 21: L'effet du rapport $E_L/E_T$ sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée simplement appuyée-libre (SF). ....	50
Figure 2. 22: L'effet du rapport $\alpha T \alpha L$ sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée encastrée (CC) et simplement appuyée (SS). ....	52
Figure 2. 24: L'effet du rapport $\alpha T \alpha L$ sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée encastrée-libre (CF). ....	53

Figure 2. 25: L'effet du rapport sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée simplement appuyée-libre (SF).....	54
Figure 3. 1: Géométrie de la plaque avec ouverture .....	59
Figure 3. 2: Effet de la taille d'ouverture et des conditions aux limites sur la température critique de flambement d'une plaque isotrope.....	60
Figure 3. 3: Effet de la taille de l'ouverture et des conditions aux limites sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée croisée pour le T300/5208 et le AS4/3501-6 .....	63
Figure 3. 4: Effet de la taille de l'ouverture et des conditions aux limites sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée croisée pour le E-glass/Epoxy.....	64
Figure 3. 5: Effet de la taille de l'ouverture sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée encastrée pour le cas du T300/5208 .....	67
Figure 3. 6: Effet de la taille de l'ouverture sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée encastrée pour le cas du E-glass/Epoxy.....	67
Figure 3. 7: Effet de la taille de l'ouverture sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée simplement appuyée pour le cas du T300/5208 .....	68
Figure 3. 8: Effet de la taille de l'ouverture sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée simplement appuyée pour le cas du E-glass/Epoxy.....	69
Figure 3. 9: Effet de la taille de l'ouverture sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée encastrée-simplement appuyée pour le cas du T300/5208 .....	70
Figure 3. 10: Effet de la taille de l'ouverture sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée encastrée-simplement appuyée pour le cas du E-glass/Epoxy ...	70
Figure 4. 1: Cosinus directeurs sur un bord élémentaire k .....	81
Figure 4. 2: Variations des rotations.....	82

Figure 4. 3: Déformation de CT de bords .....	85
Figure 4. 4: Hypothèses de Mindlin sur un bord élémentaire $i-j$ .....	87
Figure 5. 1: Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées équilibrées simplement appuyées (SS).....	113
Figure 5. 2: Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées équilibrées encadrées (CC).....	114
Figure 5. 3: Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées équilibrées encadrées-simplement appuyées (CS) .....	114
Figure 5. 4: Effets du rapport d'aspect (a/b) et de la température sur les fréquences propres de vibration de plaques simplement appuyées (SS).....	117
Figure 5. 5: Effets du rapport d'aspect (a/b) et de la température sur les fréquences propres de vibration de plaques encadrées (CC) .....	117
Figure 5. 6 Effets du rapport d'aspect (a/b) et de la température sur les fréquences propres de vibration de plaques encadrées-simplement appuyées. ....	118
Figure 5. 7: Propriétés élastiques et coefficient de dilatation thermique du T300/5208 en fonction de la température . a) Module d'élasticité longitudinal ( $E_1$ ). b) Module d'élasticité transversal ( $E_2$ ). c) Module de cisaillement ( $G_{12}$ ). d) coefficient de dilatation longitudinal ( $\alpha_1$ ) .....	120
Figure 5. 8: Effet de la température et l'angle d'orientation sur les fréquences propres de vibration d'une plaque stratifiées en T300/5208 simplement appuyée (SS). ....	122
Figure 5. 9: Effet de la température et l'angle d'orientation sur les fréquences propres de vibration d'une plaque stratifiées en T300/5208 encadrée (CC).....	123
Figure 5. 10: Effet de la température et l'angle d'orientation sur les fréquences propres de vibration d'une plaque stratifiées en T300/5208 encadrée-simplement appuyée (CS).....	123

**Liste des tableaux**

Tableau 2. 1: Conditions aux limites partie flambement thermique. .... 27

Tableau 2. 2: Convergence de la température critique de flambement d'une plaque carrée isotrope ..... 29

Tableau 2. 3: Température critique d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée et encastrée. .... 30

Tableau 2. 4: Propriétés géométriques et mécaniques. .... 30

Tableau 2. 5: Température critique de flambement de plaques composites stratifiées simplement appuyées ..... 31

Tableau 2. 6: Propriétés du T300/5208 et le AS4/3501-6 ..... 31

Tableau 2. 7: Flambement thermique des plaques rectangulaires stratifiées équilibrées ( $a/b=2$ ,  $b/h=150$ )..... 32

Tableau 2. 8: Température critique d'une plaque composite stratifiée équilibrée..... 33

Tableau 2. 9: Propriétés du T300/5208, le AS4/3501-6 et E-glass/Epoxy ..... 33

Tableau 2. 10: Modes de flambement d'une plaque stratifiée AS/3501-6 pour différents rapoprts d'aspect ..... 35

Tableau 4. 1: Fonctions d'interpolations linéaires et quadratiques..... 81

Tableau 4. 2: Valeurs des  $i$  et  $j$  pour un bord  $k$  ..... 89

Tableau 5. 1: Conditions aux limites..... 101

Tableau 5. 2: Convergence de la fréquence propre  $\bar{\omega}$  de plaques isotropes avec  $a/h=10$ ... 102

Tableau 5. 3: Convergence de la fréquence propre  $\bar{\omega}$  d'une plaque isotrope avec  $a/h=100$  ..... 103

Tableau 5. 4: Convergence des fréquences propres d'une plaque ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) encastree .....	104
Tableau 5. 5: Convergence des fréquences propres d'une plaque ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) simplement appuyée.....	105
Tableau 5. 6: Effet de la température et du rapport d'épaisseur sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) simplement appuyée.....	106
Tableau 5. 7: Effet de la température et le rapport des coefficients de dilatation thermique sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée .....	107
Tableau 5. 8: Convergence de la température critique de flambement de plaques simplement appuyées .....	109
Tableau 5. 9: Température critique de flambement pour une plaque stratifiée simplement appuyée avec/sans dépendance a la température.....	110
Tableau 5. 10: Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées .	113
Tableau 5. 11: Effets du rapport d'aspect (a/b) et de la température sur les modes de vibration de plaques encastrees [ $0_2/90_2$ ] <sub>s</sub> .....	118
Tableau 5. 12: Coefficients de dépendance a la température pour chaque propriétés .....	119
Tableau 5. 13: Coefficients de dépendance à la température pour chaque propriétés en Celsius .....	121

# **Introduction générale**

## Introduction

Le choix du matériau est l'un des aspects le plus fondamental dans l'ingénierie de conception des structures. L'ingénieur doit constamment faire face à la difficulté du choix du matériau qui répond aux exigences de sa structure. En effet, la sélection d'un matériau adéquat ne réside pas, seulement, dans les propriétés mécaniques de ce dernier, tel que sa résistance, sa rigidité et sa ductilité, mais aussi en considérant ses propriétés physico-chimique, esthétique ainsi que l'aspect économique [1]. L'une des avancées technologiques la plus prometteuse, de nos jours, dans le domaine des matériaux sont les "*matériaux composites*".

Par définition, Selon la norme ASTM D3878 [2], les composites sont des matériaux structuraux qui se composent de deux ou plusieurs constituants non miscibles combinés au niveau macroscopique. Le but de ce mélange est d'avoir un matériau dont les performances sont meilleures que celles de ces composants pris séparément. L'un des constituants est appelé "*phase de renfort*" et celui qui l'enveloppe est appelé "*matrice*". La phase de renfort fournit la majorité de la résistance et de la rigidité du composite, elle peut être en forme de fibres, de particules ou d'écaïlle. La matrice représente, en général, la matière de liaison, qui soutient et protège la phase de renfort [3,4].

Si on médite bien la définition présentée, ci-dessus, on trouve dans la nature bien des exemples qui se conforment à cette définition; tel que les arbres et leurs feuilles, les plantes, les ailes d'oiseaux, même le corps humain présente un système composite fibreux des plus complexe; un système musculo-squelettique, d'os de muscles et de tendons [5]. Plus encore, le concept même du composite ne date pas d'aujourd'hui pour l'homme; nos ancêtres utilisaient des briques de boue renforcées par des pailles pour la construction. Cependant, on pourrait dire que l'ère moderne des matériaux composites a commencé avec les polymères renforcés par des fibres de verres au temps de la deuxième guerre mondiale [3].

De nos jours, la technologie des composites est devenue tendance, elle a vu une expansion extraordinaire du fait des avantages remarquables qu'offrent ces matériaux, tel que: haute résistance, rigidité élevée, une longue résistance à la fatigue, faible densité, stabilité thermique et une grande adaptabilité aux fonctions que requière une structure [6,7]. Par conséquent, leur utilisation prend, de jour en jour, de l'ampleur vis-à-vis des matériaux

traditionnels, dans pratiquement tous les domaines industriels, en l'occurrence: l'aéronautique, l'aérospatial, les constructions automobiles et navales, génie civil, etc. A titre d'exemple dans le domaine aéronautique, le modèle d'AIRBUS A350 XWB présente une structure avec plus de 50 % en matériaux composites [8] .

Du fait de cette intense utilisation dans les divers domaines industriels, les structures en matériaux composites travaillent souvent dans des conditions environnementales très difficiles, tel que les hautes températures, qui peuvent influencer de manière significative le comportement de ces structures. D'après Singer et al. [9], l'un des principaux effets de la haute température sur une structure, peuvent être classifiés comme suit:

- Détérioration des propriétés mécaniques des matériaux.
- Des contraintes thermiques dues au gradient de températures, qui peuvent causer le flambement thermique.
- Modification de la rigidité et des propriétés de vibration des éléments de la structure en raison de la présence de contraintes thermiques.

Au fil des dernières décennies, la littérature a donné naissance à de nombreuses théories, ayant pour seul but de répondre aux exigences liées à la modélisation du comportement si complexe des structures composites multicouches. En effet, l'étude et l'analyse de ces dernières sont rendues difficile par leurs comportements, en général, anisotrope et l'interaction compliquée de leurs constituants [10]. De ce fait, une modélisation précise de ces structures nécessite la sélection de modèle cinématique et constitutive adéquat [11]. D'autre part, le développement des théories ne suffit pas à lui tout seul, il est nécessaire d'avoir en main des outils numériques puissants permettant de mener à bien l'étude du comportement des structures en matériaux composites. L'un des outils les plus répandu de nos jours est la "*méthode des éléments finis*", en effet, cette dernière est devenue l'outil numérique indispensable pour l'analyse des structures en matériaux composites grâce à son caractère universel [12].

Le présent travail est une contribution à l'étude des effets de la température sur les vibrations et la stabilité des plaques composites stratifiées en utilisant la méthode des éléments finis. La première partie de ce travail consiste à étudier le phénomène du flambement thermique des plaques composites stratifiées minces en utilisant un élément fini

basé sur la théorie classique des stratifiées. Ce dernier a été précédemment développé pour l'étude de la flexion et le flambement mécanique [13]. Par ailleurs, une vaste étude paramétrique est présentée dans cette partie qui porte sur l'effet des paramètres influençant la température critique de flambement des plaques stratifiées.

La deuxième partie de notre travail est consacrée à l'étude des effets de la température sur les vibrations des plaques stratifiées. Dans cette partie, l'effet de la dépendance des propriétés matérielles à la température ainsi que l'effet de la génération des contraintes thermiques sur les fréquences propres des plaques stratifiées sont étudiés simultanément. Pour ce faire, un élément fini de flexion basé sur la théorie de cisaillement du premier ordre est étendu pour prendre en compte les effets de la température discutés antérieurement.

Comme on peut le constater la thèse est divisée en deux grandes parties:

- Première partie : flambement thermique des plaques composites stratifiées

Cette partie commence par une synthèse bibliographique sur le phénomène du flambement thermique et les modèles éléments finis utilisés dans la littérature.

Ensuite, on entame avec le premier chapitre qui est consacré à l'exposition de la formulation de l'élément fini ainsi que son extension vers l'étude du flambement thermique des plaques stratifiées minces.

Le deuxième chapitre est destiné à la validation des performances de l'élément dans l'étude du flambement thermique des plaques composites stratifiées. Les résultats trouvés avec l'élément, dans une série de cas test, ont été confortés à des résultats numériques et analytiques issus de la littérature. D'autre part dans ce chapitre, une vaste étude paramétrique est présentée sur des plaques composites faites de trois types de matériaux, à savoir : le T300/5208 Graphite/Epoxy, le AS4/3501-6 Graphite/Epoxy et le E-glass/Epoxy. L'étude paramétrique porte sur l'effet de certains paramètres pouvant affecter les températures critiques de flambement des plaques composites stratifiées; comme le rapport d'aspect, l'orientation des fibres, les conditions aux limites et nombre de couches. Dans cette étude, nous avons présenté, aussi, l'effet des rapports des modules de Young ainsi que celui des coefficients de dilatation thermique sur les températures critiques de flambement sous différentes combinaisons de condition aux limites.

Le troisième chapitre est consacré, quant à lui, à l'application de l'élément dans l'étude des plaques isotropes et composites stratifiées munies d'ouverture carrée centrée. Dans ce chapitre, les plaques sont faites des trois matériaux utilisés dans le deuxième chapitre. Ainsi, l'effet de la taille de l'ouverture, de la stratification, des conditions aux limites et de la distribution des efforts résultants sont considérés en détail.

- Deuxième partie : effets de la température sur les vibrations des plaques stratifiées

Après une synthèse bibliographique sur les effets de la température sur le comportement vibratoire des plaques composites stratifiées, on entame avec le quatrième chapitre. Ce dernier est destiné à la présentation et l'exposition de la formulation de l'élément fini DMQP/ml et son extension vers l'étude des effets de la température.

Le cinquième chapitre présente la validation de l'aptitude de l'élément DMQP/ml ainsi que son application dans l'analyse des effets de la température sur les vibrations des plaques composites stratifiées. Dans ce chapitre, une étude paramétrique sur l'effet de la dépendance des propriétés matérielles à la température ainsi que les effets des contraintes thermiques sur le comportement vibratoire des plaques composites stratifiées seront considérés.

# **Première partie:**

---

## **Flambement thermique des plaques composites stratifiées minces**

(Chapitres 1,2 et 3)

---

## P1.I. Introduction

### P1.I.1. Origines du flambement thermique

L'effet de la température sur une structure peut se manifester de deux façons. D'une part, les propriétés élastiques de la structure dépendent de la température, donc la raideur de la structure aussi. En effet, l'augmentation de la température induit, en général, un assouplissement des matériaux et une diminution de la limite élastique [14]. D'autre part, une variation non-uniforme ou rapide de la température, peut donner lieu à des contraintes thermiques, qui peuvent provoquer un flambement thermique [9,15].

En plus de la dégradation des propriétés des matériaux, le flambement thermique est probablement le phénomène le plus important issu de l'effet de l'élévation de la température sur les structures à paroi mince [9]. Il a été reconnu, au début des années cinquante, comme étant l'un des problèmes les plus graves lié à l'échauffement aérodynamique [16].

L'une des causes fondamentales du flambement thermique est le blocage de la dilatation thermique. Sous certaine condition aux limites, une structure ne peut se dilater librement sous une élévation uniforme de la température, ce qui crée des contraintes thermiques capables d'agir comme des forces de compression pouvant nuire à la stabilité de la structure [15]. La seconde cause du flambement thermique est la variation non-uniforme de la température. En effet, quand une structure uniforme est soumise à un échauffement thermique non-uniforme, ou le contraire, la température varie d'un point à l'autre de la structure. Cette dernière, donne lieu à des contraintes thermiques internes qui peuvent aussi nuire la stabilité de la structure [9].

### P1.I.2. Flambement thermique des plaques composites: synthèse bibliographique

Au fil des années, il y a eu de nombreuses études sur le comportement au flambement thermique des plaques, l'un des premiers travaux dans ce domaine a été réalisé par Gossard et al. [17]. Les auteurs ont basé leur étude sur la configuration expérimentale de Heldenfels et Roberts [18]. Ils ont étudié le comportement d'une plaque simplement appuyée soumise à une distribution de température sous forme de "tente" en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz.

A l'avènement des matériaux composites, la recherche s'est focalisée sur ces nouveaux matériaux. Selon Thornton [19], les recherches sur les effets de l'environnement sur les composites dans les années 70 ont conduit aux premières études sur le flambement thermique des plaques composites stratifiées. En effet, il apparaît que Whitney et Ashton [20] étaient les premiers à avoir étudié le comportement au flambement thermique de plaques stratifiées croisées. Ils ont utilisé une formulation énergétique en conjonction avec la méthode de Ritz [21]. Par la suite, Stavsky [22] a considéré la stabilité thermo-élastique des plaques circulaires orthotropes soumises à un champ de température axisymétrique. Ensuite, Biswas [23] a utilisé une technique de transformation conforme pour obtenir les températures critiques de plaques orthotropes en forme irrégulière. Dans le but d'introduire l'effet hygrothermique Flagg et Vinson [24] ont étendu le travail de Whitney et Ashton [20]. Il a été conclu que les charges hygrothermiques réduisent de manière significative la température critique de flambement. Quelques années après, Tauchert et Huang [25] ont utilisé la méthode Rayleigh-Ritz afin d'étudier le flambement thermique des plaques composite minces avec une stratification croisée symétrique. Tauchert [26] a, également, étudié le flambement thermique des plaques épaisses avec une stratification croisée antisymétrique en utilisant la théorie de Reissner-Mindlin. Il a été montré que le cisaillement transverse réduit de manière significative la température critique. Cette dernière remarque a été notée par Sun et Hsu [27] pour le cas des plaques composites avec une stratification équilibrée simplement appuyée. Outre dans l'article de Tauchert [26], une procédure d'optimisation a été proposée pour la conception de stratifiés ayant une résistance maximale au flambement thermique. Chen et Chen [28] ont utilisé la méthode Galerkin pour déterminer les températures critiques de flambement des plaques stratifiées. La méthode Galerkin a également été utilisée par Yang et Shieh [29] afin d'étudier le flambement thermique des plaques épaisses stratifiées équilibrées antisymétriques précontraintes. Par la suite, Noor et Burton [30] ont utilisé une procédure dite "*predictor-corrector*" pour une précise détermination du comportement des plaques composites au flambement thermique. Chang et Leu [31] ont utilisé la théorie de cisaillement d'ordre supérieur pour étudier le flambement thermique des plaques composites stratifiées croisées antisymétriques. Meyers et Hyer [32] ont étudié le flambement et le post-flambement des plaques composites stratifiées symétriques en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz. On trouve également, [33] qui ont analysé analytiquement le comportement des plaques stratifiées croisées antisymétriques.

Tous les travaux mentionnés, ci-dessus, ont mis en évidence le besoin de méthodes et d'outils numériques puissants. En effet, au cours des dernières décennies, la méthode des éléments finis s'est imposée comme étant l'une des plus puissantes et largement utilisée pour étudier le comportement complexe des structures en matériaux composites [13]. En 2009, Zhang et Yang [34] ont publié un article de revue sur les développements récents d'éléments finis pour l'analyse des plaques composites stratifiées. Il en résulte, que les travaux de recherches sur le flambement thermique paraissent minimes par rapport à ceux sur le flambement mécanique. D'autant plus que la plupart des travaux sur le flambement thermique utilisent des éléments finis basés sur la théorie de cisaillement du premier ordre ou celle d'ordre supérieur, alors que ceux basés sur la théorie classique sont plutôt limités à cause de son insuffisance à modéliser les plaques épaisses ou modérément épaisses.

Afin de mettre en relief les différents éléments finis utilisés, dans la littérature, pour l'étude du flambement thermique des plaques composites, on propose de les classer, selon la théorie utilisée, à savoir:

- Théorie classique des stratifiés.
- Théorie de cisaillement du premier ordre.
- Théorie de cisaillement d'ordre supérieur et approche par couche.

#### ***P1.1.1.1. Eléments finis basés sur la théorie classique des stratifiées:***

Thangaratnam et al. [35] ont utilisé un élément fini coque "*semiloof*" avec trente-deux degrés de liberté. Ils ont présenté une analyse sur le flambement thermique des plaques stratifiées sous différente distribution de la température, stratifications et conditions aux limites. On trouve également, Chen et Chen [36] ont développé un élément fini rectangulaire hermitien avec quarante-huit degrés de liberté. Les auteurs ont publié une série d'articles sur le flambement thermique. Ils ont étudié les effets du rapport d'aspect, angles de stratification, l'anisotropie, conditions aux limites et la distribution de la température [36]. L'effet de la dépendance des propriétés matériels à la température [37], ainsi que le flambement thermique des plaques stratifiées cylindriques [38].

En 2010, Shiao et al. [39] ont utilisé un élément fini triangulaire avec cinquante-quatre degrés de liberté afin d'étudier le flambement thermique des plaques composites. Les auteurs ont examiné en détail les modes de flambement des plaques stratifiées croisées et équilibrées

avec différents paramètres, à savoir: rapport d'anisotropie, angles d'orientation, stratification et condition aux limites.

#### ***P1.I.1.1. Éléments finis basés sur la théorie de cisaillement du premier ordre :***

Chen et al. [40] ont étudié le flambement thermique des plaques modérément épaisses avec une stratification équilibrée antisymétrique soumises à une élévation de température uniforme et non-uniforme. Les auteurs ont utilisé un élément fini à huit nœuds de type "serendip" avec quarante degrés de liberté.

Huang et Tauchert [41] ont étudié les températures critiques de flambement des plaques stratifiées symétriques encastées en utilisant un élément fini Lagrangien à neuf nœuds. Il a été montré que les résultats par la méthode des éléments finis sont en bon accord avec ceux trouvés par la solution analytique. .

Noor et Peters ont analysé le flambement thermomécanique des plaques [42], ainsi que le flambement et post-flambement thermique des panneaux composites stratifiées avec ou sans ouverture, sous combinaison de force mécanique et thermique [43-45]. Les auteurs ont utilisé une formulation élément fini mixte avec les cinq déplacements généralisés et huit résultantes de contrainte [46].

Chandrashekhara [47] A étendu un élément fini isoparamétrique à neuf nœuds de flexion [48] pour étudier le comportement des plaques composites stratifiées au flambement thermique. Le même élément fini a été utilisé par Lee et al. [49] pour trouver la conception optimale pour les plaques stratifiées symétriques et antisymétriques afin d'avoir une température critique de flambement maximale. Nous pouvons aussi distinguer d'autres travaux sur l'optimisation des structures composites stratifiées pour faire face au flambement thermique [50-52].

Prabhu et Dhanaraj [53] ont étudié le flambement thermique des plaques stratifiées symétriques minces et épaisses. Ils ont utilisé un élément fini Lagrangien isoparamétrique à neuf nœuds avec intégration sélective.

Kant et Babu [54] ont traité le flambement thermique des plaques biais stratifiées et des plaques sandwichs. Deux éléments finis, précédemment, développé par les auteurs [55] ont été utilisés. L'un d'eux est basé sur la théorie de cisaillement du premier ordre avec cinq

degrés de liberté et l'autre basé sur la théorie de cisaillement d'ordre supérieur avec neuf degrés de liberté. Il a été conclu dans cette étude, que la température critique de flambement est très sensible à l'angle d'inclinaison.

Singha et al. [56] ont étudié le flambement et le post-flambement des plaques composites biais soumises à une combinaison de charge uni-axial de compression et une élévation uniforme de la température. Les auteurs ont développé un élément fini à quatre nœuds avec quarante degrés de liberté.

Kabir et al. [57] ont étendu un élément fini triangulaire à trois nœuds avec intégration complète pour étudier le flambement thermique des plaques stratifiées rectangulaires et biais. L'élément a montré d'excellente performance avec les plaques modérément épaisses et minces.

#### ***P1.1.2.1. Éléments finis basés sur la théorie de cisaillement d'ordre supérieur et sur l'approche par couche:***

Il apparait dans la littérature que Chang [58] est le premier à utiliser la théorie d'ordre supérieur afin d'étudier le flambement thermique des plaques composites stratifiées. L'auteur a utilisé un élément fini isoparamétrique à huit nœuds avec soixante-quatre degrés de liberté.

Babu et Kant [59] ont étudié le flambement thermique des plaques stratifiées et des sandwichs. Les auteurs ont présenté des modèles d'éléments finis basés sur deux théories raffinées d'ordre supérieur. L'une de ces théories prend en compte l'effet de la déformation transversale normale avec treize degrés de liberté et l'autre néglige cet effet avec neuf degrés de liberté.

Wu et Chen [60] ont proposé un élément fini à trois nœuds, basé sur l'approche global-local d'ordre supérieur. Les auteurs ont étudié le flambement thermomécanique des plaques composites stratifiées et sandwichs.

Lal et al. [61] Ont étudié l'effet des propriétés aléatoires sur le comportement au flambement thermique des plaques composites stratifiées avec dépendance des propriétés matérielles à la température. Dans ce travail, les propriétés élastiques et l'épaisseur ont été considérées comme étant des variables aléatoires indépendantes. Les auteurs ont utilisé un

élément fini isoparamétrique  $C^0$  à neuf nœuds, basé sur la théorie de cisaillement d'ordre supérieur avec sept degrés de liberté.

Lee [62] a étudié le flambement des plaques composites stratifiées en utilisant l'approche layerwise. Il a été montré qu'il existe une différence significative entre les résultats de la layerwise et ceux de la monocouche équivalente.

Shariyat [63] a étudié le flambement thermique des plaques composite rectangulaire avec dépendance des propriétés matérielles à la température. L'auteur a employé l'approche layerwise avec un élément Hermitien de continuité  $C^1$ .

Kumar et Singh [64] ont utilisé modèle élément fini layerwise tridimensionnel afin d'étudier le flambement thermique des plaques composites stratifiées renforcées par des fibres à mémoire forme

Nali et Carrera [65] ont utilisé l'approche de la monocouche équivalente et l'approche layerwise pour étudier le flambement thermomécanique des plaques composites stratifiées.

Outre les travaux cités, ci-dessus, certaines contributions sur le flambement thermique des plaques composites qui ne sont pas basées sur la méthode des éléments finis, doivent être mentionnées dans cette synthèse. Nous distinguons les travaux de Noor et ses collaborateurs [66-69]. Ils ont présenté solution tridimensionnelle pour le flambement thermique des plaques multicouches [66,67], ainsi que sur la vibration et le flambement des plaques stratifiées équilibrées précontrainte thermiquement [68]. Les auteurs ont également publié un article de revue sur les modèles numériques qui traitent le comportement des plaques et coques composites sous haute température[69]. Jones [70] a étudié le flambement thermique des plaques composites stratifiées symétriques croisées sous une élévation uniforme de la température. L'auteur a utilisé le concept de la charge mécanique équivalente, Jones [15], pour dériver des solutions simples au plus fondamentales des problèmes de flambement thermique. Matsunaga [71-73] a utilisé une théorie d'ordre supérieur afin d'étudier le flambement thermique des plaques stratifiées croisées et équilibrées et des sandwichs. Jin et al. [74] ont utilisé la technique de la corrélation d'image pour étudier expérimentalement le flambement thermique des plaques circulaires composites stratifiées soumise à une élévation uniforme de la température.

## P1.II. Objectifs de la première partie:

Cette partie présente une contribution à l'étude du flambement thermique des plaques composites stratifiées minces en utilisant la méthode des éléments finis. Le premier objectif est d'étendre un élément fini qui a été précédemment développé pour l'étude de la flexion et le flambement mécanique des plaques stratifiées vers l'étude du flambement thermique.

Dans cette partie, une vaste étude comparative est présentée. Pour ce faire, Trois types de matériaux qui sont très utilisés dans l'industrie sont considérés, à savoir: le T300/5208 Graphite/Epoxy, le AS4/3501-6 Graphite/Epoxy et le E-glass/Epoxy. Les trois types de matériaux ont été choisis pour les raisons suivantes:

- Le T300/5208 présente des propriétés mécaniques élevées
- L'AS4/3501-6 présente des propriétés mécaniques proches de celles du T300/5208, mais il comporte un coefficient de dilatation thermique longitudinal négatif
- L'E-glass/Epoxy présente des propriétés mécaniques faibles par rapport aux deux premiers matériaux.

L'étude porte sur l'effet du rapport d'aspect, l'effet des conditions aux limites ainsi que, du nombre de couche, stratification et des rapports d'anisotropie sur la température critique des plaques composites stratifiées minces. D'autre part, cette partie, comporte aussi une étude du flambement thermique des plaques composites stratifiées munie d'une ouverture centrée.

# **Chapitre 1**

## **Formulation élément fini**

## 1.1. Introduction

Ce chapitre a pour but d'exposer la formulation de l'élément fini développé par Tati [12] pour l'étude de la flexion et le flambage des plaques composites stratifiées minces. Ce chapitre comporte aussi, l'extension de cet élément fini vers l'étude du flambement thermique des plaques composites stratifiées minces. Basé sur la théorie classique des stratifiées, l'élément est une combinaison d'un élément membranaire isoparamétrique et d'un élément de type Hermite de haute précision, le tout donnant un élément fini à quatre nœuds avec trente-deux degrés de liberté.

## 1.2. L'élément membranaire

### 1.2.1. Approximation géométrique

Les coordonnées paramétriques sont notées  $\xi$  et  $\eta$ . Les coordonnées  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  d'un point quelconque sont définies par:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \quad (1.1)$$

Où  $x_i$  et  $y_i$  sont les coordonnées du nœud  $i$  et, les fonctions d'interpolation bilinéaires sont données par :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (1.2)$$

### 1.2.2. Champ des déplacements

Comme l'élément est isoparamétrique, l'approximation nodale pour le champ des déplacements dans le plan de l'élément s'écrit en utilisant les mêmes fonctions de formes que l'approximation géométrique, soit :

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u_i$$

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) v_i \quad (1.3)$$

Où  $u(\xi, \eta)$  et  $v(\xi, \eta)$  sont les déplacements membranaires d'un point quelconque  $(\xi, \eta)$  et  $u_i$  et  $v_i$  sont les déplacements d'un nœud  $i$  (Figure 1. 1)

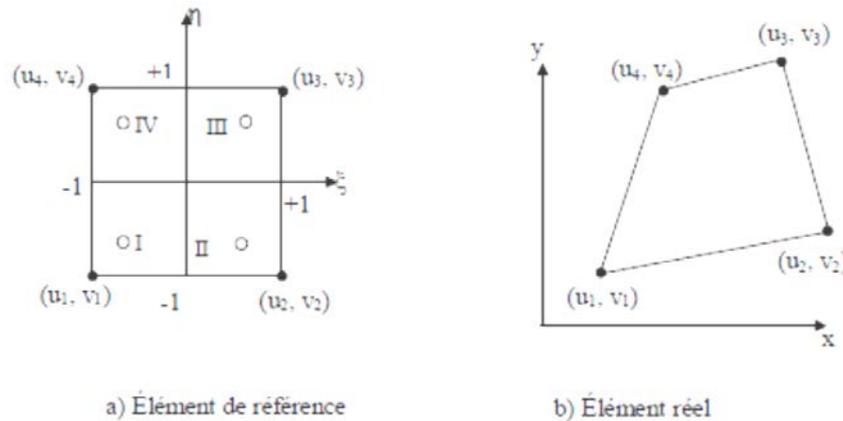


Figure 1. 1: Élément membranaire

### 1.3. L'élément plaque:

#### 1.3.1. Fonctions d'interpolations de l'élément de référence

L'approximation nodale du champ de déplacement hors plan d'un élément rectangulaire de haute précision de type Hermite du premier ordre est donnée par :

$$w = H_{00} w_i + H_{10} \frac{\partial w_i}{\partial \xi} + H_{01} \frac{\partial w_i}{\partial \eta} + H_{11} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi \partial \eta} \quad (1.4)$$

Où

$$\begin{aligned}
H_{00} &= \frac{1}{16} (\xi + \xi_0)^2 (\xi \xi_0 - 2) \times (\eta + \eta_0)^2 (\eta \eta_0 - 2) \\
H_{10} &= -\frac{1}{16} \xi_0 (\xi + \xi_0)^2 (\xi \xi_0 - 1) \times (\eta + \eta_0)^2 (\eta \eta_0 - 2) \\
H_{01} &= -\frac{1}{16} (\xi + \xi_0)^2 (\xi \xi_0 - 2) \times \eta_0 (\eta + \eta_0)^2 (\eta \eta_0 - 1) \\
H_{11} &= \frac{1}{16} \xi_0 (\xi + \xi_0)^2 (\xi \xi_0 - 1) \times \eta_0 (\eta + \eta_0)^2 (\eta \eta_0 - 1)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

### 1.3.2. Fonctions d'interpolations de l'élément réel

Les dérivées des fonctions d'interpolations géométriques seront calculées par la formule suivante:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
\frac{\partial N_i}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Où sous la forme matricielle par:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{1.7}$$

Les dérivées  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \eta}{\partial y}$  se déterminent à partir de la matrice Jacobienne

inversée  $J^{-1}$ , la matrice Jacobienne est donnée par:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Les fonctions d'interpolations de l'élément plaque réel quadrilatéral sont déterminées à partir des fonctions d'interpolations de l'élément de référence en introduisant les fonctions d'interpolation géométrique.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \xi} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\
\frac{\partial w}{\partial \eta} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \\
&\quad + \frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

En introduisant les expressions de l'équation (1.9) dans l'équation(1.4), on aboutit à:

$$\begin{aligned}
w &= H_{00} w_i + H_{10} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + H_{01} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \\
H_{11} &\left[ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \\ &+ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right) \end{aligned} \right]
\end{aligned} \tag{1.10}$$

L'expression du déplacement hors plan  $w(x, y)$  d'un point quelconque de coordonnées  $(x, y)$  de l'élément réel est donnée par:

$$w(x, y) = L_w w_i + L_{\theta_x} \frac{\partial w_i}{\partial x} + L_{\theta_y} \frac{\partial w_i}{\partial y} + L_{\theta_{xy}} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} + L_{\theta_{xx}} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + L_{\theta_{yy}} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \tag{1.11}$$

Où sous la forme matricielle par:

$$w(x, y) = \begin{bmatrix} L_w & L_{\theta_x} & L_{\theta_y} & L_{\theta_{xy}} & L_{\theta_{xx}} & L_{\theta_{yy}} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} w_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \end{array} \right\} \tag{1.12}$$

Où  $L_w, L_{\theta_x}, L_{\theta_y}, L_{\theta_{xy}}, L_{\theta_{xx}}$  et  $L_{\theta_{yy}}$  sont les fonctions d'interpolations de l'élément réel données par:

$$\begin{aligned}
L_w &= H_{00} \\
L_{\theta_x} &= H_{10} \frac{\partial x}{\partial \xi} + H_{01} \frac{\partial x}{\partial \eta} + H_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \\
L_{\theta_y} &= H_{10} \frac{\partial y}{\partial \xi} + H_{01} \frac{\partial y}{\partial \eta} + H_{11} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \\
L_{\theta_{xy}} &= H_{11} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \\
L_{\theta_{xx}} &= H_{11} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\
L_{\theta_{yy}} &= H_{11} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

#### 1.4. Construction de l'élément combiné

La combinaison des deux éléments permet d'obtenir un élément à quatre nœuds contenant huit degrés de liberté chacun, soit un élément de trente-deux degrés de liberté avec un vecteur déplacement:

$$\{q\}^T = \left\{ u_i, v_i, w_i, \frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial y_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2} \right\}_{i=1, \dots, 4} \tag{1.14}$$

##### 1.4.1. Relations cinématiques

La théorie utilisée est la théorie classique des stratifiés, basée sur le modèle classique de Kirchhoff dans lequel on suppose que la normale au feuillet moyen le reste après déformation. Cette dernière, néglige l'effet des déformations dues au cisaillement transverse. Les déplacements selon cette approche s'écrivent :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\
v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\
w(x, y, z) &= w_0(x, y)
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Où

$u_0, v_0$  sont les déplacements membranaires

$w_0$  est le déplacement hors plan du feuillet moyen de la plaque.

Le champ des déformations est donné par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_L^0 + \varepsilon_{NL}^0 \\ \varepsilon \end{Bmatrix}}_{\{\varepsilon\}} + z \{\kappa\} \quad (1.16)$$

### 1.4.2. Loi de comportement

Les relations contraintes-déformations dans le système de coordonnées locales des fibres d'un stratifié soumis à une variation de température, sont données par (Kaw [4]):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.17)$$

Où 1 et 2 désigne respectivement la direction longitudinale des fibres et la direction transversale normale aux fibres dans le plan de la plaque.  $\varepsilon_1^T$  et  $\varepsilon_2^T$  sont les déformations d'origine thermique et qui sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ 0 \end{Bmatrix} = \Delta T \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Avec  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont respectivement le coefficient de dilatation thermique longitudinal et transversal et  $\Delta T$  la variation de température. Les composantes de la rigidité  $Q_{ij}$  sont données par:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{66} = G_{12} \quad (1.19)$$

Où  $E_1, E_2, \nu_{12}$  et  $G_{12}$  sont les caractéristiques mécaniques d'une couche.

Les relations contraintes-déformations de la couche "k" dans le repère global du stratifié, sont données par:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad (1.20)$$

Les efforts à mi-plan d'une plaque et les moments sont liés aux déformations et aux courbures par les expressions suivantes:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{Lx}^0 \\ \varepsilon_{Ly}^0 \\ \gamma_{Lxy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \\ M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix} \quad (1.21)$$

Où

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} \quad (1.22)$$

Avec  $[A]$ ,  $[B]$  et  $[D]$  sont les rigidités extensionnelle, flexionnelle et de couplage respectivement, celles-ci peuvent être définies par :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_{ij}]_k dz \\ B_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_{ij}]_k z dz \\ D_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_{ij}]_k z^2 dz \end{aligned} \quad (1.23)$$

En notant par  $\sigma_{ij}$  les contraintes dans le plan, on peut écrire:

$$\begin{aligned} N_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} dz \\ M_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} z dz \end{aligned} \quad (1.24)$$

Les résultantes de force et de moment thermique sont définies par:

$$\begin{aligned} N^T &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_{ij}]_k [\Delta T \{\alpha\}^T] dz \\ M^T &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_{ij}]_k [\Delta T \{\alpha\}^T] z dz \end{aligned} \quad (1.25)$$

### 1.4.3. Energie potentielle de déformation et travail des forces appliquées

L'énergie potentielle de déformation d'une plaque est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_v \sigma^T \cdot \varepsilon dv \quad (1.26)$$

Où  $v$  est le volume de la plaque.

En utilisant les relations contraintes-déformations et les relations constitutives des stratifiés, l'énergie potentielle de déformation peut s'écrire:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \left( \{\varepsilon_L^0\}^T [A] \{\varepsilon_L^0\} + \{\varepsilon_L^0\}^T [B] \{\kappa\} + \{\kappa\}^T [B] \{\varepsilon_L^0\} + \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} \right) dv \quad (1.27)$$

Dans le cas de grande déformation et l'existence de chargement thermique, l'énergie potentielle totale est donnée par :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_v \left( \{\varepsilon_L^0\}^T [A] \{\varepsilon_L^0\} + \{\varepsilon_L^0\}^T [B] \{\kappa\} + \{\kappa\}^T [B] \{\varepsilon_L^0\} + \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} \right. \\ \left. - 2(\{\varepsilon_L^0\}^T [N^T] + \{\kappa\}^T [M^T]) + \{\varepsilon_{NL}^0\} [N^T] \right) dv \quad (1.28)$$

En introduisant les relations (1.21) dans l'expression de l'énergie, on obtient:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{q\}^T \left( [S_\varepsilon]^T [A] [S_\varepsilon] + [S_\varepsilon]^T [B] [S_\kappa] \right. \\ \left. + [S_\kappa]^T [B] [S_\varepsilon] + [S_\kappa]^T [D] [S_\kappa] \right) \{q\} |J| d\xi d\eta \\ - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{q\}^T \left( [S_\varepsilon]^T [N^T] + [S_\kappa]^T [M^T] \right) |J| d\xi d\eta \\ + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{q\}^T [G]^T [N_0^T] [G] \{q\} |J| d\xi d\eta \quad (1.29)$$

Où

$|J|$  est le déterminant de la matrice Jacobienne.

$$\{\varepsilon_l^0\} = [S_\varepsilon] \{q\}, \quad \{\kappa\} = [S_\kappa] \{q\}, \quad [G] \{q\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad [N_0^T] = \begin{bmatrix} N_x^T & N_{xy}^T \\ N_{xy}^T & N_y^T \end{bmatrix}$$

Avec  $[S_\varepsilon]$  et  $[S_\kappa]$  des matrices de 3x32 composantes, qui relient respectivement les déformations membranaires linéaires et les courbures de l'élément au vecteur des déplacements  $\{q\}$ .

