

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département :.....  
Ref :.....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم:.....  
المرجع:.....

Mémoire présenté en vue de l'obtention  
du diplôme de  
**Magister en : Génie Mécanique**

**Option : Construction Mécanique**

**Modélisation du comportement dynamique des  
structures revêtues de pastilles piézoélectriques**

Présenté par :

**Mohamed LATRACHE**

Soutenu publiquement le 15/01/2012

**Devant le jury composé de :**

Pr. BOUMERZOUG Zakaria  
Pr. AMRANE Mohamed Nadir  
Dr. BELOUNAR Mohamed Lamine  
Dr. LEDRA Mohammed

Professeur  
Professeur  
M.C.A  
M.C.A

Président  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur

Université de Biskra  
Université de Biskra  
Université de Biskra  
C. Universitaire de Mila

# الإهداء

كنت تعلم كتاب الله و تؤم الصفوف في الصلاة .. و كنت أنتظر أن تؤم أجمع يوم  
تخرجي .. لكن هادم اللذات عطفك .. بقي كرسيك أمام أكشيد شاغرا .. نعم غبت و  
غاب عنا فكرك و اعتزازك بالعلم و تحصيله .. لكن عبقك و ربحك و طيفك سيبقى  
يملاً المكان ، طوبنا عليك التراب فعلا .. لكن لم نطو صفحاتك المشرقت و أملك فينا  
.. **اللهم** طيب الله ثراك و رحمك رحمت واسعت أهدي إليك هذا العمل و هذا أجدد  
لعل الله يرفعك به و يجربك عنه خير أجزاء. **أبي** تقبل إهدائي و ارض عني و اشفع  
فيّ في يوم تشخص فيه الأبصار ، كما أهدي عملي هذا إلى الغاليت و الكرميت **أبي**  
أطال الله في عمرها و بارك الله لنا فيها و إلى جميع الإخوة و زوجاتهم و أبنائهم و إلى  
الأخوات و أزواجهن و أبنائهن و إلى جميع الأصدقاء و إلى كل من مد يد العون لي .

# Remerciement

Ce travail n'aurait pu être effectué sans l'accord, le soutien et l'aide de plusieurs personnes d'autant sur le plan professionnel que sur le plan personnel. J'ai passé trois années de ma vie à BISKRA marquées par des hauts et des bas, des moments de doute et de quiétude ....

Je tiens à remercier, le Professeur Mohamed Nadir AMRANE, mon directeur de thèse, qui m'a guidé tout au long de cette thèse, appris à ne pas baisser les bras et à persévérer.

J'adresse évidemment mes sincères remerciements à l'ensemble du jury :  
Pr. Benmarzoug Zakaria, Dr. Ladaa mohamed, Dr. Belounar M Lamine, qui me font l'honneur d'évaluer ce travail.

Je suis très reconnaissant à mes *parents*, mes frères, mes sœurs, et ma fiancée de m'avoir encouragé, aidé et soutenu dans les moments difficiles et à qui je dois tout.

Je souhaite remercier aussi, Samir ATALLAOUI, Wahid MENNADI, Ahmed CHERIF, messaad BAALI, et tous les administrateurs de faculté des Sciences et de la technologie - université de BISKRA.

## Table de matière

<b>Remerciements</b>	ii
<b>Table de matière</b>	iii
<b>Introduction générale</b>	1
<b>CHAPITRE I : Contrôle actif et piézoélectricité</b>	3
I.1 Principes fondamentaux	3
I.1.1 Principe de base	3
I.1.2 Mécanismes physiques du contrôle actif	4
I.1.3 Difficultés de mise en œuvre	5
I.1.4 Notion de contrôleur adaptatif	8
I.2 Applications physiques du contrôle actif	8
I.2.1 Réduction du bruit se propageant dans un conduit de ventilation	9
I.2.2 Casque de protection auditive actif	9
I.2.3 Réduction des vibrations d'un bras de satellite	10
I.2.4 Réduction des vibrations dans les ailes d'avions	11
I.2.5 Contrôle actif du bruit rayonné par le fuselage d'un avion	11
I.3 Principes de la piézoélectricité	12
I.3.1 Histoire de la piézoélectricité	12
I.3.2 Céramique piézoélectrique	14
I.3.3 Les équations piézoélectriques constitutives	17
I.3.4 Coefficients piézoélectriques	19
I.3.5 Capteurs piézoélectriques	24
I.3.6 Actionneurs piézoélectriques	26
<b>CHAPITRE II : Formulation dynamique du système composant la structure de base et la couche piézoélectrique</b>	28
II.1 Analyse structurale	28

II.2 Contrôle modale	29
II. 2.1 Equation du mouvement modale	29
II. 2.2 Calcul des commandes	31
II.3 Modèle statique de couplage piézoélectriques/structure	36
II.4 Dynamique du couplage piézoélectrique / structure	44
II .5 Filtre modale	47
<b>CHAPITRE III : Modélisation par la méthode des éléments finis</b>	<b>51</b>
III.1 : Détermination des fréquences propres d'une poutre	51
III.1.1 Poutre encastrée - libre en flexion	51
III.1.1.1 poutre en aluminium	52
III.1.1.2. Poutre encastrée - libre avec deux actionneurs collés	54
III.1.2 Poutre appui simple - appui simple en flexion	64
III.2 Réponses des structures	67
III.2.1 : Poutre encastrée – libre	67
III.2.1.1 : La réponse en fonction de la longueur de la poutre	67
III.2.1.2 : La réponse libre en fonction du temps a l'extrémité	69
III.2.1.3 : La réponse libre en fréquence (Le gain) a l'extrémité	73
III.2.2: Poutre appui simple - appui simple	77
III.2.2.1 : La réponse libre en fréquence (Le gain) au $M (\frac{3l}{4}, 0)$	78
Conclusion	81
Notification	82
Liste des figures	84
Liste des tableaux	87
Bibliographie	88

## **Introduction générale**

Dans de nombreuses applications industrielles ou de défense, le bruit ou les vibrations constituent un problème majeur. Les méthodes conventionnelles d'atténuation consistant à amortir la perturbation par des techniques passives s'avèrent peu efficaces en basses fréquences. Dans ce contexte, les méthodes de contrôle actif apparaissent à priori plus adaptées. Le principe de ces techniques dites actives est de générer un champ interférant avec le champ de la perturbation. Le champ superposé doit donc être identique à celui de la perturbation en termes d'amplitude mais de phase opposée pour chacune des fréquences concernées. Si le principe est simple, sa mise en œuvre l'est d'autant moins que la perturbation est souvent imprévisible et constituée de multiples fréquences. En outre, la minimisation de la perturbation est souvent recherchée dans un espace étendu, ce qui complique encore considérablement le problème.

Apparu dans les années trente, le contrôle actif ne s'est vraiment développé qu'avec l'avènement des processeurs de signaux digitaux dans les années quatre-vingt. Si quelques applications de cette technologie existent, beaucoup sont en développement, notamment dans le secteur spatial, l'avionique et l'automobile. Si nous nous intéressons spécifiquement au contrôle actif de vibrations, les avancées sont encore plus récentes. En effet, les encombrements et les masses supplémentaires apportés par les capteurs et actionneurs nécessaires au contrôle actif de vibrations ont ralenti le développement de nombreuses applications. Ce n'est que récemment, depuis une dizaine d'années, que l'utilisation de transducteurs à base de matériaux piézoélectriques a permis des avancées dans des applications jusqu'alors interdites. Par leur faible encombrement, leur poids réduit et leur aptitude à la conversion électromécanique, les matériaux piézoélectriques montrent effectivement toutes les qualités requises pour une utilisation dans le cadre d'un contrôle actif de vibrations.

L'objectif principal de ce travail de recherche est de mettre en évidence et d'exploiter les propriétés des matériaux piézoélectriques, sous la forme des pastilles plane piézoélectriques dans le cadre de l'analyse modale théorique et de sa simulation numérique par la méthode des éléments finis et d'étudier ainsi le couplage électromécanique effectif de ces structures piézoélectriques.

Ce mémoire est réparti en trois chapitre a pour objet le contrôle actif de vibrations utilisant des éléments piézoélectriques.

Le premier chapitre rassemble les principes fondamentaux nécessaires à la compréhension des phénomènes mis en jeu. Des exemples d'applications sont présentés, décrivant le phénomène de la piézoélectricité en donnant un aperçu historique, les circonstances de sa découverte et en citant quelques matériaux piézoélectriques. Les équations d'un problème de dynamique pour un matériau piézoélectrique sont ensuite rappelées.

Le deuxième chapitre introduit l'outil moderne de modélisation utilisée en contrôle actif, la méthode de Contrôle Modal (I.M.S.C, Independent Modal-Spase Control).

Le troisième chapitre comporte la modélisation par la méthode des éléments finis d'une poutre d'encastrement libre pour 3 différents localisations d'une paire de pastille piézoélectrique et un exemple qui traite une poutre simple - appui simple avec une seule localisation.