$[G]$  est une matrice 2x32 composantes, qui relie le vecteur  $\left[ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right]$  au vecteur déplacement  $\{q\}$

En se basant sur le principe de l'énergie potentielle minimale, la première variation permet d'obtenir :

- la matrice de rigidité élémentaire :

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( [S_\varepsilon]^T [A] [S_\varepsilon] + [S_\varepsilon]^T [B] [S_\kappa] \right. \\ \left. + [S_\kappa]^T [B] [S_\varepsilon] + [S_\kappa]^T [D] [S_\kappa] \right) |J| d\xi d\eta \quad (1.30)$$

- Le vecteur forces thermiques élémentaire:

$$\{F^e\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{q\}^T \{[S_\varepsilon]^T [N^T] + [S_\kappa]^T [M^T]\} |J| d\xi d\eta \quad (1.31)$$

- La matrice géométrique élémentaire:

$$[K_G^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{[G]^T [N_0^T] [G]\} |J| d\xi d\eta \quad (1.32)$$

Dans un problème de flambement thermique de plaques sous chargement uniforme de la température, il n'est pas nécessaire de trouver la distribution des contraintes en avance. Cependant, quand la structure est soumise à une variation non-uniforme de la température ou, la structure, elle-même, n'est pas uniforme (p.ex. présence d'ouverture) [13,36].

Il faut donc déterminer la distribution des efforts membranaires en résolvant l'équation :

$$[K] \{X\} = \{F\} \quad (1.33)$$

Où

$[K]$  est la matrice de rigidité globale.

$\{X\}$  est le vecteur des déplacements globaux.

$\{F\}$  est le vecteur de chargement globale.

L'annulation de la deuxième variation de l'énergie potentielle de déformation, permet d'obtenir le problème de valeurs propres suivant:

$$[K] \{X\} + \lambda [K_G] \{X\} = 0 \quad (1.34)$$

Avec

$\lambda$  la charge non dimensionnelle de flambement,  $\{X\}$  représente le vecteur modal et  $[K_G]$  est la matrice géométrique globale.

## 1.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé la formulation de l'élément fini développé par Tati [12] pour l'étude de la flexion et le flambage des plaques composites stratifiées minces. Ce chapitre comporte aussi, l'extension de cet élément fini vers l'étude du flambement thermique des plaques composites stratifiées minces. Basé sur la théorie classique des stratifiées, l'élément est une combinaison d'un élément membranaire isoparamétrique et d'un élément de type Hermite de haute précision, le tout donnant un élément fini à quatre nœuds avec trente-deux degrés de liberté.

## **Chapitre 2**

### **Validation et Etude paramétrique**

## 2.1. Introduction

Le présent chapitre est consacré à la validation de l'élément fini présenté dans le précédent chapitre, ainsi que son application à l'étude du flambement thermique des plaques composites stratifiées minces. Pour ce faire un code en Fortran a été développé.

Il est nécessaire, avant d'entamer toute étude numérique, de vérifier et valider la précision de la formulation de l'élément fini utilisé. Pour ce faire, plusieurs cas d'études existant dans la littérature abordant le phénomène du flambement thermique des plaques isotrope et composite stratifiées ont été pris en considération. Dans la deuxième partie de ce chapitre, une étude paramétrique est présentée afin de mieux comprendre le comportement de flambement thermique des plaques composites stratifiées. Plusieurs paramètres, sous différente combinaison de conditions aux limites, sont pris en considération, à savoir : rapport d'aspect, nombre de couches et le degré l'anisotropie. Les conditions aux limites adoptées dans ce chapitre sont listées dans le tableau 2. 1

**Tableau 2. 1:** Conditions aux limites partie flambement thermique.

Conditions aux limites	Abréviation	Les retenus aux bords
Simplement appuyé	SS	$u = w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, x = \pm \frac{a}{2}$ $v = w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, y = \pm \frac{b}{2}$
Encastré	CC	$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$
Encastré - Simplement appuyé	CS	Encastré sur $x = \pm \frac{a}{2}$ Simplement appuyé sur $y = \pm \frac{b}{2}$
Encastré - Libre	CF	Encastré sur $x = \pm \frac{a}{2}$ Libre sur $y = \pm \frac{b}{2}$
Simplement appuyé - Libre	SF	Simplement appuyé sur $x = \pm \frac{a}{2}$ Libre sur $y = \pm \frac{b}{2}$

## 2.2. Validation de l'élément fini

### 2.2.1. Plaques isotropes:

#### 2.2.1.1. Plaque isotrope simplement appuyée:

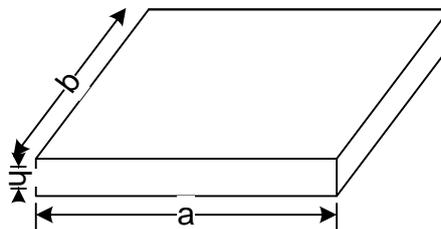
Dans ce test, on considère la convergence de la température critique de flambement d'une plaque isotrope carrée simplement appuyée ( $a/b=1$  et  $a/h=100$ , voir **Figure 2. 1**). Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont :

$$E = 1.0 \times 10^{-6}, \nu = 0.3, \alpha = 1.0 \times 10^{-6}$$

Afin d'étudier la convergence de la solution avec la présente formulation, la plaque est subdivisée en trois types de maillage;  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$  et  $6 \times 6$ . Le tableau 2. 2 réuni les températures critiques de flambement trouvées par notre élément et celles trouvées par:

- 1) Shiau et al. [39] avec un élément fini triangulaire à 6dll. /nœud basé sur la théorie classique des stratifiés,
- 2) Zhao et al. [75] avec une méthode sans-maillage à 5dll/nœud,
- 3) Matsunaga [71] avec une théorie d'ordre supérieur,
- 4) Noor et Burton [66] par une solution tridimensionnelle.

D'après le tableau 2. 2, on voit que les résultats obtenus par la présente formulation sont en très bon accord avec ceux de la littérature.



**Figure 2. 1:** Dimensions de la plaque

**Tableau 2. 2:** Convergence de la température critique de flambement d'une plaque carrée isotrope

Matsunaga [71]	Noor et Burton [66]	Zhao et al. [75]	Shiau et al. [39]	Présent
		0.1284 (16×16)	0.1266 (2×2)	0.1272 (2×2)
0.1264	0.1264	0.1273 (18×18)	0.1265 (4×4)	0.1265 (4×4)
		0.1271 (20×20)	0.1265 (6×6)	0.1265 (6×6)

### 2.2.1.2. Plaque isotrope simplement appuyée et encastrée

On considère une plaque isotrope carrée ( $a/b=1$ ,  $a/h=100$ ). Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont :

$$E = 2.0 \times 10^{-11}, \nu = 0.3, \alpha = 1.0 \times 10^{-6}$$

Dans ce cas test, deux conditions aux limites sont prises en considération; simplement appuyé (SS) et l'encastré (CC). Le

tableau 2. 3 réunit les résultats obtenus par la présente formulation et ceux trouvés avec un élément fini basé sur la théorie du premier ordre [76] ainsi qu'avec la solution analytique [35] .

Pour le cas simplement appuyé, on voit très bien qu'à partir d'un maillage de 6×6, on a des températures critiques de flambement identique à ceux de l'élément de premier ordre [76], ainsi qu'un très bon accord avec la solution analytique [35]. Pour le cas encastré, on perçoit le meilleur résultat avec un maillage de 6×6.

**Tableau 2. 3:** Température critique d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée et encadrée.

Maillage	4×4	6×6	8×8	12×12
Simply supported				
Analytique [35]	63.27			
Présent	63.127	63.247	63.262	63.266
Err%	0.22	0.036	0.012	0.0063
Singha et al. [76]	63.198	63.247	63.262	63.266
Err%	0,11	0.036	0.012	0.0063
Encastree				
Analytique [35]	168.71			
Présent	169.466	168.137	167.892	167.796
Err%	0.44	0.33	0.48	0.54
Singha et al. [76]	166.517	167.579	167.675	167.856
Err%	1.2	0.67	0.61	0.50

## 2.2.2. Plaques stratifiées

### 2.2.2.1. Plaques stratifiées rectangulaires simplement appuyées:

Dans cet exemple, on présente la convergence des températures critiques minimum de flambement de plaques stratifiées symétriques rectangulaires simplement appuyées. Deux stratifications avec huit couches (8) ont été prises en considération, à savoir:  $[0/90/90/0]_s$  et  $[0/45/-45/90]_s$ . Les propriétés géométriques et mécaniques des plaques sont listées dans le tableau 2. 4

**Tableau 2. 4:** Propriétés géométriques et mécaniques[77].

a (in)	b	h	E <sub>1</sub> (psi)	E <sub>2</sub>	G <sub>12</sub>	α <sub>1</sub> (1/F°)	α <sub>2</sub>
15	12	0.028	22.5 × 10 <sup>6</sup>	1.17 × 10 <sup>6</sup>	0.66 × 10 <sup>6</sup>	-0.04 × 10 <sup>-6</sup>	16.7 × 10 <sup>-6</sup>

Les résultats obtenus ont été confrontés à des résultats obtenus par des éléments finis basé sur la théorie classique des stratifiées [39,77] . Le tableau 2. 5 montre la rapidité de convergence ainsi que la précision du présent élément fini pour les deux stratifications.

**Tableau 2. 5:** Température critique de flambement de plaques composites stratifiées simplement appuyées

	Yucheng Shi [77]	Shiau et al. [39]	Présent
[0/90/90/0] <sub>s</sub>	-	12.2616 (4×4)	12.2716 (4×4) *
	-	12.2610 (8×8)	12.2617 (8×8)
	12.26 (12×12)	12.2610 (12×12)	12.2612 (12×12)
[0/45/-45/90] <sub>s</sub>	-	13.7744 (4×4)	13.7388 (4×4)
	-	13.7582 (8×8)	13.7354 (8×8)
	13.71 (12×12)	13.7519 (12×12)	13.7357 (12×12)

\* nombre d'éléments dans la direction x et y, respectivement.

### 2.2.2.2. Plaques rectangulaires stratifiées équilibrées

Ce test a été proposé par Shiau et al. [39] afin de chercher l'angle d'orientation optimale pour une meilleure résistance des plaques rectangulaires stratifiées au flambement thermique. Deux types de matériaux ont été considérés, à savoir : le T300/5208 Graphite/Epoxy et le AS4/3501-6 Graphite/Epoxy (voir tableau 2. 6). Pour ce faire, Shiau et al. [39] ont testé plusieurs combinaisons de conditions aux limites et angle d'orientations pour deux types de stratifications équilibrées;  $[(\pm\theta^\circ)_2]_s$ ,  $[+\theta^\circ_2/-\theta^\circ_2]_s$ . Le tableau 2. 7 englobe les résultats obtenus par notre élément et leur confrontation avec ceux de Shiau et al. [39].

**Tableau 2. 6:** Propriétés du T300/5208 et le AS4/3501-6 [39].

Materials	E <sub>1</sub> (Gpa)	E <sub>2</sub>	G <sub>12</sub>	v <sub>12</sub>	α <sub>1</sub> (10 <sup>-6</sup> /C°)	α <sub>2</sub> (10 <sup>-6</sup> /C°)
T300/5208	181	10.3	7.17	0.28	0.02	22.5
AS4/3501-6	142	10.3	7.2	0.27	-0.9	27

**Tableau 2. 7:** Flambement thermique des plaques rectangulaires stratifiées équilibrées ( $a/b=2$ ,  $b/h=150$ )

	Stratification	Conditions aux limites	$\Theta^\circ$	Shiau et al. [39]	Présent ( $10 \times 10$ ) <sup>a</sup>
T300/5208	$[(\pm\Theta^\circ)_2]_s$	SS	62°	38.38	38.25
		CC	55°	83.81	83.58
	$[+\Theta^\circ_2/-\Theta^\circ_2]_s$	SS	59°	31.62	31.13
		CC	54°	65.30	65.13
AS4/3501-6	$[(\pm\Theta^\circ)_2]_s$	SS	56°	44.63	44.52
		CC	52°	88.95	88.70
		CS	57°	47.43	47.16
	$[+\Theta^\circ_2/-\Theta^\circ_2]_s$	CF	44°	12.95	15.97
		SS	54°	36.29	35.74
		CC	51	70.92	70.69

### 2.2.2.3. Plaque composite stratifiée équilibrée antisymétrique simplement appuyée

Ce cas test, a été proposé par Noor et Burton [66] en utilisant une approche tridimensionnelle afin d'étudier l'effet de l'orientation des fibres sur la température critique minimum de flambement des plaques composites stratifiées. A cet effet, une plaque de forme carrée ( $a/b=1$ ) de dix (10) couches avec une stratification équilibrée antisymétrique  $[+\theta, -\theta, \dots]$  a été considérées. Les caractéristiques du matériau pour une couche individuelle sont prises de telle sorte à correspondre à un matériau ayant des modules de fibres élevées, à savoir:

$$E_L/E_T = 15, G_{LT}/E_T = 0.5, \nu = 0.3, \alpha_L/\alpha_0 = 0.015, \alpha_T/\alpha_0 = 1.0$$

Avec  $\alpha_0$  est un facteur de normalisation des coefficients de dilatation thermique.

Le

tableau 2. 8 montre la comparaison des résultats trouvés avec le présent élément fini et ceux de solution tridimensionnelle de Noor et Burton [66].

**Tableau 2. 8:** Température critique d'une plaque composite stratifiée équilibrée.

	0°	15°	30°	45°
Présent	$0.7486 \times 10^{-3}$	$0.1133 \times 10^{-2}$	$0.1540 \times 10^{-2}$	$0.1720 \times 10^{-2}$
3D [66]	$0.7463 \times 10^{-3}$	$0.1115 \times 10^{-2}$	$0.1502 \times 10^{-2}$	$0.1674 \times 10^{-2}$
Err%	0,30	1,61	2,52	2,74

### 2.3. Etude paramétrique :

#### 2.3.1. Effet du rapport d'aspect a/b:

##### 2.3.1.1. Effet du rapport d'aspect (a/b) sur la température critique de flambement de plaques stratifiées croisées :

Dans cette section, on va étudier l'effet de la géométrie de la plaque stratifiée sur les températures critiques de flambement. Pour ce faire, plusieurs rapports d'aspect ont été considérés ( $a/b=1.0\sim 4.0$ ) avec deux types de stratifications ( $[90_2/0_2]_s$ ,  $[0_2/90_2]_s$ ). Différentes combinaisons de conditions aux limites; simplement appuyé (SS), encasté(CC) et Encasté-Simplement appuyée (CS), ainsi que trois types de matériaux ont été étudiés, à savoir: le T300/5208, le AS4/3501-6 et le E-glass/Epoxy (voir tableau 2. 9).

**Tableau 2. 9:** Propriétés du T300/5208, le AS4/3501-6 et E-glass/Epoxy [39,70]

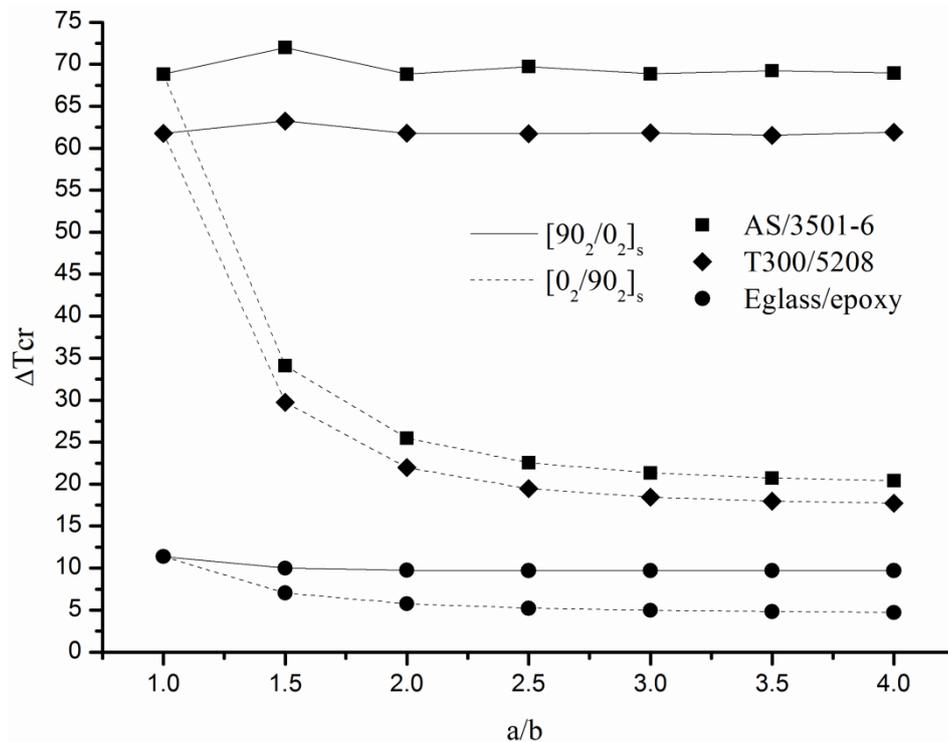
Materials	$E_1$ (Gpa)	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$\alpha_1(10^{-6}/C^\circ)$	$\alpha_2(10^{-6}/C^\circ)$
T300/5208	181	10.3	7.17	0.28	0.02	22.5
AS4/3501-6	142	10.3	7.2	0.27	-0.9	27
E-glass/Epoxy	53.4	17.9	8.6	0.25	6.3	20.5

La figure 2. 2 montre l'effet du rapport d'aspect sur la température critique de flambement de plaques stratifiées simplement appuyée (SS). Pour ce cas de condition aux limites ainsi que pour les trois types de matériaux, on remarque qu'avec le  $[90_2/0_2]_s$ , les températures critiques de flambement sont légèrement affectées par l'augmentation du rapport d'aspect (a/b), alors que pour le  $[0_2/90_2]_s$  les températures critiques flambement diminues avec l'augmentation du rapport d'aspect (a/b). Ceci peut être expliqué par le fait qu'avec la  $[90_2/0_2]_s$ , on obtient une succession de couches ayant une orientation ( $0^\circ$ ) dans le plan moyen.

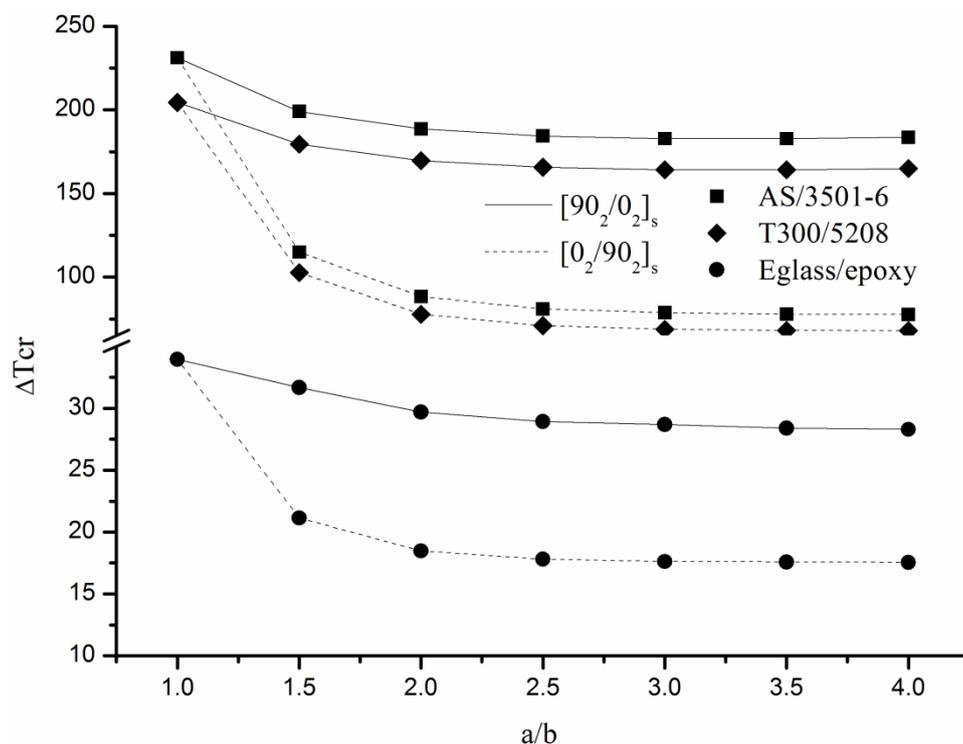
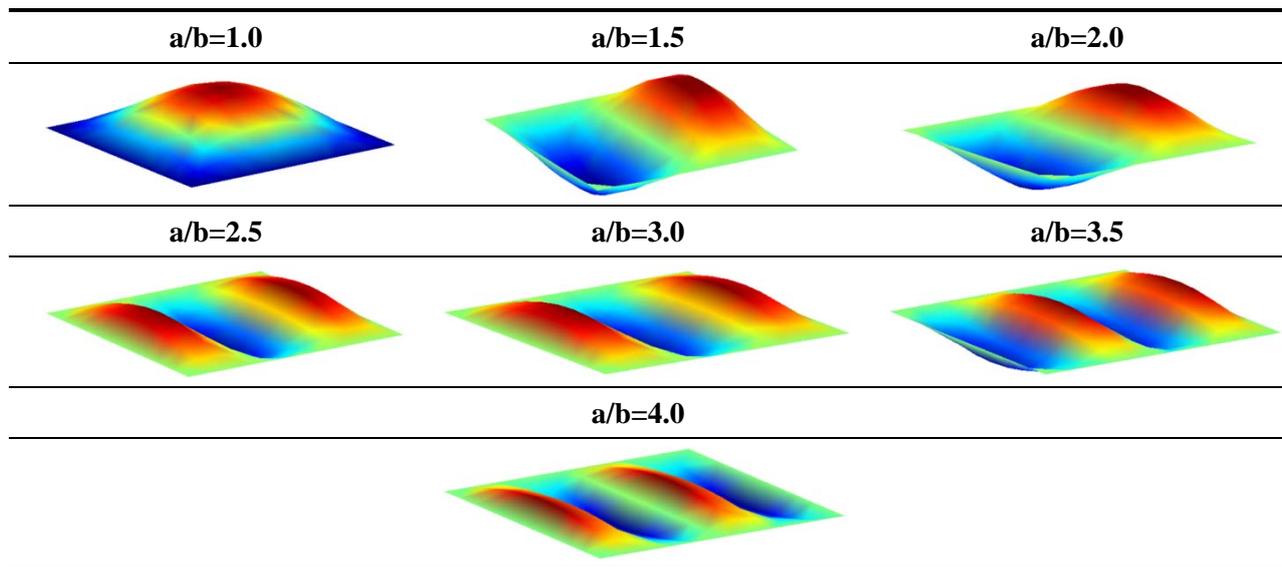
Comme cette orientation est parallèle au sens de l'allongement (a), celle-ci peut augmenter la résistance de la plaque face à ce dernier

D'autre part, on remarque des pics dans la courbe de la stratification  $[90_2/0_2]_s$  avec le AS4/3501-6 en  $a/b=1.5, 2.5$  et  $3.5$ . Cela peut être dû au changement de modes de flambement, comme le montrent les figures dans le tableau 2. 10. On remarque aussi qu'avec  $a/b=1.0$ , les deux stratifications donnent les mêmes températures critiques, cela est dû à la symétrie des conditions aux limites ainsi que la géométrie

La Figure 2. 3 présente l'effet du rapport d'aspect pour le cas des plaques stratifiées encastées (CC). Avec ce type de condition aux limites, on remarque que les températures critiques de flambement décroissent avec l'augmentation du rapport d'aspect ( $a/b$ ), pour les deux stratifications et les trois matériaux choisis. On note aussi que la diminution de la température avec la stratification  $[90_2/0_2]_s$  est plus prononcée qu'au cas du simplement appuyée.

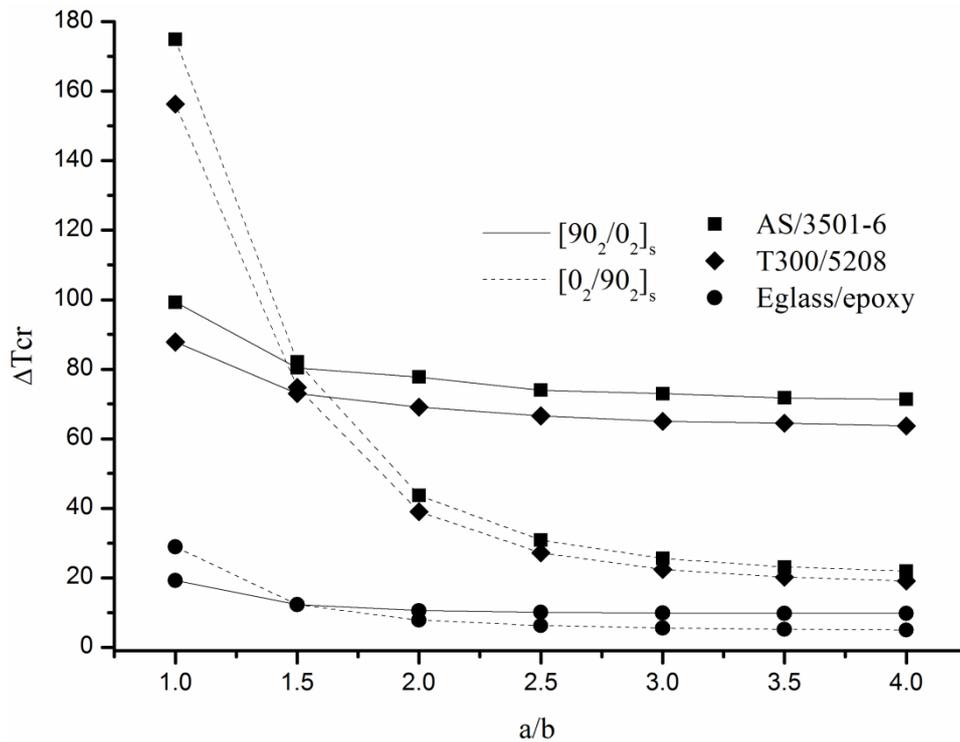


**Figure 2. 2:** Effet du rapport d'aspect  $a/b$  sur la température critique d'une plaque stratifiée croisée simplement appuyée.

**Tableau 2. 10:** Modes de flambement d'une plaque stratifiée AS/3501-6 pour différents rapports d'aspect**Figure 2. 3:** Effet du rapport d'aspect  $a/b$  sur la température critique d'une plaque stratifiée croisée encadrée.

La figure 2. 4 illustre le cas des conditions aux limites Encastré-Simplement appuyé (CS). A la différence des cas précédents; simplement appuyé (Figure 2. 2) et encastré (Figure 2. 3), on remarque qu'avec  $a/b=1.0$  on n'a pas le même résultat pour les deux stratifications, car ici on n'a pas de symétrie dans les conditions aux limites sur les arrêtes de la plaque. On note

aussi que la stratification  $[0_2/90_2]_s$  avec  $a/b=1.0$  donne des températures critiques plus élevée qu'avec la stratification  $[90_2/0_2]_s$ . Cela peut être expliqué par le fait que la  $[0_2/90_2]_s$  possède une rigidité flexionnelle longitudinale ( $D_{11}$ ) supérieure à celle de la  $[90_2/0_2]_s$ . Comme cette rigidité se trouve dans le sens des arrêtes encastree, elle augmente la résistance de plaque face au flambement



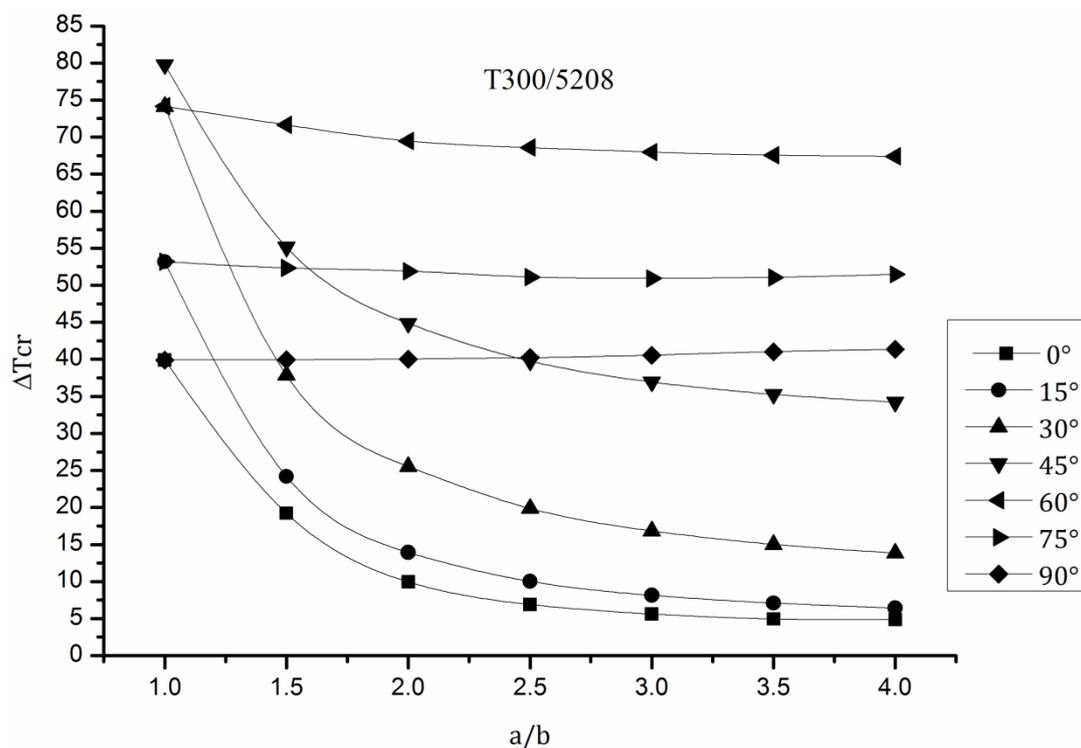
**Figure 2. 4:** Effet du rapport d'aspect  $a/b$  sur la température critique d'une plaque stratifiée croisée encastree-simplement appuyée.

D'après les résultats illustrés ci-dessus, on remarque que le E-glass/Epoxy donne les températures critiques les plus basses. Ceci peut être expliqué par ses rapports d'anisotropie ( $E_1/E_2$  et  $\alpha_2/\alpha_1$ ) qui sont relativement faibles par rapport à ceux de l'AS4/3501-6 et du T300/5208. Par ailleurs, il est très intéressant de noter que l'AS4/3501-6 donne des températures critiques de flambement plus hautes que celles du T300/5208 malgré le module de Young longitudinal ( $E_1$ ) élevé de ce dernier. Cependant, l'AS4/3501-6 a un coefficient longitudinal de dilatation thermique négatif ( $\alpha_1=-0.9 \times 10^{-6}/C^\circ$ ). Selon Shiau et al. [39], quand le AS4/3501-6 est soumis à une élévation de température, son coefficient longitudinal génère des forces de traction, de ce fait, la capacité de chargement de la plaque s'épuise relativement lentement. Par conséquent, les températures critiques de flambement de l'AS4/3501-6 sont les plus hautes.

### 2.3.1.2. Effet du rapport d'aspect ( $a/b$ ) sur la température critique de flambement de plaques stratifiées équilibrées

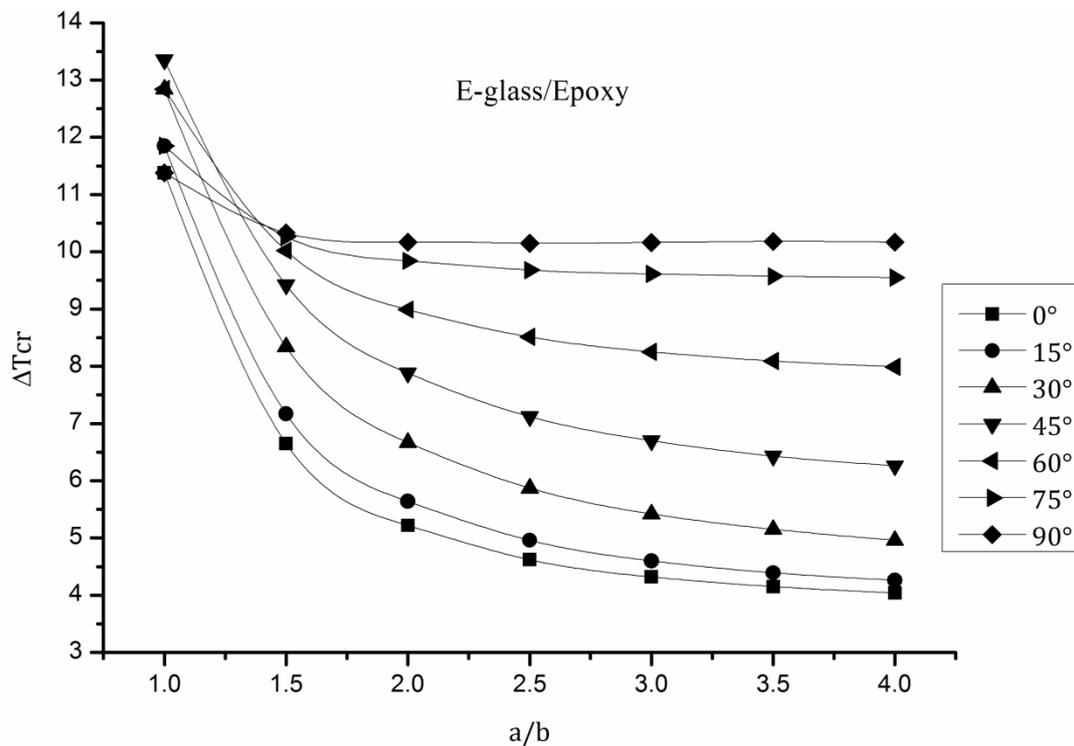
Les figures 2.5, 2.6 et 2.7 montrent l'effet du rapport d'aspect ( $a/b$ ) sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée simplement appuyée (SS). Plusieurs angles d'orientation ont été pris en considération ( $0^\circ$ ~ $90^\circ$ ) pour trois types de matériaux; T300/5208, E-glass/Epoxy et l'AS4/3501-6.

La figure 2.5 présente le cas du matériau T300/5208, on remarque qu'au fur et à mesure que l'orientation des angles approche la direction de la partie allongée de la plaque ( $a$ ), l'effet du rapport d'aspect sur les températures critiques de flambement diminue jusqu'à devenir négligeable avec les angles  $60^\circ$ ,  $75^\circ$  et  $90^\circ$ . On note aussi qu'avec l'angle  $45^\circ$  la plaque carrée donne la plus haute température critique de flambement, alors que pour les autres rapports d'aspect les plus hautes températures critiques sont celles de l'angle  $60^\circ$ .



**Figure 2. 5:** Effet du rapport d'aspect  $a/b$  sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée T300/5208 simplement appuyée.

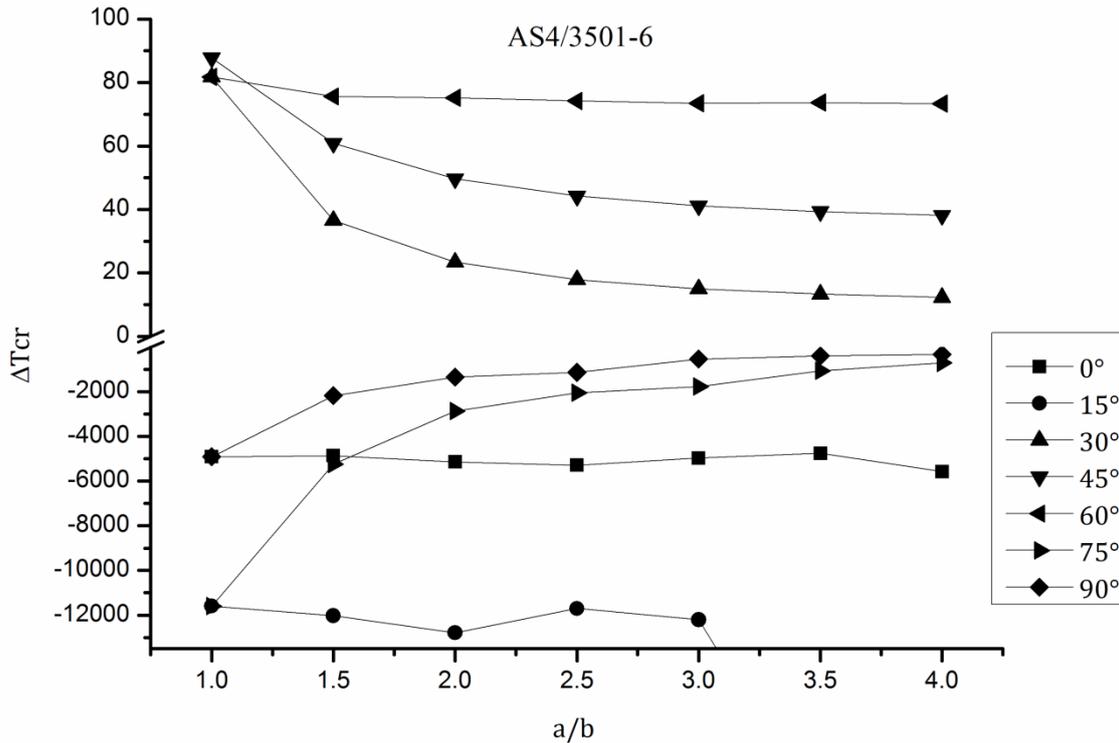
La figure 2. 6 montre le cas de l'E-glass/Epoxy. Avec ce dernier, on note le même comportement qu'avec le T300/5208, quoique l'effet du rapport d'aspect est plus prononcé avec le E-glass/Epoxy. Cependant, à la différence du cas précédent c'est avec le  $90^\circ$  que les plus hautes températures critiques de flambement sont produites.



**Figure 2. 6:** Effet du rapport d'aspect  $a/b$  sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée E-glass/Epoxy simplement appuyée.

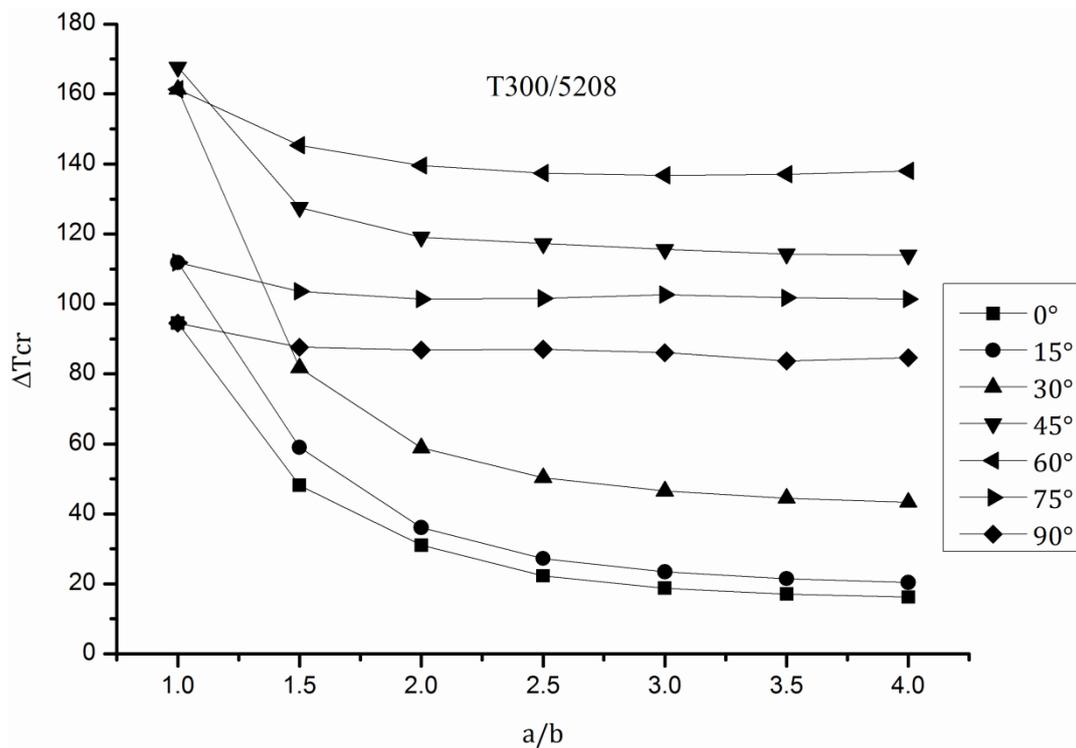
La figure 2. 7 présente le cas de l'AS4/3501-6, on remarque très bien qu'avec les angles 0°, 15°, 75° et 90° on a des températures critiques de flambement négatives. On peut comprendre par ces résultats, qu'avec certains angles d'orientation la plaque perd sa stabilité en abaissant la température plutôt que de l'élever. Selon Whitney et Ashton [20] c'est à cause de la valeur négative du coefficient axial de la dilatation thermique des fibres. Aussi, selon Whitney et Ashton [20], il existe des cas où il est virtuellement impossible de faire thermiquement voiler une plaque composite que ce soit en élevant ou en abaissant la température [20,70]. Des résultats analogues à nos résultats sont trouvés dans la littérature [78-80].

D'autre part, on remarque qu'avec les angles 30°, 45° et 60° les températures critiques de flambement décroissent avec l'augmentation du rapport d'aspect ( $a/b$ ).

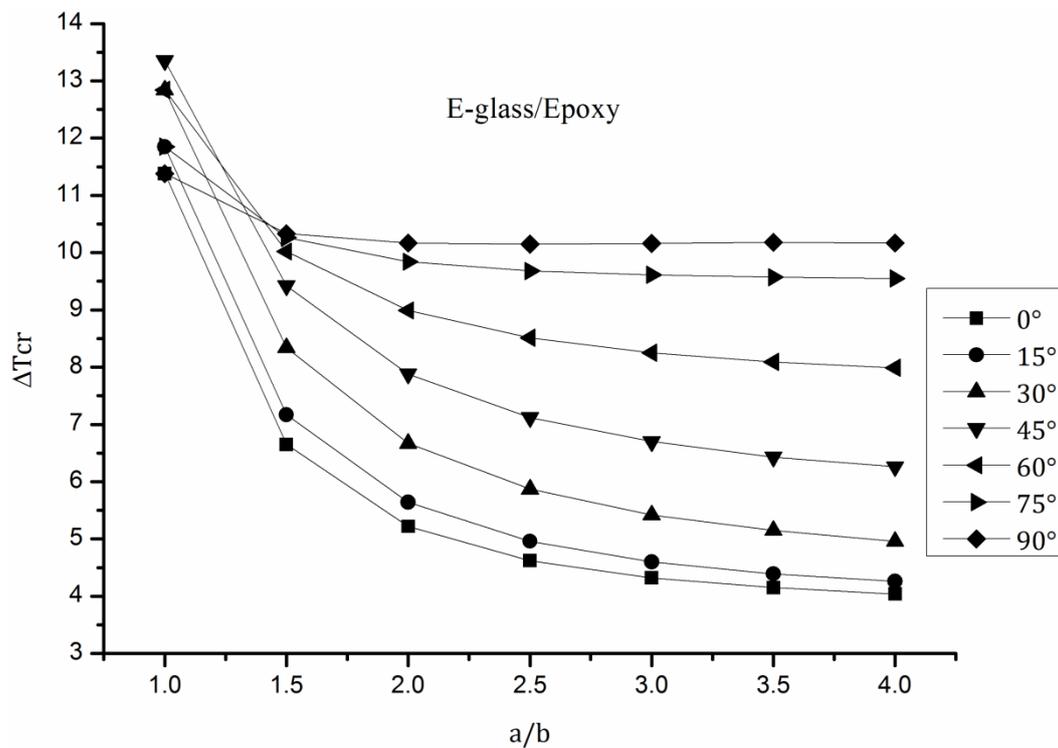


**Figure 2. 7:** Effet du rapport d'aspect  $a/b$  sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée AS/3501-6 simplement appuyée.

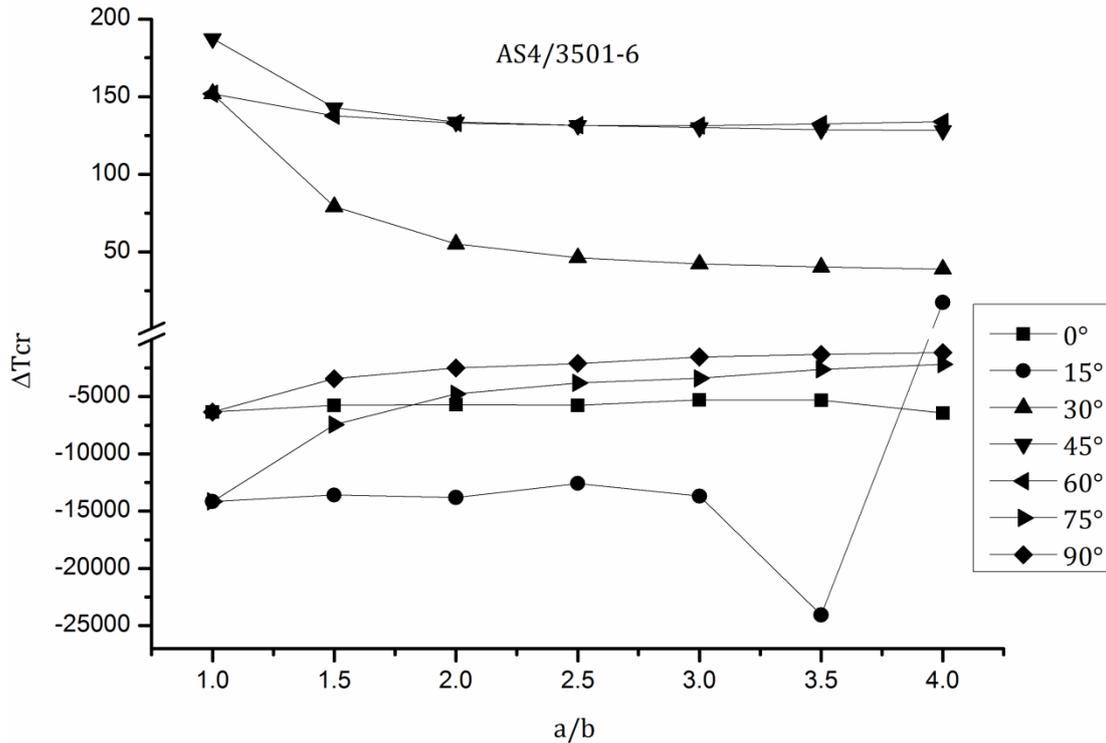
Les figures 2.8, 2.9 et 2.10 montrent l'effet du rapport d'aspect ( $a/b$ ) sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée encastree ( $cc$ ), pour les trois types de matériaux; T300/5208, AS4/3501-6 et le E-glass/Epoxy, respectivement. Pour ce cas de conditions aux limites, on observe un comportement semblable à celui simplement appuyé (SS) pour le T300/5208 (Figure 2. 5) et le E-glass/Epoxy (Figure 2. 6), à la différence bien sûr, des valeurs des températures critiques de flambement, elles sont plus élevées que celles du simplement appuyé. Ceci peut être expliqué par le fait que la plaque encastree développe une plus haute résistance à la déformation hors plan, que celle de la plaque simplement appuyée [15]. Pour le cas de l'AS4/3501-6 (Figure 2. 10), on remarque là aussi un comportement similaire que celui du simplement appuyé (Figure 2. 7), sauf pour le cas du rapport d'aspect  $a/b=4$  avec l'angle  $15^\circ$  où on note une température critique positif ( $\Delta T_{cr}=17.58$ ). On note aussi, qu'à partir de  $a/b=1.5$ , les angles d'orientation  $45^\circ$  et  $60^\circ$  donnent des températures critiques très proches.



**Figure 2. 8:** Effet du rapport d'aspect  $a/b$  sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée T300/5208 encadrée.



**Figure 2. 9:** Effet du rapport d'aspect  $a/b$  sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée E-glass/Epoxy encadrée.

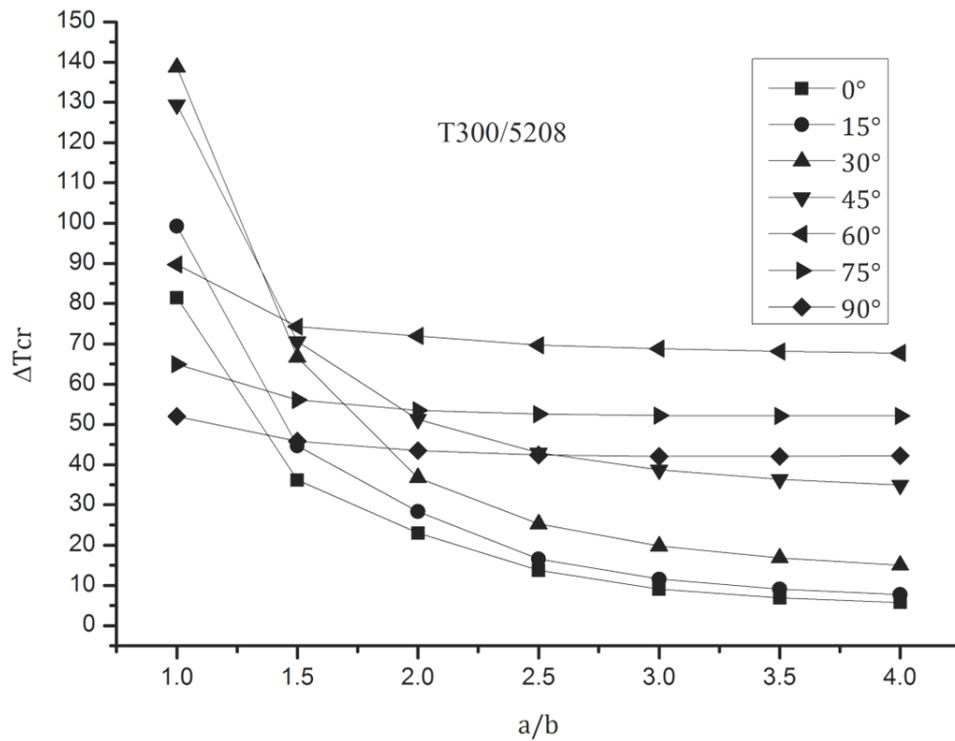


**Figure 2. 10:** Effet du rapport d'aspect  $a/b$  sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée AS4/3501-6 encastrée.

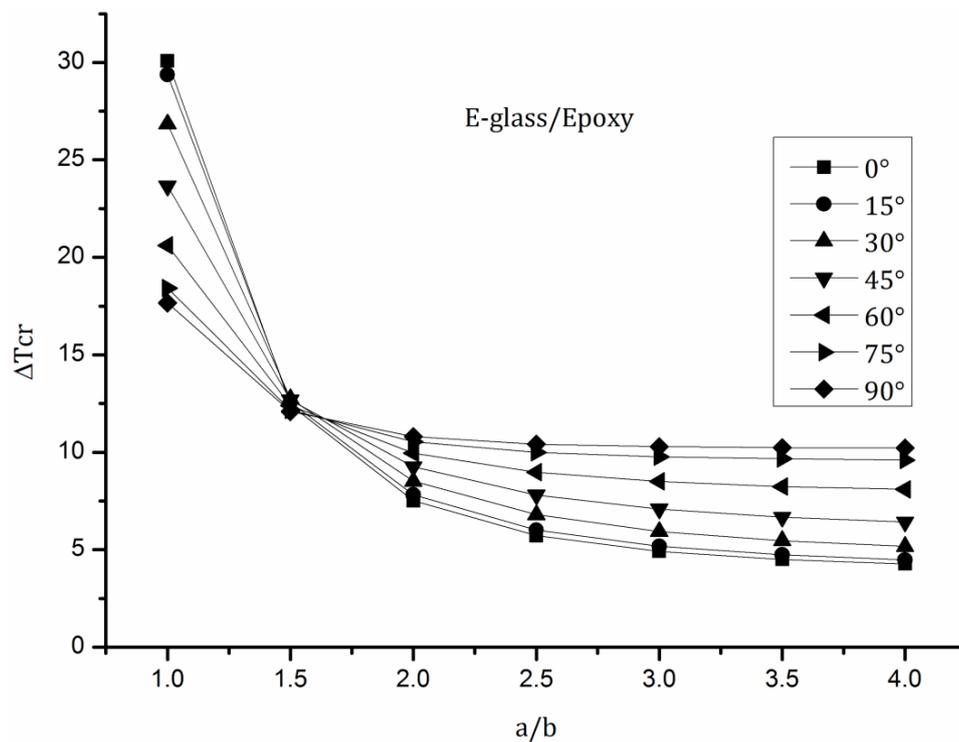
L'effet du rapport d'aspect ( $a/b$ ) sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée encastrée-simplement appuyée (CS) est présenté sur les figures 2.11, 2.12 et 2.13. Pour le cas du T300/5208 (Figure 2. 11), on remarque, à la différence des précédentes conditions aux limites (CC et SS), que les températures critiques de flambement décroissent brusquement du  $a/b=1$  au  $a/b=15$ . Cela peut être expliqué par le fait que la partie allongée de la plaque est la simplement appuyée, donc au fur et à mesure qu'on augmente de rapport d'aspect ( $a/b$ ), la partie simplement appuyée prend le dessus sur la partie encastrée dans la détermination des températures critiques de flambement, jusqu'à devenir très proches de celles de la plaque entièrement simplement appuyée (SS) (Figure 2. 5) avec  $a/b=4$ . On note aussi qu'avec l'angle  $30^\circ$  la plaque carrée donne la plus haute température critique de flambement, alors que pour les autres rapports d'aspect les plus hautes températures critiques sont celles de l'angle  $60^\circ$ .

Pour le cas de l'E-glass/Epoxy (Figure 2. 12), on note que là encore, les températures critiques de flambement diminuent avec l'augmentation du rapport d'aspect ( $a/b$ ). On note aussi, qu'avec le rapport d'aspect  $a/b=1.5$ , les angles d'orientation n'ont pas d'effet significatif sur les températures critiques de flambement de la plaque stratifiée. On remarque également, que la plaque carrée avec l'angle  $0^\circ$  donne la plus haute température critique de flambement, alors que pour les autres rapports d'aspect les plus hautes températures critiques sont celles de

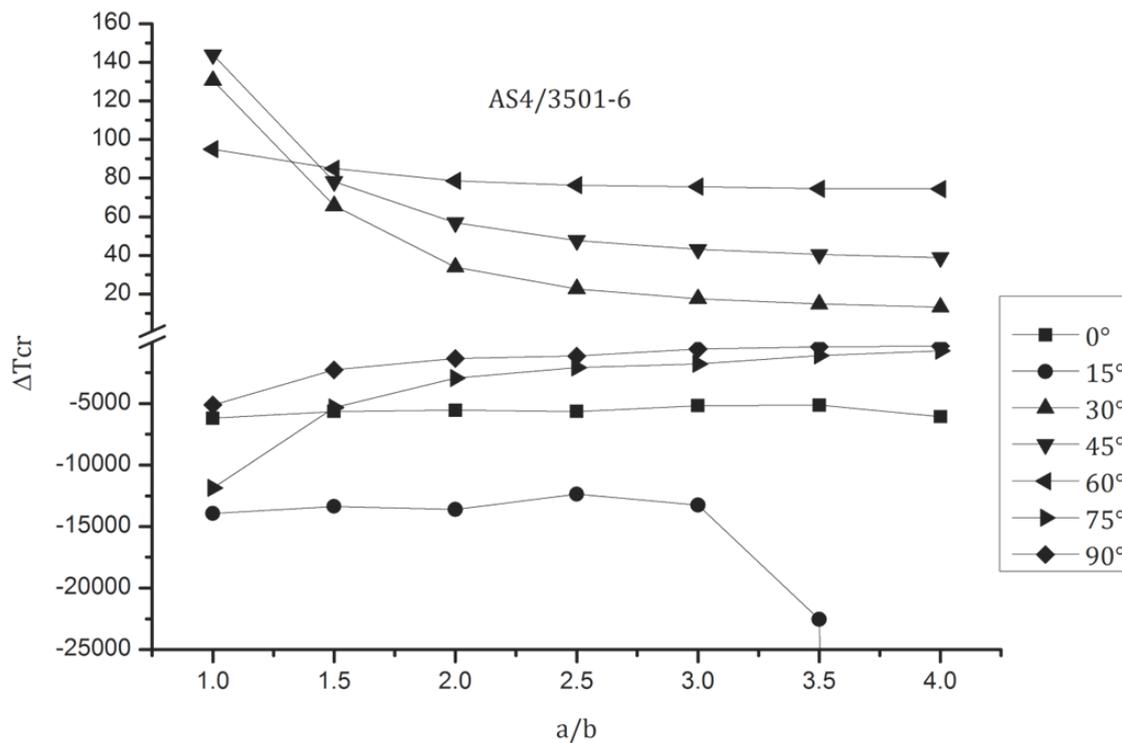
l'angle  $90^\circ$ . Pour ce qui est du cas de l'AS4/3501-6 (Figure 2. 13), on note un comportement proche au comportement de la plaque simplement appuyée (SS)(Figure 2. 7), c.-à-d., avec les angles  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $75^\circ$  et  $90^\circ$  on a des températures critiques de flambement négatives et avec les angles  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $60^\circ$  les températures critiques décroissent avec la variation du rapport d'aspect.



**Figure 2. 11:** Effet du rapport d'aspect  $a/b$  sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée T300/5208 encadrée-simplement appuyée.



**Figure 2. 12:** Effet du rapport d'aspect  $a/b$  sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée E-glass/Epoxy encadrée-simplement appuyée.



**Figure 2. 13:** Effet du rapport d'aspect  $a/b$  sur la température critique d'une plaque stratifiée équilibrée AS4/3501-6 encadrée-simplement appuyée.

### 2.3.2. Effet du nombre de couches:

Afin d'étudier l'effet du nombre de couches sur la température critique de flambement des plaques composites stratifiées, on considère une plaque mince de forme carrée ( $a/h=100$  et  $a/b=1$ ), avec une stratification symétrique  $[\pm\theta]_s$  pour un empilement de 4, 6, 8 et 10 couches. Trois différents types de conditions aux limites (CC, SS, CS) ainsi que plusieurs angles d'orientation ( $0^\circ\sim 90^\circ$ ), ont été pris en considération pour deux types de matériaux; à savoir: le T300/5208 Graphite/Epoxy et le E-glass/Epoxy (voir tableau 2. 9).

Les figures 2.14 et 2.15 présentent les cas de la plaque simplement appuyée (SS) et encadrée (CC), respectivement. En raison de la symétrie sur les conditions de bords, seulement quatre angles d'orientation ont été considéré. On remarque pour les deux conditions aux limites ainsi que pour les deux types de matériaux que les températures critiques de flambement augmentent avec l'augmentation du nombre de couches. On remarque aussi qu'au fur et à mesure qu'on augmente le nombre de couches l'écart entre les températures critiques diminue. Selon Chen et Chen [36] on approche la solution orthotrope, chaque fois qu'on augmente le nombre de couches, ce qui amoindrit l'effet du couplage. On note aussi, que pour le cas de la plaque simplement appuyée (SS) avec les deux types de matériaux (Figure 2. 14), l'angle  $45^\circ$  provoque les températures critiques les plus élevées. Pour le cas de la plaque encadré (CC) (Figure 2. 15), le T300/5208 donne les températures critiques les plus hautes avec l'angle  $45^\circ$ , alors que l'E-glass/Epoxy donne les températures critiques les plus élevées avec l'angle  $0^\circ$ .

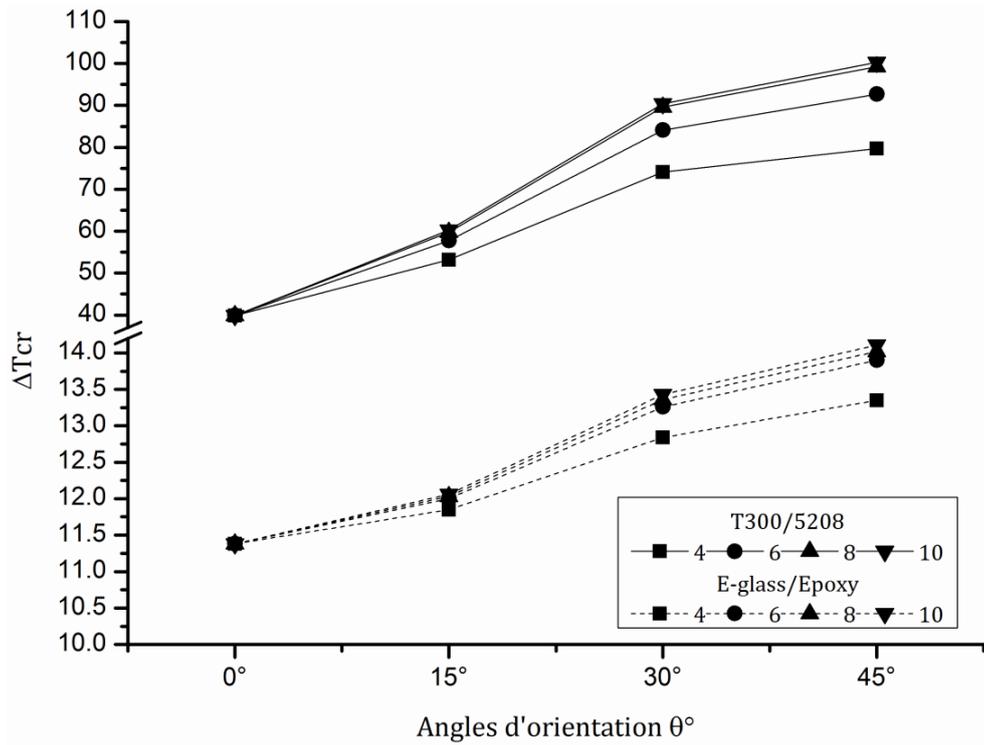


Figure 2. 14: L'effet du nombre de couches sur les températures critiques de flambement de plaques stratifiées équilibrées simplement appuyée (SS).

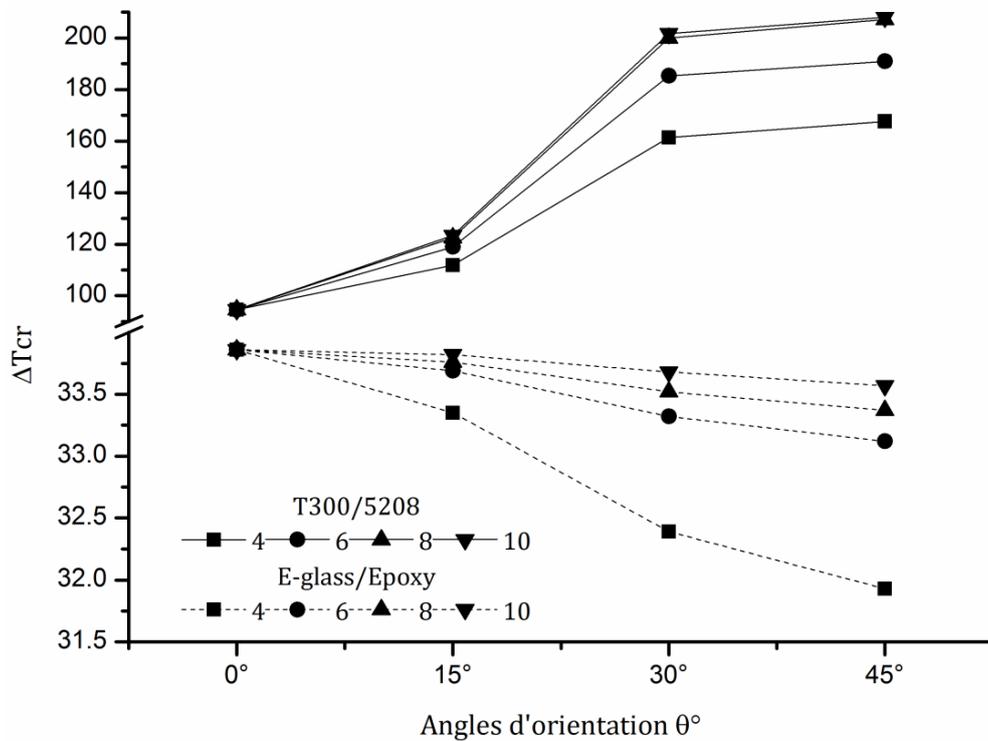
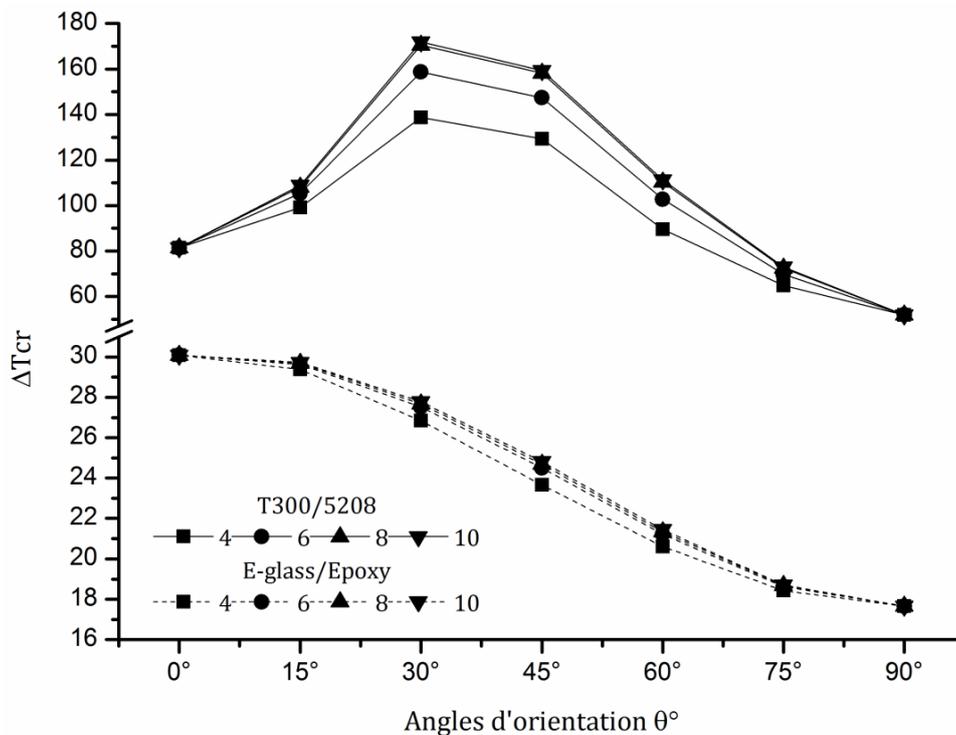


Figure 2. 15: L'effet du nombre de couches sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée encastree (CC).

La figure 2. 16 illustre le cas de la plaque encadrée-simplement appuyée (CS). Avec ce cas de condition aux limites, on note un comportement semblable à celui des précédentes conditions aux limites (SS, CC), c.-à-d., qu'avec l'augmentation du nombre de couches l'écart entre les températures critiques diminue. On remarque qu'avec le T300/5208, les températures critiques de flambement augmentent avec la variation de l'angle d'orientation jusqu'à atteindre son maximum avec l'angle 30°, ensuite elles commencent à décroître jusqu'à l'angle 90°. Pour le cas du l'E-glass/Epoxy, l'augmentation du nombre de couches n'a pas d'effet significatif sur les températures critiques de flambement comparant avec le cas du T300/5208. On note aussi, que les températures critiques de flambement décroissent avec la variation de l'angle d'orientation.



**Figure 2. 16:** L'effet du nombre de couches sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée encadrée-simplement appuyée (CS).

### 2.3.3. L'effet de l'anisotropie:

D'après les résultats illustrés précédemment ainsi qu'à travers la littérature, on a constaté que la température critique de flambement des plaques stratifiées dépend considérablement des propriétés mécaniques du matériau utilisé [70]. Effectivement, au cours des dernières décennies, beaucoup d'auteurs ont étudié l'effet du rapport des modules de Young et du rapport des coefficients de dilatation thermique sur le comportement au flambement thermique des plaques stratifiées [20,28,33,35-37,40,51,53,81,82]. Cependant, à notre connaissance, tous les

cas étudiés dans la littérature traitent, seulement, le cas de plaques simplement appuyée et/ou encadrée, à l'exception du travail de Chen et Liu [33]. Ces derniers, ont pris en considération une multitude de combinaison de conditions aux limites pour étudier l'effet du rapport des modules de Young sur la température critique de flambement de plaques stratifiées équilibrées antisymétriques.

Dans la présente section on va étudier, sous différentes combinaisons de conditions aux limites et angles d'orientation, l'effet du rapport des modules de Young ( $E_L/E_T$ ) ainsi que du rapport des coefficients de dilatation thermique ( $\alpha_T/\alpha_L$ ) sur la température critique de flambement des plaques composites stratifiées.

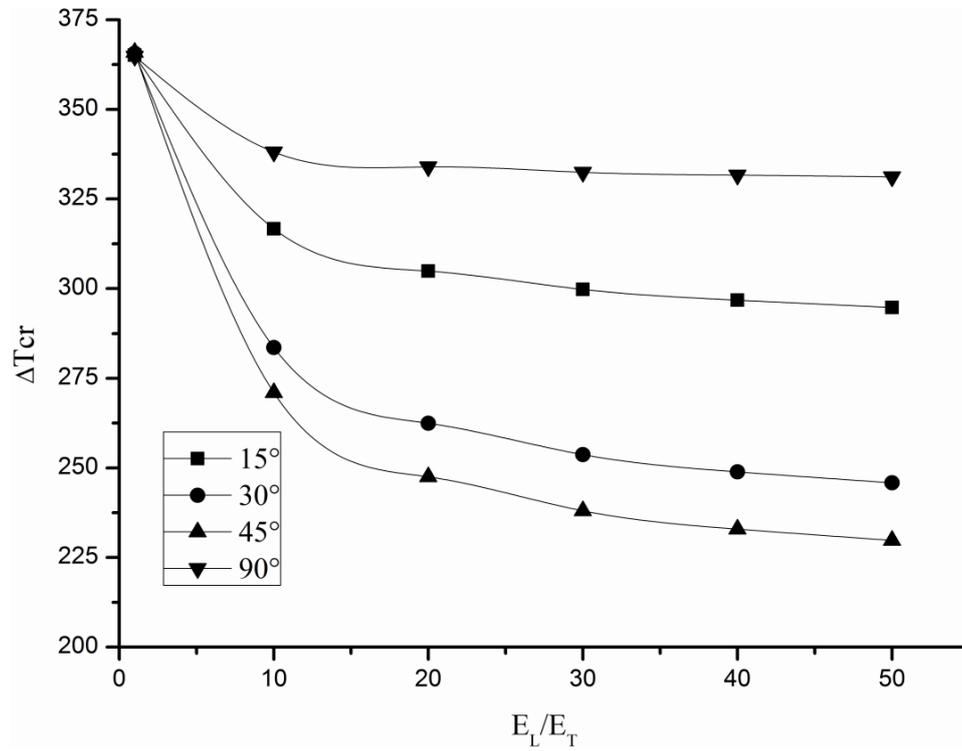
Dans ce qui suit, les plaques sont minces et de forme carrée ( $a/h=100$ ,  $a/b=1$ ) et sont constitués de quatre couches avec une stratification  $[\pm\theta]_s$ .

### **2.3.3.1. L'effet du rapport des modules de Young ( $E_L/E_T$ ) :**

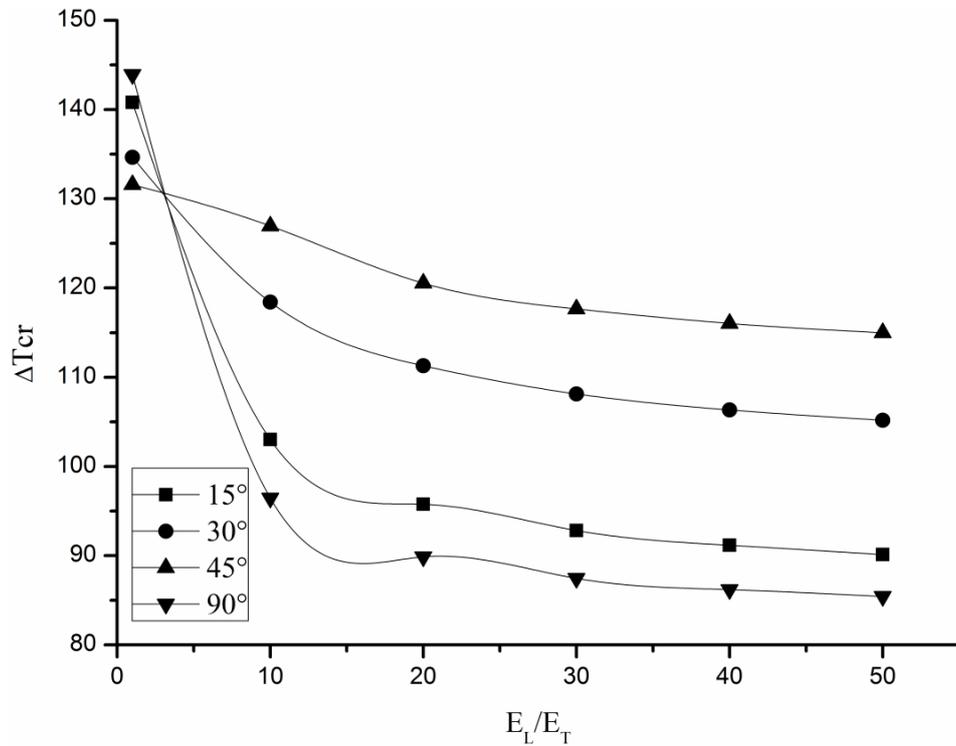
Dans cette section, on considère l'effet du rapport des modules de Young ( $E_L/E_T$ ) sur la température critique de flambement de plaques stratifiées pour différents angles d'orientation et combinaisons de conditions aux limites. Les propriétés matérielles des plaques sont prises comme suit [36] :

$$G_{LT}/E_T = 0.5, \nu = 0.25, \alpha_L = \alpha_T = 1.0 \times 10^{-6}$$

Les figures 2.17 et 2.18 montrent la variation des températures critiques de flambement en fonction du rapport des modules de Young ( $E_L/E_T$ ) sous les conditions aux limites encadré (CC) et simplement appuyé (SS), respectivement. En raison de la symétrie sur les conditions de bord, seulement, quatre angles d'orientation sont pris en considération. On remarque que pour les deux conditions aux limites ainsi que pour tous les angles d'orientation, les températures critiques de flambement décroissent avec l'augmentation du rapport  $E_L/E_T$ . Il est à noter que pour la condition aux limites encadré (CC), les angles  $90^\circ$  et  $15^\circ$  donnent les températures critiques de flambement les plus élevées, alors que le  $45^\circ$  donne les plus basses. A la différence du cas de la plaque encadrée, l'angle d'orientation  $45^\circ$  avec la plaque simplement appuyée donne les températures critiques les plus hautes.



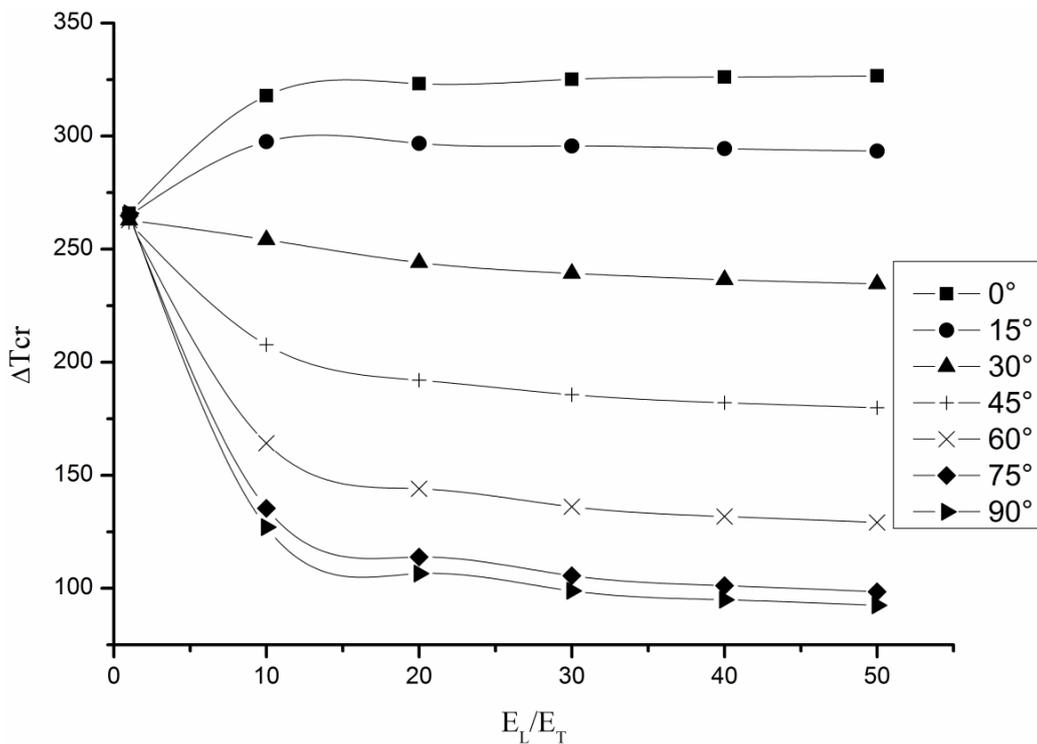
**Figure 2.17:** L'effet du rapport  $E_L/E_T$  sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée encastree (CC).



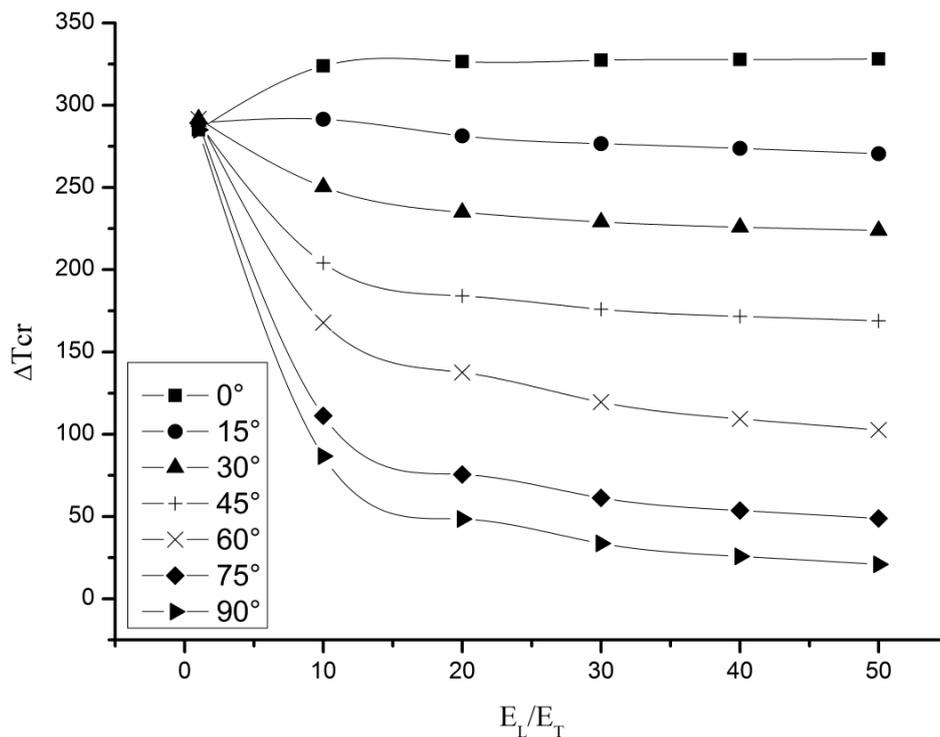
**Figure 2.18:** L'effet du rapport  $E_L/E_T$  sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée simplement appuyée (SS).

L'influence du rapport des modules de Young ( $E_L/E_T$ ) sur les températures critiques de flambement pour les cas de plaques encadrée-simplement appuyée (CS) et encadrée-libre (CF) est présenté dans les figures 2.19 et 2.20, respectivement. Avec ce type de conditions aux limites, on note que lorsque les fibres sont dans la direction des arrêtes encadrées ( $0^\circ$ - $30^\circ$ ), les températures critiques sont légèrement affectées par l'augmentation du rapport  $E_L/E_T$ . À mesure que les fibres approchent les bords libres de la plaque, les températures critiques de flambement diminuent avec l'accroissement du rapport  $E_L/E_T$ .

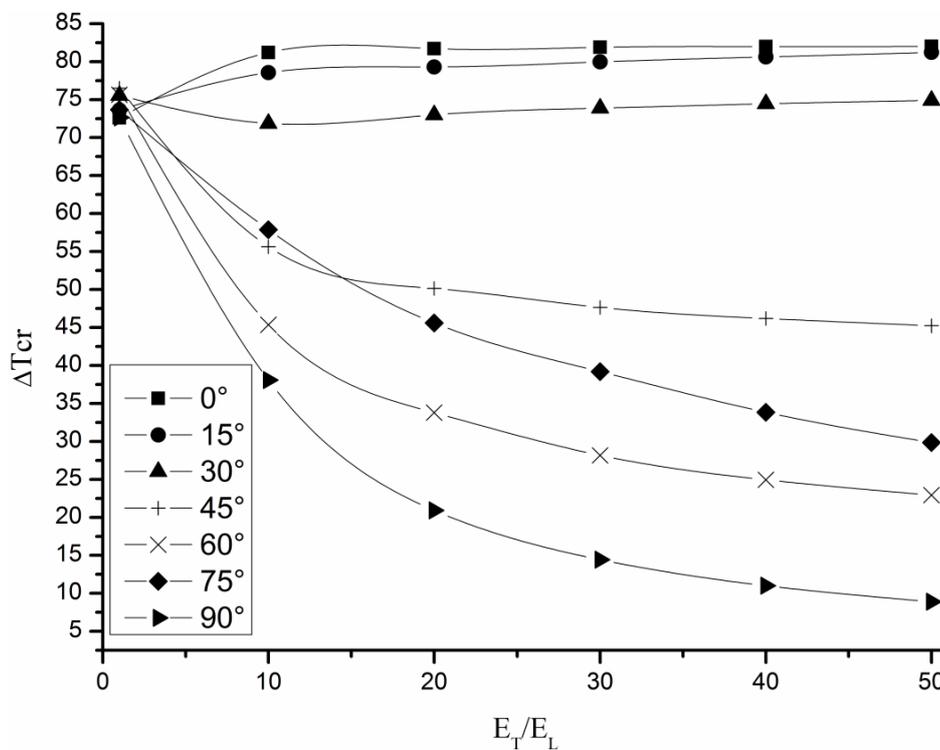
La figure 2. 21 présente le cas de la plaque simplement appuyée-libre (SF), on constate ,avec ce type de conditions aux limites, que les températures critiques de flambement sont les plus basses en les comparant à celles trouvées avec les précédentes conditions aux limites CC, SS, CS et CF. le même comportement pour cette condition aux limites (SF) a été trouvé par la solution analytique présentée par [33]. On note aussi dans la figure 2. 21, que lorsque les fibres d'orientation s'approchent des arrêtes libre, les températures critiques de flambement décroissent significativement avec l'augmentation du rapport  $E_L/E_T$ .