## Chapitre I : Contrôle actif et piézoélectricité

### I.1 Principes fondamentaux

#### I.1.1 Principe de base

Le contrôle actif est basé sur l'interférence destructive de deux champs, sonores ou vibratoires :

- le champ **primaire** correspondant à la perturbation qu'on cherche à atténuer,
- le champ **secondaire** créé par le dispositif de contrôle.

Pour les sources générant ces champs, on parle respectivement de sources primaires et de sources secondaires. Le concept de contrôle actif est déjà ancien. Un brevet de P. Lueg [9] datant de 1933 décrit le principe d'un dispositif de contrôle actif de bruit dans un conduit. Une des illustrations de ce brevet est illustré sur la Figure I.1. Le dispositif utilise un microphone pour détecter le champ sonore indésirable en amont et un amplificateur pour exciter un haut-parleur en aval avec le signal du microphone amplifié. Un positionnement judicieux du microphone et du haut-parleur permet d'obtenir une onde acoustique rayonnée qui s'oppose à l'onde incidente. En aval du haut-parleur, le bruit est atténué.

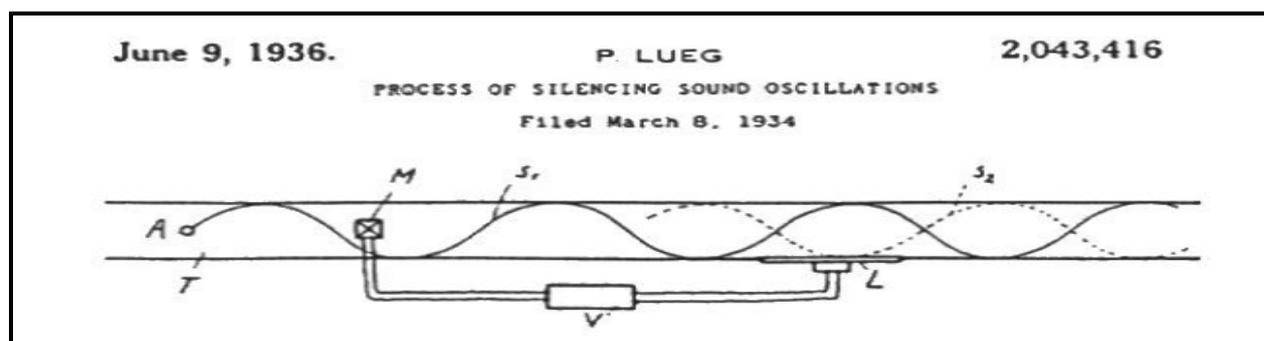


Figure I.1 Illustration extraite du brevet de P.Lueg [9]

En 1953, Olson et May [11] développent un dispositif différent, (Figure I.2). Le microphone de détection est ici placé au niveau du haut-parleur de contrôle. La différence est fondamentale car aucune détection en amont ne permet une connaissance préalable de la perturbation. La détection et l'atténuation se font au même emplacement.

Deux types d'approches sont ainsi illustrés : le contrôle par anticipation (**feedforward**) dont les travaux de Lueg sont les précurseurs, et le contrôle par rétroaction (**feedback**) pour ceux d'Olson et May. En 1956, Conover propose d'utiliser un **signal de référence** à la place du microphone de détection de Lueg. Ainsi, par exemple, le signal délivré par un tachymètre pourrait être utilisé pour le contrôle actif du bruit rayonné par un moteur.

Ce signal de référence serait ensuite filtré par un contrôleur électronique avant d'alimenter le haut-parleur de contrôle. Conover introduit également le concept de capteur d'erreur par lequel le champ résiduel est mesuré et dont le signal est utilisé pour ajuster le contrôleur. Ces principes sont la base de nombreux systèmes modernes de contrôle actif par anticipation.

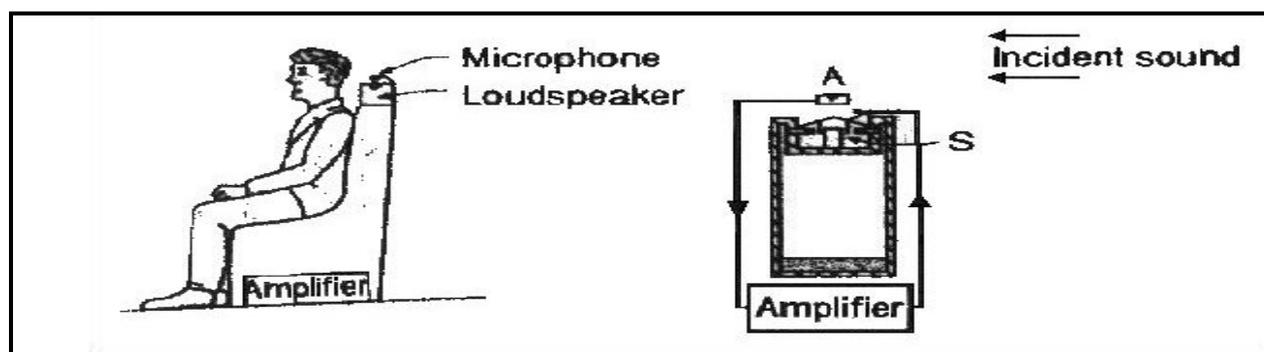


Figure I.2 Illustration extraite d'une étude de Olson et May [11]

### I.1.2 Mécanismes physiques du contrôle actif

Il est possible de mettre en évidence différents types de mécanismes physiques mis en jeu en contrôle actif. Nelson et Elliott résument dans leur ouvrage les travaux effectués sur l'impact du nombre de sources secondaires sur les performances du contrôle. L'influence de la distance entre source primaire et source secondaire est également examinée. Deux cas limites de contrôle apparaissent :

- Quand les sources secondaires sont proches de la source primaire en terme de longueur d'onde, des atténuations importantes sont obtenues et ce dans une zone étendue. Si on se place loin des sources, on peut dans ce cas voir la combinaison de ces sources comme une source unique ayant une faible par la source primaire est

atténuée par une réduction de l'impédance de rayonnement. On parle alors de couplage d'impédance.

- Quand les sources secondaires sont éloignées de la source primaire en termes de longueur d'onde, le champ résultant montre des minima et des maxima. Il n'y a pas d'atténuation globale. En effet, on minimise localement le champ perturbateur en l'augmentant éventuellement ailleurs. On parle d'interférence destructive. Quand le dispositif de contrôle actif concerne un espace relativement étendu, de multiples sources de contrôle deviennent nécessaires et interagissent alors entre elles. La mise au point d'un contrôleur performant demande alors d'identifier préalablement pour s'en prémunir les différents couplages entre actionneurs de contrôle et capteurs.

Dans de nombreux cas, l'interférence destructive et le couplage d'impédance interviennent ensemble dans le contrôle. C'est en particulier le cas du contrôle actif des vibrations d'une poutre. Dans d'autres cas, seule l'interférence destructive est en jeu. Le casque de protection auditive contrôlé activement en est un exemple : le contrôle localisé au niveau de l'oreille ne change en rien l'impédance vue par une source éloignée. Le système unidirectionnel élimine également les couplages quand les champs primaire et secondaire évoluent dans la même direction dans un certain domaine. Tout se passe alors comme si les sources secondaires n'émettaient pas mais absorbaient la puissance émise par les sources primaires.

### **I.1.3 Difficultés de mise en œuvre**

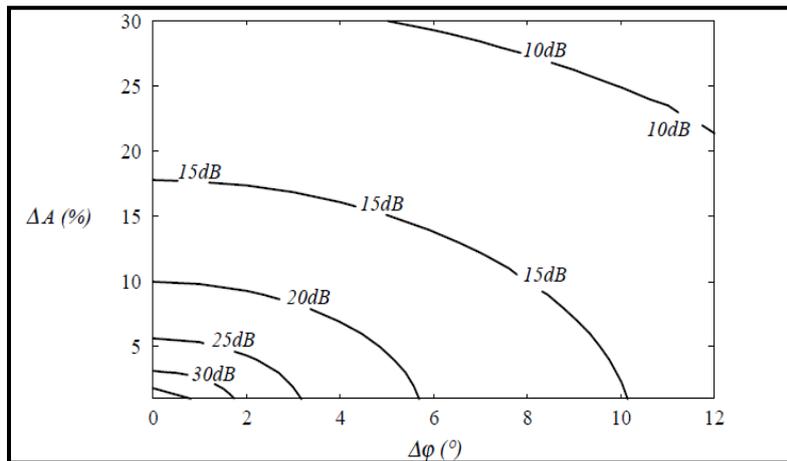
Si les principes semblent élémentaires, avec un simple retard pour le dispositif de Lueg et une inversion de signe pour celui de Olson, la mise en œuvre d'un dispositif de contrôle actif est malheureusement plus délicate. Elle demande la maîtrise de tous les maillons de la boucle de contrôle : capteur(s) de détection, filtrage, source(s) de contrôle, éventuel(s) capteur(s) d'erreur. Chacun de ces différents éléments possède en effet une fonction de transfert particulière, introduisant des modifications en termes de phase et d'amplitude dans les signaux à traiter. Pour illustrer l'influence d'erreurs de module ou de phase sur le contrôle, calculons l'atténuation optimale possible en un point en fonction de ces dernières.