**Figure 2. 19:** L'effet du rapport  $E_L/E_T$  sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée encadrée-simplement appuyée (CS).



**Figure 2.20:** L'effet du rapport  $E_L/E_T$  sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée encastree-libre (CF).



**Figure 2.21:** L'effet du rapport  $E_L/E_T$  sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée simplement appuyée-libre (SF).

D'après les figures 2.17-2.12, on note que pour toutes les conditions aux limites, plus spécialement l'encastree (CC), les angles d'orientation n'ont pas un effet significatif sur les

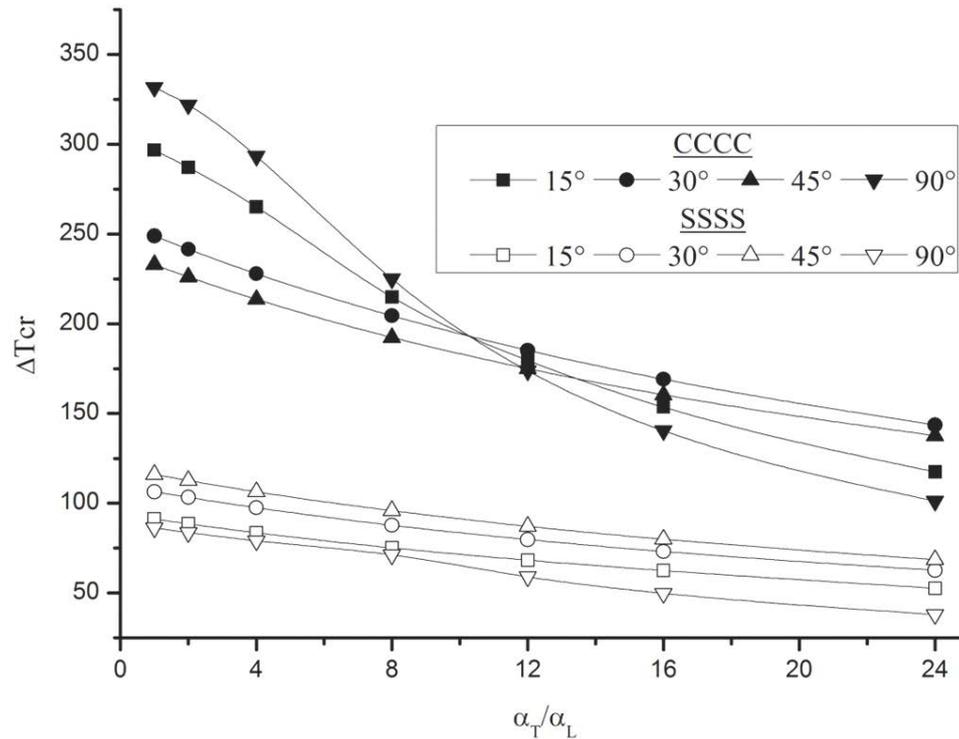
températures critiques avec le rapport  $E_L/E_T = 1$ , où ce dernier est proche du cas isotrope. Ceci nous rappelle l'étude de Jones [70], qui a conclu que pour le cas de plaques isotropes, le changement dans la température de flambement est indépendant du module de Young.

### 2.3.3.2. *L'effet du rapport des coefficients de dilatation thermique ( $\alpha_T/\alpha_L$ )*

Dans cette section, on considère l'effet du rapport des coefficients de dilatation thermique ( $\alpha_T/\alpha_L$ ) sur la température critique de flambement de plaques stratifiées pour différents angles d'orientation et combinaisons de conditions aux limites. Les propriétés matérielles des plaques sont prises comme suit [28] :

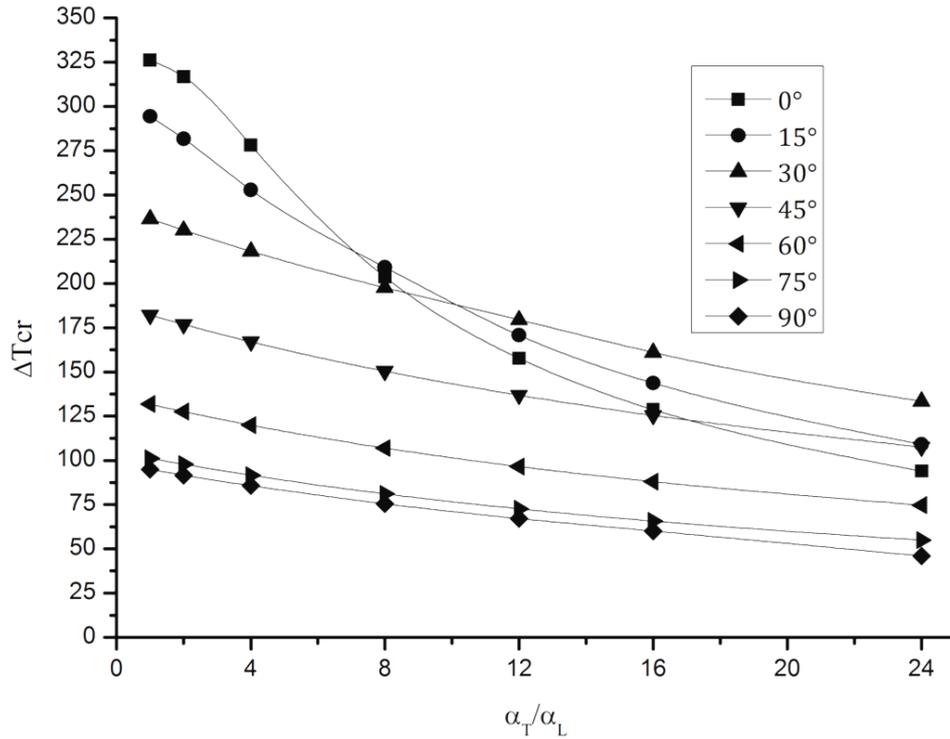
$$E_L/E_T = 40, G_{LT}/E_T = 0.5, \nu = 0.25$$

La figure 2. 22 présente l'effet du rapport des coefficients de dilatation thermique ( $\alpha_T/\alpha_L$ ) sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée encadrée (CC) et simplement appuyée (SS). On remarque sur cette figure, que les températures critiques de flambement diminuent avec l'augmentation du rapport ( $\alpha_T/\alpha_L$ ), pour les deux types de conditions aux limites. Dans le cas de la plaque encadrée, on observe que lorsque  $\alpha_T/\alpha_L = 1$ , les angles d'orientation  $90^\circ$  et  $15^\circ$  donnent les températures critiques les plus élevées, mais à mesure qu'on augmente le rapport  $\alpha_T/\alpha_L$ , les températures critiques de flambement avec le  $90^\circ$  et le  $15^\circ$  diminuent significativement et à être les plus basses pour  $\alpha_T/\alpha_L = 24$ .

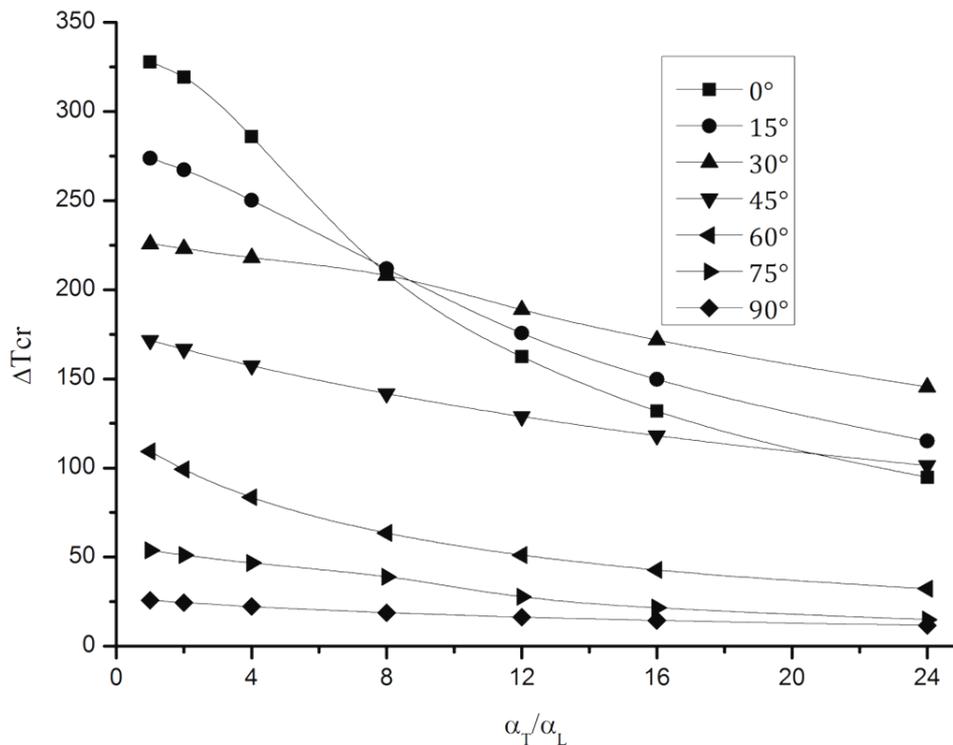


**Figure 2. 22:** L'effet du rapport  $\alpha_T/\alpha_L$  sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée encastée (CC) et simplement appuyée (SS).

Les figures 2.23 et 2.24 montrent l'influence du rapport des coefficients de dilatation thermique ( $\alpha_T/\alpha_L$ ) sur la température critique de flambement d'une plaque encastée-simplement appuyée (CS) et encastée-libre (CF), respectivement. Avec ces dernières, les températures critiques de flambement décroissent avec l'accroissement du rapport  $\alpha_T/\alpha_L$ . En outre, on remarque que les allures des courbes qui représentent les angles d'orientation ( $0^\circ$ - $30^\circ$ ) (Figures 2.23 et 2.24) sont semblables à celles du cas de la plaque entièrement encastée (CC) (Figure 2. 22) et que leurs températures critiques de flambement sont très proches.



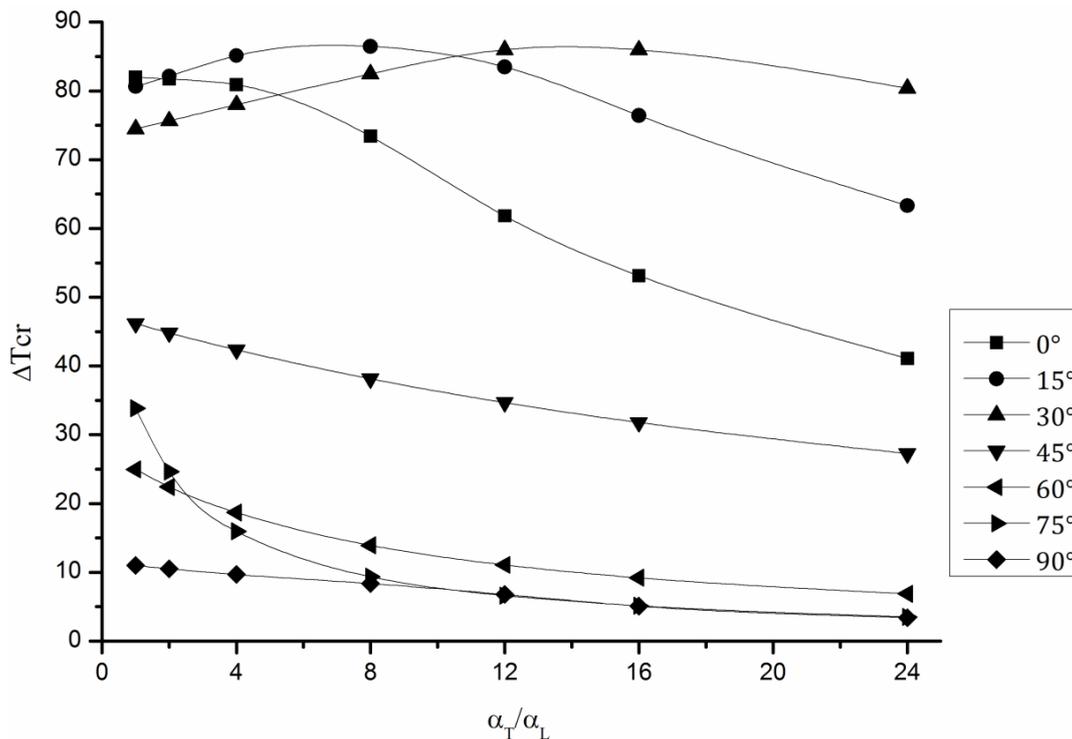
**Figure 2. 23:** L'effet du rapport  $\alpha_T/\alpha_L$  sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée encastree-simplement appuyée (CS).



**Figure 2. 24:** L'effet du rapport  $\alpha_T/\alpha_L$  sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée encastree-libre (CF).

La figure 2. 25 présente le cas de la plaque stratifiée simplement appuyée-libre (SF). Comme il a été constaté avec l'effet de module ratio ( $E_L/E_T$ ) (Figure 2. 21), on note les plus

basses températures critiques de flambement comparées à celles trouvées avec les précédentes conditions aux limites (CC, SS, CS, CF). Avec ce cas de conditions aux limites (SF), comme on s'y attendait, les températures critiques de flambement diminuent avec l'augmentation du rapport  $\alpha_T/\alpha_L$ , à l'exception des angles d'orientation  $15^\circ$  et  $30^\circ$ , où on distingue une légère augmentation des températures critiques jusqu'à  $\alpha_T/\alpha_L = 12$ , ensuite, elles reviennent à décroître avec l'augmentation du rapport des coefficients de dilatation thermique ( $\alpha_T/\alpha_L$ ).



**Figure 2. 25:** L'effet du rapport sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée simplement appuyée-libre (SF).

## 2.4. Conclusion

Le présent chapitre avait pour but d'étudier le flambement thermique des plaques composites stratifiées minces. Pour ce faire, l'élément fini qui a été présenté dans le chapitre 2 a été utilisé. La première partie de ce chapitre a été consacré à la validation de la précision de l'élément fini par le biais de plusieurs tests disponibles dans la littérature. A travers les résultats trouvés, on a vu que l'élément présente une bonne précision ainsi qu'une bonne rapidité de convergence.

D'autre part, dans ce chapitre, une étude paramétrique a été présentée portant sur l'effet de certains paramètres influençant la température critique de flambement des plaques stratifiées minces tel que: Géométrie de la plaque, conditions aux limites et stratification

Dans cette étude trois types de matériaux qui sont très utilisés dans l'industrie ont été considérés, à savoir: le T300/5208 Graphite/Epoxy, le AS4/3501-6 Graphite/Epoxy et le E-glass/Epoxy. Cette étude a montré:

- Avec certaines séquences d'empilement, les températures critiques de flambement sont légèrement affectées par le rapport d'aspect
- Sous certains angles d'orientation avec des matériaux ayant un coefficient de dilatation thermique négatif tel que le « AS4/3501-6 », les plaques stratifiées perdent leurs stabilités en abaissant la température plutôt que de l'élevée.
- Dans le cas général, les températures critiques de flambement augmentent avec l'augmentation du nombre de couches. Plus encore, au fur et à mesure qu'on augmente le nombre de couches, l'écart entre les températures critiques diminue.
- les températures critiques de flambement, généralement, diminuent avec l'augmentation du rapport (EL/ET) ou avec le rapport ( $\alpha_T/\alpha_L$ ).

## **Chapitre 3**

### **Plaques composites stratifiées avec ouverture**

### 3.1. Introduction

Les structures en matériaux composites (plaques, coques, etc.), par nécessité, sont souvent équipées d'ouvertures de différentes formes et dimensions, plus spécialement dans les structures aéronautiques et aérospatiales, en raison de gain de poids, ventilation ou comme portes d'accès pour les systèmes mécaniques et électriques [81,83]. L'existence de ce type de singularité dans les structures en matériaux composites engendre une distribution non-uniforme des contraintes [84]. Ainsi, ce dernier peut affecter le comportement au flambement thermique des structures composite.

Dans la thématique du flambement thermique des plaques stratifiées munies d'ouvertures, on peut distinguer le travail de Chang et Shiao [85] où le flambement thermique des plaques circulaires isotropes et des plaques stratifiées antisymétriques équilibrées munies d'ouvertures circulaires sous une élévation uniforme de température a été étudié. Les auteurs ont présenté une solution analytique basée sur la théorie classique des stratifiées pour étudier les plaques isotrope circulaire et une solution éléments finis basée sur la théorie d'ordre supérieur pour étudier les plaques composites stratifiées. En suite, Chen et al. [81] ont étudié le flambement thermique des plaques stratifiées antisymétriques ayant des ouvertures circulaires sous une distribution uniforme ou non-uniforme de la température. Afin d'inclure les effets du cisaillement transverse, la théorie du premier ordre a été considérée. Noor et al. [44] ont présenté une étude sur le flambement thermomécanique des plaques multicouches trouées. Les auteurs ont utilisé une formulation mixte basée sur la théorie du premier ordre. Par la suite, Kim et Noor [86] ont étudié le flambement et le post-flambement des panneaux composites trouées sous différentes combinaisons de chargement mécanique et thermique. Les auteurs ont, aussi, étudié le flambement et le post-flambement des panneaux composites trouées soumises à un chargement en cisaillement et une variation de la température [87]. Avci et al. [88] ont présenté une étude sur le flambement thermique des plaques stratifiées hybrides trouées avec une stratification symétrique et antisymétrique et, le flambement thermique des plaques stratifiées rectangulaires munies d'ouverture circulaire [25]. Les auteurs ont utilisé un élément fini à huit noeuds basé sur la théorie du premier ordre. En utilisant le même élément fini que Avci et ses collègues [88,89], Şahin [90] a étudié le flambement thermique des plaques trouées stratifiées hybrides équilibrées symétriques et antisymétriques. En 2014, Shaterzadeh et al. [91] ont étudié le flambement thermique des plaques stratifiées symétriques et antisymétriques munies d'ouverture circulaires centrées et excentrées.

Tous les travaux précitées, ci-dessus, traitent seulement les plaques composites ayant seulement des ouvertures circulaires. Malheureusement, la littérature n'a pas donné beaucoup d'attention à l'étude des plaques stratifiées avec des ouvertures rectangulaires. A notre connaissance, il y a que le travail de Topal et Uzman [84], où les auteurs ont étudié l'effet des ouvertures circulaires et rectangulaires sur l'optimisation de la température critique de flambement des plaques stratifiées minces.

Dans ce qui suit, on va étudier le flambement thermique des plaques stratifiée munie d'ouvertures de forme carrées centrées. Trois types de matériaux ont été choisis, à savoir: le T300/5208, l'AS4/3501-6 et le E-glass/epoxy. Ainsi, une comparaison est faite entre les trois types de matériaux prémentionnés en utilisant plusieurs combinaisons de conditions aux limites, taille de l'ouverture et séquences d'empilements afin de mieux comprendre le comportement de ce type de structures.

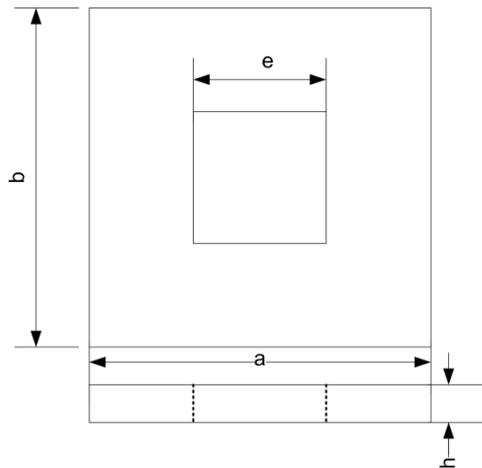
### 3.2. Résultats et discussions

Dans cette section, on va présenter une étude comparative sur le flambement thermique des plaques carrées composites stratifiées munies d'ouverture carrée centrée ( $a/h=100$ ,  $a/b=1$ ) pour un maillage de  $20 \times 20$ . La figure 3. 1 schématise les propriétés géométriques des plaques utilisées. Trois types de matériaux ont été considérés, à savoir:

- T300/5208 Graphite/Epoxy,
- AS4/3501-6 Graphite/Epoxy
- E-glass/Epoxy.

Plusieurs combinaisons de conditions aux limites, angle d'orientation et taille d'ouvertures ont été pris en considération, pour deux types de stratifications :

- $[(90/0)_2]_s$  pour le cas des stratifiés croisés
- $[\pm\theta]_s$  pour le cas des stratifiés équilibrés

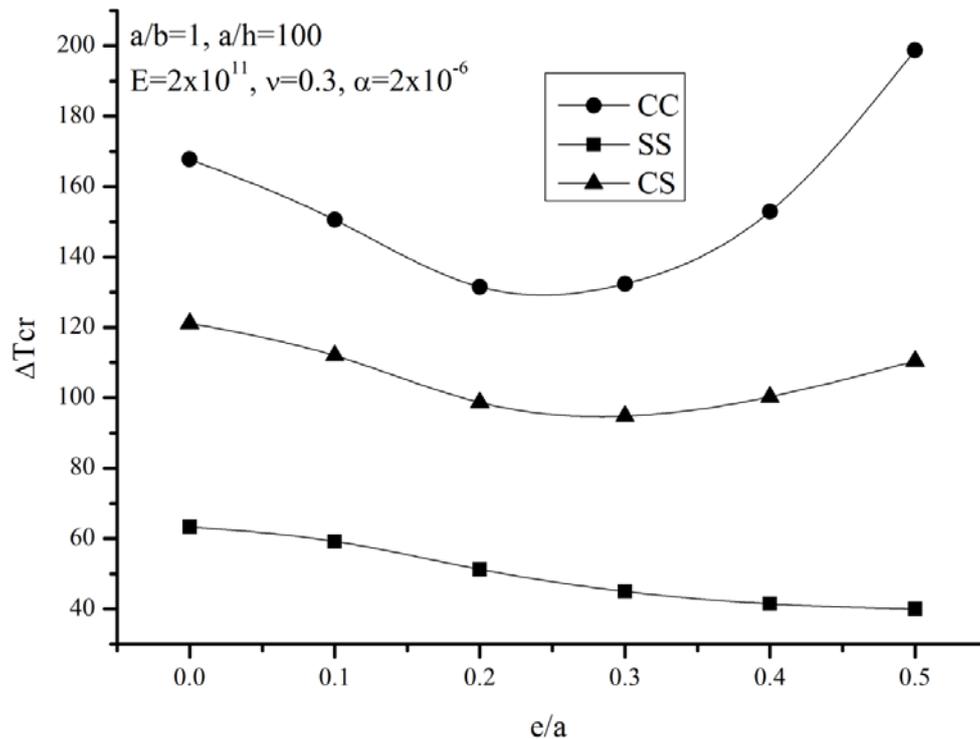


**Figure 3. 1:** Géométrie de la plaque avec ouverture

Avant d'entamer l'étude du flambement thermique des plaques stratifiées, on a vu qu'il est nécessaire de voir d'abord le cas des plaques isotropes. La figure 3. 2 montre l'effet de la taille de l'ouverture centrée sur la température critique de flambement d'une plaque isotrope sous différentes conditions aux limites, à savoir: encastree (CC), simplement appuyée (SS) et encastree-simplement appuyée (CS). On remarque qu'avec le cas de la plaque encastree, la température critique de flambement décroisse avec l'augmentation de la taille de l'ouverture jusqu'à  $e/a=0.2$ , ensuite elle commence à croître avec l'accroissement de la taille de l'ouverture. Dans le cas de la plaque simplement appuyée, la température critique de flambement diminue avec l'augmentation de la taille de l'ouverture. Avec le cas de la plaque encastree-simplement appuyée, la température critique de flambement s'affaiblit avec l'augmentation de l'ouverture jusqu'à  $e/a=0.3$ , ensuite commence à augmenter légèrement avec l'accroissement de la taille de l'ouverture. Un comportement similaire au nôtre, pour le cas du (CC) et du (SS), a été reporté par Ko [83] pour le cas des plaques isotropes. Ce comportement a été, aussi, observé dans le cas du flambement mécanique des plaques ayant des ouvertures centrés d'une forme circulaire ou carrée[83,92].

Nous avons pré-mentionné dans l'introduction du présent chapitre, qu'en présence d'ouverture dans la plaque engendre une distribution non uniforme du champ de contraintes. Afin d'essayer de comprendre cette augmentation de la température critique de flambement dans le cas de la plaque encastree (CC), nous avons réuni la distribution des efforts résultants en fonction de la taille de l'ouverture dans les tableaux 3.1 et 3.2 pour le cas de la condition encastree (CC) et simplement appuyée (SS), respectivement. D'après les tableaux 3.1 et 3.2, on remarque que l'augmentation de la taille de l'ouverture réduit la surface d'action et qu'au-delà de  $e/a= 0.3$  les efforts résultants diminuent considérablement pour les deux conditions aux

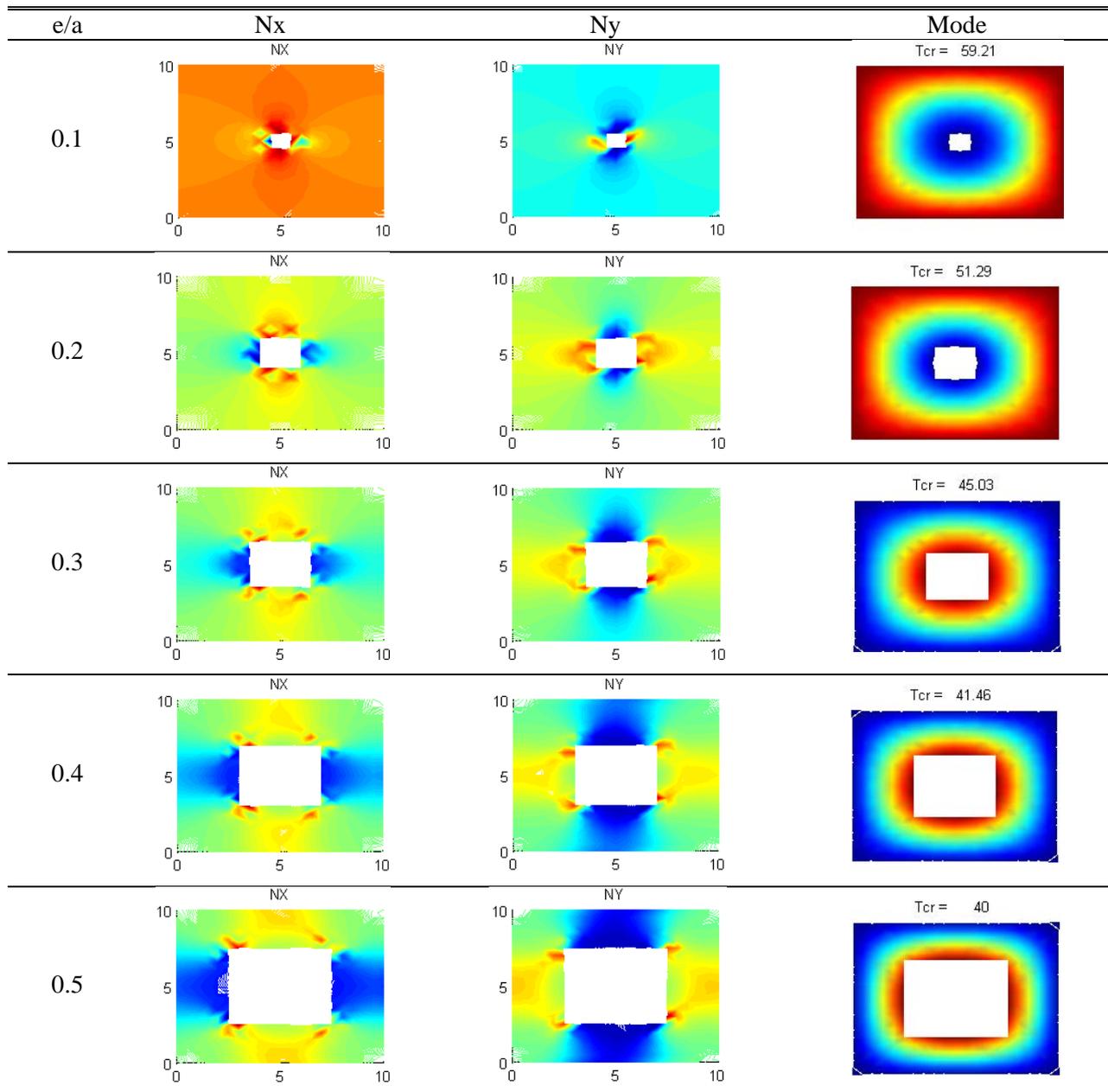
limites (CC, SS). Il bien connu qu'une faible concentration de contraintes peut causer une augmentation de la résistance au flambement et vice versa [44,92]. D'autre part, la différence entre les conditions aux limites encastées (CC) et simplement appuyée (SS) est que l'encastée (CC) permet moins de degrés de liberté que le simplement appuyée (SS) [92]. D'ailleurs, c'est cette même raison qui rend les températures critiques de flambement des plaques encastées (CC) plus hautes que celles des autres conditions aux limites. Par conséquent, ces deux paramètres, type de fixation et réduction des efforts résultants, peuvent être les facteurs causant cette augmentation de la température dans le cas des plaques encastées (CC). Dans les tableaux 3.1 et 3.2, nous avons aussi présenté les modes de flambement. On note qu'il n'y a pas de changement de modes pour les deux conditions aux limites.



**Figure 3. 2:** Effet de la taille d'ouverture et des conditions aux limites sur la température critique de flambement d'une plaque isotrope.

**Tableau 3. 1:** Tracé de contour de la répartition des efforts résultants et les modes de flambement de plaques isotropes encastées (CC) munie d'ouverture

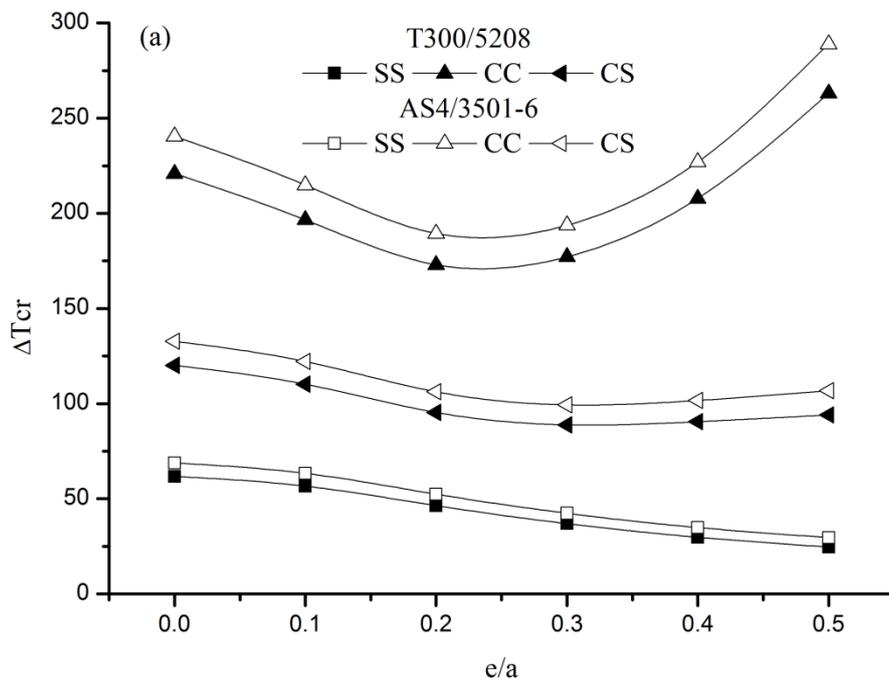
e/a	Nx	Ny	Mode
0.1			
0.2			
0.3			
0.4			
0.5			

**Tableau 3. 2:** Tracé de contour de la répartition des efforts résultants et les modes de flambement de plaques isotropes simplement appuyée (SS) munie d'ouverture

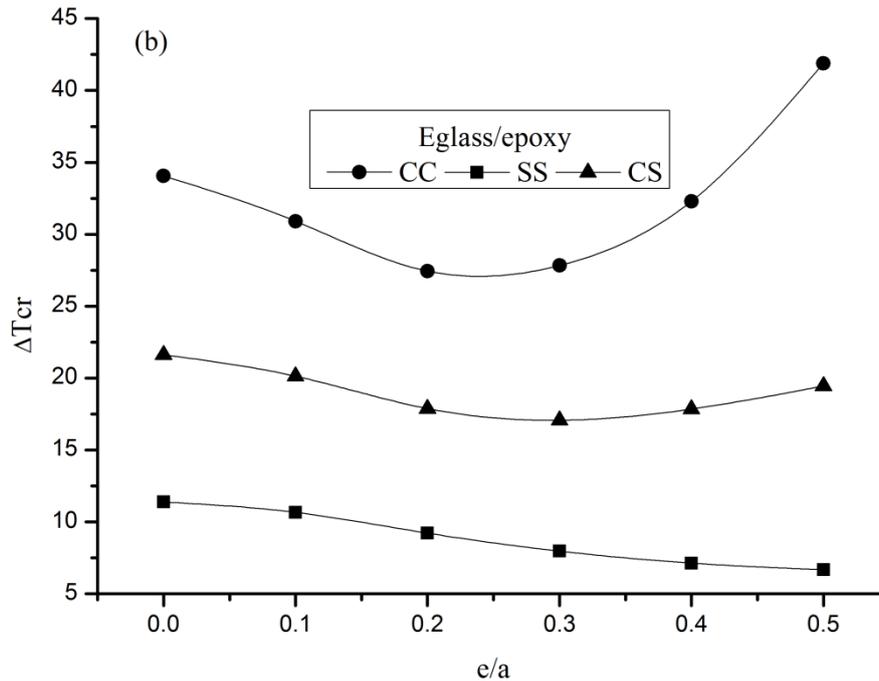
Les figures 3.3 et 3.4 présentent l'effet de la taille de l'ouverture sur les températures critiques de flambement de plaques stratifiées croisées faites de : T300/5208 (Figure 3. 4), AS4/3501-6 (Figure 3. 4) et E-glass/Epoxy (Figure 3. 4). Trois types de conditions aux limites sont considérées (CC, SS et CS).

D'après ces figures, on constate le même comportement qu'avec la plaque isotrope (Figure 3. 2). Il est à noter qu'on n'a pas trouvé des résultats pour comparaison dans la littérature. Cependant, un comportement similaire a été reporté pour le cas du flambement

thermique des plaques munies d'ouvertures circulaires [44,81,89] ainsi que pour le flambement mécanique [44,93]. Toutefois, nous croyons que le phénomène du flambement en général est affecté beaucoup plus par la géométrie et les conditions aux limites appliquées que par les propriétés matérielles de la plaque, ce qui pourrait expliquer cette similitude dans le comportement. D'autre part, nous avons réuni la distribution des efforts résultants pour les cas encastéré et simplement appuyé de la plaque stratifiée avec le T300/5208 dans les tableaux 3.3 et 3.4. D'après les tableaux, on note une distribution similaire à celle du cas de la plaque isotrope sauf que la réduction dans les efforts résultants est plus prononcé avec la plaque composite. On note aussi un changement de mode pour la plaque encastérée avec  $e/a=0.5$ .



**Figure 3. 3:** Effet de la taille de l'ouverture et des conditions aux limites sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée croisée pour le T300/5208 et le AS4/3501-6



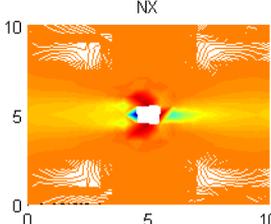
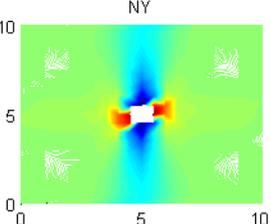
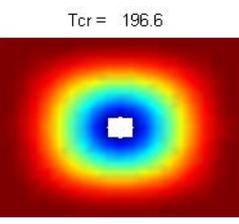
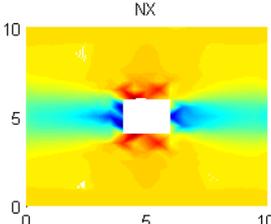
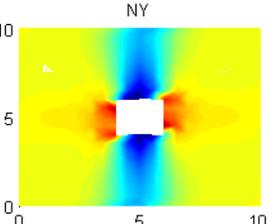
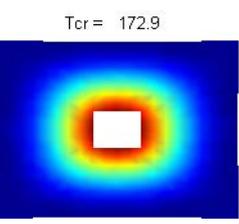
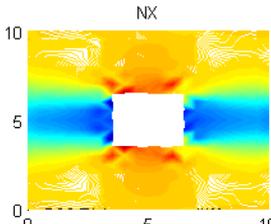
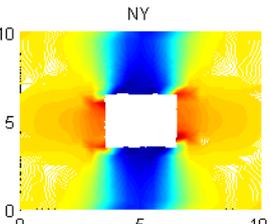
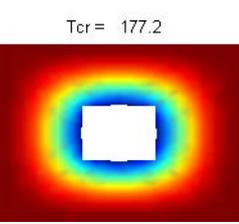
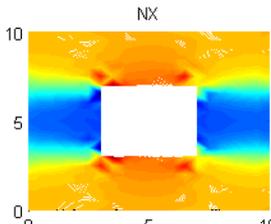
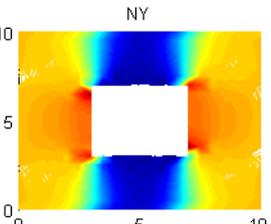
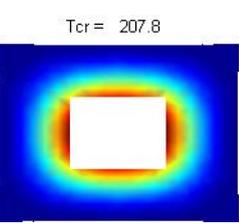
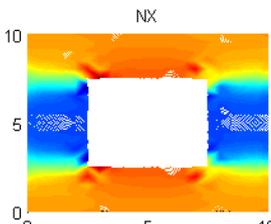
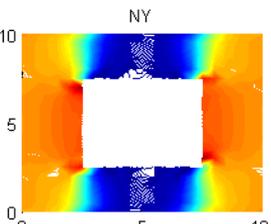
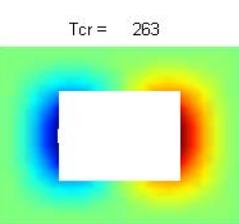
**Figure 3. 4:** Effet de la taille de l'ouverture et des conditions aux limites sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée croisée pour le E-glass/Epoxy

Les figures 3.5 et 3.6 montrent l'effet de la taille de l'ouverture sur les températures critiques de flambement de plaques stratifiées équilibrées encastres (CC). Deux types de matériaux sont considérés; le T300/5208 et l'E-glass/Epoxy.

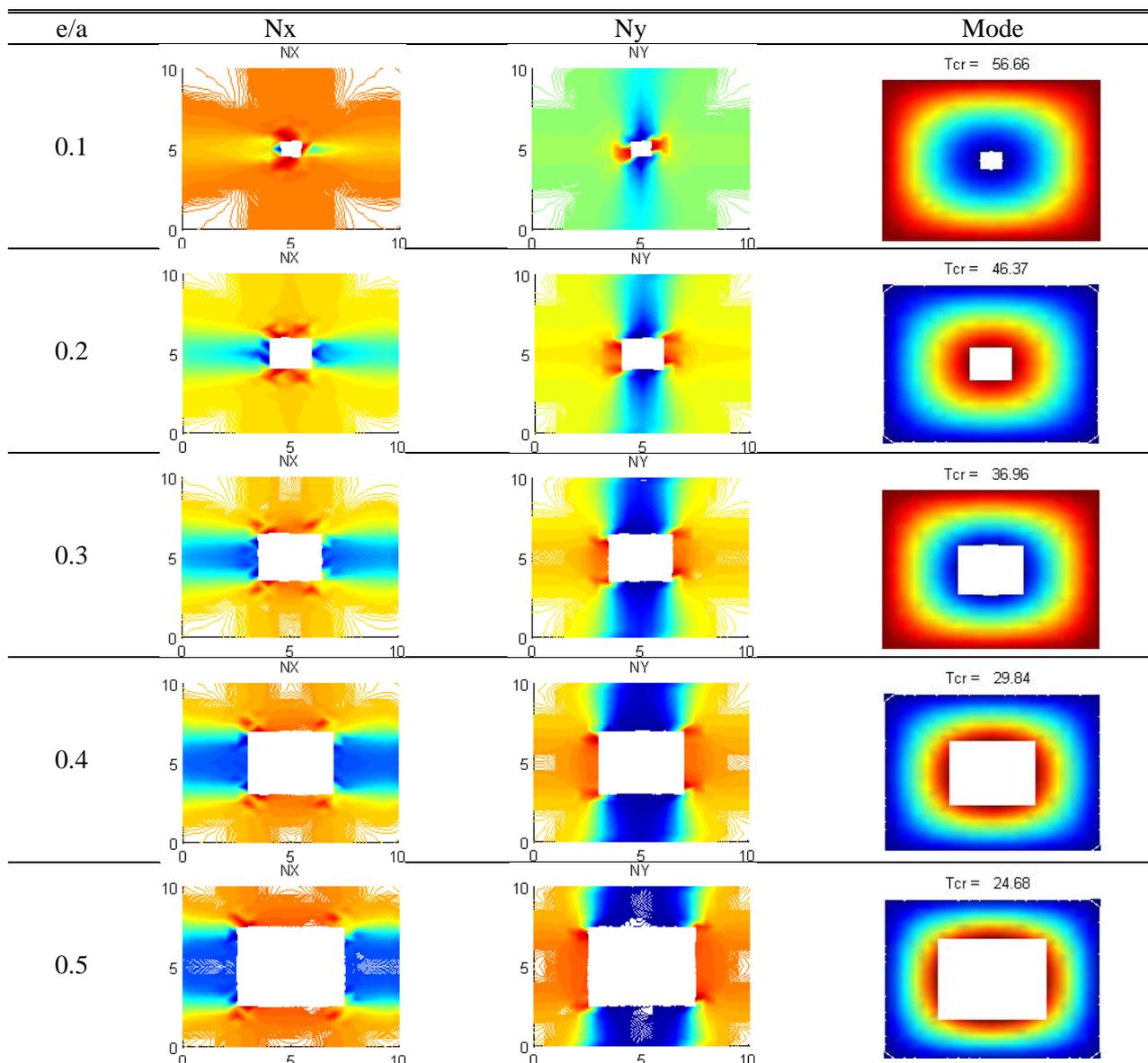
Pour les deux types de matériaux et tous les angles d'orientation choisis, on remarque que les températures critiques de flambement diminuent avec l'augmentation de la taille de l'ouverture, jusqu'à environ  $e/a=0.2$ , ensuite elles commencent à augmenter avec l'augmentation de la taille de l'ouverture.

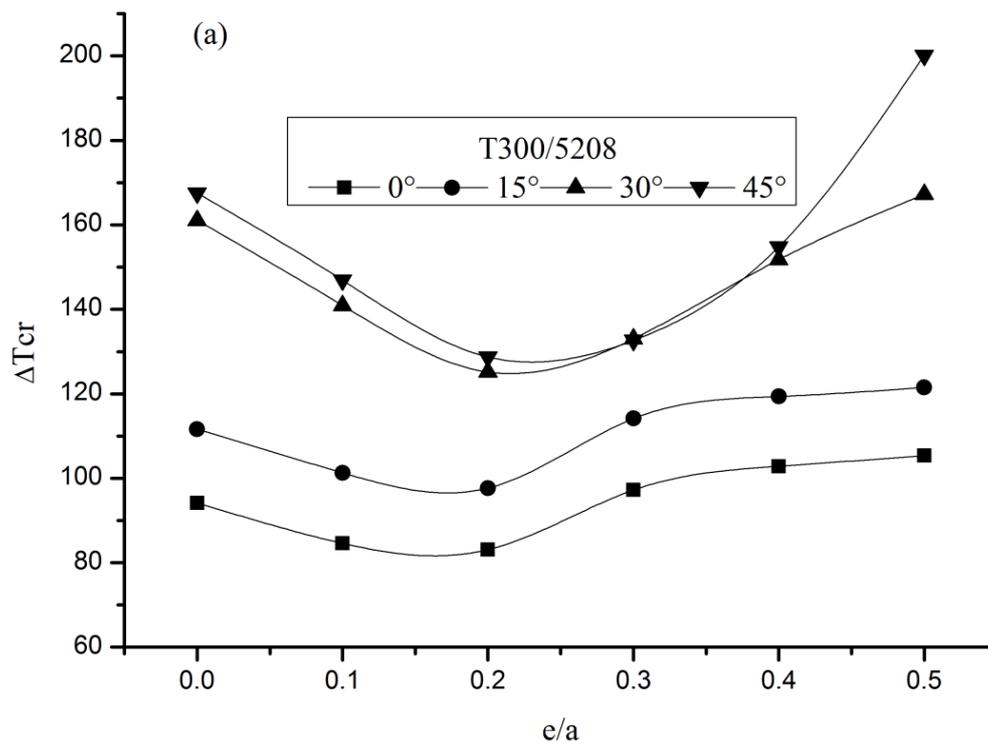
Avec le cas du T300/5208 (Figure 3. 5), on note qu'avec l'angle  $45^\circ$ , le décroissement et l'accroissement de la température est plus prononcée comparé avec les autres angles d'orientation, plus spécialement avec les angles  $0^\circ$  et  $15^\circ$ . Avec ces derniers, on peut voir que les températures critiques de flambement sont légèrement affectées par la variation de la taille de l'ouverture. Avec le cas du l'E-glass/Epoxy (Figure 3. 6), les températures critiques de flambement sont assez proches; l'effet de la variation de l'angle d'orientation est moins prononcée par rapport à celui du T300/5208. Ceci est probablement dû au faible rapport des modules de Young ( $E_L/E_T$ ) et du rapport des coefficients de dilatation thermique ( $\alpha_T/\alpha_L$ ) de l'E-glass/Epoxy.

**Tableau 3. 3:** Tracé de contour de la répartition des efforts résultants et les modes de flambement de plaques stratifiées encastées (CC) munie d'ouverture

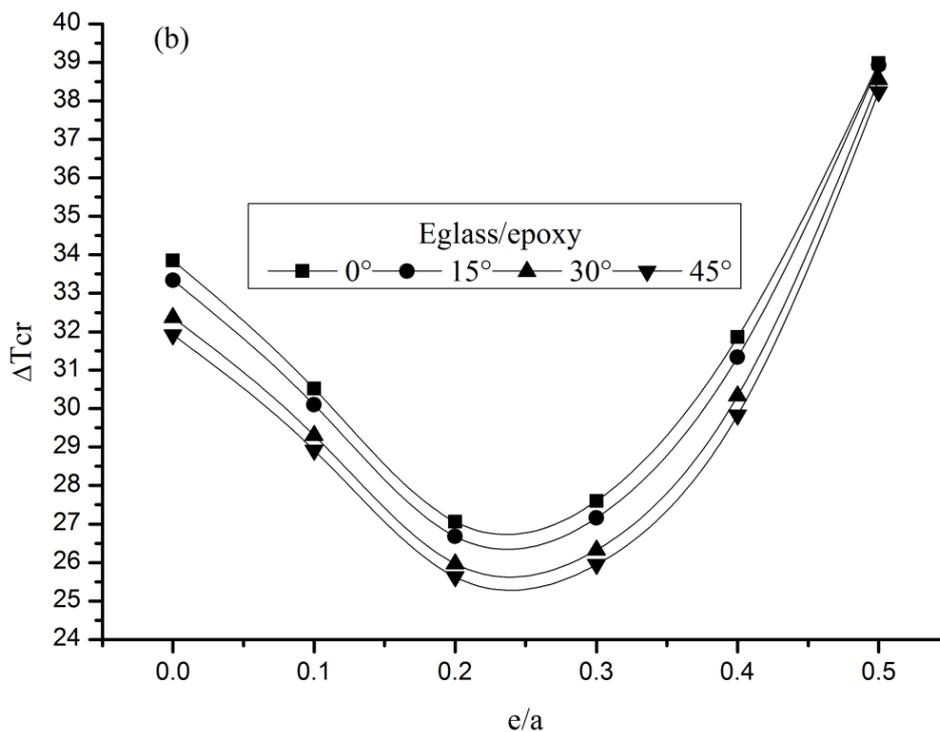
e/a	Nx	Ny	Mode
0.1			
0.2			
0.3			
0.4			
0.5			

**Tableau 3. 4:** Tracé de contour de la répartition des efforts résultants et les modes de flambement de plaques stratifiées simplement appuyées (SS) munie d'ouverture





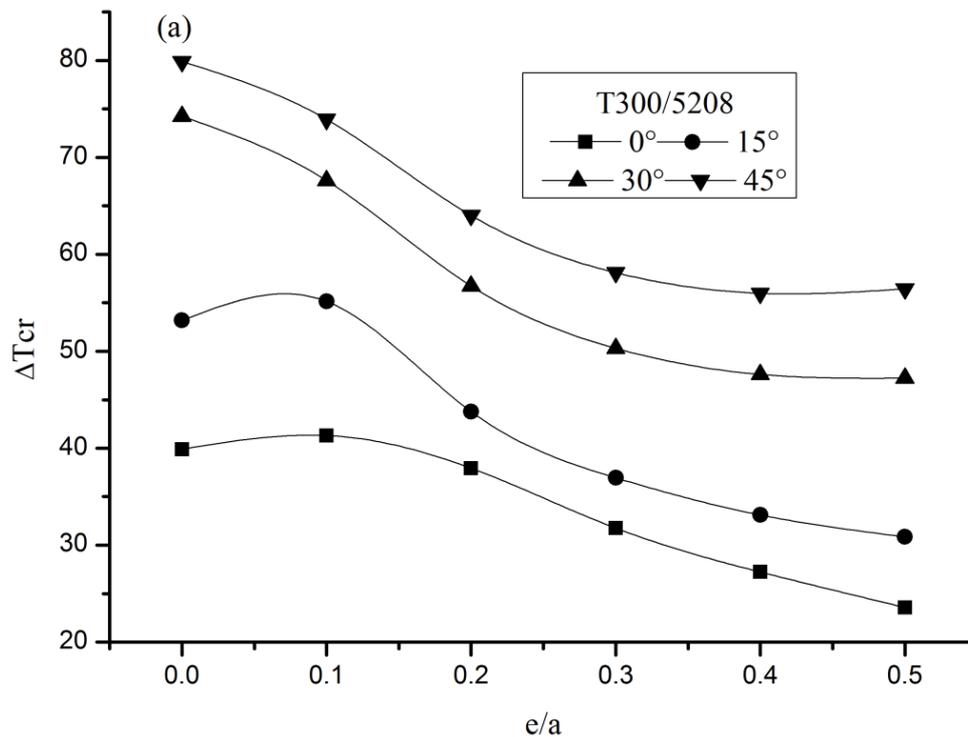
**Figure 3. 5:** Effet de la taille de l'ouverture sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée encadrée pour le cas du T300/5208



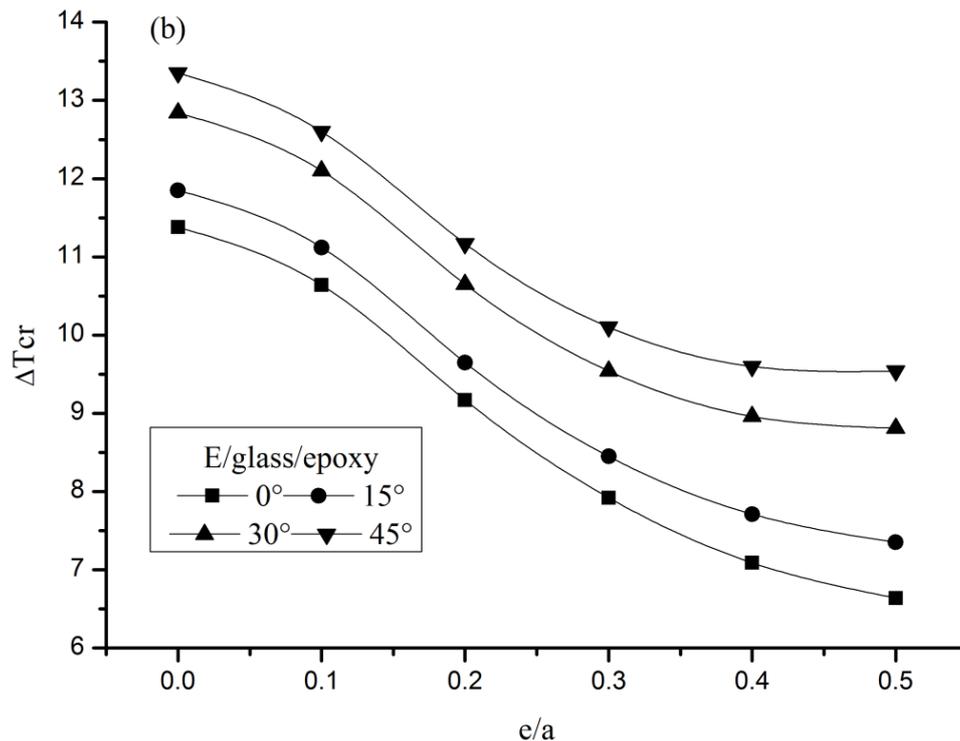
**Figure 3. 6:** Effet de la taille de l'ouverture sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée encadrée pour le cas du E-glass/epoxy

Les figures 3.7 et 3.8 présentent l'effet de la taille de l'ouverture sur les températures critiques de flambement de plaques stratifiées équilibrées simplement appuyées (SS) avec deux matériaux T300/5208 et l'E-glass/Epoxy, respectivement.

Pour les deux matériaux et tous les angles d'orientation considérés, on remarque que les températures critiques de flambement décroissent avec l'accroissement de la taille de l'ouverture, à l'exception des angles  $0^\circ$  et  $15^\circ$  pour le cas du T300/5208, où on note une légère augmentation avec  $e/a=0.1$ .



**Figure 3. 7:** Effet de la taille de l'ouverture sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée simplement appuyée pour le cas du T300/5208

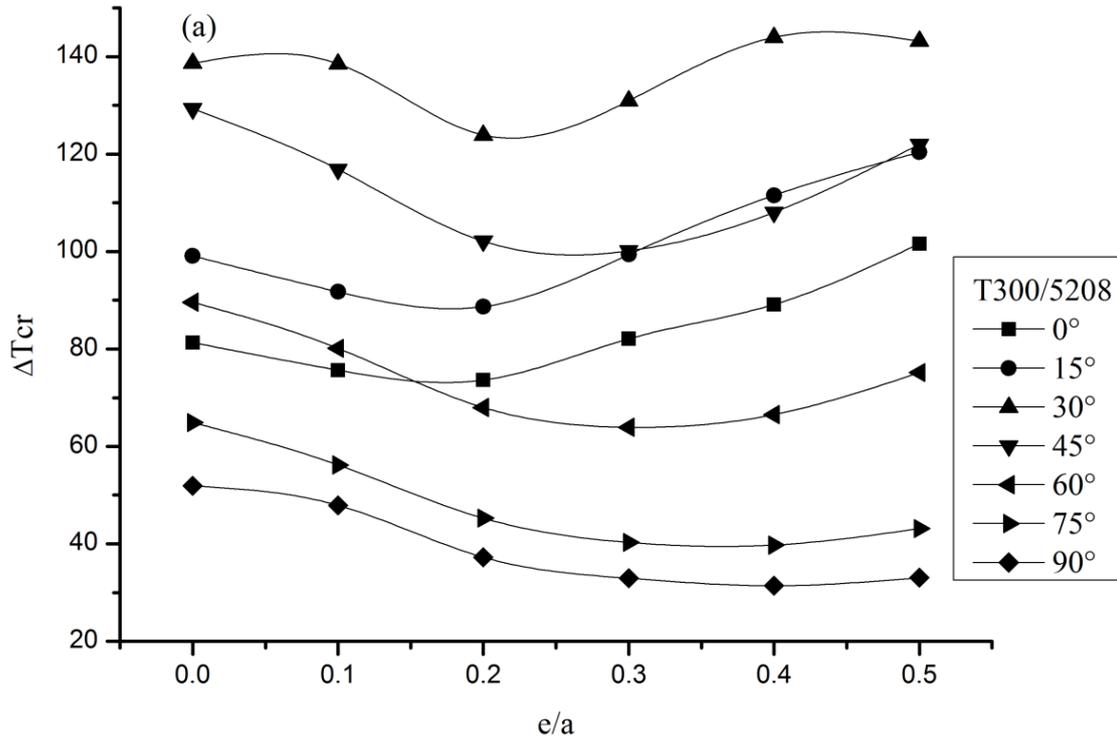


**Figure 3. 8:** Effet de la taille de l'ouverture sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée simplement appuyée pour le cas du E-glass/Epoxy

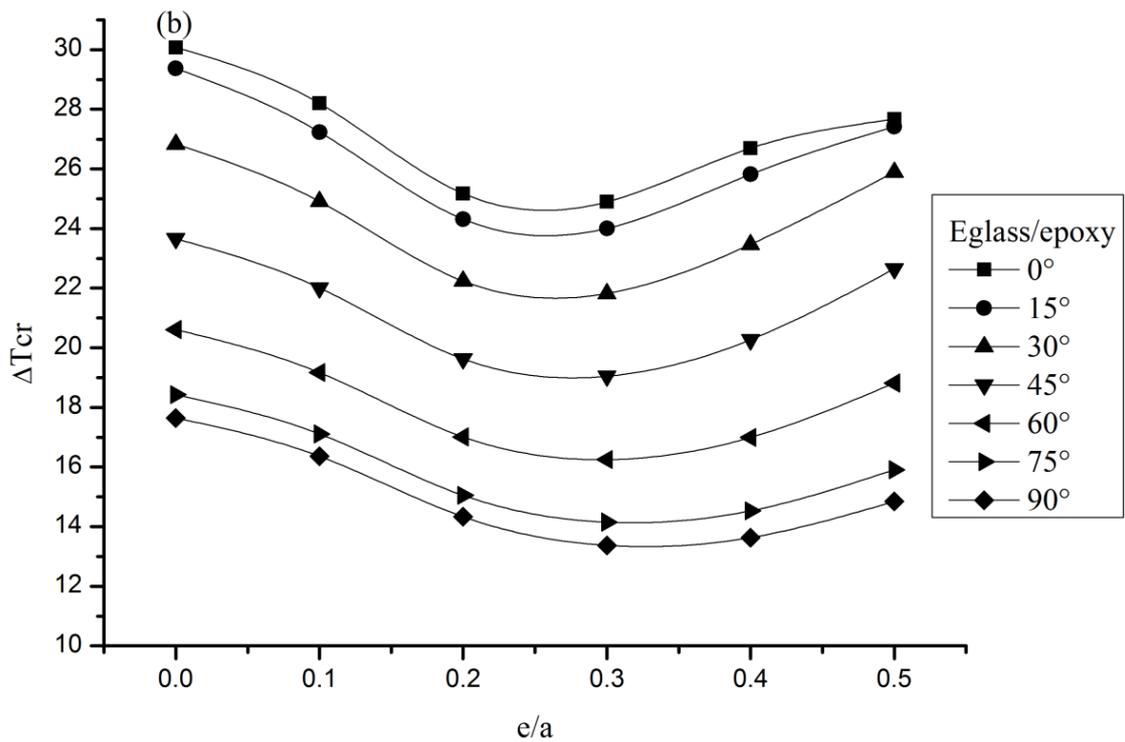
Les figures 3.9 et 3.10 présentent l'effet de la taille de l'ouverture sur les températures critiques de flambement de plaques stratifiées équilibrées encadrées-simplement appuyées (CS) avec deux matériaux; T300/5208 et l'E-glass/Epoxy, respectivement.

Avec le cas du T300/5208 (Figure 3. 9), lorsque les fibres sont en direction des arrêtes encadrées, plus particulièrement avec 0° et 15°, on note un comportement similaire à celui d'une plaque entièrement encadrée (CC), à mesure que la direction des fibres approche les arrêtes simplement appuyées, on remarque un comportement qui tend vers celui de la plaque simplement appuyée.

Dans la figure 3. 10, on observe très bien que pour tous les angles d'orientation, les températures critiques de flambement avec l'E-glass/Epoxy diminuent avec l'augmentation de la taille de l'ouverture jusqu'à  $e/a=0.3$ , ensuite commence à croître avec l'accroissement du rapport  $e/a$ .



**Figure 3. 9:** Effet de la taille de l'ouverture sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée encadrée-simplement appuyée pour le cas du T300/5208



**Figure 3. 10:** Effet de la taille de l'ouverture sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée encadrée-simplement appuyée pour le cas du E-glass/Epoxy

### 3.3. Conclusion:

Dans ce chapitre, on a étudié le flambement thermique des plaques composites stratifiées muni d'une ouverture centrée en utilisant l'élément développé dans le chapitre 1. Dans cette étude trois types de matériaux ont été pris en considération, à savoir: le T300/5208, le AS4/3501-6 et le E-glass/Epoxy.

L'étude a montré que la taille de l'ouverture ainsi que les conditions aux limites affectent significativement la température critique de flambement pour les deux stratifications choisies. Il a été montré que pour le cas des plaques encastrees, la présence d'ouverture d'une taille d'au-delà de  $e/a=0.2$  augmente la résistance au flambement. On a vu que, ce dernier phénomène, peut être dû à la réduction des efforts résultants et la nature de la condition aux limites encastree. Avec le cas des plaques simplement appuyées, la température critique de flambement diminue avec l'augmentation de la taille de l'ouverture. Il a été montré, aussi, que les rapports des modules de Young ( $E_L/E_T$ ) et ceux des dilatations thermiques ( $\alpha_T/\alpha_L$ ) jouent un rôle très important dans la détermination de la température critique de flambement.

## **Deuxième partie:**

---

# **Effets de la température sur les vibrations des plaques composites stratifiées**

**(Chapitres 4,5)**

---

## P2.I. Introduction

Mise à part l'effet de la température sur la stabilité des plaques composites, antérieurement discuté et étudié, le changement de la température peut aussi affecter le comportement vibratoire de ce type de structures. En effet, l'effet de la température sur les vibrations des plaques composites stratifiées se manifeste de plusieurs façons. Le premier et le plus évident des effets de la température est la détérioration des propriétés matérielles des structures avec l'accroissement de cette dernière, ce qui induit une réduction des fréquences propres de la structure [9,94]. Le second effet qui résulte de l'élévation de température est le développement de contraintes thermiques, capable de changer la rigidité effective de la structure. Ce changement de la rigidité n'est pas associé au changement de propriétés matérielles, discuté ci-dessus, mais dépend seulement de l'état de contraintes [9,94,95]. On a vu précédemment, que ces contraintes thermiques peuvent affecter la stabilité de la structure, mais elles peuvent aussi influencer le comportement vibratoire de la structure.

## P2.II. Synthèse bibliographique

### P2.II.1. Vibration et effet de la température sur les propriétés matérielles

D'après Tauchert [95] l'un des premiers travaux à avoir pris en considération l'effet de la dépendance des propriétés matérielles de la température sur la vibration des plaques est dû à Fauconneau et Marangoni [96]. Les auteurs ont étudié l'effet d'une élévation linéaire à une dimension de la température sur les fréquences propres d'une plaque rectangulaire isotrope simplement appuyée. Dans cette étude seule le module d'élasticité était dépendant de la température. Dhotarad et Ganesan [97,98] ont examiné l'influence du gradient de la température sur les vibrations des plaques isotrope rectangulaire mince ayant au moins une arête encadrée [97] ou simplement appuyée [98]. Les auteurs ont utilisé une distribution de température à une- et à deux-dimension en utilisant la méthode des différences finies ainsi que celle des éléments finis. On trouve également des travaux qui ont considéré des plaques avec une épaisseur variable. Rao et Satyanarayana [99] ont étudié l'effet du gradient de la température sur les fréquences propres d'une plaque isotrope ayant une épaisseur qui varie linéairement sous une combinaison de conditions aux limites (simplement appuyé et encadré). Ganesan et Dhotarad [100] ont étendu leur travail reporté dans la référence [97] pour l'étude des plaques orthotropes avec une variation linéaire de l'épaisseur, similaire à celle de [99]. Par la suite, Tomar et ses collègues [101-104] ont étudié le comportement vibratoire des plaques rectangulaires et circulaires isotropes ainsi qu'orthotropes ayant des propriétés

élastiques dépendantes de la température et une épaisseur variable. Adeniji-Fashola et Oyediran [105] ont étudié le comportement vibratoire d'une plaque isotrope rectangulaire précontrainte en utilisant une approche analytique. Dans la dernière décennie, Gupta et ses collègues [106-109] ont présenté une série de travaux sur des plaques ayant une variation bidirectionnelle de l'épaisseur. Les auteurs ont pris en considération les effets du gradient de la température et la non-homogénéité pour étudier les vibrations libres des plaques orthotropes et viscoélastiques rectangulaires ainsi que trapézoïdales.

### **P2.II.2. Vibration et contraintes thermiques**

Concernant le deuxième effet du changement de la température, qui est l'apparition de contraintes thermiques au sein de la plaque, la littérature a donné beaucoup d'attention à son égard, comparé à l'effet antérieurement examiné. Cependant, dans la synthèse bibliographique, ci-dessous, nous allons mentionner, par ordre chronologique, seuls les travaux sur les plaques composites. Néanmoins, le lecteur peut se fier aux articles de revue pour plus de détails sur le comportement vibratoire des plaques isotropes sous effet de la température [110-113].

Il apparaît dans la littérature que les travaux de l'effet de la température sur les vibrations des plaques composites commencèrent au début des années quatre-vingt-dix. Effectivement en 1992, Jeng-Shian et al. [114] ont étudié l'impact thermique sur le comportement vibratoire des plaques minces stratifiées par la méthode des éléments finis. Les auteurs ont utilisé un élément fini lagrangien à neuf nœuds et dix degrés de liberté. Dans la même année, Huang et Tauchert [115] ont présenté une étude analytique sur le comportement dynamique des plaques stratifiées doublement incurvées sous une élévation rapide de la température. On trouve également, Noor et Burton [68] qui ont présenté une solution analytique tridimensionnelle pour l'étude des vibrations libres et le flambement des plaques multicouches à stratification équilibrée thermiquement précontrainte. Plusieurs paramètres ont été pris en considération; angle de stratification, différents matériaux sous une variation arbitraire de la température à travers l'épaisseur.

En 1993, Bhimaraddi et Chandrashekhara [116] ont analysé le comportement vibratoire nonlinéaire de plaques composites stratifiées croisées symétriques et antisymétriques sous une élévation de la température. Les auteurs ont utilisé une théorie de cisaillement parabolique, afin d'étudier les effets de l'imperfection initiale et du chargement thermique sur la réponse vibratoire d'une plaque simplement appuyée. Dans la même année, Galea et White [94] ont étudié l'effet de la température sur la réponse dynamique de plaques minces faites de CFRP

"carbon fiber reinforced polymer" en utilisant la méthode des éléments finis (ANSYS) ainsi qu'expérimentalement. Les auteurs ont présenté une étude paramétrique sur des stratifiées croisées et équilibrées sous différentes conditions aux limites et distribution de températures. La méthode des éléments finis a été aussi utilisé par Chang et Shyong [117] pour étudier l'impact thermique sur le comportement dynamique des coques stratifiées cylindriques. Les auteurs ont utilisé un élément fini à neuf nœuds basé sur la théorie de cisaillement d'ordre supérieur pour étudier les effets des conditions aux limites, de la stratification et des rayons de courbure.

En 1996, Liu et Huang [118] ont étudié les vibrations libres linéaires et nonlinéaire de plaques composites stratifiées croisées soumises à un changement de température par la méthode des éléments finis. Les auteurs ont utilisé un élément fini à huit nœuds basé sur la théorie de cisaillement de premier ordre. Toujours par éléments finis, Lee et Lee [119] ont étudié les caractéristiques vibratoires de plaques composites thermiquement contraintes dans l'état de près-et-post flambement. Des études similaires sur les fréquences vibratoires de plaques piezostratifiées ou incluant des fibres à mémoire forme thermiquement voilées ont été proposés par [120,121].

En 1999, Adams et Bert [122] ont étudié le comportement dynamique de plaques stratifiées symétriques croisées simplement appuyées soumises à un choc thermique. Dans la même année, Librescu et Lin [123] ont étudié le comportement vibratoire nonlinéaire de panneaux composites plan et courbé. Les auteurs ont pris en considération le cisaillement interlaminaire en utilisant une théorie de coque d'ordre élevé.

En 2003, Shen et al. [124] ont étudié les vibrations et la réponse dynamique de plaques stratifiées reposant sur fondation élastique sous chargement thermomécanique. Les auteurs ont utilisé la théorie d'ordre supérieur de Reddy en incluant l'interaction plaque-fondation et les effets de l'élévation de la température.

En 2005, Shiau et Kuo [125] ont étudié le comportement vibratoire de plaques sandwichs thermiquement voilées. Ils ont montré que si le mode de vibration de la plaque est similaire à son mode flambement alors la fréquence propre de ce mode chutera à zéro si la température atteint la température critique de flambement. Cette dernière remarque, a été aussi notée pour le cas des plaques isotropes par [126,127] ainsi que composite par [123]. Par la suite, Singha et al. [128] ont étudié le comportement vibratoire de plaques composites biais

thermiquement contraintes dans l'état de pré- et post-flambement. Les auteurs ont utilisé un élément fini à quatre nœuds basé sur la théorie de cisaillement premier ordre.

En 2007, Vangipuram et Ganesan [129] ont étudié les vibrations libres et amorties de plaques sandwichs ayant des peaux stratifiées et un cœur viscoélastique sous chargement thermique. Les auteurs ont modélisé les peaux avec un élément fini basé sur la théorie classique des stratifiées et le cœur par la théorie raffinée de troisième ordre de Reddy [130]. La vibration amortie a été aussi considérée par Jeyaraj et al. [131]. Ces derniers, ont étudié le comportement dynamique et acoustique de plaques composites dans un environnement thermique. Les auteurs ont utilisé un élément fini basé sur la théorie classique des stratifiées pour étudier la vibration et un couplage entre la méthode des éléments finis et celle des éléments finis de frontière pour l'acoustique. Dans la même année, Matsunaga [73] a analysé les fréquences propres et les températures critiques des plaques composites stratifiées équilibrées sous chargement thermique. Pour ce faire, l'auteur a développé une théorie de cisaillement transverse d'ordre supérieur.

En 2009, Lal et Singh [132] ont examiné le comportement vibratoire, sous effet de la température, des plaques composites stratifiées ayant des propriétés matérielles variables en utilisant un élément fini basé sur la théorie d'ordre supérieur. En 2013, Chen et al. [133] ont étudié les vibrations et la stabilité des plaques composites précontraintes ayant des propriétés matérielles qui dépendent de la température. L'étude a porté sur l'effet de la dépendance propriétés matérielles à la température et du nombre de couches sur charge et la température critique de flambement, ainsi que sur les vibrations libres des plaques stratifiées croisées.

### **P2.III. Objectifs de la deuxième partie**

A notre connaissance, tous les travaux cités ci-dessus, n'ont traité qu'un seul effet à la fois, à l'exception du travail de Chen et al. [133]. Ces derniers, ont fait un couplage entre l'effet de la dépendance des propriétés matérielles à la température et la génération des contraintes thermiques sur les vibrations et la stabilité des plaques stratifiées. Cependant, le travail s'est limité qu'au cas des plaques stratifiées croisées simplement appuyées.

L'objectif principal de cette partie est de présenter une vaste étude paramétrique sur l'effet de la température sur les vibrations des plaques composites stratifiées croisées et équilibrées. Dans cette étude, les deux effets de la température: détérioration des propriétés et la génération des contraintes thermiques, sont considérés simultanément.

Pour ce faire, un élément fini précédemment développé pour l'étude de la flexion et la vibration transversal des plaques multicouches par Siham [134] est étendu vers l'étude de l'effet de la température sur la vibration et la stabilité des plaques composites stratifiées.

## **Chapitre 4**

### **Formulation élément fini**

## 4.1. Introduction:

Ce chapitre a pour but de présenter et d'exposer la formulation de l'élément fini DMQP/ml ainsi que son extension vers l'étude des effets de la température sur les vibrations des plaques composites.

l'élément DMQP/ml (*Discrete Mindlin Quadrilateral Plate Multilayer*) a été développé par Siham [134] dans sa thèse de doctorat pour étudier le comportement des plaques multicouches. Cet élément est une pure extension de l'élément DKMQ de Katili [135] pour l'étude de la flexion des plaques isotropes épaisses. L'élément DMQP/ml contient quatre nœuds et trois degrés de liberté ( $w$ ,  $\beta_x$  et  $\beta_y$ ), il est basé sur un modèle variationnel en déplacement appelé DDM (*Displacement Discrete Mindlin*) qui introduit de manière discrète une hypothèse cinématique et une autre mécanique [136]. Récemment, Sedira [137] a modifié le modèle DDM en lui introduisant une fonction Zigzag, afin d'améliorer la précision du calcul des contraintes planes et celles du cisaillement transverse [138].

Nous avons choisi d'utiliser l'élément fini DMQP/ml à cause de sa géométrie très simple ainsi qu'à sa capacité d'étudier les plaques épaisses et minces sans verrouillage en CT. Cependant, nous allons lui apporter les modifications suivantes:

- Reformulation du DMQP/ml en cinq degrés de liberté ( $u, v, w, \beta_x$  et  $\beta_y$ ) en lui ajoutant le comportement membranaire et celui du couplage membrane-flexion.
- La prise en compte de la dépendance des propriétés matérielles à la température (DT).
- La prise en compte des déformations thermiques.
- La formulation de la matrice géométrique à l'aide d'un champ de déformation de type Von Karman.

Il est très important de noter que dans le présent chapitre nous allons exposer la formulation de l'élément DMQP/ml. Cette dernière est issue des travaux remarquables de Katili [135], Siham [134] et Sedira [137].

## 4.2. Formulation de l'élément fini DMQP/ml:

### 4.2.1. Champ de déplacement:

Comme l'élément est basé sur la théorie de cisaillement du premier ordre, le champ des déplacements est donné par :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \beta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \beta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Où  $u_0$ ,  $v_0$  sont les déplacements membranaires du feuillet moyen de la plaque.  $w_0$  est le déplacement hors plan du feuillet moyen de la plaque.  $\beta_x$  et  $\beta_y$  représentent les deux rotations de la normale dans les plan x-z et y-z, respectivement.

Dans le modèle DDM, les déplacements dans le plan et transversal ( $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$ ) sont interpolés linéairement, alors que les rotations  $\beta_x$  et  $\beta_y$  sont représentée avec une interpolation quadratique incomplète, qui fera apparaitre des accroissement de rotation,  $\Delta\beta_{sk}$  sur les quatre bord de l'élément. Le champ des déplacements devient alors:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^4 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^4 N_i w_i \\ \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^4 N_i \begin{Bmatrix} \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{Bmatrix} + \sum_{k=5}^8 P_k \begin{Bmatrix} C_k \\ S_k \end{Bmatrix} \Delta\beta_{sk} \end{aligned} \quad (4.2)$$

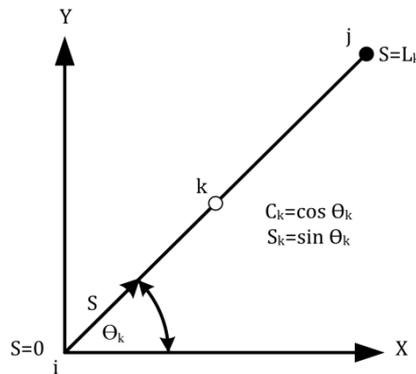
Avec  $\beta_{xi}$  et  $\beta_{yi}$  les rotations nodales aux sommets de l'élément,  $N_i$  et  $P_k$  sont les fonctions d'interpolations linéaires et quadratiques présentés dans le tableau 4. 1

**Tableau 4. 1:** Fonctions d'interpolations linéaires et quadratiques

$\{N_i\}$	$\{P_k\}$
$4N_1 = (1 - \xi)(1 - \eta)$	$2P_5 = (1 - \xi^2)(1 - \eta)$
$4N_2 = (1 + \xi)(1 - \eta)$	$2P_6 = (1 + \xi)(1 - \eta^2)$
$4N_3 = (1 + \xi)(1 + \eta)$	$2P_7 = (1 - \xi^2)(1 + \eta)$
$4N_4 = (1 - \xi)(1 + \eta)$	$2P_8 = (1 - \xi)(1 - \eta^2)$

Les coefficients  $C_k$  et  $S_k$  sont les cosinus directeurs d'un côté  $k$  associé aux nœuds  $i$  et  $j$  (Figure 4. 1).

$$\begin{aligned}
 C_k &= \cos \theta_k = \frac{x_{ji}}{L_k} = \frac{x_j - x_i}{L_k} \\
 S_k &= \sin \theta_k = \frac{y_{ji}}{L_k} = \frac{y_j - y_i}{L_k} \\
 L_k &= \sqrt{x_{ji}^2 + y_{ji}^2}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

**Figure 4. 1:** Cosinus directeurs sur un bord élémentaire  $k$  [134].

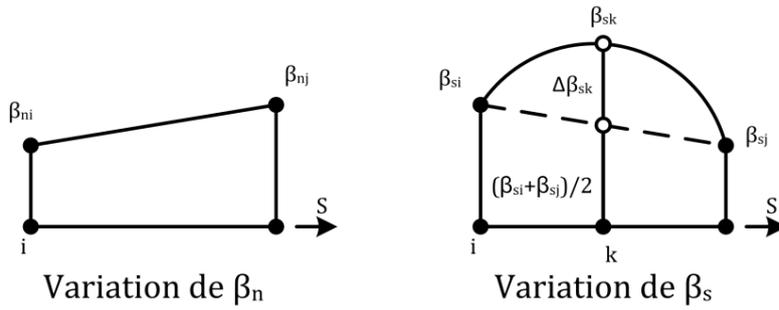
La relation entre les rotations  $\beta_x$  et  $\beta_y$  et les rotations  $\beta_s$  et  $\beta_n$  est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \beta_s \\ \beta_n \end{Bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} C_k & S_k \\ S_k & -C_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix}_{i,j} \tag{4.4}$$

L'approximation des rotations  $\beta_s$  quadratiquement et  $\beta_n$  linéairement sur un côté de nœuds  $i$  et  $j$  et le nœud du milieu  $k$  (Figure 4. 2), s'écrit:

$$\beta_s = \left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\beta_{si} + \frac{s}{L_k}\beta_{sj} + 4\frac{s}{L_k}\left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\Delta\beta_{sk} \quad (4.5)$$

$$\beta_n = \left(1 - \frac{s}{L_k}\right)\beta_{ni} + \frac{s}{L_k}\beta_{nj} \quad (4.6)$$



**Figure 4. 2:** Variations des rotations[134].

#### 4.2.2. Champ de déformations

Le champ de déformations, selon les hypothèses de Reissner-Mindlin, s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \underbrace{\{\varepsilon_L + \varepsilon_{NL}\}}_{\{\varepsilon\}} + z \{\kappa\} \quad (4.7)$$

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Avec  $\{\varepsilon\}$ ,  $z\{\kappa\}$  et  $\{\gamma\}$  sont respectivement les vecteurs déformations de membrane, de flexion et de cisaillement transverse (CT).

#### 4.2.2.1. Courbure de flexion

En introduisant les interpolations nodales décrites dans l'équation (4.2) dans le vecteur des courbures de flexion on obtient :

$$\{\kappa\} = [B_{f1}]\{U_n\} + [B_{f\Delta\beta}]\{\Delta\beta_n\} \quad (4.9)$$

Où

$$[B_{f1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_i \\ 0 & 0 & 0 & b_i & a_i \end{bmatrix}_{i=1,2,3,4} \quad \begin{aligned} a_i &= j_{11}N_{i,\xi} + j_{12}N_{i,\eta} \\ b_i &= j_{21}N_{i,\xi} + j_{22}N_{i,\eta} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Et

$$[B_{f\Delta\beta}] = \begin{bmatrix} \dots & (P_{k,\xi}j_{11} + P_{k,\eta}j_{12})C_k & \dots \\ \dots & (P_{k,\xi}j_{21} + P_{k,\eta}j_{22})S_k & \dots \\ (P_{k,\xi}j_{21} + P_{k,\eta}j_{22})C_k + (P_{k,\xi}j_{11} + P_{k,\eta}j_{12})S_k & & \dots \end{bmatrix}_{k=5,6,7,8} \quad (4.11)$$

$$\{U_n\} = \langle u_i \quad v_i \quad w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi} \rangle \quad (4.12)$$

$$\{\Delta\beta_n\}^T = \{\Delta\beta_{s5} \quad \Delta\beta_{s6} \quad \Delta\beta_{s7} \quad \Delta\beta_{s8}\} \quad (4.13)$$

$j_{ij}$  sont les composantes de la matrice Jacobienne inverse.

#### 4.2.2.2. Déformation de CT

Dans l'élément DMQP/ml, les déformations de cisaillement transverse sont interpolées indépendamment, cette méthode est communément appelée ANS (*Assumed natural strain*)[134].