Soit  $A$  l'amplitude du champ sonore ou vibratoire en un point, somme des contributions harmoniques des champs primaire et secondaire :

$$A = A_i e^{j\varphi_i} + A_i(1 + \Delta A)e^{j(\varphi_i + \Delta\varphi + \pi)} \quad [4] \quad I.1$$

Avec  $A_i$  : amplitude et phase du champ incident,  
 $\Delta A$  et  $\Delta\varphi$  : erreur d'amplitude et erreur de phase sur le contrôle,  
 L'atténuation s'écrit alors :

$$A = 20 \log \left| \frac{A}{A_i} \right| \quad I.2$$



**Figure I.3 Courbes d'iso-atténuation maximale en fonction des erreurs de phase et d'amplitude**

La Figure I.3 [5] montre l'atténuation maximale  $R$  possible en fonction des erreurs de phase  $\Delta\varphi$  et d'amplitude  $\Delta A$ . On mesure l'importance de la précision du filtrage pour obtenir des atténuations importantes, en particulier le rôle des erreurs de phase. Lueg et Olson utilisaient des amplificateurs audio classiques pour leurs électroniques de contrôle. Les recherches ultérieures introduisirent naturellement des déphaseurs et des contrôles d'amplitude pour obtenir des performances accrues. Néanmoins, ces contrôleurs nécessitent des ajustements manuels fréquents pour optimiser les performances et l'utilisation d'électronique analogique interdit alors la mise en œuvre d'algorithmes de contrôle complexes.

Ce n'est que récemment que les premiers dispositifs performants apparaissent avec l'avènement des filtres, puis des processeurs digitaux (DSP) au début des années quatre-vingt.

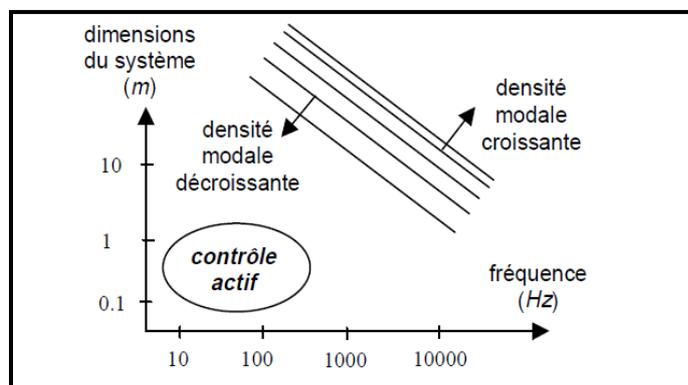
Les apports du traitement numérique sont multiples :

- L'implantation d'algorithme adaptatif (fig I.1.4) devient praticable alors qu'elle s'avérait complexe à réaliser avec les dispositifs analogiques.

- Quand le dispositif de contrôle actif utilise de nombreuses détections et/ou sources de contrôle, le contrôleur possède d'autant plus de voies de filtrage à régler. On parle alors de contrôle actif multivoies. Dans un tel contexte, un contrôleur analogique est proscrit.

- Si le spectre du champ à atténuer est riche, le contrôleur doit intégrer un modèle du système sur toute la bande de fréquences à contrôler. La complexité alors accrue du filtrage impose l'utilisation d'un contrôleur digital.

Toutes ces réserves expliquent les difficultés d'application du contrôle actif avant l'arrivée des techniques digitales.



**Figure I.4 Zones d'application du contrôle actif**

La Figure I.4 [4] donne une représentation du degré de difficulté de réalisation d'un dispositif de contrôle actif en fonction des principaux facteurs limitatifs. On voit que le contrôle actif n'est réalisable que pour des fréquences et des dimensions (de la zone à atténuer) faibles avec des densités modales peu élevées. Autrement dit, un système résonant à bande étroite et de petites dimensions se contrôle plus facilement qu'un système amorti large bande et de grandes dimensions.

### I.1.4 Notion de contrôleur adaptatif

Dans un dispositif de contrôle actif, le contrôleur est basé sur un modèle du système physique et des actionneurs et capteurs utilisés pour le contrôler. Malheureusement, certains systèmes peuvent évoluer dans le temps (avec la température, le vieillissement des composants, ...) de telle sorte qu'ils ne se comportent plus de la façon dont le modèle le prévoit. Le contrôleur n'est alors plus adapté et une mise à jour du modèle s'impose.

Une propriété importante de beaucoup de dispositifs de contrôle actif modernes (particulièrement les systèmes de contrôle par anticipation) est l'adaptabilité. Un contrôleur **adaptatif** observe continuellement ou périodiquement le système contrôlé et rafraîchit ainsi son modèle interne de telle sorte qu'il s'adapte aux faibles changements de comportement du système. La conséquence est que les contrôleurs adaptatifs sont presque toujours digitaux.

## I.2 Application typiques du contrôle actif

Ce paragraphe présente succinctement quelques applications typiques, commercialisées ou à l'étude, appartenant au contrôle actif du bruit ou au contrôle actif de vibrations. Il est en fait souvent difficile de séparer les deux disciplines. Ainsi, le contrôle actif du bruit rayonné par des structures vibrantes peut-il être traité comme un contrôle actif acoustique, un contrôle actif de vibrations ou une combinaison des deux. Dans ce dernier cas, le problème consiste alors à contrôler le bruit rayonné par la structure vibrante en contrôlant ses vibrations. Le contrôle actif peut être considéré comme un domaine relativement récent. Les progrès enregistrés au début des années quatre-vingt en traitement numérique des signaux ont relancé ce champ de recherche un peu oublié depuis les années cinquante. En témoigne le nombre d'articles publiés sur le sujet qui a fait plus que doubler chaque année depuis dix ans. Dans ce contexte, si quelques dispositifs pratiques sont déjà commercialisés, comme les casques auditifs actifs ou les systèmes de contrôle actif du bruit dans les conduits de ventilation, de nombreuses applications potentielles sont encore au stade de l'étude.

### I.2.1 Réduction du bruit se propageant dans une conduite de ventilation

C'est une des toutes premières applications réussies du contrôle actif. En basses fréquences, ce contrôle se ramène à un problème d'ondes planes se propageant dans un milieu à une dimension. De plus, la perturbation est généralement périodique et son spectre n'est alors essentiellement constitué que d'une fréquence et de quelques harmoniques. Des applications industrielles existent depuis plusieurs années (Figure I.5)[12].

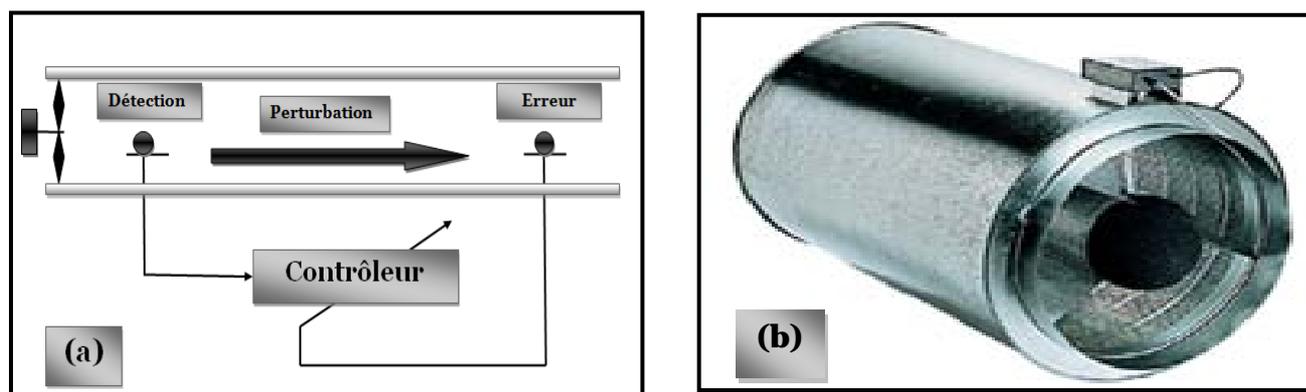


Figure I.5 (a) Principe du actif de bruit pour conduit, (b) Dispositif commercialisé (document TechnoFirst, Aldes Aéraulique)

### I.2.2 Casque de protection auditive actif

C'est également une des premières applications du contrôle actif. Les casques actifs (Figure I.6) [12] utilisent un contrôle feedback ou feedforward leur permettant d'atténuer les bruits stationnaires de basses fréquences du type moteur d'avion, turbine.