Donc, Les déformations cartésiennes de CT  $\{\gamma\}$  sont définies en fonction des déformations isoparamétriques  $\{\gamma_\zeta\}$ , qui sont interpolées linéairement, deux à deux, sur les bords élémentaires (Figure 4. 3), soit:

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi z} &= \frac{1}{2}(1-\eta)\gamma_{\xi\zeta 5} + \frac{1}{2}(1-\xi)\gamma_{\xi\zeta 7} \\ \gamma_{\eta z} &= \frac{1}{2}(1-\eta)\gamma_{\eta\zeta 8} + \frac{1}{2}(1-\xi)\gamma_{\eta\zeta 6} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$\gamma_{\xi\zeta 5}$ ,  $\gamma_{\eta\zeta 6}$ ,  $\gamma_{\xi\zeta 7}$  et  $\gamma_{\eta\zeta 8}$  sont les déformations de CT isoparamétriques définies sur les quatre côtés (5, 6, 7, 8), respectivement. Elles sont reliées aux déformations tangentielles de bords  $\gamma_{s5}$ ,  $\gamma_{s6}$ ,  $\gamma_{s7}$  et  $\gamma_{s8}$  par:

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\zeta 5} &= (\det J_{s5}) \times (\gamma_{s5}) = +\frac{L_5}{2} \gamma_{s5} \\ \gamma_{\eta\zeta 6} &= (\det J_{s6}) \times (\gamma_{s6}) = +\frac{L_6}{2} \gamma_{s6} \\ \gamma_{\xi\zeta 7} &= (\det J_{s5}) \times (\gamma_{s5}) = -\frac{L_5}{2} \gamma_{s7} \\ \gamma_{\eta\zeta 8} &= (\det J_{s5}) \times (\gamma_{s5}) = -\frac{L_5}{2} \gamma_{s8} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Donc les déformations CT  $\{\gamma\}$  peuvent être écrites en fonction des  $\{\gamma_{sk}\}$  sous la forme matricielle suivante:

$$\{\gamma\} = [N_\gamma] \{\gamma_{sk}\}; \quad \{\gamma_{sk}\} = \langle \gamma_{s5} \quad \gamma_{s6} \quad \gamma_{s7} \quad \gamma_{s8} \rangle \quad (4.17)$$

Avec

$$[N_\gamma] = \begin{bmatrix} L_5 J_{11}(1-\eta) & L_6 J_{12}(1+\xi) & -L_7 J_{11}(1+\eta) & -L_8 J_{12}(1-\xi) \\ L_5 J_{21}(1-\eta) & L_6 J_{22}(1+\xi) & -L_7 J_{21}(1+\eta) & -L_8 J_{22}(1-\xi) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

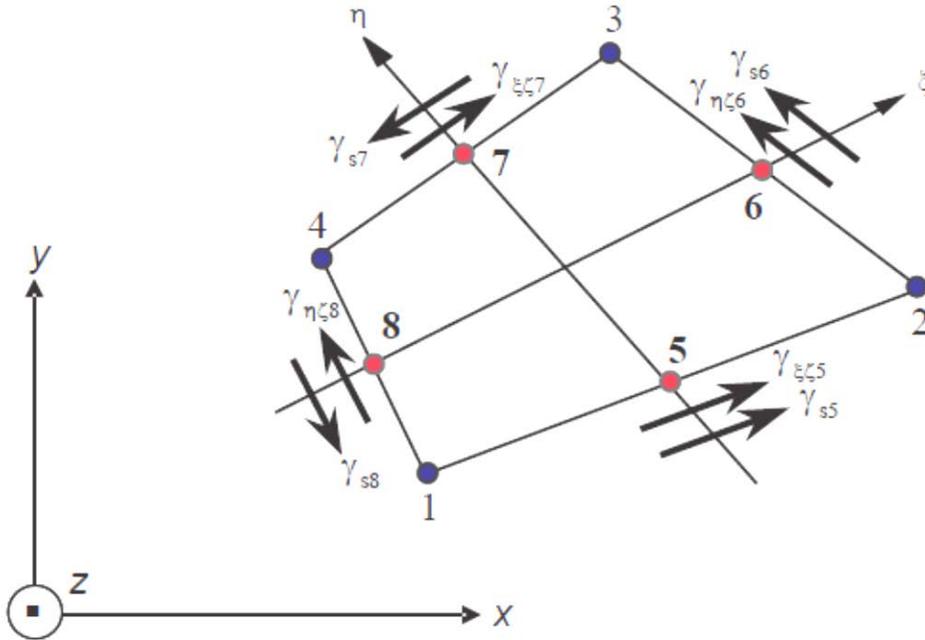


Figure 4. 3: Déformation de CT de bords [137]

#### 4.2.3. Elimination des variables $\{\Delta\beta_{sk}\}$

Afin d'éliminer les rotations quadratiques  $\{\Delta\beta_{sk}\}$  et d'écrire les déformations de flexion et de CT uniquement en fonction des degrés de liberté élémentaires  $\{U_n\}$ , deux hypothèses de Mindlin sont introduites:

- **Hypothèse cinématique**

Les déformations naturelles ou isoparamétriques de bords  $\{\gamma_{sk}\}$  sont projetées sur les degrés de liberté élémentaires  $\{U_n\}$  et  $\{\Delta\beta_{sk}\}$  sous une forme discrète, définie par une intégrale de contour le long de chaque côté  $k$  [134] :

$$\int_0^{L_k} (\gamma_{sk} - \bar{\gamma}_{sk}) ds = 0 \quad (4.19)$$

Avec

$$\bar{\gamma}_{sk} = (w_{,s} + \beta_s)_k \quad (4.20)$$

Où  $\beta_s$  est définie par l'équation (4.5)

En introduisant l'équation (4.20) dans l'équation(4.19), après intégration, on obtient:

$$\gamma_{sk} L_k = w_j - w_i + \frac{L_k}{2} (\beta_{si} + \beta_{sj}) + \frac{2}{3} L_k \Delta\beta_{sk} \quad (4.21)$$

Où sous la forme :

$$\gamma_{sk} L_k = w_j - w_i + \frac{L_k}{2} (C_k \beta_{xi} + S_k \beta_{yi}) + \frac{L_k}{2} (C_k \beta_{xj} + S_k \beta_{yj}) + \frac{2}{3} L_k \Delta\beta_{sk} \quad (4.22)$$

- **Hypothèse mécanique:**
  - Cas isotrope

L'hypothèse mécanique est issue de la loi de comportement en CT, elle s'écrit pour un matériau homogène isotrope, comme suit :

$$\bar{\gamma}_{sk} = \frac{T_s}{D_{ct}} \quad (4.23)$$

Les équations d'équilibre reliant l'effort  $T_s$  aux moments de flexion sur le bord  $k$  (Figure 4. 4) sont données par :

$$T_s = M_{s,s} + M_{sn,n} \quad (4.24)$$

Avec  $M_s$  et  $M_{sn,n}$  sont donnés par:

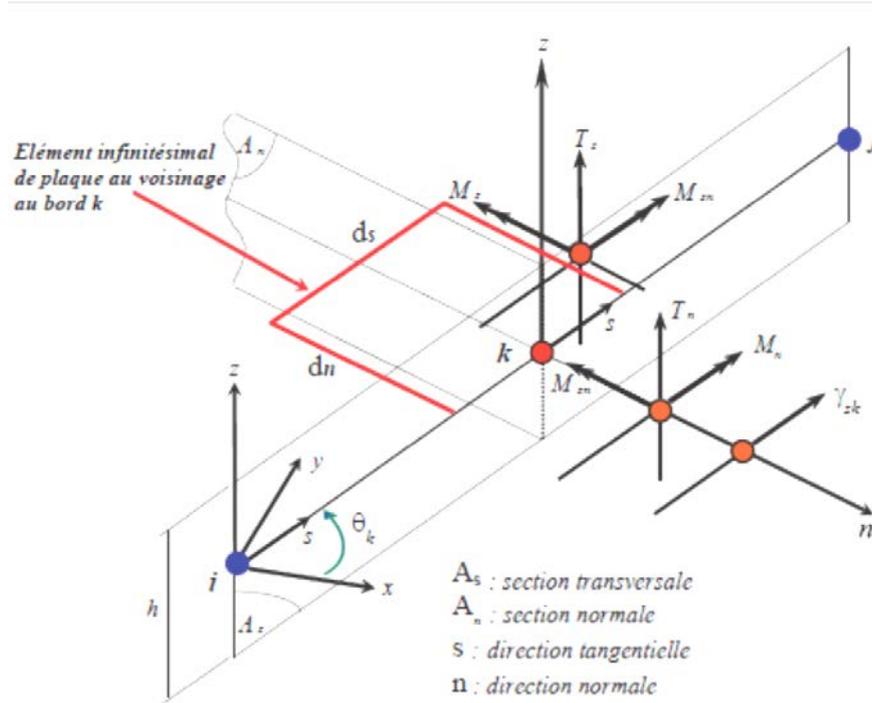
$$\begin{aligned} M_s &= D_f (\beta_{s,s} + \nu\beta_{n,n}) \\ M_{sn} &= D_f \frac{1-\nu}{2} (\beta_{s,n} + \nu\beta_{n,s}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Où

$$D_{ct} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}k \quad \text{et} \quad D_f = \frac{Eh^3}{12(1+\nu^2)} \quad (4.26)$$

On introduisant les équations (4.24) et (4.25) dans l'équation (4.23) on obtient:

$$\bar{\gamma}_{sk} = \frac{D_f}{D_{ct}} \left[ \beta_{s,ss} + \nu\beta_{n,ns} + \frac{1-\nu}{2}(\beta_{s,nn} + \nu\beta_{n,ns}) \right] \quad (4.27)$$



**Figure 4. 4:** Hypothèses de Mindlin sur un bord élémentaire  $i$ - $j$ [136,137]

En introduisant les expressions de  $\beta_s$  et  $\beta_n$  par les équations (4.5) et (4.6), respectivement, dans l'équation (4.27), on obtient:

$$\bar{\gamma}_{sk} = \frac{D_f}{D_{ct}} \beta_{s,ss} = -\frac{2}{3} \Phi_k \Delta \beta_{sk} \quad (4.28)$$

Avec

$$\Phi_k = \frac{12D_f}{L_k^2 D_{ct}} = \frac{1}{K(1-\nu)} \left( \frac{h^2}{L_k^2} \right) \quad (4.29)$$

Où  $\Phi_k$  est le facteur d'influence du CT et  $K$  est le facteur de correction de cisaillement. En fin, on aboutit à l'expression matricielle reliant les déformations de CT  $\{\gamma\}$  aux rotations tangentielles  $\{\Delta\beta_{sk}\}$  :

$$\{\gamma\} = [B_{s\Delta\beta}] \{\Delta\beta_n\} \quad (4.30)$$

Avec

$$[B_{s\Delta\beta}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -J_{12}(1-\eta)L_5\Phi_5 & -J_{11}(1+\xi)L_6\Phi_6 & J_{12}(1+\eta)L_7\Phi_7 & J_{12}(1-\xi)L_8\Phi_8 \\ -J_{22}(1-\eta)L_5\Phi_5 & -J_{21}(1+\xi)L_6\Phi_6 & J_{22}(1+\eta)L_7\Phi_7 & J_{22}(1-\xi)L_8\Phi_8 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

La combinaison des équations (4.22) et (4.28) conduit à:

$$w_j - w_i + \frac{L_k}{2} (C_k \beta_{xi} + S_k \beta_{yi}) + \frac{L_k}{2} (C_k \beta_{xj} + S_k \beta_{yj}) + \frac{2}{3} L_k (1 + \Phi_k) \Delta\beta_{sk} = 0 \quad (4.32)$$

En appliquant l'équation (4.32) sur les quatre bords de l'élément, à l'aide des valeurs du tableau, on obtient  $\{\Delta\beta_{sk}\}$  en fonction des degrés de liberté élémentaire  $\{U_n\}$

$$\{\Delta\beta_n\} = [A_n] \{U_n\} \quad (4.33)$$

Avec

$$[A_n] = [A_\Phi]^{-1} [A_G] \quad (4.34)$$

Où

$$[A_\Phi] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} L_5 (1 + \Phi_5) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} L_6 (1 + \Phi_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} L_7 (1 + \Phi_7) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} L_8 (1 + \Phi_8) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$[A_G] = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & C_5L_5 & S_5L_5 & 2 & C_5L_5 & S_5L_5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & C_6L_6 & S_6L_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & C_8L_8 & S_8L_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & C_6L_6 & S_6L_6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & C_7L_7 & S_7L_7 & 2 & C_7L_7 & S_7L_7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & C_8L_8 & S_8L_8 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

La substitution de  $\{\Delta\beta_{sk}\}$  dans l'expression des courbures de flexion et CT conduit aux écritures finales suivantes :

$$\{\kappa\} = [B_f] \{U_n\} ; [B_f] = [B_{f1}] + [B_{f\Delta\beta}] [A_n] \quad (4.37)$$

$$\{\gamma\} = [B_c] \{U_n\} ; [B_c] = [B_{s\Delta\beta}] [A_n] \quad (4.38)$$

**Tableau 4. 2:** Valeurs des  $i$  et  $j$  pour un bord  $k$

$k$	$i$	$J$
5	1	2
6	2	3
7	3	4
8	4	1

○ *Cas des plaques multicouches :*

Pour ce cas, l'hypothèse mécanique de Mindlin de l'équation(4.19), doit être modifiée pour qu'elle puisse prendre en compte l'aspect multicouche des plaques composites, elle s'écrit comme suit :

$$\int_0^{L_k} \left( \gamma_{sk} - \langle H_{ck11}^{inv} \quad H_{ck12}^{inv} \rangle \begin{Bmatrix} T_s \\ T_n \end{Bmatrix} \right) ds = 0 \quad (4.39)$$

Où  $H_{ck11}^{inv}$  et  $H_{ck11}^{inv}$  sont deux termes de comportement en CT de la matrice inverse  $[H_{ck}]^{-1}$ , avec:

$$[H_{ck}] = [P_k][C][P_k]^{-1}$$

$$[P_k] = [P_k]^{-1} = \begin{bmatrix} C_k & S_k \\ S_k & -C_k \end{bmatrix}$$

$[C]$  est la matrice constitutive reliant les contraintes aux déformations transverses dans une couche quelconque.

Afin de déterminer les efforts tranchants (Figure 4. 4), les équations d'équilibre sont utilisées, elles s'écrivent comme suit:

$$[T] = \begin{Bmatrix} T_s \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{s,s} + M_{sn,n} \\ M_{sn,s} + M_{n,n} \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

Avec :

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_s \\ M_n \\ M_{sn} \end{Bmatrix} = [D]\{\kappa\} \quad (4.41)$$

Où

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \beta_{s,s} \\ \beta_{n,n} \\ \beta_{s,n} + \beta_{n,s} \end{Bmatrix}$$

$[D]$  est la matrice constitutive reliant les contraintes aux déformations de courbure dans une couche quelconque.

Maintenant, les déformations  $\{\gamma_{sk}\}$  peuvent être définies en fonction des dérivées secondes de  $\beta_s$  et  $\beta_n$  par l'intermédiaire des équations d'équilibre (4.40) et, des deux lois de comportement, en flexion et en cisaillement, on obtient :

$$\gamma_{sk} = \left( H_{ck11}^{inv} D_{11} + H_{ck12}^{inv} D_{13} \right) \beta_{s,ss} ; \beta_{s,ss} = -\frac{8}{L_k^2} \Delta\beta_{sk} \quad (4.42)$$

Ou sous la forme matricielle

$$\{\gamma_{sk}\} = [A_\phi^{ml}] \{\Delta\beta_{sk}\}; [A_\phi^{ml}] = \begin{bmatrix} -\phi_5^{ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi_6^{ml} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_7^{ml} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\phi_8^{ml} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Avec  $\phi_k^{ml}$  est le facteur d'influence de CT

$$\phi_k^{ml} = 8 \left( \frac{H_{ck11}^{inv}}{L_k^2} D_{11} + \frac{H_{ck12}^{inv}}{L_k^2} D_{13} \right) \quad (4.44)$$

Ainsi, le vecteur des déformations de CT s'écrit:

$$\{\gamma\} = [N_\gamma] [A_\phi^{ml}] \{\Delta\beta_{sk}\} = [B_{sk}] \{\Delta\beta_{sk}\} \quad (4.45)$$

La combinaison des équations (4.22) et (4.43) donne :

$$\Delta\beta_{sk} = \frac{3}{2 + 3\phi_k^{ml}} \left( \frac{w_i - w_j}{L_k} - \frac{\beta_{si} + \beta_{sj}}{2} \right) \quad (4.46)$$

Ainsi, l'expression finale de  $\gamma_{sk}$  est écrite seulement en fonction des degrés de liberté nodaux, comme suit:

$$\gamma_{sk} = \frac{3\phi_k^{ml}}{2 + 3\phi_k^{ml}} \left( \frac{w_j - w_i}{L_k} + \frac{\beta_{si} + \beta_{sj}}{2} \right) \quad (4.47)$$

L'application de l'équation (4.46) sur les côtés élémentaires  $k$  conduit à la forme matricielle suivante:

$$\{\Delta\beta_n\} = [A_n^{ml}] \{U_n\}; \quad [A_n^{ml}] = [A_\phi^{ml}]^{-1} [A_G] \quad (4.48)$$

La matrice  $[A_G]$  reste la même (Equation(4.36)), alors que la matrice  $[A_\phi^{ml}]$  est donnée par:

$$[A_\phi^{ml}] = \begin{bmatrix} -L_5(\frac{2}{3} + \phi_5^{ml}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L_6(\frac{2}{3} + \phi_6^{ml}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_7(\frac{2}{3} + \phi_7^{ml}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -L_8(\frac{2}{3} + \phi_8^{ml}) \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Ainsi, les expressions finales des courbures de flexion et des déformations de CT s'écrivent, comme suit:

$$\{\kappa\} = [B_f] \{U_n\} ; \quad [B_f] = [B_{f1}] + [B_{f\Delta\beta}] [A_n^{ml}] \quad (4.50)$$

$$\{\gamma\} = [B_c] \{U_n\} ; \quad [B_c] = [N_\gamma] [A_\phi^{ml}] [A_n^{ml}] \quad (4.51)$$

#### 4.2.4. Lois de comportement :

Comme dans notre cas les propriétés matérielles sont supposées être dépendantes de la température, les relations contraintes-déformations dans le système de coordonnées locales des fibres d'un stratifié sujette à une variation de température, sont données par (Reddy [139]):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(T) & Q_{12}(T) & 0 \\ Q_{21}(T) & Q_{22}(T) & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}(T) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ 0 \end{Bmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44}(T) & 0 \\ 0 & Q_{55}(T) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}$$

Où 1 et 2 désignent respectivement la direction longitudinale des fibres et la direction transversale normale aux fibres dans le plan de la plaque.  $\varepsilon_1^T$  et  $\varepsilon_2^T$  sont les déformations d'origine thermique et qui sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ 0 \end{Bmatrix} = \Delta T \begin{bmatrix} \alpha_1(T) \\ \alpha_2(T) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Avec  $\alpha_1(T)$  et  $\alpha_2(T)$  sont respectivement le coefficient de dilatation thermique longitudinal et transversal en fonction de la température et  $\Delta T$  la variation de température. Les composantes de la rigidité  $Q_{ij}(T)$  sont données par:

$$Q_{11}(T) = \frac{E_1(T)}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22}(T) = \frac{E_2(T)}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12}(T) = \frac{\nu_{12}E_1(T)}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (4.54)$$

$$Q_{66}(T) = G_{12}(T), Q_{44}(T) = G_{13}(T), Q_{55}(T) = G_{23}(T)$$

Il est noté que la dépendance à la température du coefficient de poisson  $\nu$  est négligeable par rapport aux autres propriétés, donc elle n'est prise en considération [63].

Les relations contraintes-déformations de la couche "k" dans le repère global du stratifié, sont données par:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad (4.55)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} K_{11}\bar{Q}_{44} & K_{12}\bar{Q}_{45} \\ K_{21}\bar{Q}_{54} & K_{22}\bar{Q}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}_k$$

Avec  $K_{ij}$  sont les facteurs de correction de cisaillement

Les efforts à mi-plan d'une plaque et les moments sont liés aux déformations et aux courbures par les expressions suivantes:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \\ M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Où

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N^T \\ M^T \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$[T] = [C][\gamma]$$

Avec  $[A],[D],[B]$  et  $[C]$  sont les rigidités extensionnelle, flexionnelle, couplage membrane-flexion et de cisaillement transverse, respectivement, celles-ci peuvent être définies par :

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_{ij}]_k dz, \quad B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_{ij}]_k z dz \quad (4.58)$$

$$D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_{ij}]_k z^2 dz, \quad C_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_{ij}]_k dz$$

En notant par  $\sigma_{ij}$  les contraintes dans le plan, on peut écrire:

$$N_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} dz, \quad M_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} z dz$$

$$T_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} dz$$
(4.59)

Les résultantes de force et de moment thermique sont définies par:

$$N^T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_{ij}]_k [\Delta T \{\alpha\}^T] dz$$

$$M^T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_{ij}]_k [\Delta T \{\alpha\}^T] z dz$$
(4.60)

#### 4.2.5. Energie potentielle de déformation et travail des forces appliquées

L'énergie potentielle de déformation d'une plaque est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_v \sigma^T . \varepsilon dv$$
(4.61)

Où  $v$  est le volume de la plaque.

En utilisant les relations contraintes-déformations et les relations constitutives des stratifiés, l'énergie potentielle de déformation peut s'écrire:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \left( \{\varepsilon_L\}^T [A] \{\varepsilon_L\} + \{\varepsilon_L\}^T [B] \{\kappa\} + \{\kappa\}^T [B] \{\varepsilon_L\} + \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} + \{\gamma\}^T [C] \{\gamma\} \right) dv$$
(4.62)

Dans le cas de grande déformation et l'existence de chargement thermique, l'énergie potentielle totale est donnée par :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_v \left( \{\varepsilon_L^0\}^T [A] \{\varepsilon_L^0\} + \{\varepsilon_L^0\}^T [B] \{\kappa\} + \{\kappa\}^T [B] \{\varepsilon_L^0\} + \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} + \{\gamma\}^T [C] \{\gamma\} \right. \\ \left. - 2(\{\varepsilon_L^0\}^T [N^T] + \{\kappa\}^T [M^T]) + \{\varepsilon_{NL}^0\} [N^T] \right) dv$$
(4.63)

En introduisant les relations (4.56) dans l'expression de l'énergie, on obtient:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{U_n\}^T \left( \begin{array}{l} \{B_m\}^T [A] \{B_m\} + \{B_m\}^T [B] \{B_f\} \\ + \{B_f\}^T [B] \{B_m\} + \{B_f\}^T [D] \{B_f\} \\ + \{B_c\}^T [C] \{B_c\} \end{array} \right) \{U_n\} |J| d\xi d\eta \\ & - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{U_n\}^T \{[S_\varepsilon]^T [N^T] + [S_\kappa]^T [M^T]\} |J| d\xi d\eta \\ & + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{U_n\}^T \{[G]^T [N_0^T] [G]\} \{U_n\} |J| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.64)$$

Où

$|J|$  est le déterminant de la matrice Jacobienne.

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_l^0\} &= [B_m] \{q\}, \quad \{\kappa\} = [B_f] \{q\}, \quad \{\gamma\} = [B_c] \{q\} \\ [N_0^T] &= \begin{bmatrix} N_x^T & N_{xy}^T \\ N_{xy}^T & N_y^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$[G]$  est une matrice 2x40 composantes, qui relie le vecteur  $\left[ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right]$  au vecteur déplacement  $\{q\}$

#### 4.2.6. Matrice de rigidité élémentaire et vecteur forces

En se basant sur le principe de l'énergie potentielle minimale, la première variation permet d'obtenir :

- la matrice de rigidité élémentaire :

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \begin{array}{l} \{B_m\}^T [A] \{B_m\} + \{B_m\}^T [B] \{B_f\} \\ + \{B_f\}^T [B] \{B_m\} + \{B_f\}^T [D] \{B_f\} \\ + \{B_c\}^T [C] \{B_c\} \end{array} \right) |J| d\xi d\eta \quad (4.65)$$

- Le vecteur forces thermiques élémentaire:

$$\{F^e\} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{q\}^T \{[S_\varepsilon]^T [N^T] + [S_\kappa]^T [M^T]\} |J| d\xi d\eta \quad (4.66)$$

- La matrice géométrique élémentaire due aux contraintes thermiques:

$$[K_G^e] \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{[G]^T [N_0^T] [G]\} |J| d\xi d\eta \quad (4.67)$$

#### 4.2.7. Matrice de masse élémentaire

Vu que notre étude vise à traiter le comportement vibratoire des plaques composites, il est nécessaire de formuler la matrice mass. Cette dernière, peut être évaluée à partir de l'expression de l'énergie cinétique, qui s'écrit:

$$V = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (4.68)$$

Avec  $\dot{u}$ ,  $\dot{v}$ ,  $\dot{w}$  sont les composantes du vecteur vitesse d'un point  $q$  de la plaque.  $\rho$  est la masse volumique.

En introduisant le champ de déplacement définie par l'équation (4.1) et les fonctions de forme bilinéaires  $\{N_i\}$  à partir du tableau 4. 1, on obtient :

$$V^e = \frac{1}{2} \{U_n\}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \{N_i\}^T \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \{N_i\} \{U_n\} |J| d\xi d\eta \right. \quad (4.69)$$

Avec

$$I_0 = \sum_{i=1}^N \rho_i (z_{i+1} - z_i) \quad (4.70)$$

$$I_2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \rho_i (z_{i+1}^3 - z_i^3)$$

Avec  $N$  est le nombre de couches de la plaque stratifiée

La matrice de masse élémentaire est définie par:

$$M^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ N_i \right\}^T \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \left\{ N_i \right\} |J| d\xi d\eta \quad (4.71)$$

### 4.3. Procédure de solution:

Afin d'étudier l'effet de la température sur les vibrations des plaques composites stratifiées, on procède en deux étapes: la première étape consiste à déterminer la température critique de flambement de la plaque stratifiée. Cette étape nous aide à déterminer la température maximale que peut supporter la plaque avant de perdre sa stabilité. Comme dans la première partie de notre travail, la détermination de la température critique de flambement revient à résoudre le problème aux valeurs propres suivant:

$$([K] + \lambda[K_G])\{X\} = 0 \quad (4.72)$$

Avec

$[K]$  est la matrice de rigidité globale,  $[K_G]$  est la matrice géométrique globale,  $\lambda$  la charge non dimensionnelle de flambement,  $\{X\}$  représente le vecteur modal.

Cependant, comme les propriétés matérielles dépendent de la température, la détermination de la température de flambement se fait d'une manière itérative, en suivant les étapes suivante[37] :

1. calculer la température critique flambement sans dépendance des propriétés matérielles à la température.
2. En utilisant la température critique trouvée dans l'étape 1, on détermine des propriétés matérielles en fonction de cette température et on calcule à nouveau la température critique de flambement.

3. L'étape 2 est répétée jusqu'à ce que la température critique de flambement satisfasse le

$$\text{critère de convergence : } \frac{|T_{cr}^{i+1} - T_{cr}^i|}{|T_{cr}^{i+1}|} \leq \varepsilon_0 \quad (\varepsilon_0 \text{ critère d'arrêt})$$

Après avoir déterminé la température critique de flambement, on entame la deuxième étape qui est l'effet des contraintes thermiques sur les fréquences propres de vibration. A cet effet, on résout le problème aux valeurs propres suivant:

$$[[[K] + [K_G]] - \omega^2 [M]] \{X\} = 0 \quad (4.73)$$

Avec  $[K_G]$  est la matrice géométrique qui traduit la variation de la raideur avec l'état de contrainte thermique,  $[M]$  est la matrice masse globale,  $\omega$  fréquence propre de vibration.

#### 4.4. Conclusion:

Ce chapitre avait pour but de présenter et d'exposer la formulation de l'élément fini DMQP/ml (*Discrete Mindlin Quadrilateral Plate Multilayer*) [134]. L'élément a été modifié pour prendre en compte les effets de la température sur les vibrations des plaques composites.

L'élément DMQP/ml est une extension de l'élément DKMQ de Katili [135] pour l'étude de la flexion des plaques isotropes épaisses. L'élément DMQP/ml contient quatre nœuds et trois degrés de liberté ( $w$ ,  $\beta_x$  et  $\beta_y$ ), il est basé sur un modèle variationnel en déplacement appelé DDM (*Displacement Discrete Mindlin*) qui introduit de manière discrète une hypothèse cinématique et une autre mécanique.

Plus encore, dans ce chapitre, une procédure de solution a été présentée pour l'étude des effets de la température sur les vibrations des plaques composites stratifiées.

## **Chapitre 5**

### **Validation et Etude paramétrique**

## 5.1. Introduction

Ce chapitre a pour but d'étudier l'effet de la température sur les vibrations des plaques composites stratifiées en utilisant l'élément fini DMQP/ml. Pour ce faire un code en Fortran a été développé. Cependant, avant d'entamer l'étude il est nécessaire de valider la précision de l'élément fini utilisé. A cet effet, une série de test est présentée, traitant les cas de vibration et de flambement thermique des plaques isotropes et composites stratifiées.

Plusieurs combinaisons de conditions aux limites, rapport d'aspect, rapport d'épaisseur et chargement thermique sont pris en considération. Il est à noter que sauf indication, le maillage considéré est de  $10 \times 10$  éléments. Les conditions aux limites adoptées dans ce chapitre sont listées dans le tableau 5. 1

**Tableau 5. 1:** Conditions aux limites

Conditions aux limites	Abréviation	Les retenus aux bords
Simplement appuyé	SS	$u = w = \beta_y = 0, x = \pm \frac{a}{2}$ $v = w = \beta_x = 0, y = \pm \frac{b}{2}$
Encastré	CC	$u = v = w = \beta_x = \beta_y = 0$
Encastré - Simplement appuyé	CS	Encastré sur $x = \pm \frac{a}{2}$ Simplement appuyé sur $y = \pm \frac{b}{2}$

## 5.2. Validation

### 5.2.1. Vibrations libres de Plaques isotropes:

On considère une plaque isotrope carrée ( $a/b=1$ ), avec deux rapports d'épaisseur  $a/h=10$  et  $a/h=100$ , ainsi que deux types de conditions aux limites, Encastrée (CC) et Simplement appuyée (SS). Les fréquences propres adimensionnelles sont données par:

$$\bar{\omega} = \omega \times a \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

Pour le cas de plaque encadrée (CC) on considère un facteur de correction  $k=0.8601$ , alors que pour le cas de la plaque simplement appuyée (SS)  $k=5/6$ . Les plaques ont un coefficient de poisson  $\nu = 0.3$ . Les conditions aux limites pour le cas simplement appuyée (SS) sont :

$$w = \beta_x = 0 \text{ pour } y=0,b$$

$$w = \beta_y = 0 \text{ pour } x=0,a$$

Les tableaux 5.1 et 5.2 montre la convergence de la fréquence propre  $\bar{\omega}$  de plaques isotropes encadrées et simplement appuyées pour deux cas d'épaisseur  $a/h=10$  et  $a/h=100$ , respectivement. Les résultats trouvés par le présent élément ont été comparé avec des résultats trouvés par un élément fini quadrilatérale à intégration sélective ainsi qu'avec la solution analytique. On voit très bien que la présente formulation donne des résultats qui sont en très bon accord avec la solution analytique.

**Tableau 5. 2:** Convergence de la fréquence propre  $\bar{\omega}$  de plaques isotropes avec  $a/h=10$

		présent	Q4[140]	Analytique[141]
CC	6x6	1.6246	-	
	8x8	1.6113	-	
	10x10	1.6045	1.6259	
	15x15	1.5973	1.6063	1.5940
SS	6x6	0.9558	-	
	8x8	0.9449	-	
	10x10	0.9398	0.9399	
	15x15	0.9345	0.9327	0.930

**Tableau 5. 3:** Convergence de la fréquence propre  $\bar{\omega}$  d'une plaque isotrope avec  $a/h=100$ 

		présent	Q4[140]	Analytique [141]
CC	6x6	0.1780		
	8x8	0.1769		
	10x10	0.1763	0.1800	
	15x15	0.1758	0.1774	0.1754
SS	6x6	0.0987		
	8x8	0.0976		
	10x10	0.0971	0.0973	
	15x15	0.0966	0.0968	0.0963

### 5.2.2. Vibrations libres de plaques composites stratifiées:

Le but de ce test est d'étudier la convergence des fréquences propres de plaques composites stratifiées carrées avec une stratification ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ). L'effet des conditions aux limites ainsi que du rapport d'épaisseur sont considérés. Les valeurs propres sont exprimées en termes de fréquences adimensionnelles, définies par:

$$\bar{\omega} = \left( \omega b^2 / \pi^2 \right) \sqrt{\frac{\rho h}{D_0}}$$

Avec

$$D_0 = E_2 h^3 / 12 (1 - \nu_{12} \nu_{21})$$

Un facteur de correction de cisaillement  $k = \pi^2 / 12$  a été considéré, avec des propriétés matérielles définies par :

$$E_1 / E_2 = 40; G_{12} = G_{13} = 0.6 E_2; G_{23} = 0.5 E_2; \nu_{12} = 0.25; \nu_{21} = 0.00625$$

Le tableau 5. 4 présent la convergence des six premières fréquences d'une plaque composite encadrée avec une stratification ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ). Deux rapport d'épaisseur ( $t/b=0.001$  et  $0.20$ ) sont pris en considération. Les résultats sont obtenu pour trois types de maillage;  $6 \times 6$ ,  $8 \times 8$  et  $10 \times 10$ . Les fréquences trouvées avec la présente formulation sont comparées

avec la solution P-Ritz de Liew [142] . D'après le tableau 5. 4, on remarque que les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de Liew [142].

Le tableau 5. 5 présente la convergence des six premières fréquences d'une plaque composite simplement appuyée avec une stratification ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ). Les mêmes paramètres que celles du cas de la plaque encastree sont considérés. On remarque que, là aussi, les résultats sont en bon accord avec la solution de Liew [142].

**Tableau 5. 4:** Convergence des fréquences propres d'une plaque ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) encastree

		Modes					
t/b	maillage	1	2	3	4	5	6
0.001	6×6	15.067	18.493	27.8776	43.0098	44.0831	44.7574
	8×8	14.9093	18.1403	26.5942	41.458	41.6701	43.1514
	10×10	14.8326	17.9662	25.8897	39.6914	40.6812	42.3472
Liew [142]		14.6655	17.6138	24.5114	35.5318	39.1572	40.7685
0.20	6×6	4.5574	7.1693	8.0868	9.8368	11.2873	12.5904
	8×8	4.5115	6.9381	7.9223	9.5546	10.6078	12.0838
	10×10	4.4905	6.8336	7.8463	9.4256	10.2951	11.8436
Liew [142]		4.4468	6.6419	7.6969	9.1552	9.7378	11.3991

**Tableau 5. 5:** Convergence des fréquences propres d'une plaque (0°/90°/0°) simplement appuyée

		Modes					
t/b	maillage	1	2	3	4	5	6
0.001	6×6	6.7909	10.0386	19.1851	27.5113	29.081	34.3765
	8×8	6.7227	9.7820	17.8690	26.4655	27.9532	32.0538
	10×10	6.6808	9.6503	17.2394	25.9485	27.3968	30.0493
Liew [142]		6.6252	9.4470	16.2051	25.1146	26.4982	26.6572
0.20	6×6	3.6606	5.6055	6.1855	7.7713	8.5073	8.6889
	8×8	3.6337	5.5511	6.0017	7.6123	8.3086	8.4876
	10×10	3.6214	5.5244	5.9196	7.5388	8.2121	8.3886
Liew [142]		3.5939	5.7691	7.3972	8.6876	9.1451	11.2080

### 5.2.3. Vibrations libres de plaques composites soumis à un changement de température:

#### 5.2.3.1. Effet du rapport d'épaisseur:

Le but de ce test est d'étudier l'effet de l'élévation de la température sur les fréquences propres des plaques composites stratifiées. Pour ce faire, on considère une plaque composite stratifiée carrée à trois couches (0°/90°/0°) simplement appuyée avec trois rapports d'épaisseur ( $a/h=5, 10, 20$ ). La plaque est supposée soumise à trois types de chargement thermique, à savoir:  $\Delta T = 0\text{ C}^\circ, 100\text{ C}^\circ$  et  $200\text{ C}^\circ$ . Les valeurs propres sont exprimées en termes de fréquences adimensionnelles, définie par:

$$\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_2 h^2}}$$

Les propriétés matérielles définies par :

$$E_1/E_2 = 40, G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, G_{23} = 0.5E_2, \nu_{12} = 0.25$$

$$\alpha_1 = 1.14 \times 10^{-6}, \alpha_2 = 11.4 \times 10^{-6}$$

Le tableau 5. 6 réunit les résultats obtenus par la présente formulation et des résultats trouvés par un élément fini à neuf nœuds basé sur la théorie du premier ordre [132] et ceux d'une solution analytique basé sur la théorie d'ordre supérieure [124]. Dans ce test aussi, on remarque que le présent élément fini présente des résultats qui sont en très bon accord avec ceux de la littérature [124,132].

Dans le tableau 5. 6 on remarque que les fréquences propres de la plaque étudiée diminuent avec l'élévation de la température ainsi qu'avec la réduction du rapport d'épaisseur.

**Tableau 5. 6:** Effet de la température et du rapport d'épaisseur sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) simplement appuyée

$\Delta T$	a/h	Présent	Lal et Singh [132]	Shen et al. [124]
$0\ C^\circ$	20	17.604	17.523	17.483
	10	14.750	14.710	14.702
	5	10.198	10.245	10.263
$100\ C^\circ$	20	16.912	17.171	17.172
	10	14.547	14.636	14.597
	5	10.126	10.232	10.226
$200\ C^\circ$	20	16.190	16.812	16.853
	10	14.342	14.562	14.490
	5	10.053	10.219	10.188

### 5.2.3.2. Effet du rapport d'anisotropie :

Ce test fut initialement proposé par Liu et Huang [118], afin d'étudier le comportement vibratoire des plaques composites stratifiées sous un changement de température. Les auteurs ont examiné une plaque carrée avec une séquence d'empilement de quatre couches  $(0^\circ/90^\circ)_s$ . Dans ce test, on considère trois types de chargement thermique:  $\Delta T = -50\ C^\circ$ ,  $0\ C^\circ$  et  $50\ C^\circ$

La plaque stratifiée est supposée avoir les propriétés suivantes:

- Les propriétés mécaniques définies par :

$$E_2 = 1, E_1/E_2 = 40, G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, G_{23} = 0.5E_2, \nu_{12} = 0.25$$

- Les coefficients de dilatation thermique:  $\alpha_2 = 11.4 \times 10^{-6}$  et quatre rapports de l'ordre de :  $\alpha_1/\alpha_2 = -0.05, 0.1, 0.2$  et  $0.3$
- La densité :  $\rho = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et une épaisseur  $h = 0.1 \text{ m}$  avec une arrête  $a = 10h$  .

Les valeurs propres sont exprimées en termes de fréquence adimensionnelles, définie par:

$$\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_2 h^2}}$$

Le tableau 5. 7 présente les résultats trouvés par le présent élément avec un maillage de 10x10 et leur confrontation à ceux de Liu et Huang [118] avec un élément quadrilatéral à huit nœuds. D'après le tableau 5. 7, on note un excellent accord avec les résultats de la référence [118].

**Tableau 5. 7:** Effet de la température et le rapport des coefficients de dilatation thermique sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée

$\alpha_1/\alpha_2$		-50 C°	0 C°	50 C°
-0.05	Présent	15.135	15.149	15.164
	Liu et Huang [118]	15.136	15.150	15.164
0.1	Présent	15.247	15.149	15.051
	Liu et Huang [118]	15.247	15.150	15.052
0.2	Présent	15.321	15.149	14.976
	Liu et Huang [118]	15.320	15.150	14.978
0.3	Présent	15.395	15.149	14.900
	Liu et Huang [118]	15.394	15.150	14.902

#### 5.2.4. Convergence de la température critique de flambement:

Comme on l'a déjà mentionné, une partie de notre travail consiste à trouver la température critique de flambement de la plaque avant d'entamer l'étude de l'effet de la température sur les vibrations des plaques. De ce fait, il est nécessaire de vérifier la précision de l'élément utilisé dans la détermination de la température critique de flambement sans ou avec dépendance des propriétés matérielles à la température.

##### 5.2.4.1. Température critique de flambement sans dépendance à la température (IDT)

Dans ce test, on considère trois types de plaques carrées, à savoir: isotrope, orthotrope et stratifiée. Les propriétés matérielles choisies sont :

- plaque stratifiée:

$$E_L/E_T = 15, G_{LT}/E_T = 0.5, G_{TT}/E_T = 0.3356, \nu = 0.3, \alpha_L/\alpha_0 = 0.015, \alpha_T/\alpha_0 = 1.0$$

- Plaque isotrope:

$$E_L/E_T = 15, \nu = 0.3, \alpha_L = \alpha_T = \alpha_0$$

Avec  $\alpha_0$  est un facteur de normalisation des coefficients de dilatation thermique ( $\alpha_0 = 1 \times 10^{-6}$ ).