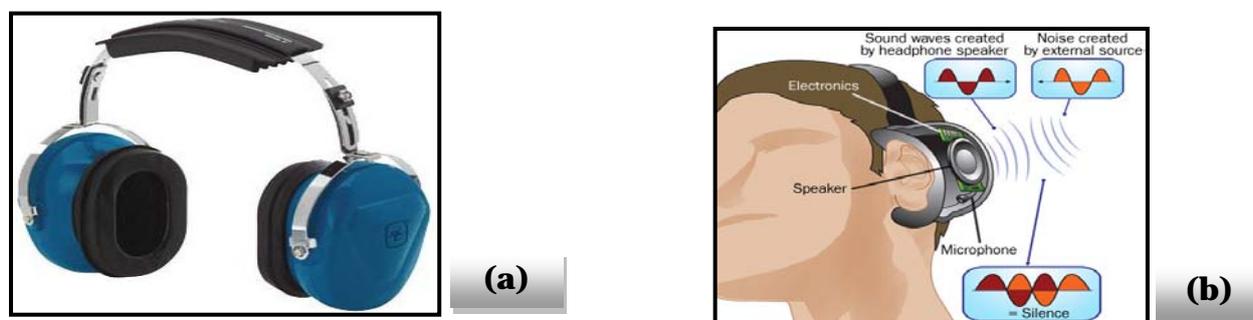


Figure I.6 (a) Principe du casque de protection auditive actif par contrôle feedback, (b) modèle du casque actif commercialisé.

### I.2.3 Réduction des vibrations d'un bras de satellite

Le contrôle actif de vibrations des structures flexibles est un thème de recherche qui s'est développé rapidement ces dernières années. Beaucoup de ces travaux sont consacrés spécifiquement aux grandes structures, en vue des applications aux futures stations spatiales (Figure I.7)[12]. Ces structures sont caractérisées par des modes possédant un amortissement naturel faible (typiquement quelques %) et se trouvant dans la bande passante des contrôleurs classiques (jusqu'à 500 Hz). De nombreuses études sont en cours pour appliquer à de telles structures des contrôles de type feedback, le plus souvent modaux (II.2.1.3).

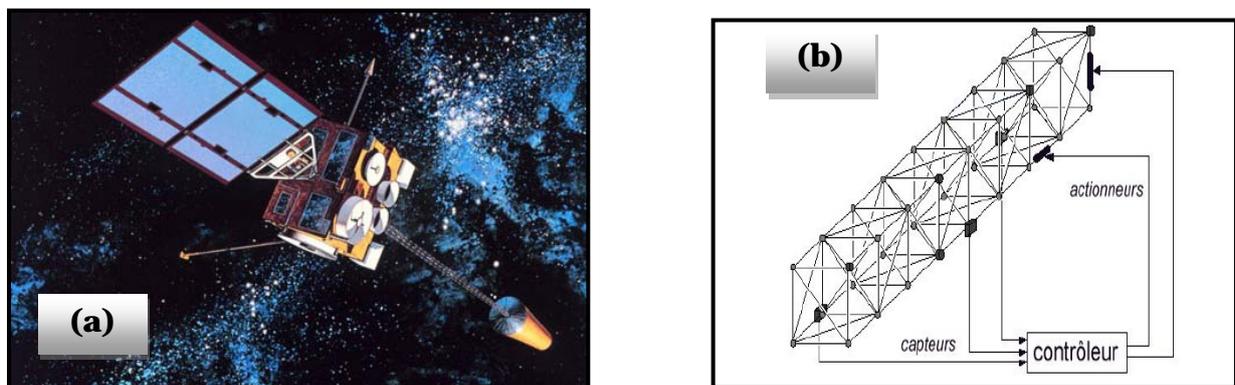


Figure I.7 (a) satellite (b) Bras de satellite équipé de contrôle actif de vibrations

### I.2.4 Réduction des vibrations dans les ailes d'avions

Certains angles de vols induisent à haute vitesse des vibrations importantes en bout d'aile, fatiguant la structure. Des travaux sont menés pour contrôler les deux premiers modes de flexion et de torsion avec un contrôle de type modal, en utilisant des transducteurs piézo-électriques comme capteurs et comme actionneurs (Figure I.8)[12]

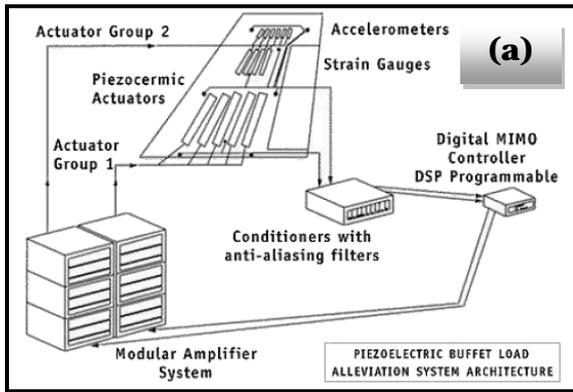


Figure I.8 Dispositif de contrôle actif de vibration d’une aile d’avion. (a) principe, (b) vue générale d’une aile équipée de transducteurs piézoélectriques.

### I.2.5 Contrôle actif du bruit rayonné par le fuselage d’un avion

Certains modes du fuselage engendrent un bruit basses fréquences significatif à l’intérieur de l’avion. Des dispositifs sont à l’étude pour contrôler ces modes avec un contrôle actif acoustique structural (ASAC). Le contrôleur est de type feedforward multivoies. Il utilise des microphones comme capteurs et des couches piézoélectriques couplées au fuselage comme actionneurs structuraux (Figure I.9)[12].

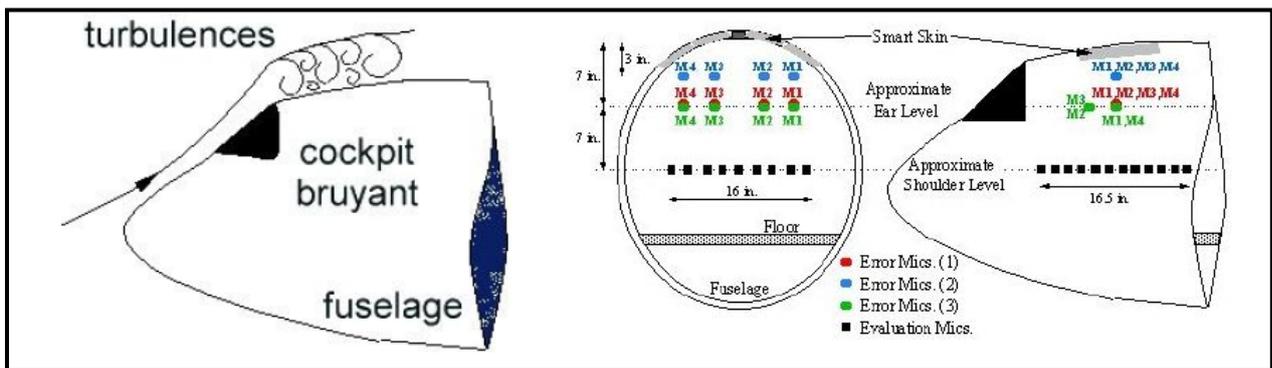


Figure I.9 Dispositif de contrôle actif du bruit d’un cockpit.

## I.3 Principes de la piézoélectricité

### I.3.1 Histoire de la piézoélectricité

La première publication scientifique décrivant le phénomène, appelé plus tard piézoélectricité, paru en 1880. Il a été coécrit par Pierre et Jacques Curie[8], qui avaient entrepris une série d'expériences sur une large gamme de cristaux à l'époque. Dans ces expériences, ils ont catalogué un certain nombre de cristaux, comme la tourmaline, le quartz, la topaze, la canne à sucre et de sel de Rochelle que chargent de surface affiché quand ils ont été mécaniquement soulignés.

Dans la communauté scientifique de l'époque, cette observation a été considérée comme une découverte importante, et le terme «piézoélectricité» a été inventé pour exprimer cet effet. Le mot «piezo» est un mot grec qui signifie "la presse". Par conséquent, piézoélectricité produite à partir des moyens de pression. Cette terminologie a permis de distinguer de la piézoélectricité d'autres phénomènes connexes d'intérêt au moment.

La découverte de l'effet piézoélectrique direct est donc crédité les frères Curie. Ils n'ont pas, toutefois, de découvrir le piézoélectrique. Au contraire, il était mathématiquement prédit à partir des lois fondamentales de la thermodynamique par Lippmann en 1881. Cela dit, les Curie sont reconnus pour la confirmation expérimentale de l'effet inverse qui suit le travail de Lippmann travail. La découverte de la piézoélectricité a suscité un intérêt significatif dans la communauté scientifique européenne. Par la suite, à peu près dans les 30 années de son découverte, et avant la Première Guerre mondiale, l'étude de la piézoélectricité a été considérée comme une activité scientifique crédible.

Des questions telles que l'échange réversible de l'électricité et d'énergie mécanique, de la nature asymétrique des cristaux piézoélectriques, et les l'utilisation de la thermodynamique dans la description de divers aspects de la piézoélectricité ont été étudiés dans cette période. La première application grave pour les matériaux piézoélectriques apparus au cours la première guerre mondiale. Ce travail est crédité à Paul Langevin et ses collaborateurs en France, qui a construit un détecteur sous-

marin à ultrasons. Ils ont construit un transducteur, fait d'une mosaïque de cristaux de quartz mince collé entre deux plaques d'acier d'une manière que le système composite a une fréquence de résonance de 50 KHz. Le dispositif a été utilisé pour transmettre un signal chirp à haute fréquence dans l'eau et de mesurer la profondeur. Leur invention, cependant, n'était pas parfaite jusqu'à la fin de la guerre. Suite à leur utilisation efficace dans les transducteurs sonar, et entre les deux guerres mondiales, les cristaux piézoélectriques ont été employées dans de nombreuses applications.

Les cristaux de quartz ont été utilisés dans le développement de stabilisateurs de fréquence pour oscillateurs à tubes à vide. Les transducteurs à ultrasons piézoélectriques fabriqués à partir de cristaux ont été utilisés pour la mesure des propriétés des matériaux. un bon nombre des applications piézoélectrique classique que nous connaissons, de telles demandes que des microphones, des accéléromètres, des capteurs à ultrasons, etc, ont été développés et commercialisés pendant cette période.

Le développement des matériaux piézoélectriques pendant et après la Seconde guerre mondiale a contribué à révolutionner ce domaine. Au cours de la Seconde Guerre mondiale, la recherche importante a été effectuée aux États-Unis et d'autres pays comme le Japon et la ex-Union soviétique qui visait à l'élaboration de matériaux à très haute constante diélectrique pour la construction des condensateurs.

Les matériaux piézocéramiques ont été découverts à la suite de ces activités, et un certain nombre de leurs méthodes de fabrication à haut volume ont été conçues. La capacité de construire de nouveaux dispositifs piézoélectrique en adaptant un matériau à une application spécifique abouti à un certain nombre d'évolutions, et des inventions telles que sonars puissants, systèmes d'allumage piézoélectriques, hydrophones sensibles et cartouches phono céramique, pour n'en nommer que quelques-uns.

### I.3.2 Céramique piézoélectrique

Une céramique piézoélectrique est une masse de cristaux de pérovskite. Chaque cristal est composé d'un petit ion métallique tétravalent placé dans un réseau de plus divalent ions métalliques et  $O_2$ , comme le montre la figure II.12. Pour préparer une céramique piézoélectrique, de poudres fines de métal de composante oxydes, sont mélangés dans des proportions spécifiques. Ce mélange est ensuite chauffé pour former une poudre homogène. La poudrée est ensuite mélangée à un liant organique et est formé dans des formes spécifiques, par exemple, disques, tiges, plaques, etc. Ces éléments sont on chauffe ensuite pendant un temps déterminé, et sous une température prédéterminée. En tant que résultat de ce processus, les particules de poudre de frittage et le matériel forment une structure dense cristalline. Les éléments sont ensuite refroidis et, si nécessaire, parées dans des formes spécifiques. Enfin, les électrodes sont appliquées sur les surfaces appropriées de la structure. Au-dessus d'une température critique, connue sous le nom "température de Curie", chaque perovskite cristal dans les pièces chauffées élément en céramique d'une symétrie cubique simple sans moment dipolaire, comme le montre la figure I.12. Cependant, à des températures en dessous de la température de Curie chaque cristal a une symétrie tétragonale et, associés à cela, un moment dipolaire. Attenante dipôles régions sous forme de locaux l'alignement appelé "domaines". Cet alignement donne un moment dipolaire net du domaine, et donc une polarisation nette. Comme le montre la figure I.13a, la direction de polarisation entre les domaines voisins est aléatoire. Par la suite, l'élément en céramique n'a pas de polarisation globale. Les domaines dans un élément en céramique sont alignés en exposant l'élément à un fort champ électrique continu, habituellement à une température légèrement inférieure à la température de Curie Figure I.13b. C'est ce qu'on appelle le «processus de polarisation». Après le traitement à la perche, la plupart des domaines à peu près aligné avec l'électrique domaine de l'expansion au détriment des domaines qui ne sont pas alignés avec le champ, et l'élément se développe dans la direction du champ. Lorsque le champ électrique est supprimé la plupart des dipôles sont enfermés dans une configuration proche de l'alignement (Figure I.13c).

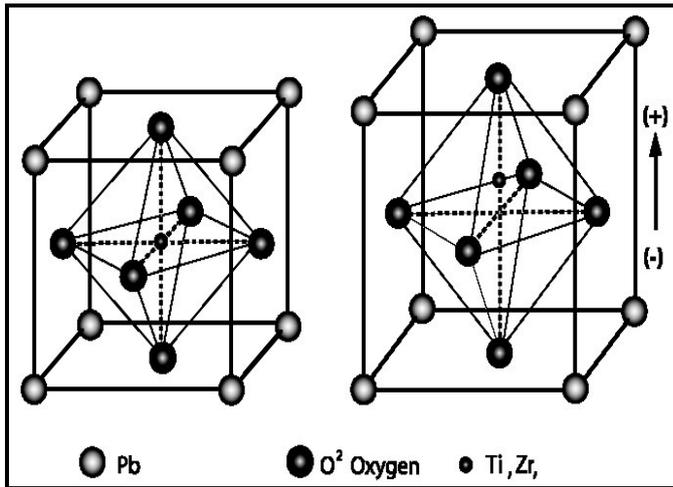
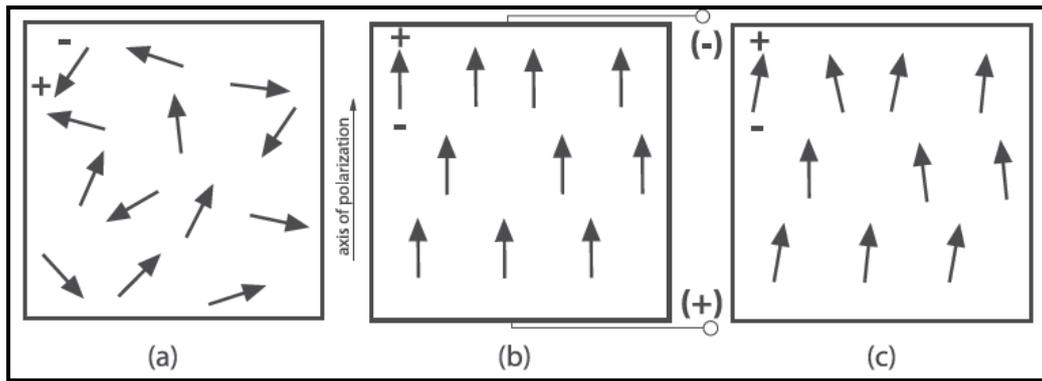


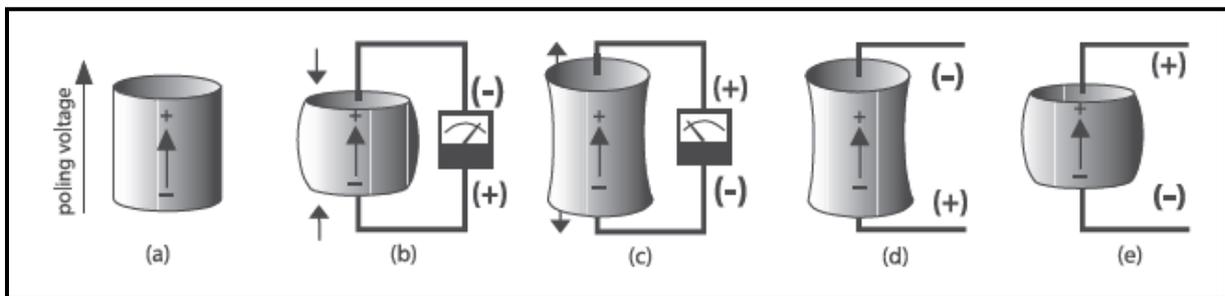
Figure I.10. Structure cristalline d'une céramique piézoélectrique, avant et après la polarisation

L'élément a une polarisation permanente, le reste de la polarisation, est en permanence allongé. L'augmentation de la durée de l'élément, cependant, est très faible, généralement dans l'ordre du micromètre. La propriété d'un élément polarisé céramique piézoélectrique peut être expliquée par la série d'images dans la figure I.3. La compression mécanique ou la tension sur le changement de l'élément le moment dipolaire associé à cet élément. Cela crée une tension. Compression le long de la direction de polarisation, ou de tension perpendiculaire à la direction de polarisation, génère une tension de la même polarité de la tension de polarisation (Figure I.13d)

La tension le long de la direction de polarisation, ou la compression perpendiculaire à cette direction, génère une tension de polarité opposée à celle de la tension de polarisation (Figure I.14c). Lorsqu'il fonctionne dans ce mode, l'appareil est utilisé comme capteur. C'est, l'élément en céramique qui convertit l'énergie mécanique de compression ou de tension en énergie électrique. Les valeurs des contraintes de compression et la tension.



**Figure I.11. Processus de polarisation :** (a) Avant la polarisation des domaines polaires sont orientés au hasard; (b) Un champ très large DC électrique est utilisé pour la polarisation, (c) Après le domaine de DC est enlevé, la polarisation reste.