Le **Tableau 5. 8** présente la convergence de la température critique de flambement de plaques orthotrope, isotrope et d'une stratifiée ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) pour différent rapport d'épaisseur ( $a/h=2, 5, 10$  et  $100$ ). Les résultats trouvés pour trois types de maillage ( $8 \times 8, 10 \times 10$  et  $12 \times 12$ ) ont été comparés avec des résultats trouvés par la théorie de cisaillement d'ordre supérieur de Matsunaga [71], ainsi qu'avec la solution tridimensionnelle de Noor et Burton [66]. D'après le **Tableau 5. 8**, on note que les résultats trouvés sont en très bon accord avec ceux de la littérature.

**Tableau 5. 8:** Convergence de la température critique de flambement de plaques simplement appuyées

	a/h	8x8	10x10	12x12	Matsunaga [71]	Noor et Burton [66]
iso	2	0.1324	0.1320	0.1318	0.1258	-
	5	0.0420	0.0418	0.0416	0.0399	0.0399
	10	0.0122	0.0121	0.0121	0.0118	0.0118
	100	0.1284 <sup>e-3</sup>	0.1277 <sup>e-3</sup>	0.1273 <sup>e-3</sup>	0.1265 <sup>e-3</sup>	0.1265 <sup>e-3</sup>
0°	2	0.2740	0.2729	0.2723	0.2798	-
	5	0.1528	0.1514	0.1506	0.1438	0.1436
	10	0.0611	0.0604	0.0600	0.0578	0.0578
	100	0.7720 <sup>e-3</sup>	0.7631 <sup>e-3</sup>	0.7582 <sup>e-3</sup>	0.7463 <sup>e-3</sup>	0.7463 <sup>e-3</sup>
[0/90/0]	2	0.3222	0.3217	0.3215	0.3334	-
	5	0.1768	0.1763	0.1760	0.1763	-
	10	0.0755	0.0752	0.0750	0.07467	-
	100	1.0101 <sup>e-3</sup>	1.0050 <sup>e-3</sup>	1.0020 <sup>e-3</sup>	0.9961 <sup>e-3</sup>	-

#### 5.2.4.2. Température critique de flambement avec dépendance à la température (DT)

On considère une plaque composite stratifiée simplement appuyée avec une séquence d'empilement  $[0/90]_s$ . La plaque est de forme carrée avec un rapport d'épaisseur  $a/h=30$ . Les propriétés matérielles sont supposées être en fonction linéaire de la température et sont données comme suit [63]:

$$E_1(T) = E_{10}(1 + E_{11}T), \quad E_2(T) = E_{20}(1 + E_{21}T)$$

$$G_{12}(T) = G_{120}(1 + G_{121}T), \quad G_{13}(T) = G_{130}(1 + G_{131}T)$$

$$G_{23}(T) = G_{230}(1 + G_{231}T), \quad \alpha_1(T) = \alpha_{10}(1 + \alpha_{11}T)$$

$$\alpha_2(T) = \alpha_{20}(1 + \alpha_{21}T)$$

Avec

$$\begin{aligned}
E_{10}/E_{20} &= 40, \quad G_{120}/E_{20} = G_{130}/E_{20} = 0.5, \quad G_{230}/E_{20} = 0.2 \\
\nu &= 0.25, \quad \alpha_{10} = 10^{-6} (^{\circ}\text{C}^{-1}), \quad \alpha_{20} = 10^{-5} (^{\circ}\text{C}^{-1}) \\
E_{11} &= -0.5 \times 10^{-3}, \quad E_{21} = G_{121} = G_{131} = G_{231} = -0.2 \times 10^{-3} \\
\alpha_{11} &= \alpha_{21} = 0.5 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

Le tableau 5. 9 réunit les résultats trouvés par l'élément fini DMQP/ml et ceux trouvés par un élément fini hermitien basé sur l'approche Layer-wise [63], ainsi que par la théorie d'ordre supérieur de Reddy [143]. A partir du tableau 5. 9, on voit très bien que les résultats obtenus par le présent élément fini sont en très bon accord avec ceux de la littérature.

**Tableau 5. 9:** Température critique de flambement pour une plaque stratifiée simplement appuyée avec/sans dépendance à la température

Stratification		IDT	DT	IDT/DT
	Présent	0.667	0.523	1.275
$[0/90]_s$	Ordre supérieur [143]	0.667	0.525	1.270
	Layer-wise [63]	0.640	0.496	1.290

### 5.3. Etude paramétrique

#### 5.3.1. Effets de la température sur les fréquences propres de plaques composite stratifiées :

Le but de ce test est d'étudier les deux effets de la température sur les fréquences propres de plaques composites stratifiées, à savoir :

- 1) l'effet de la dépendance des propriétés matérielles à la température (DT).
- 2) l'effet des contraintes thermiques sur les fréquences propres de vibration.

A cet effet, on considère deux types de stratification, l'une croisée avec une séquence d'empilement de  $[0/90]_s$  et l'autre équilibrée avec une séquence d'empilement de  $[\pm\theta]_s$ . Dans ce test, on considère des plaques de forme carrée avec un rapport d'épaisseur ( $a/h=30$ ) ainsi que trois types de conditions aux limites (SS, CC, CS). Les propriétés

matérielles sont supposées être en fonction linéaire de la température et sont données comme suit [63]:

$$E_1(T) = E_{10}(1 + E_{11}T), \quad E_2(T) = E_{20}(1 + E_{21}T)$$

$$G_{12}(T) = G_{120}(1 + G_{121}T), \quad G_{13}(T) = G_{130}(1 + G_{131}T)$$

$$G_{23}(T) = G_{230}(1 + G_{231}T), \quad \alpha_1(T) = \alpha_{10}(1 + \alpha_{11}T)$$

$$\alpha_2(T) = \alpha_{20}(1 + \alpha_{21}T)$$

Avec

$$E_{10}/E_{20} = 40, \quad G_{120}/E_{20} = G_{130}/E_{20} = 0.5, \quad G_{230}/E_{20} = 0.2$$

$$\nu = 0.25, \quad \alpha_{10} = 10^{-6}(\text{°C}^{-1}), \quad \alpha_{20} = 10^{-5}(\text{°C}^{-1})$$

$$E_{11} = -0.5 \times 10^{-3}, \quad E_{21} = G_{121} = G_{131} = G_{231} = -0.2 \times 10^{-3}$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = 0.5 \times 10^{-3}$$

Les fréquences propres sont exprimées en termes de fréquences adimensionnelles, définies par:

$$\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_2 h^2}}$$

Deux cas d'études sont présentées, à savoir:

- Effet de la température sur les fréquences propres sans dépendance des propriétés matérielles à la température (IDT)
- Effet de la température sur les fréquences propres avec dépendance des propriétés matérielles à la température (DT)

Le tableau 5. 10 présente les effets de la température sur les fréquences propres de vibration d'une plaque stratifiée (0/90/90/0). Cinq types de chargement thermique définis en

fonction de la température critique de flambement sont considérés ( $T_0/T_{cr}=0, 0.25, 0.5, 0.75$  et 1)

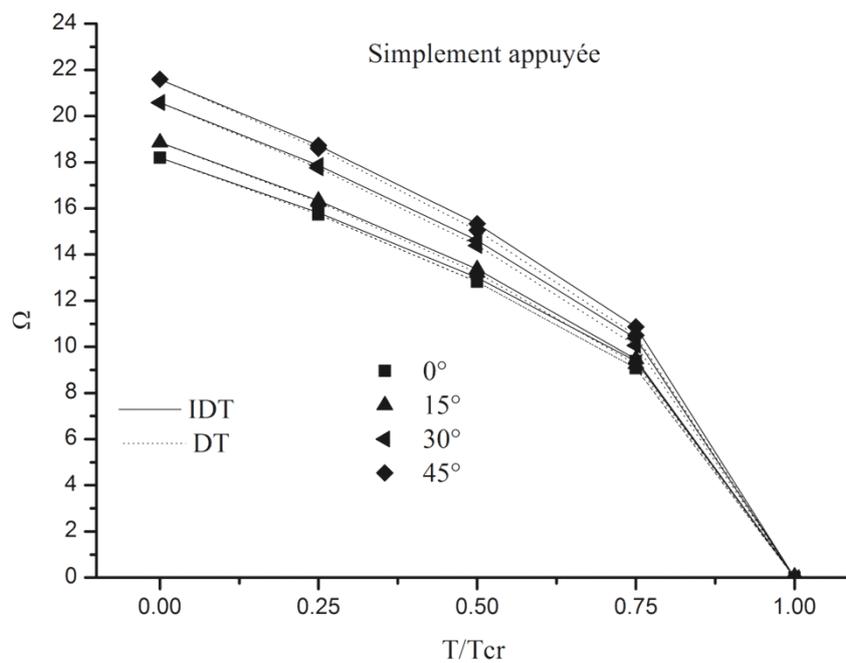
D'après le tableau 5. 10 , on voit très bien que les fréquences propres diminuent avec l'augmentation de la température pour les trois cas de conditions aux limites. On remarque aussi qu'avec la prise en compte de la dépendance des propriétés à la température amoindrit les fréquences propres de vibration.

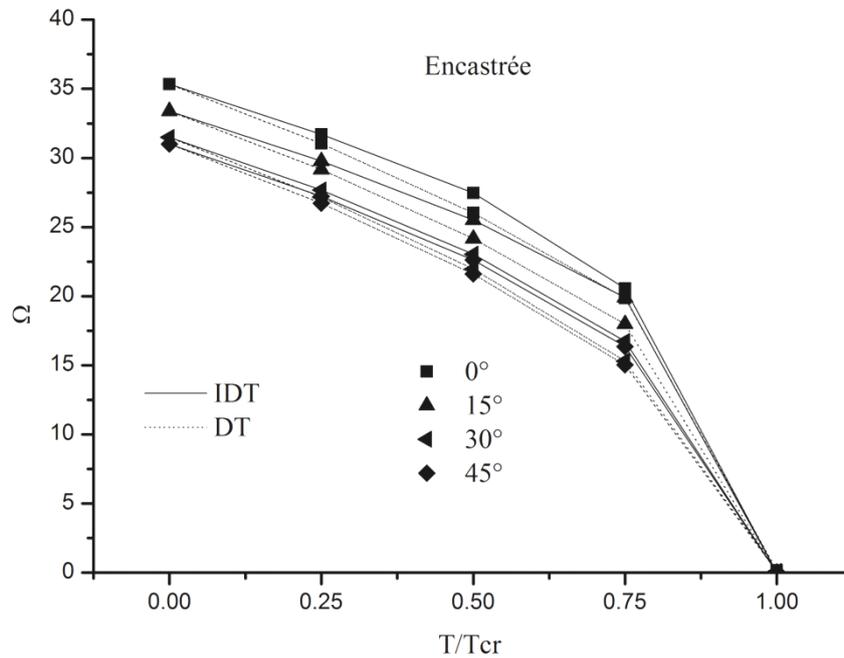
Il est très intéressant de noter que si la température imposée est égale à la température critique de flambement de la plaque, les fréquences propres tendent vers zéro. Cette dernière remarque a été notée pour le cas des plaques sandwichs (Librescu et Lin [123],Shiau et Kuo [125]), ainsi que dans le cas des plaques isotropes (Dhanaraj et Palaninathan [126],Murphy et al. [127]) .

Les figures 5.1, 5.2 et 5.3 présentent les effets de la température sur les fréquences propres de vibration de plaques stratifiées avec une séquence d'empilement  $[\pm\theta]_s$  sous trois types de conditions aux limites SS, CC, CS, respectivement. On remarque que pour les trois types de conditions aux limites, les fréquences propres de vibration diminuent avec l'augmentation de la température. On note aussi que la prise en compte de la dépendance à la température (DT) donne les fréquences les plus basses. Quant à l'effet des conditions aux limites, on note que la plaque encastree (Figure 5. 2) donne les fréquences propres les plus hautes, alors que les plus basses sont enregistrées avec la plaque simplement appuyée (Figure 5. 1)

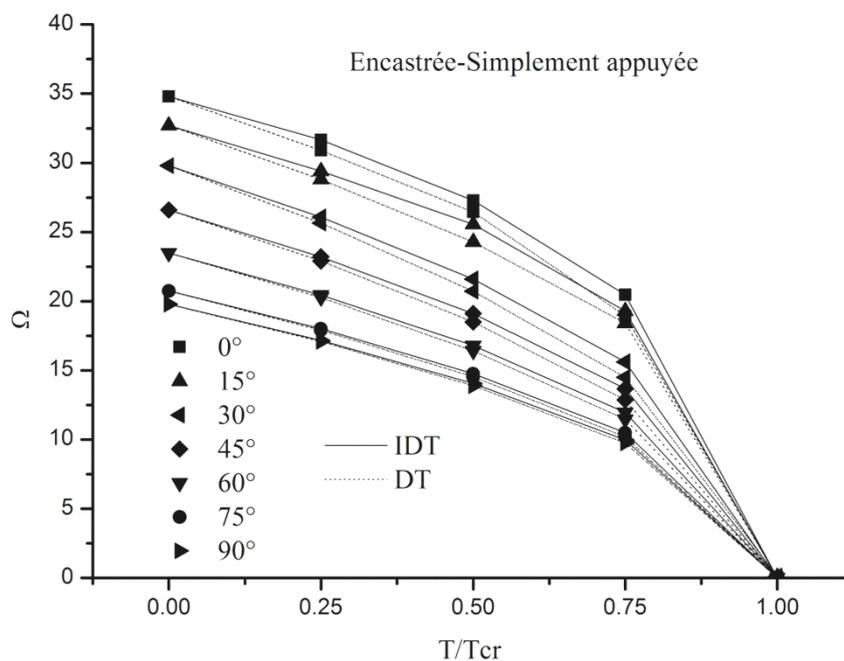
**Tableau 5. 10:** Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées

C.L.		$T_0/T_{cr}$				
		0	0.25	0.5	0.75	1
SS	IDT	17.7533	15.3762	12.5534	8.8776	0
	DT	17.7533	15.3293	12.4418	8.7191	0.049
CC	IDT	32.7673	28.7123	23.7985	17.1787	0
	DT	32.7673	28.1296	22.5678	15.5566	0.13796
CS	IDT	29.7318	26.8093	23.5074	19.6379	0
	DT	29.7318	26.2821	22.3152	17.6898	0.1192

**Figure 5. 1:** Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées équilibrées simplement appuyées (SS)



**Figure 5. 2:** Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées équilibrées encastrées (CC)



**Figure 5. 3:** Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées équilibrées encastrées-simplement appuyées (CS)

### 5.3.2. Effet du rapport d'aspect et de la température sur la vibration de plaques composite stratifiées :

Dans cette section, nous allons présenter une étude sur l'effet du rapport d'aspect ( $a/b$ ) et de la température sur les fréquences propres de vibration de plaques stratifiées. Trois types de conditions aux limites (SS, CC et CS) sont prises en compte ainsi que deux types de séquences d'empilement, à savoir :  $[0_2/90_2]_s$  et  $[90_2/0_2]_s$ , pour un rapport d'épaisseur  $a/h=10$ . Les propriétés matérielles sont supposées être en fonction linéaire de la température et sont données comme suit [63]:

$$E_1(T) = E_{10}(1 + E_{11}T), \quad E_2(T) = E_{20}(1 + E_{21}T)$$

$$G_{12}(T) = G_{120}(1 + G_{121}T), \quad G_{13}(T) = G_{130}(1 + G_{131}T)$$

$$G_{23}(T) = G_{230}(1 + G_{231}T), \quad \alpha_1(T) = \alpha_{10}(1 + \alpha_{11}T)$$

$$\alpha_2(T) = \alpha_{20}(1 + \alpha_{21}T)$$

Avec

$$E_{10}/E_{20} = 40, \quad G_{120}/E_{20} = G_{130}/E_{20} = 0.5, \quad G_{230}/E_{20} = 0.2$$

$$\nu = 0.25, \quad \alpha_{10} = 10^{-6} (^{\circ}\text{C}^{-1}), \quad \alpha_{20} = 10^{-5} (^{\circ}\text{C}^{-1})$$

$$E_{11} = -0.5 \times 10^{-3}, \quad E_{21} = G_{121} = G_{131} = G_{231} = -0.2 \times 10^{-3}$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = 0.5 \times 10^{-3}$$

Les valeurs propres sont exprimées en termes de fréquences adimensionnelles, définies par:

$$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_2 h^2}}$$

Dans la procédure de solution que nous avons décrite dans le précédent chapitre, nous avons mentionné qu'afin de déterminer quelle température on peut infliger à la structure;

nous devons, d'abord, calculer la température critique de flambement. Cependant, Il est à noter que les relations, ci-dessus, décrivant la variation des propriétés à la température ne sont valables que si la température n'est pas très haute. Afin de mieux expliquer, prenons à titre d'exemple, la relation du module de Young longitudinal  $E_1(T)$  :

$$E_1(T) = E_{10} \left( 1 + \frac{\eta}{E_{10} T} \right)$$

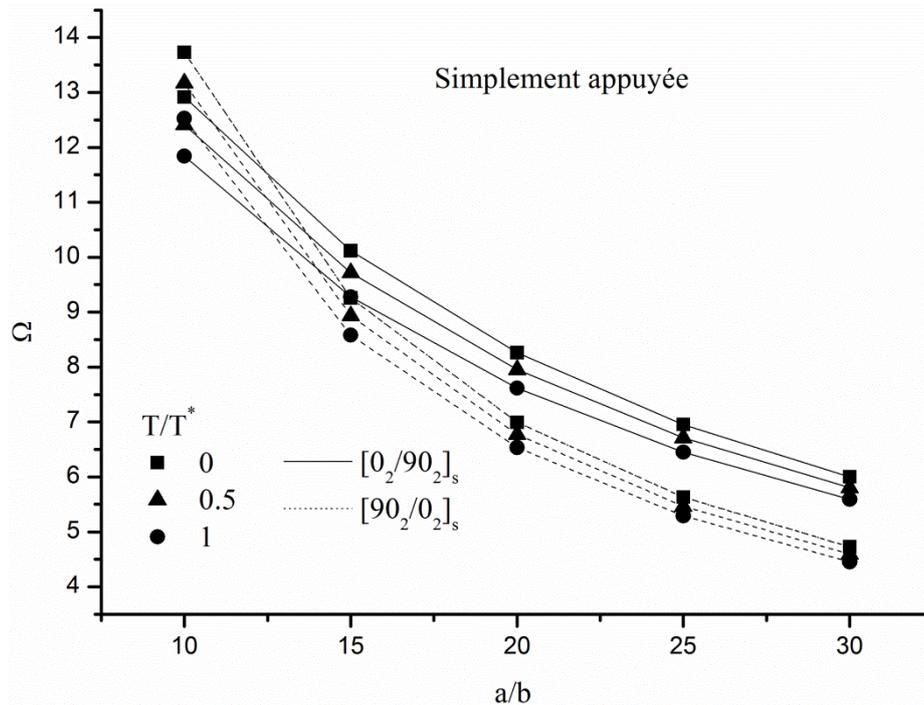
On remarque que si  $\eta \leq -1$  on obtient  $E_1(T) \leq 0$  ce qui est irrationnel. Ainsi, si la température critique de la structure calculée engendre un  $E_1(T) \leq 0$ , alors la solution diverge. Comme notre souci est, seulement, de ne pas dépasser la température critique de flambement nous avons décidé d'exprimer la température critique de flambement dans la forme, ci-dessous, ensuite l'injecter à chaque itération, l'expression est donnée comme suit [133]:

$$T^* = T_{cr} \alpha_2 10^4$$

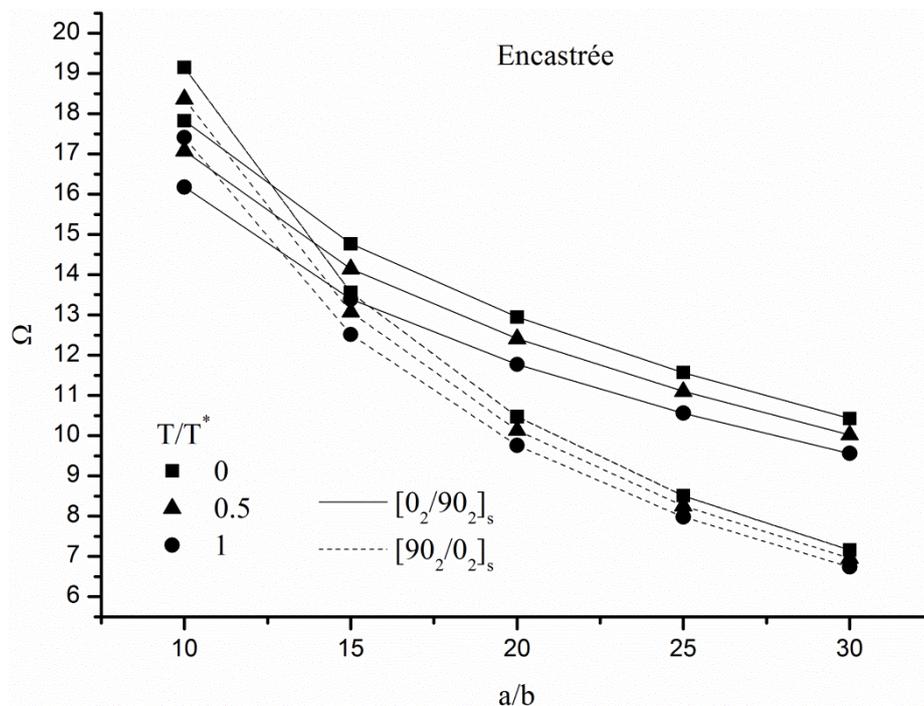
Les figures 5.4, 5.5 et 5.6 présentent l'effet du rapport d'aspect ( $a/b$ ) sur les fréquences propre de vibration de plaques stratifiées simplement appuyées (SS), encastées (CC) et encastées-simplement appuyées (CS), respectivement, avec les deux séquences d'empilement ( $[0_2/90_2]_s$  et  $[90_2/0_2]_s$ ). Trois types de chargements thermiques sont considérés, à savoir:  $T/T^* = 0, 0.5, 1$ . D'après les trois figures, on remarque que les fréquences propres de vibration décroissent avec l'accroissement du rapport d'aspect ainsi que de la température pour les deux stratifications. On remarque, aussi, que la  $[0_2/90_2]_s$  donne des fréquences propre plus hautes que celles de la  $[90_2/0_2]_s$ . Cependant, avec les conditions aux limites CC et CS, l'écart des fréquences entre les deux stratifications est plus prononcé que celui du cas du SS. D'autre part, on note qu'avec  $T/T^* = 1$ , les fréquences ne tendent pas vers zéro, ceci nous indique que  $T^* < T_{cr}$ .

Le tableau 5. 11 regroupe les modes de vibration du cas de la plaque encastée avec la séquence d'empilement  $[0_2/90_2]_s$ . D'après tableau 5. 11, on remarque que le rapport d'aspect ainsi que la température n'affectent pas les modes de vibration. Il est à noter qu'en raison de

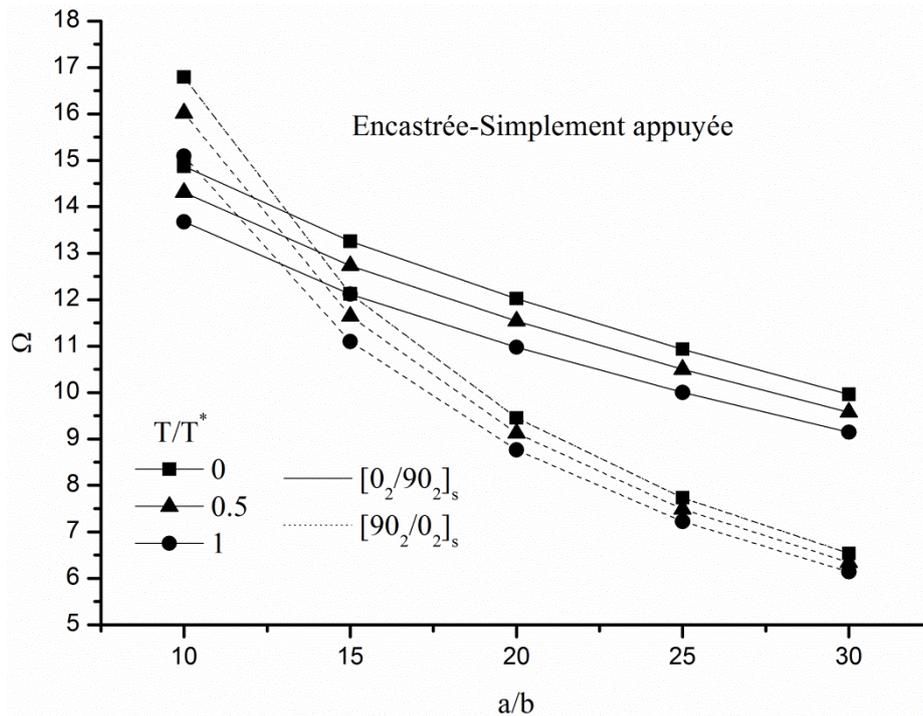
la similitude des résultats avec les autres cas de conditions aux limites nous nous sommes limités à présenter que le cas de la plaque encastree (CC)



**Figure 5. 4:** Effets du rapport d'aspect ( $a/b$ ) et de la température sur les fréquences propres de vibration de plaques simplement appuyées (SS)

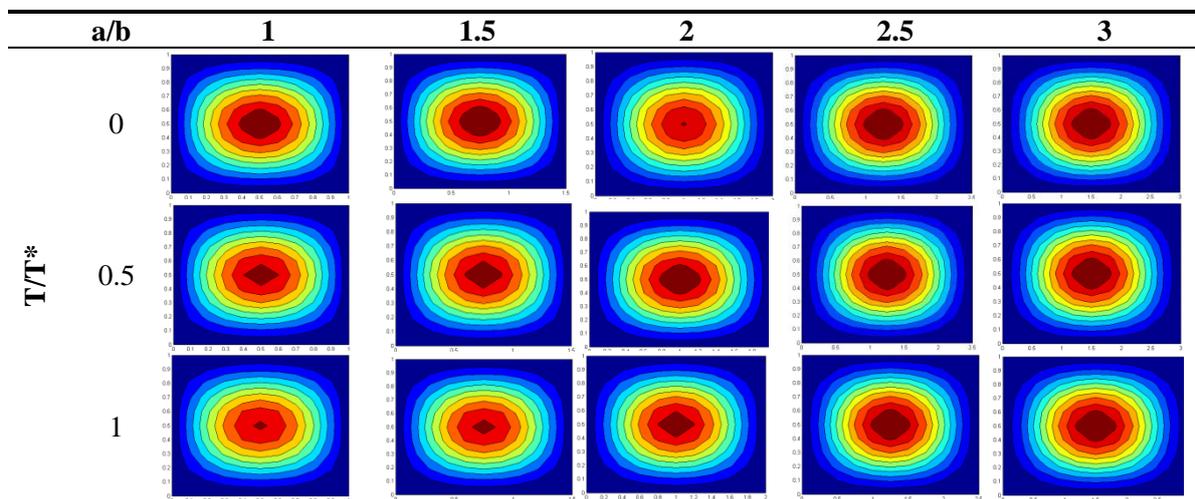


**Figure 5. 5:** Effets du rapport d'aspect ( $a/b$ ) et de la température sur les fréquences propres de vibration de plaques encastrees (CC)



**Figure 5. 6** Effets du rapport d'aspect ( $a/b$ ) et de la température sur les fréquences propres de vibration de plaques encadrées-simplement appuyées.

**Tableau 5. 11:** Effets du rapport d'aspect ( $a/b$ ) et de la température sur les modes de vibration de plaques encadrées  $[0_2/90_2]_s$



### 5.3.3. Effets de la température sur les fréquences propres de vibration de plaques stratifiées en T300/5208:

Dans les études que nous avons présentées, précédemment, il a été supposé que les propriétés matérielles sont en fonction linéaire de la température. D'ailleurs, cette

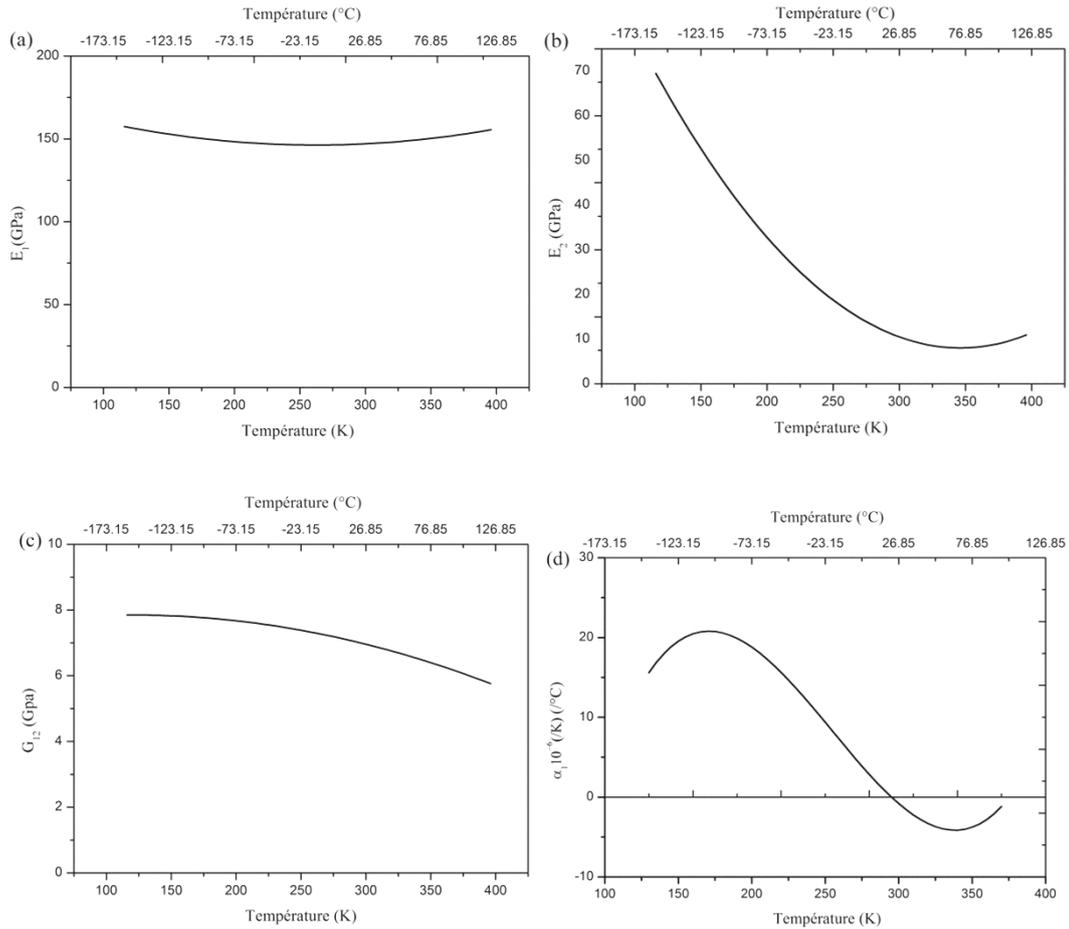
supposition a été considérée, comme telle, par maints auteurs [37,63,112,133,144]. Cependant, selon les résultats trouvés, cette supposition oblige en quelque sorte la structure à manifester un comportement qui, lui aussi, est en fonction linéaire de la température. Or nous savons très bien que la majorité des constituants d'une structure en matériau composite ne peuvent pas présenter un même comportement face à la température. En conséquence, nous avons vu qu'il était plus intéressant de faire une étude sur un matériau bien défini et ainsi nous rapprocher beaucoup plus de la réalité. En cherchant dans la littérature, nous avons trouvé des travaux expérimentaux sur la dépendance des propriétés à la température du Graphite/Epoxy T300/5208 [145-148].

Dans notre travail, nous nous sommes focalisés à l'un de ces travaux publié par Hyer et al. [147]. Ces derniers, ont étudié des spécimens constitués de fibres faites de Thornel (Union Carbide) T300 graphite et une résine Epoxy Narmco 5208. Les propriétés mécaniques et de dilatation thermique ont été déterminées dans une plage de température allant de 116 K (-157.15 °C) à 394 K (120.85 °C), avec une température ambiante de 301 K (27.85 °C). La figure 7 présente les résultats de régression par la méthode des moindres carrés de Hyer et al. [147] pour les propriétés suivantes :  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  et  $\alpha_1$ . D'après la figure 5. 7, on remarque très bien que les propriétés n'exhibent pas le même comportement face à la température. Le tableau 5. 12 réunit les coefficients de la régression moindres carrés pour des températures en Kelvin (K) de Hyer et al. [147].

**Tableau 5. 12:** Coefficients de dépendance a la température pour chaque propriétés [147]\*

Propriétés	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$E_1$ (GPa)	$1.82 \times 10^2$	$-2.72 \times 10^{-1}$	$5.18 \times 10^{-4}$	0
$E_2$ (GPa)	$1.47 \times 10^2$	$-8.03 \times 10^{-1}$	$1.16 \times 10^{-3}$	0
$G_{12}$ (GPa)	7.46	$6.52 \times 10^{-3}$	$-2.73 \times 10^{-5}$	0
$\alpha_1$ ( $10^{-6}/K$ )	-110	18.0	$-0.810 \times 10^{-2}$	$0.686 \times 10^{-5}$

\*  $P = C_0 + C_1 T + C_2 T^2 + C_3 T^3$  où T est la température en Kelvin



**Figure 5. 7:** Propriétés élastiques et coefficient de dilatation thermique du T300/5208 en fonction de la température [147]. a) Module d'élasticité longitudinal ( $E_1$ ). b) Module d'élasticité transversal ( $E_2$ ). c) Module de cisaillement ( $G_{12}$ ). d) coefficient de dilatation longitudinal ( $\alpha_1$ )

Dans la présente section, nous allons étudier l'effet de la température sur les fréquences propre de vibration de plaques composites stratifiées en T300/5208 Graphite/Epoxy en considérant les coefficients de dépendance de Hyer et al. [147]. Cependant, comme nous travaillons en Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ), nous avons recalculé les coefficients du polynôme à l'aide de la méthode des moindres carrés avec la température en Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ). Les résultats des coefficients sont réunis dans le tableau 5. 13.

La plaque prise en compte est de forme carrée ( $a/b=1$ ) avec un rapport d'épaisseur de  $a/h=10$ . Trois types de conditions aux limites sont considéré (SS, CC, CS) pour une séquence d'empilement à quatre couches  $[\pm\theta]_s$ . En fonction des résultats de Hyer et al. [144], quatre types de chargements thermiques sont considérés, à savoir:  $-140^{\circ}\text{C}$ ,  $-60^{\circ}\text{C}$ ,

27.85°C, 60° et 95°C. Les propriétés matérielles supposées non dépendantes à la température sont données comme suit:

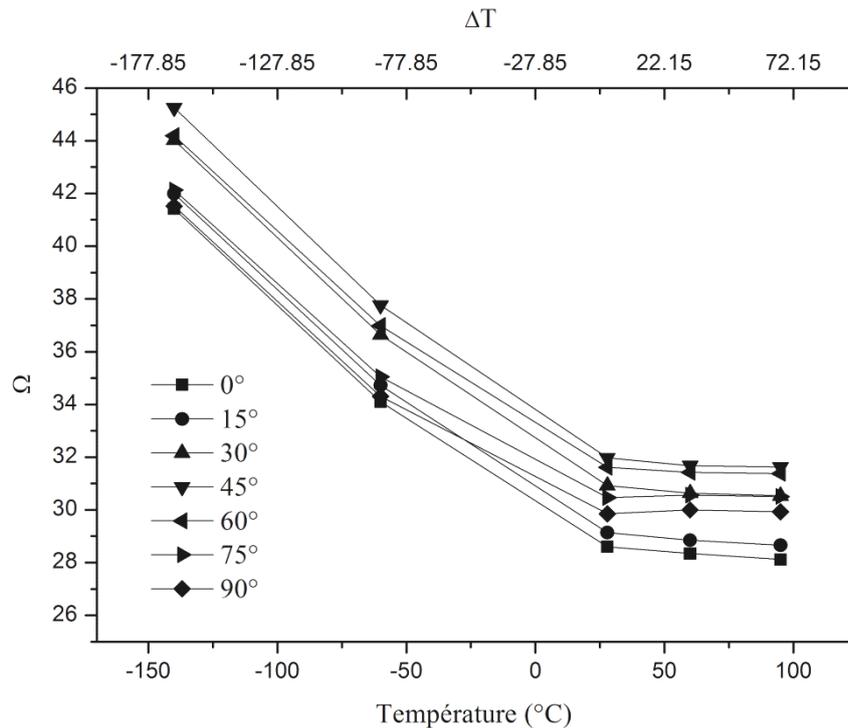
$$\rho = 1.58 \text{ (Kg/m}^3\text{)}, \nu = 0.28, G_{23} = 3.35 \text{ (GPa)}, \alpha_2 = 26.5 \text{ (10}^{-6}\text{/}^\circ\text{C)}$$

**Tableau 5. 13:** Coefficients de dépendance à la température pour chaque propriétés en Celsius\*

Propriétés	C <sub>0</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>
$E_1$ (GPa)	146.35	0.0109	$5.18 \times 10^{-4}$	0
$E_2$ (GPa)	14.21	-0.169	$1.16 \times 10^{-3}$	0
$G_{12}$ (GPa)	3.64	0.021	$-2.73 \times 10^{-5}$	0
$\alpha_1$ (10 <sup>-6</sup> /°C)	4.275	-0.212	$0.586 \times 10^{-3}$	$0.106 \times 10^{-4}$

\*  $P = C_0 + C_1 T + C_2 T^2 + C_3 T^3$  où T est la température en Celsius et T ambiante = 27.85°C

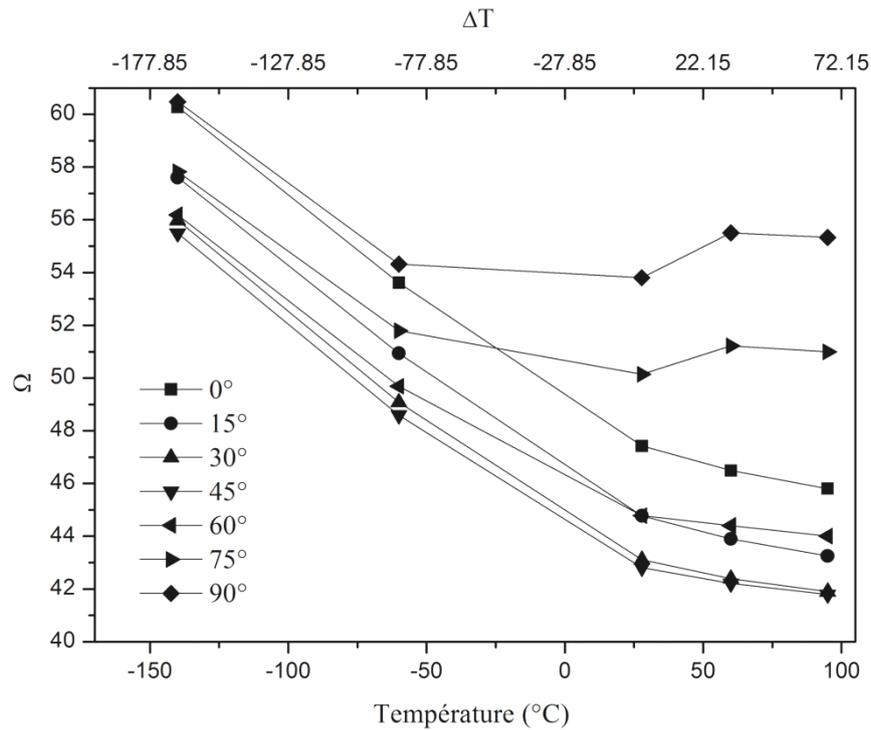
La figure 5. 8 présente l'effet de la température sur les fréquences propres de vibration d'une plaque stratifiées en T300/5208 simplement appuyée (SS) pour différents d'angles d'orientation. A travers la figure 5. 8, on remarque que les fréquences propres diminuent avec l'augmentation de la température jusqu'à la température ambiante. Cependant, en dépassant la température ambiante, on note une légère diminution des fréquences propre avec la température pour les angles de 0° à 60°, alors qu'avec les angles 75° et 90° on remarque une augmentation des fréquences propres de vibration. Ce dernier phénomène peut être dû à la valeur négative du coefficient de dilatation thermique dans cette plage de température du T300/5208. Ce constat, nous rappelle les résultats trouvés avec l'AS4/3501-6 Graphite/Epoxy dans la première partie de notre travail sur le flambement thermique, où nous avons conclu qu'avec un coefficient de dilatation thermique négatif, la plaque, sous certains angles d'orientation, génère des forces de traction sous la température.