**Figure I.14 Réaction d'un élément piézoélectrique polarisé à des stimuli appliqués**

générée par l'application de contrainte à un élément piézoélectrique en céramique sont linéairement proportionnelles, à concurrence d'une contrainte spécifique, qui dépend des propriétés de la matière. La même chose est vraie pour la tension appliquée et générée de la déformation. Si une tension de la même polarité que la tension de polarisation est appliquée à un élément céramique, dans le sens de la tension de polarisation, l'élément s'allonge et son diamètre deviendra plus petit (I.14d).

Si une tension de polarité opposée à celle de la tension de polarisation est appliquée, l'élément sera plus court et plus large (I.14e). Si une tension alternative est appliquée à l'appareil, l'élément dilate et se contracte de façon cyclique, à la fréquence de la tension appliquée. Lorsqu'il est utilisé dans ce mode, la céramique piézoélectrique est utilisée comme un actionneur. C'est de l'énergie électrique est convertie en énergie mécanique.

### I.3.3 Les équations piézoélectriques constitutives

Nous sommes principalement concernés par le comportement linéaire des matériaux piézoélectriques, c'est pour la plupart des cas, nous supposons que les transducteurs piézoélectriques sont exploités à de faibles niveaux de champ électrique et en vertu de faibles contraintes mécaniques. Quand un céramique piézoélectrique polarisés est mécaniquement il devient tendue polarisée électriquement, produisant une charge électrique sur la surface du matériau. Cette propriété est appelée " l'effet piézoélectrique direct " est la base sur laquelle les matériaux piézoélectriques sont utilisés comme capteurs. En outre si les électrodes sont fixées à la surface du matériau, l'électricité produite frais peut être collectée et utilisée.

Les équations constitutives décrivant les propriétés piézoélectriques sont fondées sur l'hypothèse que la déformation totale dans le capteur est la somme des déformations mécaniques induites par la contrainte mécanique et le déclenchement réglable de déformation causée par la tension électrique appliquée.

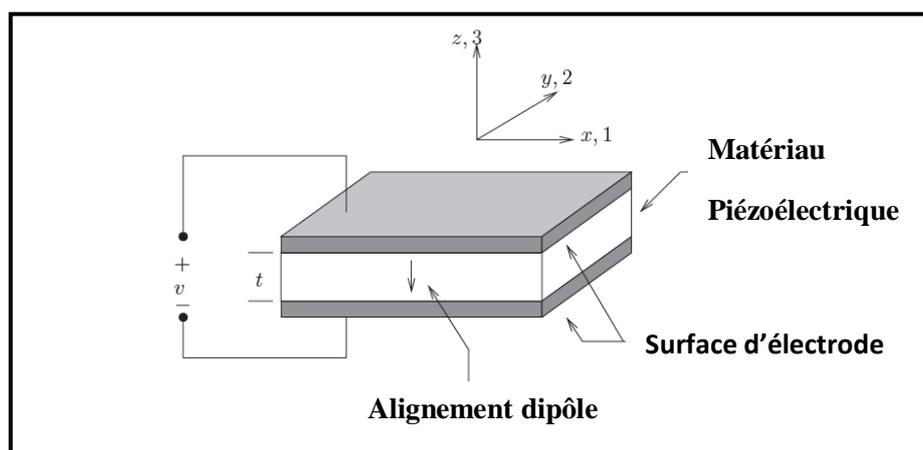
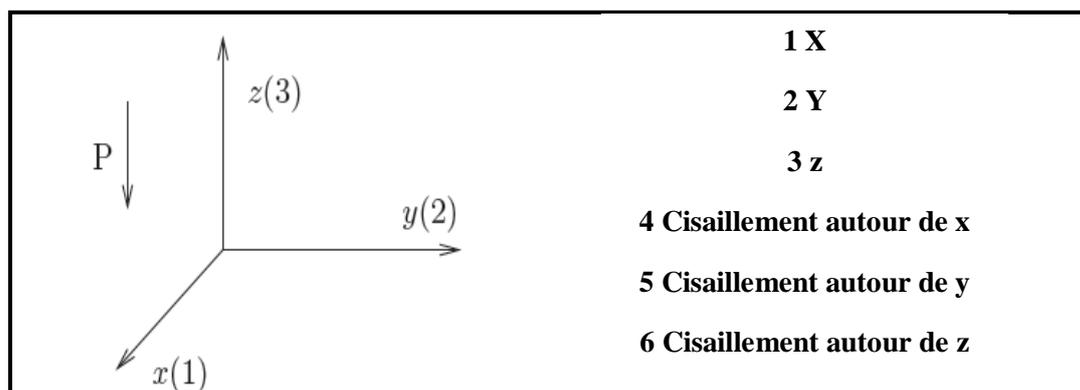


Figure I.13 Schéma d'un transducteur piézoélectrique

Les axes sont identifiés par des chiffres plutôt que des lettres. Dans la figure I.15 fait référence à l'axe des x, 2 correspond à l'axe des y, et 3 correspond à l'axe z. L'axe 3 est attribué à la direction de la polarisation initiale de la piézocéramique, et les axes 1 et 2 se trouvent dans le plan perpendiculaire à l'axe 3. Cela est démontré plus clairement sur la figure I.16 Les équations décrivant électromécaniques pour un matériau piézoélectrique linéaire peut être écrit comme suit [7] :

$$\varepsilon_i = S_{ij}^D \sigma_j + g_{mi} D_m \quad \text{I.3}$$

$$E_i = g_{mi} \sigma_i + \beta_{ik}^\sigma D_k \quad \text{I.4}$$



**Figure I.14. La nomenclature des axes**

Ou :

$\sigma$  : vecteur de contrainte ( $\text{N}/\text{m}^2$ )

$\varepsilon$  : vecteur de la déformation ( $\text{m} / \text{m}$ )

$E$  : vecteur de champ électrique appliqué ( $\text{m} / \text{V}$ )

$\xi$  : permittivité ( $\text{F} / \text{m}$ )

$d$  : matrice des constantes de la déformation piézoélectrique ( $\text{m} / \text{V}$ )

$S$  : matrice des coefficients de la conformité ( $\text{m}^2 / \text{N}$ )

$D$  : vecteur de déplacement électrique ( $C/m^2$ )

$g$  : matrice des constantes piézoélectriques ( $m^2 / C$ )

$\beta$  : composante impermittivité ( $m/F$ )

En outre, les exposants  $D$ ,  $E$  et  $\sigma$  représentent les mesures prises aux valeurs constantes du déplacement électrique, un champ électrique et contrainte constante.

### I.3.4 Les coefficients piézoélectriques

Cette section examine la signification physique de certains des coefficients piézoélectriques présentés dans la section précédente. Notamment  $d_{ij}$ ,  $g_{ij}$ ,  $S_{ij}$ ,  $e_{ij}$  et  $k_{ij}$

#### I.3.4.1 La constante piézoélectrique $d_{ij}$

Le coefficient piézoélectrique  $d_{13}$  est le rapport de la contrainte dans la  $j$ -axe du champ électrique appliqué le long de la  $i$ -axe, lorsque toutes les sollicitations extérieures sont maintenues constantes. Dans la figure I.17, une tension  $V$  est appliquée à un transducteur piézoélectrique qui est polarisé dans le sens 3. Cette tension génère un champ électrique

$$E_3 = \frac{V}{t} \quad \text{I.5}$$

Les déformations du transducteur. En particulier

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{I.6}$$

Dans laquelle

$$\Delta l = \frac{d_{13} V l}{t} \quad \text{I.7}$$

La constante piézoélectrique  $d_{13}$  est généralement un nombre négatif. Cela est dû sur le fait que l'application d'un champ électrique positive produira un effet positif de déformation dans la direction 3. Une autre interprétation de  $d_{ij}$  est le ratio de charge par unité de court-circuit zone qui coule entre les électrodes connectés perpendiculaire à la direction de J la contrainte appliquée dans la direction i. Comme le montre la figure I.17, une fois une force F est appliquée à la sonde, dans le sens 3, elle génère la contrainte

$$\sigma_3 = \frac{F}{l\omega} \quad \text{I.8}$$

Qui aboutit à la charge électrique

$$q = d_{33}F \quad \text{I.9}$$

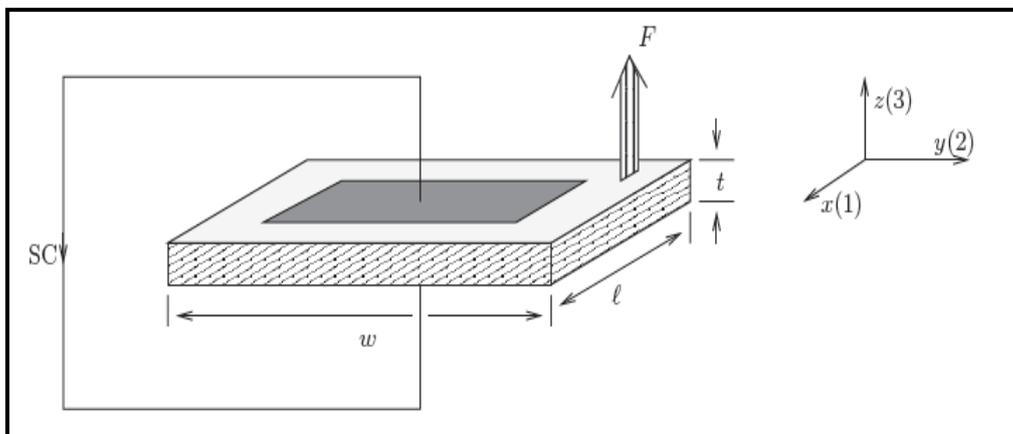


Figure I.15. Dépôt de charge sur un transducteur piézoélectrique

### I.3.4.2 La constante piézoélectrique $g_{ij}$

La constante piézoélectrique  $g_{ij}$  signifie le champ électrique développé le long de la  $i$ -axe lorsque le matériau est soulevé le long de la  $j$ -axe. Par conséquent, la figure I.18 montre la force  $F$  appliquée, les résultats de la tension

$$V = \frac{g_{31}F}{\omega} \quad \text{I.10}$$

Une autre interprétation de  $g_{ij}$  est le rapport de la déformation développée le long de la  $j$ -axe à la charge (par unité de surface) déposée sur des électrodes perpendiculaire à  $i$ -axe. Par conséquent, la figure I.19 si une charge électrique de  $Q$  est déposée sur les électrodes de surface, l'épaisseur de l'élément piézo-électrique va changer par

$$\Delta l = \frac{g_{31}Q}{\omega} \quad \text{I.11}$$

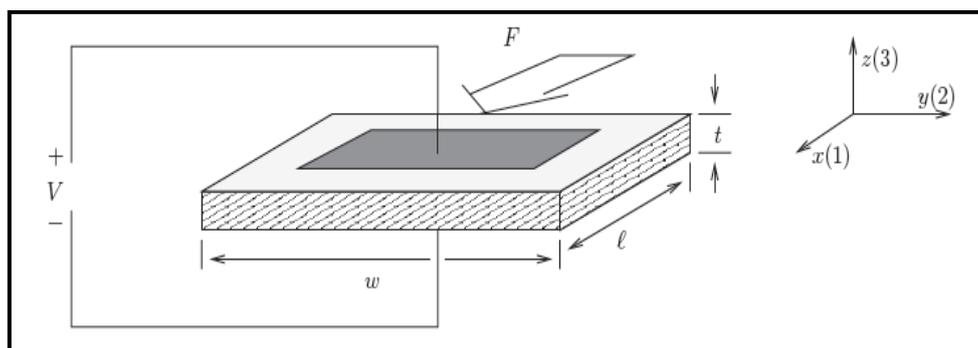


Figure I.16 Un circuit ouvert transducteur piézoélectrique sous une force dans la direction 1 –

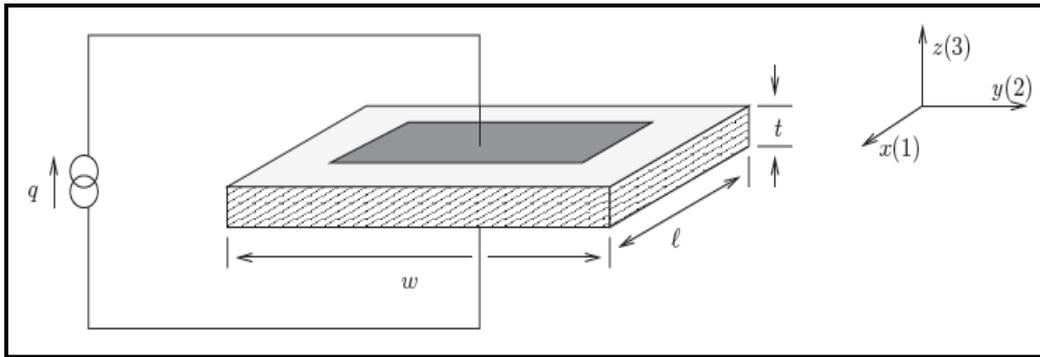


Figure I.17. Un transducteur piézoélectrique sous réserve de la charge appliquée

### I.3.4.3 La conformité élastique $S_{ij}$

La conformité constante élastique  $S_{ij}$  est le rapport de la déformation de la  $i$ -direction au contrainte dans le  $j$ -direction, étant donné qu'il n'y a pas de changement de contraintes le long des deux autres directions. Les déformations directes sont désignées par indices 1 à 3. Les déformations de cisaillement et des contraintes sont désignés par des indices de 4 à 6. Par la suite,  $S_{12}$  signifie la déformation directe dans le 1-axe lorsque l'appareil est souligné long le 2-axes, et souligné le long de directions 1 et 3 sont inchangés. De même,  $S_{44}$  renvoie à la déformation de cisaillement autour de la 2-axes en raison de la contrainte de cisaillement autour de même axe. Un indice supérieur «E» est utilisé pour indiquer que le respect élastique  $S_{ij}^E$  est mesuré avec les électrodes en court-circuit. De même, l'exposant «D» dans  $S_{ij}^D$  désigne que les mesures ont été prises lorsque les électrodes ont été laissées en circuit ouvert. Il en résulte une contrainte mécanique dans une réponse électrique qui peut accroître la pression qui en résulte.

Par conséquent, il est naturel de s'attendre à ce  $S_{ij}^E$  à être plus petits que  $S_{ij}^D$ . C'est un piézo en court-circuit a un module de Young de plus petits élasticité que quand il est en circuit ouvert.

#### I.3.4.4 Le coefficient diélectrique $e_{ij}$

Les coefficients diélectriques  $e_{ij}$  déterminent le coût par unité de surface dans le i-axe due à un champ électrique appliqué dans la j-axe. Dans la plupart des matériaux piézoélectriques, un champ appliqué selon les causes j-axe de déplacement électrique seulement dans cette direction. Le constant diélectrique relatif, définie comme le rapport de l'absolue permittivité du matériau par permittivité de l'espace libre, est désigné par  $K$ . Le  $\sigma$  exposant dans  $e_{11}^\sigma$  fait référence à la permittivité pour un champ appliqué dans la 1 direction, lorsque le matériau n'est pas retenu.

#### I.3.4.5 Le coefficient de couplage piézoélectrique $K_{ij}$

Le coefficient piézoélectrique  $K_{ij}$  représente la capacité d'un matériau piézocéramique de transformer l'énergie électrique en énergie mécanique. Cette transformation de l'énergie entre les domaines mécaniques et électriques est employée dans les deux capteurs et actionneurs à base de matériaux piézoélectriques. L'indice ij indique que la contrainte, ou de la déformation se trouve dans la direction j, et les électrodes sont perpendiculaires à l'axe I-. Par exemple, si un piézocéramiques est mécaniquement tendues dans la direction 1, à la suite d'un apport d'énergie électrique dans Orientation 3, alors que l'appareil est soumis à aucun stress externe, le ratio de stockée l'énergie mécanique en énergie électrique appliqué est noté que  $K_{31}^2$ . Il ya un

certain nombre de moyens qui peuvent être mesurés  $K_{ij}$ . Une possibilité consiste à appliquer une force à l'élément piézo-électrique, tout en laissant ses terminaux en circuit ouvert.

### I.3.5 Capteurs piézoélectriques

Quand un transducteur piézoélectrique est mécaniquement sollicité, il génère une tension. Ce phénomène est régi par l'effet piézoélectrique direct (2,2). Cette propriété en fait transducteurs piézoélectriques adaptés pour des applications de détection. Par rapport aux jauges de contrainte, capteurs piézoélectriques offrent un signal supérieure ratio signal / bruit et une meilleure réjection du bruit haute fréquence. Les capteurs piézoélectriques sont donc tout à fait appropriés pour des applications qui impliquent la mesure de faible niveau de déformation. Ils sont compacts, faciles à intégrer et nécessitent un signal modéré au circuit de conditionnement.

Si un capteur PZT est soumis à un champ de contraintes, en supposant que un champ électrique appliqué est nul, le vecteur de déplacement résultant [18]

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad \text{I.12}$$

La charge générée peut être déterminée à partir de :

$$q = \iint [D_1 \ D_2 \ D_3] \begin{bmatrix} dA_1 \\ dA_2 \\ dA_3 \end{bmatrix} \quad \text{I.13}$$

Où  $dA_1$ ,  $dA_2$  et  $dA_3$  sont, respectivement, l'écart des électrodes dans les zones 2-3, 1-3 et 1-2

La tension générée  $V_p$  est liée à la charge via

$$V_p = \frac{q}{C_p} \quad \text{I.14}$$

Où  $C_p$  est la capacité du capteur piézo-électrique. Après avoir mesuré la tension,  $V_p$ , la déformation peut être déterminé en résolvant . Si le capteur est un patch PZT avec deux visages recouverts de minces couches d'électrodes, par exemple le patch de la figure I.15 et si le champ de contrainte n'existe que le long de la 1-axe, la capacité peut être déterminée à partir de

$$C_p = \frac{l\omega e_{33}^2}{t} \quad \text{I.15}$$

En supposant que la déformation qui en résulte est le long de la 1-axe, le capteur de tension se trouve à

$$V_s = \frac{d_{31}E_p\omega}{C_p} \int_l \varepsilon_1 dx \quad \text{I.16}$$

Où  $E_p$  est le module de Young du capteur et  $\varepsilon_1$  la moyenne sur la capteur de longueur. La déformation peut alors être calculée à partir de

$$\varepsilon_1 = \frac{C_1 V_s}{d_{13} E_p l \omega} \quad \text{I.17}$$

En dérivant l'équation ci-dessus, l'hypothèse principale est que le capteur a été tendu seulement le long de 1-axe. Si cette hypothèse est violée, qui est souvent, le cas alors (I.16) devrait être modifié pour

$$\varepsilon_1 = \frac{C_p V_s}{(1-\nu) d_{31} E_p l \omega} \quad \text{I.18}$$

Où  $\nu$  est le coefficient de Poisson

### I.2.6 Actionneurs piézoélectriques

Considérons une poutre avec une paire de transducteurs piézoélectriques.