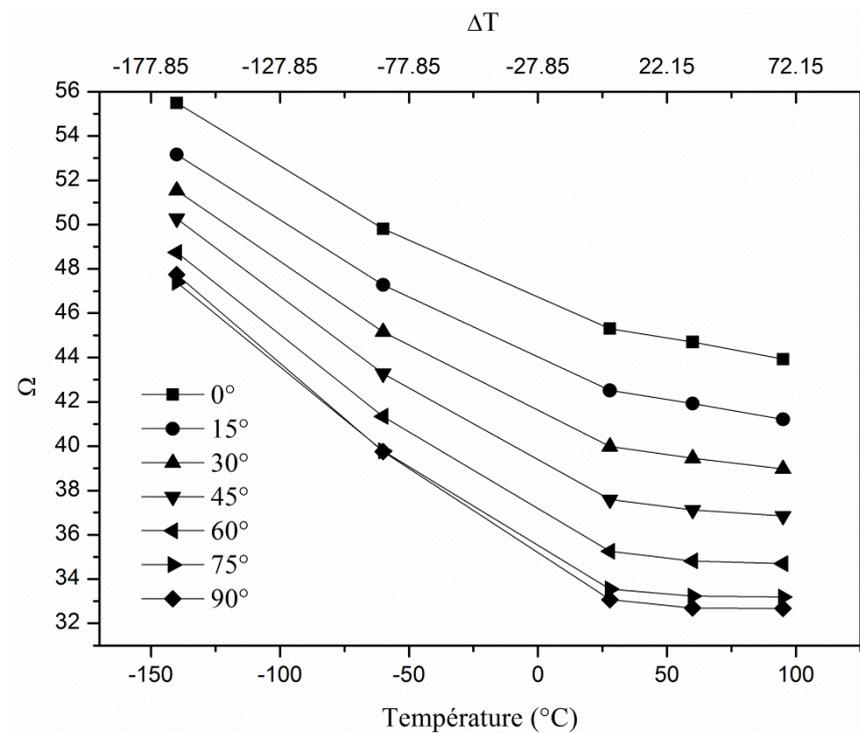
**Figure 5. 8:** Effet de la température et l'angle d'orientation sur les fréquences propres de vibration d'une plaque stratifiées en T300/5208 simplement appuyée (SS).

La figure 5. 9 présente l'effet de la température sur les fréquences propres de vibration d'une plaque stratifiée en T300/5208 encadrée (CC) pour différents d'angles d'orientation. D'après la figure 5. 9, on note, là aussi, une diminution des fréquences propre avec de l'augmentation de la température. Cependant, à la différence du cas de la plaque simplement appuyée (figure8), entre  $T=-60^{\circ}\text{C}$  et  $T=27.85$  la plaque encadré (CC) est légèrement affecté par la température avec les angles  $75^{\circ}$  et  $90^{\circ}$ , or l'effet de température est plus considérable entre  $T=27.85^{\circ}\text{C}$  et  $T=60$ . On remarque aussi qu'avec  $T=95^{\circ}\text{C}$ , les fréquences propres avec  $75^{\circ}$  et  $90^{\circ}$  diminuent légèrement par rapport a  $t=60^{\circ}\text{C}$ , ceci est dû à la valeur du coefficient de dilatation thermique qui a changé par rapport à la température (Figure 5. 7d).

La figure 5. 10 présente le cas de la plaque encadrée-simplement appuyée (CS). Pour ce type de conditions aux limites, on note une diminution des fréquences propres de vibration avec l'augmentation de la température pour tous les angles d'orientation sans exception.



**Figure 5. 9:** Effet de la température et l'angle d'orientation sur les fréquences propres de vibration d'une plaque stratifiées en T300/5208 encastée (CC).



**Figure 5. 10:** Effet de la température et l'angle d'orientation sur les fréquences propres de vibration d'une plaque stratifiées en T300/5208 encastée-simplement appuyée (CS).

#### 5.4. Conclusion:

Le présent chapitre avait pour but d'étudier l'effet de la dépendance des propriétés matérielles à la température ainsi que l'effet de la génération des contraintes thermiques sur la vibration des plaques composites stratifiées. Pour ce faire, l'élément fini DMQP/ml présenté dans le chapitre quatre a été utilisée. La première partie de ce chapitre a été consacré à la validation de la précision de l'élément fini par le biais de plusieurs tests disponibles dans la littérature. A travers les résultats trouvés, on a vu que l'élément présente une bonne précision ainsi qu'une bonne rapidité de convergence.

La deuxième partie de ce chapitre portait sur l'étude des effets de la température sur les fréquences propres de vibration des plaques composites stratifiées. L'étude a montré que si la température infligée à la plaque coïncide avec la température critique de flambement, les fréquences propres tendent vers zéro. Au départ, dans cette partie, on a supposé une variation linéaire des propriétés matérielles en fonction de la température. D'ailleurs, cette supposition a été considérée par maints auteur [37,63,112,133,144]. A travers les résultats trouvés, on a remarqué que cette supposition oblige en quelque sorte la structure à manifester un comportement qui, lui aussi, est en fonction linéaire de la température. Cependant, afin de mieux se rapprocher de la réalité, il a été conclu qu'il aurait été plus intéressant d'étudier un matériau bien défini. De ce fait, en se basant sur les travaux expérimentaux de Hyer et al. [147], une étude a été présentée sur le comportement de plaques composites stratifiées faites de Graphite/Epoxy T300/5208. L'étude a montré que dans le cas général les fréquences propres de vibration diminuent avec l'augmentation de la température. Toutefois, si le matériau présente un coefficient de dilatation thermique négatif et sous certains angles orientation, les fréquences propres de vibration augmentent avec l'augmentation de la température.

# **Conclusion générale**

## Conclusion

Notre travail avait pour but d'étudier l'effet de la température sur le comportement vibratoire et de stabilité des plaques composites stratifiées en utilisant la méthode des éléments finis.

La première partie de ce travail portait sur l'étude du flambement thermique des plaques composites stratifiées minces. Dans cette partie, nous avons commencé par une synthèse bibliographique sur les origines du flambement thermique ainsi que sur les modèles éléments finis utilisés par les différents auteurs dans l'analyse du flambement thermique des plaques composites stratifiées. Nous avons remarqué que la plupart des travaux étaient basés sur la théorie de cisaillement de premier ordre. Cela est sûrement dû au fait que cette théorie ne néglige pas les effets des déformations de cisaillement transverse contrairement à la théorie classique des stratifiées et qu'elle est moins coûteuse que les théories d'ordre supérieur et celles des approches par couches. Cependant, comme nous avons visé l'étude des plaques composites stratifiées minces, car elles sont plus vulnérables au flambement, nous avons opté pour un élément fini basé sur la théorie classique des stratifiées.

L'élément fini choisi était au départ développé pour l'analyse de la flexion et le flambage mécanique des plaques stratifiées. Le premier objectif de cette partie était d'étendre cet élément vers l'étude du flambement thermique des plaques composites stratifiées, que nous avons développé dans le premier chapitre. L'élément est une combinaison d'un élément membranaire isoparamétrique et d'un élément plaque de type Hermite à haute précision le tout donnant un élément fini à quatre nœuds avec trente-deux degrés de liberté.

Comme dans tout cas d'utilisation de la méthode des éléments finis, il est nécessaire de vérifier et de valider la précision et les performances de l'élément fini employé, ce qui était l'objet du deuxième chapitre. Dans ce chapitre, l'élément a été confronté à une série de tests sur le flambement thermique des plaques isotropes et composites stratifiées sous différentes conditions aux limites. Les résultats obtenus ont été comparés à des résultats trouvés par : 1) des éléments finis de même ordre, 2) des éléments finis d'ordre supérieur et 3) la solution tridimensionnelle ainsi qu'analytique. La comparaison a montré que l'élément présente une très bonne précision ainsi qu'une bonne rapidité de convergence.

D'autre part, dans le deuxième chapitre, une étude paramétrique sur l'effet de certains paramètres influençant la température critique de flambement des plaques stratifiées est présentée. Dans cette étude trois types de matériaux qui sont très utilisés dans l'industrie ont été considérés, à savoir: le T300/5208 Graphite/Epoxy, le AS4/3501-6 Graphite/Epoxy et le E-glass/Epoxy. Nous avons choisi ces trois types de matériaux pour les raisons suivantes:

- Le T300/5208 présente des propriétés mécaniques élevées
- L'AS4/3501-6 présente des propriétés mécaniques proches de celles du T300/520, mais il a un coefficient de dilatation thermique longitudinal négatif
- L'E-glass/Epoxy présente des propriétés mécaniques faibles par rapport aux deux premiers matériaux.

Le premier effet qui a été abordé dans l'étude paramétrique est l'effet du rapport d'aspect. Pour ce faire, on a considéré trois types de stratification symétrique, à savoir:  $[90_2/0_2]$ ,  $[0_2/90_2]$  et  $[\pm\theta]$ . Nous avons remarqué qu'avec le  $[90_2/0_2]$ , le rapport d'aspect (a/b) n'a pas d'effets significatifs sur les températures critiques de flambement, alors que pour le  $[0_2/90_2]$  les températures critiques de flambement décroissent avec l'augmentation du rapport d'aspect (a/b). D'autre part, nous avons noté que l'AS4/3501-6 donne des températures critiques de flambement plus hautes que celles du T300/5208 malgré le module de Young longitudinal ( $E_1$ ) élevé de ce dernier. Nous avons conclu que c'est à cause du coefficient longitudinal de dilatation thermique négatif de l'AS4/3501-6. Pour ce qui est de la stratification  $[\pm\theta]$  avec le T300/5208 et l'E-glass/Epoxy, l'effet du rapport d'aspect (a/b) sur les températures critiques de flambement diminuent jusqu'à devenir négligeables au fur et à mesure que l'orientation des angles approche la partie allongée de la plaque (a). Dans le cas de l'AS4/3501-6, on a vu qu'avec les angles d'orientation ( $0^\circ, 15^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ ) on trouve des températures critiques négatives. En conjonction avec la littérature, nous avons conclu qu'avec des matériaux ayant un coefficient de dilatation thermique négatif et pour certains angles d'orientation la plaque stratifiée perd sa stabilité en abaissant la température plutôt que de l'élever.

Le deuxième effet traité dans l'étude paramétrique est celui du nombre de couches sur les températures critiques de flambement. Dans cette étude, seulement, le T300/5208 et l'E-glass/Epoxy ont été considérés, pour une stratification  $[\pm\theta]$ , sous différentes conditions aux

limites. Avec les conditions aux limites SS et CC, pour les deux types de matériaux, les températures critiques de flambement augmentent avec l'augmentation du nombre de couches. Plus encore, au fur et à mesure qu'on augmente le nombre de couches, l'écart entre les températures critiques diminue. Pour le cas de la condition aux limites (CS), avec l'E-glass/Epoxy, les températures critiques de flambement décroissent avec la variation de l'angle d'orientation.

Après avoir étudié le comportement au flambement thermique des plaques stratifiées minces avec ces trois types de matériaux, on a conclu que les propriétés matérielles jouent un rôle très important dans la détermination de la température critique de flambement. Ceci nous a amené à se poser la question suivante : Quel est l'effet de chacune des propriétés matérielles sur la température critique de flambement des plaques stratifiées ? Afin d'essayer de répondre à cette question, nous avons proposé d'étudier l'effet du rapport des modules de Young ( $E_L/E_T$ ) ainsi que l'effet du rapport des coefficients de dilatation thermique ( $\alpha_T/\alpha_L$ ). Pour ce faire, nous avons considéré cinq différentes combinaisons de conditions aux limites (CC, SS, CS, CF et SF). L'étude a montré que les températures critiques de flambement, généralement, diminuent avec l'augmentation du rapport ( $E_L/E_T$ ) ou avec le rapport ( $\alpha_T/\alpha_L$ ), à l'exception des cas de CS et CF où les températures critiques de flambement sont légèrement affectées par le rapport ( $E_L/E_T$ ) quand les fibres sont dans la direction des arrêtes encastées.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié le flambement thermique des plaques composites stratifiées munie d'une ouverture centrée. Trois types de matériaux ont été pris en considération, à savoir: le T300/5208, le AS4/3501-6 et le E-glass/Epoxy. L'étude a montré que la taille de l'ouverture ainsi que les conditions aux limites affectent significativement la température critique de flambement des plaques composites. Pour le cas de la plaque encastée, la présence d'ouverture d'une taille d'au-delà de  $e/a=0.2$  augmente la résistance au flambement. Avec le cas des plaques simplement appuyées, la température critique de flambement diminue avec l'augmentation de la taille de l'ouverture.

La deuxième partie de notre travail était consacrée à l'étude de l'effet de la température sur les vibrations des plaques composites stratifiées. Comme dans la première partie, nous

avons débuté par une synthèse bibliographique sur les effets de la température sur les vibrations ainsi que les travaux disponibles dans la littérature traitant ce dernier problème. Nous avons trouvé que l'effet de la température sur une structure peut se manifester en deux façons:

- Détérioration des propriétés matérielles suite à élévation de la température
- Génération de contraintes thermiques induites par une élévation uniforme de la température sous certaines conditions aux limites ou une élévation de température non-uniforme

D'après la synthèse bibliographique, nous avons noté que la plupart des travaux n'ont traité qu'un seul effet à la fois. Cette dernière remarque, nous a conduits à étudier les deux effets cités, ci-dessus, sur le comportement vibratoire des plaques stratifiées simultanément. A cet effet, nous avons choisi un élément fini basé sur la théorie de cisaillement de premier ordre baptisé DMQP/ml [134].

Le quatrième chapitre de notre travail était destiné à la présentation et l'exposition de la formulation de l'élément fini DMQP/ml et son extension vers l'étude des effets de la température.

Le cinquième chapitre de notre travail était destiné à la validation de la précision de l'élément ainsi qu'à l'étude de l'effet de la température. Pour ce faire, L'élément fini DMQP/ml présenté dans le quatrième chapitre a été utilisé. A travers les résultats trouvés dans la partie validation du chapitre cinq, on a pu conclure que l'élément présente une bonne précision ainsi qu'une bonne rapidité de convergence.

La deuxième partie du cinquième chapitre portait sur l'étude des effets de la température sur les fréquences propres de vibration des plaques composites stratifiées. L'étude a montré que dans la plupart des cas les fréquences propres de vibration diminuent avec l'augmentation de la température. D'autre part, si la température infligée à la plaque coïncide avec la température critique de flambement, les fréquences propres tendent vers zéro. De plus dans cette partie, une étude a été présentée sur le comportement de plaques composites stratifiées faites de Graphite/Epoxy T300/5208. en se basant sur les travaux expérimentaux de Hyer et al. [147], l'étude a montré que dans le cas général les fréquences propres de vibration diminuent avec l'augmentation de la température. Toutefois, si le

matériau présente un coefficient de dilatation thermique négatif et sous certains angles orientation, les fréquences propres de vibration augmentent avec l'augmentation de la température.

Comme perspectives à ce travail on propose :

- D'étudier le comportement au flambement et le post-flambement thermique des plaques composites sous élévation non-uniforme de la température avec dépendance des propriétés matérielles à la température
- D'utiliser une « approche par couche » afin d'étudier l'état des contraintes thermiques dans le comportement de flambement des plaques stratifiées avec singularité géométrique
- D'étudier la vibration à grandes amplitudes sous effet de la température des plaques composites stratifiées avec/ sans singularité géométrique

## Références Bibliographiques

1. Zingoni, A. (2001) *Structural Engineering, Mechanics and Computation: SEMC 2001 (2 Volume Set)*, Elsevier Science
2. ASTM-D3878-07. (2013) *Standard Terminology for Composite Materials*, ASTM International, West Conshohocken, PA
3. Vinson, J. R., et Sierakowski, R. L. (2008) *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, Springer Netherlands
4. Kaw, A. K. (2005) *Mechanics of Composite Materials, Second Edition*, CRC Press
5. Herakovich, C. T.(2012), Mechanics of composites: a historical review. *Mechanics Research Communications* **41**, 1-20
6. Oller, S. (2014) *Numerical Simulation of Mechanical Behavior of Composite Materials*, Springer International Publishing
7. Brigante, D. (2013) *New Composite Materials: Selection, Design, and Application*, Springer International Publishing
8. Dreier, O. (2013) Sourcing of Titanium for Airbus & the EADS. in *Titanium USA Conference*, Caesars Palace, Las Vegas, Nevada, USA
9. Singer, J., Arbocz, J., et Weller, T. (2002) *Buckling Experiments, Shells, Built-up Structures, Composites and Additional Topics*, Wiley
10. Fares, M. E.(1999), Non-linear bending analysis of composite laminated plates using a refined first-order theory. *Compos. Struct.* **46**, 257-266
11. Reddy, J. N.(1990), On refined theories of composite laminates. *Meccanica* **25**, 230-238
12. Tati, A. (2008) Etude du flambage des plaques stratifiées en matériaux composites par la méthode des éléments finis in *Département de Génie Civil*, Université de Biskra, Biskra, Algérie
13. Tati, A., et Abibsi, A.(2007), Un element fini pour la flexion et le flambage des plaques minces stratifiées en matériaux composites. *Revue Des Composites Et Des Matériaux Avances* **17**, 279-296
14. Craveur, J.-C. (2008) *Modélisation par éléments finis-3ème édition-cours et exercices corrigés: Cours et exercices corrigés*, Dunod
15. Jones, R. M. (2006) *Buckling of Bars, Plates, and Shells*, Bull Ridge Publishing
16. Heldenfels, R. R.(1955), Some Design Implications of the Effects of Aerodynamic Heating.
17. Gossard, M. L., Seide, P., et Roberts, W. M. (1952) *Thermal buckling of plates*,
18. Heldenfels, R. R., et Roberts, W. M. (1952) Experimental and theoretical determination of thermal stresses in a flat plate. National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, D.C.
19. Thornton, E. A.(1993), Thermal Buckling of Plates and Shells. *Applied Mechanics Reviews* **46**

20. Whitney, J. M., et Ashton, J. E.(1971), Effect of environment on the elastic response of layered composite plates. *AIAA Journal* **9**, 1708-1713
21. Ashton, J. E., et Waddoups, M. E.(1969), Analysis of Anisotropic Plates. *J. Compos. Mater.* **3**, 148-165
22. Stavsky, Y.(1975), Thermoelastic stability of laminated orthotropic circular plates. *Acta Mechanica* **22**, 31-51
23. Biswas, P.(1976), Thermal buckling of orthotropic plates. *Journal of Applied Mechanics* **43**, 361-363
24. Flagg, D. L., et Vinson, J. R.(1978), Hydrothermal effects on the buckling of laminated composite plates. *Fibre Science and Technology* **11**, 353-365
25. Tauchert, T. R., et Huang, N. N. (1987) Thermal buckling of symmetric angle-ply laminated plates. in *Composite Structures 4* (Marshall, I. H. ed., Springer Netherlands)
26. Tauchert, T. R.(1987), Thermal buckling of thick antisymmetric angle-ply laminates. *J. Therm. Stresses.* **10**, 113-124
27. Sun, L. X., et Hsu, T. R.(1990), Thermal buckling of laminated composite plates with transverse shear deformation. *Comput. Struct.* **36**, 883-889
28. Chen, L.-W., et Chen, L.-Y.(1987), Thermal buckling of Laminated composite plates. *J. Therm. Stresses.* **10**, 345-356
29. Yang, I.-H., et Shieh, J.-A.(1988), Generic thermal buckling of initially stressed antisymmetric cross-ply thick laminates. *International Journal of Solids and Structures* **24**, 1059-1070
30. Noor, A. K., et Burton, W. S.(1991), Predictor-corrector procedures for thermal buckling analysis of multilayered composite plates. *Comput. Struct.* **40**, 1071-1084
31. Chang, J.-S., et Leu, S.-Y.(1991), Thermal buckling analysis of antisymmetric angle-ply laminates based on a higher-order displacement field. *Compos. Sci. Technol.* **41**, 109-128
32. Meyers, C. A., et Hyer, M. W.(1991), Thermal buckling and postbuckling of symmetrically laminated composite plates. *J. Therm. Stresses.* **14**, 519-540
33. Chen, W.-C., et Liu, W. H.(1993), Thermal buckling of antisymmetric angle-ply laminated plates— an analytical Levy-type solution. *J. Therm. Stresses.* **16**, 401-419
34. Zhang, Y. X., et Yang, C. H.(2009), Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates. *Compos. Struct.* **88**, 147-157
35. Thangaratnam, K. R., Palaninathan, et Ramachandran, J.(1989), Thermal buckling of composite laminated plates. *Comput. Struct.* **32**, 1117-1124
36. Chen, L.-W., et Chen, L.-Y.(1989), Thermal buckling analysis of composite laminated plates by the finite-element method. *J. Therm. Stresses.* **12**, 41-56
37. Chen, L.-W., et Chen, L.-Y.(1989), Thermal buckling behavior of laminated composite plates with temperature-dependent properties. *Compos. Struct.* **13**, 275-287
38. Chen, L.-W., et Chen, L.-Y.(1990), Thermal buckling analysis of laminated cylindrical plates by the finite element method. *Comput. Struct.* **34**, 71-78

39. Shiau, L.-C., Kuo, S.-Y., et Chen, C.-Y.(2010), Thermal buckling behavior of composite laminated plates. *Compos. Struct.* **92**, 508-514
40. Chen, W. J., Lin, P. D., et Chen, L. W.(1991), Thermal buckling behavior of thick composite laminated plates under nonuniform temperature distribution. *Comput. Struct.* **41**, 637-645
41. Huang, N. N., et Tauchert, T. R.(1992), Thermal buckling of clamped symmetric laminated plates. *Thin Wall. Struct.* **13**, 259-273
42. Noor, A. K., et Peters, J. M.(1992), Thermomechanical buckling of multilayered composite Plates. *J. Eng. Mech.* **118**, 351-366
43. Noor, A. K., et Peters, J. M.(1994), Finite element buckling and postbuckling solutions for multilayered composite panels. *Finite Elements in Analysis and Design* **15**, 343-367
44. Noor, A. K., Starnes, J. H., et Peters, J. M.(1994), Thermomechanical buckling of multilayered composite panels with cutouts. *AIAA Journal* **32**, 1507-1519
45. Noor, A. K., Starnes Jr, J. H., et Peters, J. M.(1993), Thermomechanical buckling and postbuckling of multilayered composite panels. *Compos. Struct.* **23**, 233-251
46. Noor, A. K., et Andersen, C. M.(1982), Mixed models and reduced/selective integration displacement models for nonlinear shell analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **18**, 1429-1454
47. Chandrashekhara, K.(1992), Thermal buckling of laminated plates using a shear flexible finite element. *Finite Elements in Analysis and Design* **12**, 51-61
48. Reddy, J. N.(1980), A penalty plate-bending element for the analysis of laminated anisotropic composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **15**, 1187-1206
49. Lee, Y.-S., Lee, Y.-W., Yang, M.-S., et al.(1999), Optimal design of thick laminated composite plates for maximum thermal buckling load. *J. Therm. Stresses.* **22**, 259-273
50. Walker, M., Reiss, T., Adali, S., et al.(1997), Optimal design of symmetrically laminated plates for maximum buckling temperature. *J. Therm. Stresses.* **20**, 21-33
51. Topal, U., et Uzman, Ü.(2008), Thermal buckling load optimization of laminated composite plates. *Thin Wall. Struct.* **46**, 667-675
52. Topal, U., et Uzman, Ü.(2009), Thermal buckling load optimization of laminated skew plates. *Materials & Design* **30**, 2569-2575
53. Prabhu, M. R., et Dhanaraj, R.(1994), Thermal buckling of laminated composite plates. *Computers & Structures* **53**, 1193-1204
54. Kant, T., et Babu, C. S.(2000), Thermal buckling analysis of skew fibre-reinforced composite and sandwich plates using shear deformable finite element models. *Compos. Struct.* **49**, 77-85
55. Babu, C. S., et Kant, T.(1999), Two shear deformable finite element models for buckling analysis of skew fibre-reinforced composite and sandwich panels. *Compos. Struct.* **46**, 115-124
56. Singha, M. K., Ramachandra, L., et Bandyopadhyay, J.(2001), Stability and strength of composite skew plates under thermomechanical loads. *AIAA Journal* **39**, 1618-1623

57. Kabir, H. R. H., Askar, H., et Chaudhuri, R. A.(2003), Thermal buckling response of shear flexible laminated anisotropic plates using a three-node isoparametric element. *Compos. Struct.* **59**, 173-187
58. Chang, J.-S.(1990), FEM analysis of buckling and thermal buckling of antisymmetric angle-ply laminates according to transverse shear and normal deformable high order displacement theory. *Comput. Struct.* **37**, 925-946
59. Babu, C. S., et Kant, T.(2000), Refined higher order finite element models for thermal buckling of laminated composite and sandwich plates. *J. Therm. Stresses.* **23**, 111-130
60. Wu, Z., et Chen, W.(2007), Thermomechanical buckling of laminated composite and sandwich plates using global–local higher order theory. *International Journal of Mechanical Sciences* **49**, 712-721
61. Lal, A., Singh, B. N., et Kumar, R.(2009), Effects of random system properties on the thermal buckling analysis of laminated composite plates. *Comput. Struct.* **87**, 1119-1128
62. Lee, J.(1997), Thermally induced buckling of laminated composites by a layerwise theory. *Computers & Structures* **65**, 917-922
63. Shariyat, M.(2007), Thermal buckling analysis of rectangular composite plates with temperature-dependent properties based on a layerwise theory. *Thin Wall. Struct.* **45**, 439-452
64. Kumar, S., et Singh, B.(2009), Thermal buckling analysis of sma fiber-reinforced composite plates using layerwise model. *Journal of Aerospace Engineering* **22**, 342-353
65. Nali, P., et Carrera, E.(2013), Accurate Buckling Analysis of Composite Layered Plates with Combined Thermal and Mechanical Loadings. *J. Therm. Stresses.* **36**, 1-18
66. Noor, A., et Burton, W.(1992), Three-dimensional solutions for thermal buckling of multilayered anisotropic plates. *J. Eng. Mech.* **118**, 683-701
67. Noor, A. K., et Burton, W. S.(1992), Three-Dimensional solutions for the thermal buckling and sensitivity derivatives of temperature-sensitive multilayered angle-ply plates. *Journal of Applied Mechanics* **59**, 848-856
68. Noor, A. K., et Burton, W. S.(1992), Three-dimensional solutions for the free vibrations and buckling of thermally stressed multilayered angle-ply composite plates. *Journal of Applied Mechanics* **59**, 868-877
69. Noor, A. K., et Burton, W. S.(1992), Computational models for high-temperature multilayered composite plates and shells. *Applied Mechanics Reviews* **45**, 419-446
70. Jones, R. M.(2005), Thermal buckling of uniformly heated unidirectional and symmetric cross-ply laminated fiber-reinforced composite uniaxial in-plane restrained simply supported rectangular plates. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* **36**, 1355-1367
71. Matsunaga, H.(2005), Thermal buckling of cross-ply laminated composite and sandwich plates according to a global higher-order deformation theory. *Compos. Struct.* **68**, 439-454
72. Matsunaga, H.(2006), Thermal buckling of angle-ply laminated composite and sandwich plates according to a global higher-order deformation theory. *Compos. Struct.* **72**, 177-192
73. Matsunaga, H.(2007), Free vibration and stability of angle-ply laminated composite and sandwich plates under thermal loading. *Compos. Struct.* **77**, 249-262

74. Jin, T., Ha, N. S., Le, V. T., et al.(2015), Thermal buckling measurement of a laminated composite plate under a uniform temperature distribution using the digital image correlation method. *Compos. Struct.* **123**, 420-429
75. Zhao, X., Lee, Y. Y., et Liew, K. M.(2009), Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Compos. Struct.* **90**, 161-171
76. Singha, M. K., Ramachandra, L. S., et Bandyopadhyay, J. N.(2001), Thermal postbuckling analysis of laminated composite plates. *Compos. Struct.* **54**, 453-458
77. Yucheng Shi, R. Y. Y. L. C. M.(1999), Thermal postbuckling of composite plates using the finite element modal coordinate method. *J. Therm. Stresses.* **22**, 595-614
78. Mathew, T. C., Singh, G., et Rao, G. V.(1992), Thermal buckling of cross-ply composite laminates. *Comput. Struct.* **42**, 281-287
79. Abramovich, H.(1994), Thermal buckling of cross-ply composite laminates using a first-order shear deformation theory. *Compos. Struct.* **28**, 201-213
80. Mannini, A.(1997), Shear deformation effects on thermal buckling of cross-ply composite laminates. *Compos. Struct.* **39**, 1-10
81. Chen, W. J., Lin, P. D., et Chen, L. W.(1991), Thermal buckling behaviour of composite laminated plates with a circular hole. *Compos. Struct.* **18**, 379-397
82. Chen, L.-W., Brunelle, E. J., et Chen, L. Y.(1982), Thermal buckling of initially stressed thick plates. *Journal of Mechanical Design* **104**, 557-564
83. Ko, W. L. (1998) *Mechanical-and Thermal-Buckling Behavior of Rectangular Plates With Different Central Cutouts*, Citeseer
84. Topal, U., et Uzman, Ü.(2010), Effect of Rectangular/Circular Cutouts on Thermal Buckling Load Optimization of Angle-Ply Laminated Thin Plates. *Science and Engineering of Composite Materials* **17**, 93
85. Chang, J.-S., et Shiao, F.-J.(1990), Thermal buckling analysis of isotropic and composite plates with a hole. *J. Therm. Stresses.* **13**, 315-332
86. Kim, Y. H., et Noor, A. K.(1996), Buckling and postbuckling of composite panels with cutouts subjected to combined loads. *Finite Elements in Analysis and Design* **22**, 163-185
87. Noor, A. K., et Kim, Y. H.(1996), Buckling and postbuckling of composite panels with cutouts subjected to combined edge shear and temperature change. *Comput. Struct.* **60**, 203-222
88. Avci, A., Sahin, Ö. S., et Uyaner, M.(2005), Thermal buckling of hybrid laminated composite plates with a hole. *Compos. Struct.* **68**, 247-254
89. Avci, A., Kaya, S., et Daghan, B.(2005), Thermal buckling of rectangular laminated plates with a hole. *J. Reinf. Plast. Compos.* **24**, 259-272
90. Şahin, Ö. S.(2005), Thermal buckling of hybrid angle-ply laminated composite plates with a hole. *Compos. Sci. Technol.* **65**, 1780-1790
91. Shaterzadeh, A., Abolghasemi, S., et Rezaei, R.(2014), Finite Element Analysis of Thermal Buckling of Rectangular Laminated Composite Plates with Circular Cut-Out. *J. Therm. Stresses.* **37**, 604-623

92. Lee, Y. J., Lin, H. J., et Lin, C. C.(1989), A study on the buckling behavior of an orthotropic square plate with a central circular hole. *Compos. Struct.* **13**, 173-188
93. Akbulut, H., et Sayman, O.(2001), An Investigation on Buckling of Laminated Plates with Central Square Hole. *J. Reinf. Plast. Compos.* **20**, 1112-1124
94. Galea, S. C. P., et White, R. G.(1993), The Effect of Temperature on the Natural Frequencies and Acoustically Induced Strains in CFRP Plates. *Journal of Sound and Vibration* **164**, 399-424
95. Tauchert, T. (2014) Plates with Temperature-Dependent Properties. in *Encyclopedia of Thermal Stresses* (Hetnarski, R. ed.), Springer Netherlands. pp 3953-3957
96. Fauconneau, G., et Marangoni, R. D.(1970), Effect of a thermal gradient on the natural frequencies of a rectangular plate. *International Journal of Mechanical Sciences* **12**, 113-122
97. Dhotarad, M. S., et Ganesan, N.(1978), Vibration analysis of a rectangular plate subjected to a thermal gradient. *Journal of Sound and Vibration* **60**, 481-497
98. Dhotarad, M. S., et Ganesan, N.(1979), Influence of thermal gradient on natural frequency of rectangular plate vibration. *Nucl. Eng. Des.* **52**, 71-81
99. Rao, C. K., et Satyanarayana, B.(1975), Effect of thermal gradient on frequencies of tapered rectangular plates. *AIAA Journal* **13**, 1123-1126
100. Ganesan, N., et Dhotarad, M. S.(1979), Influence of a thermal gradient on the natural frequencies of tapered orthotropic plates. *Journal of Sound and Vibration* **66**, 621-625
101. Tomar, J. S., et Tewari, V. S.(1981), Effect of thermal gradient on frequencies of a circular plate of linearly varying thickness. *J. Non-Equilib. Thermodyn.* **6**, 115-122
102. Tomar, J. S., et Gupta, A. K.(1985), Effect of thermal gradient on frequencies of an orthotropic rectangular plate whose thickness varies in two directions. *Journal of Sound and Vibration* **98**, 257-262
103. Tomar, J. S., et Gupta, A. K.(1984), Thermal Effect on Axisymmetric Vibrations of an Orthotropic Circular Plate of Variable Thickness. *AIAA Journal* **22**, 1015-1017
104. Tomar, J. S., et Gupta, A. K.(1983), Thermal effect on frequencies of an orthotropic rectangular plate of linearly varying thickness. *Journal of Sound and Vibration* **90**, 325-331
105. Adeniji-Fashola, A. A., et Oyediran, A. A.(1988), Thermal gradient effects on the vibration of prestressed rectangular plates. *Acta Mechanica* **74**, 235-248
106. Gupta, A. K., Tripti Johri, et Vats, R. P.(2010), Study of thermal gradient effect on vibrations of a non-homogeneous orthotropic rectangular plate having bi-direction linearly thickness variations. *Meccanica* **45**, 393-400
107. Gupta, A. K., et Sharma, P.(2010), Study the thermal gradient effect on frequencies of a trapezoidal plate of linearly varying thickness. *Applied Mathematics* **1**, 357
108. Gupta, A. K., et Kaur, H.(2008), Study of the effect of thermal gradient on free vibration of clamped visco-elastic rectangular plates with linearly thickness variation in both directions. *Meccanica* **43**, 449-458
109. Gupta, A. K., Johri, T., et Vats, R. P. (2007) Thermal Effect on Vibration of Non-homogeneous Orthotropic Rectangular Plate Having Bi-directional Parabolically Varying

- Thickness. in *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science "WCECS"*, San Francisco, USA
110. Bargmann, H.(1974), Recent developments in the field of thermally induced waves and vibrations. *Nucl. Eng. Des.* **27**, 372-385
  111. Tauchert, T. R.(1991), Thermally Induced Flexure, Buckling, and Vibration of Plates. *Applied Mechanics Reviews* **44**, 347-360
  112. Noda, N.(1991), Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties. *Applied Mechanics Reviews* **44**, 383-397
  113. Hetnarski, R. B. (2014) *Encyclopedia of Thermal Stresses*, Springer Reference
  114. Jeng-Shian, C., Jiunn-Hsiung, W., et Tseng-Zong, T.(1992), Thermally induced vibration of thin laminated plates by finite element method. *Comput. Struct.* **42**, 117-128
  115. Huang, N. N., et Tauchert, T. R.(1992), Thermally induced vibration of doubly curved cross-ply laminated panels. *Journal of Sound and Vibration* **154**, 485-494
  116. Bhimaraddi, A., et Chandrashekhara, K.(1993), Nonlinear vibrations of heated antisymmetric angle-ply laminated plates. *International Journal of Solids and Structures* **30**, 1255-1268
  117. Chang, J.-S., et Shyong, J.-W.(1994), Thermally induced vibration of laminated circular cylindrical shell panels. *Compos. Sci. Technol.* **51**, 419-427
  118. Liu, C.-F., et Huang, C.-H.(1996), Free vibration of composite laminated plates subjected to temperature changes. *Comput. Struct.* **60**, 95-101
  119. Lee, D.-M., et Lee, I.(1997), Vibration behaviors of thermally postbuckled anisotropic plates using first-order shear deformable plate theory. *Comput. Struct.* **63**, 371-378
  120. Oh, I. K., Han, J. H., et Lee, I.(2000), Postbuckling and vibration characteristics of piezolaminated composite plate subject to thermo-piezoelectric loads. *Journal of Sound and Vibration* **233**, 19-40
  121. Park, J.-S., Kim, J.-H., et Moon, S.-H.(2004), Vibration of thermally post-buckled composite plates embedded with shape memory alloy fibers. *Compos. Struct.* **63**, 179-188
  122. Adams, R. J., et Bert, C. W.(1999), Thermoelastic vibrations of a laminated rectangular plate subjected to a thermal shock *J. Therm. Stresses.* **22**, 875-895
  123. Librescu, L., et Lin, W.(1999), Non-linear response of laminated plates and shells to thermomechanical loading: Implications of violation of interlaminar shear traction continuity requirement. *International Journal of Solids and Structures* **36**, 4111-4147
  124. Shen, H.-S., Zheng, J. J., et Huang, X. L.(2003), Dynamic response of shear deformable laminated plates under thermomechanical loading and resting on elastic foundations. *Compos. Struct.* **60**, 57-66
  125. Shiau, L.-C., et Kuo, S.-Y.(2005), Free Vibration of Thermally Buckled Composite Sandwich Plates. *Journal of Vibration and Acoustics* **128**, 1-7
  126. Dhanaraj, R., et Palaninathan.(1990), Free vibration of initially stressed composite laminates. *Journal of Sound and Vibration* **142**, 365-378

127. Murphy, K. D., Virgin, L. N., et Rizzi, S. A.(1997), The Effect of Thermal Prestress on the Free Vibration Characteristics of Clamped Rectangular Plates: Theory and Experiment. *Journal of Vibration and Acoustics* **119**, 243-249
128. Singha, M. K., Ramachandra, L. S., et Bandyopadhyay, J. N.(2006), Vibration behavior of thermally stressed composite skew plate. *Journal of Sound and Vibration* **296**, 1093-1102
129. Vangipuram, P., et Ganesan, N.(2007), Buckling and vibration of rectangular composite viscoelastic sandwich plates under thermal loads. - **77**, - 429
130. Meunier, M., et Shenoi, R. A.(2001), Dynamic analysis of composite sandwich plates with damping modelled using high-order shear deformation theory. *Compos. Struct.* **54**, 243-254
131. Jeyaraj, P., Ganesan, N., et Padmanabhan, C.(2009), Vibration and acoustic response of a composite plate with inherent material damping in a thermal environment. *Journal of Sound and Vibration* **320**, 322-338
132. Lal, A., et Singh, B. N.(2009), Stochastic Free Vibration of Laminated Composite Plates in Thermal Environments. *J. Thermoplast. Compos. Mater.*
133. Chen, C.-S., Chen, C.-W., Chen, W.-R., et al.(2013), Thermally induced vibration and stability of laminated composite plates with temperature-dependent properties. *Meccanica* **48**, 2311-2323
134. Siham, S. (2008) Modélisation numérique des structures composites multicouches à l'aide d'une approche discrète au sens de Mindlin. Le modèle DDM (Displacement Discrete Mindlin).
135. Katili, I.(1993), A New Discrete Kirchhoff-Mindlin Element Based on Mindlin-Reissner Plate-Theory and Assumed Shear Strain Fields .2. An Extended Dkq Element for Thick-Plate Bending Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **36**, 1885-1908
136. Ayad, R., Talbi, N., et Ghomari, T.(2009), Modified discrete Mindlin hypotheses for laminated composite structures. *Compos. Sci. Technol.* **69**, 125-128
137. Sedira, L. (2013) Contribution à la Modélisation de Composites 2D/3D à l'Aide d'Éléments Finis Spéciaux. Université De Biskra, Algérie et Université de Reims Champagne Ardenne, France, Biskra
138. Sedira, L., Ayad, R., Sabhi, H., et al.(2012), An enhanced discrete Mindlin finite element model using a zigzag function. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique* **21**, 122-140
139. Reddy, J. N. (2003) *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, Second Edition*, Taylor & Francis
140. Ferreira, A. J. (2008) *MATLAB codes for finite element analysis: solids and structures*, Springer Science & Business Media
141. Dawe, D. J., et Roufaeil, O. L.(1980), Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates. *Journal of Sound and Vibration* **69**, 345-359
142. Liew, K. M.(1996), Solving the vibration of thick symmetric laminates by Reissner/Mindlin plate theory and the P-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration* **198**, 343-360

143. Shen, H.-S.(2001), Thermal postbuckling behavior of imperfect shear deformable laminated plates with temperature-dependent properties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **190**, 5377-5390
144. Chen, L.-W., et Chen, L.-Y.(1991), Thermal postbuckling behaviors of laminated composite plates with temperature-dependent properties. *Compos. Struct.* **19**, 267-283
145. Adams, D. S., Bowles, D. E., et Herakovich, C. T.(1986), Thermally induced transverse cracking in graphite-epoxy cross-ply laminates. *J. Reinf. Plast. Compos.* **5**, 152-169
146. Milkovich, S. M., et Herakovich, C. T.(1984), Temperature dependence of elastic and strength properties of T300/5208 graphite-epoxy.
147. Hyer, M. W., Herakovich, C. T., Milkovich, S. M., et al.(1983), Temperature dependence of mechanical and thermal expansion properties of T300/5208 graphite/epoxy. *Composites* **14**, 276-280
148. Nagarkar, A. P., et Herakovich, C. T. (1979) Nonlinear Temperature Dependent Failure Analysis of Finite Width Composite Laminates. DTIC Document