Le but de vérins est de générer de flexion dans la poutre en appliquant un moment sur elle. Cela se fait en appliquant l'égalité tensions, de différence de phase, de  $180^\circ$  deux de plaques. Par conséquent, quand on pastille augmente, les autres marchés. En raison de la différence de phase entre les tensions appliquées aux deux actionneurs, que pure flexion de la poutre se produisent, sans aucune excitation des ondes longitudinales. . Quand une tension  $V$  est appliquée à l'un des éléments piézoélectriques, dans la direction du vecteur de polarisation, les déformations dans l' actionneur sont dans la direction 1 (l'axe des abscisses).

En outre, le montant de la déformation libre est donnée par

$$\varepsilon_p = \frac{d_{31}V}{t_p} \quad \text{I.19}$$

Lorsque le  $t_p$  représente l'épaisseur de l'actionneur piézoélectrique. Depuis le patch piézoélectrique est lié à la poutre, ses mouvements sont contraint par la rigidité de la poutre. Dans l'analyse qui précède une parfaite liaison de l'actionneur à la poutre qui est utilisée.

En d'autres termes, la tonte effet de la couche de liaison non-idéal est ignorée. En supposant que la distribution est linéaire dans l'épaisseur de la poutre, on peut écrire

$$\varepsilon (Z) = \alpha Z \quad \text{I.20}$$

L'équation ci-dessus représente la distribution des déformations dans la poutre, et les correctifs piézoélectriques, si la structure composite était tordues, dire par une charge externe, dans une courbure vers le bas. Par la suite, la partie de la poutre au-dessus de l'axe neutre et la pastille supérieure serait mis en tension, et la moitié inférieure de la structure et la pastille en bas de compression. Bien que, la déformation est continue sur la surface du poutre-actionneur, cette répartition est discontinue. En particulier, en utilisant la loi de Hooke, la répartition des contraintes dans la poutre se trouve :

$$\sigma_b(Z) = E_b \alpha Z \quad \text{I.21}$$

Où  $E_b$  est le module d'Young de l'élasticité de la poutre. Depuis les deux «Identiques» actionneurs piézoélectriques sont contraints par le faisceau, la contrainte des distributions à l'intérieur du haut et le bas actionneurs peuvent être rédigés en termes de la déformation totale dans chaque actionneur (la déformation qui produit du contrainte)

$$\sigma_p^t = E_p (\alpha Z - \varepsilon_p) \quad \text{I.22}$$

$$\sigma_p^b = E_p (\alpha Z - \varepsilon_p) \quad \text{I.23}$$

Où  $E_p$  est le module d'Young de l'élasticité du matériau piézoélectrique et les exposants t et b renvoient au haut et aux bas piézoélectriques correctifs respectivement.

## **CHAPITRE II : Formulation dynamique du système composant la structure de base et la couche piézoélectrique**

### **II. 1 Analyse structurale**

Bien qu'il soit possible d'effectuer une analyse complète d'un système dynamique, celle-ci nous conduit souvent à une analyse très compliquée et nous donne beaucoup d'information non désirées. On cherche alors un modèle mathématique simplifié du système .

Obtenir un modèle mathématique simple représentant les caractéristiques d'un système réel n'est pas facile, étant donné que le modèle doit donner des informations réalistes et utilisables.

Cependant, il est possible de faire des simplifications en vue de modéliser un système réel c'est l'exemple de considérer une masse répartie comme une masse discrète, ou de négliger l'effet de l'amortissement du système si on s'intéresse aux fréquences de résonance seulement et si la fréquence de la réponse dynamique étudiée est très différente des fréquences de résonance.

Dans un certain domaine, on peut considérer une raideur non linéaire comme linéaire ; ou encore de négliger les éléments et les forces si leurs effets sont très petits ; et on peut considérer le mouvement d'une masse dans les directions qui nous intéressent. Ainsi un modèle est généralement un compromis entre une représentation facile à analyser et simple, mais qui donne probablement des informations moins précises.

L'analyse modale d'une structure correspond à une discrétisation du système continu à l'aide d'un nombre fini de modes. Deux types de modes sont distingués lors du contrôle vibratoire des structures : les modes contrôlés ou les modes résiduels (non contrôlés).

Des instabilités (spillover effet) peuvent être produites suite à la diminution des nombres de modes contrôlés. Cette difficulté majeure est évitée par l'adoption de la méthode de contrôle modal découplé ( indépendant Modal – space contrôle , IMSC) en effet , on control d'une façons indépendante les différents modes d'une part , et d'autre part des équation différentielles du seconde-ordre sont controlées en parallèle , la mise en œuvre de cette stratégie apparait très aisée ; et elle est proposée pour la 1<sup>ère</sup> fois par Mieirovich et Baruh [10].

## II. 2 Contrôle modal

### II. 2.1 Equation modale du mouvement

Supposant un amortissement purement visqueux, on écrit les équations du mouvement du système discret obtenues par la méthode de Rayleigh-Ritz :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{P(t)\} + \{E(t)\} \quad \text{II.1}$$

Ou  $[M]$  ,  $[C]$  et  $[K]$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur.

En exprimant le mouvement de la structure dans la base des modes propres réels, qui sont solutions des systèmes homogènes suivant :

$$\omega^2 [M]\{X\} = [K]\{X\} \quad \text{II.2}$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres associés sont notés :

$$\omega_1^2, \omega_2^2 \dots \dots \dots \omega_n^2$$

$$\{X\}_1 \{X\}_2, \dots \dots \dots \{X\}_n$$

En utilisant la base modale, on introduit l'expression fondamentale suivante :

$$\{U\} = \sum_{r=1}^N \{X\}_r \{u(t)\}_r = [\Phi]\{u\} \quad \text{II.3}$$

$\{u(t)\}_r$  est le vecteur des coordonnées modales et  $[\Phi]$  matrice modale. En outre, on rappelle que la transformation II. 3 diagonalise les matrices de masse et de raideur. On a, en effet, les relations d'orthogonalité suivantes

$[\Phi]^T[M][\Phi] = [m]$  matrice diagonale ( N x N ) des masses généralisées

$[\Phi]^T[K][\Phi] = [k]$  matrice diagonale ( N x N ) des raideurs généralisées

En général, la transformation ne diagonalise pas la matrice d'amortissement et modale est pleine :

$$[\Phi]^T[C][\Phi] = [c]$$

Après avoir utilisé la transformation II. 3 dans l'équation II. 1 et multiplié à gauche par  $[\Phi]^T$ , on obtient le système des équations modales du mouvement, soit:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{p\} + \{e\} \quad \text{II.4}$$

Avec

$$[\Phi]^T\{P(t)\} = \{p\} \quad \text{Vecteur des forces généralisées de contrôle}$$

$$[\Phi]^T\{E(t)\} = \{e\} \quad \text{Vecteur des forces généralisées de d'excitation}$$

Si les termes d'amortissement sont petits et les fréquences propres sont suffisamment séparées, on peut, pour le calcul, de la réponse ne retenir que les termes diagonaux de la matrice d'amortissement. Le système des équations modales du mouvement II.4 Se ramène alors à N équations différentielles découplées :

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{p\} + \{e\} \quad \text{II.5}$$

Soit pour le r-ième mode :

$$\ddot{u}_r + 2\zeta_r\omega_r\dot{u}_r + \omega_r^2 u_r = \frac{\{p_r\}}{m_r} + \frac{\{e_r\}}{m_r} \quad \text{II.6}$$

$\{p_r\}$  : est la force généralisées de contrôle du r-ième mode .

$\{e_r\}$  : est la force généralisées d'excitation du r-ième mode .

Dans l'absence de forces d'excitation, l'équation II.6 peut s'écrire sous la forme d'une équation d'état. Dans ce but, on définit une variable  $v_r(t)$  par :

$$\dot{u}_r(t) = \omega_r v_r(t) \quad (r = 1, 2, 3, \dots, N) \quad \text{II.7}$$

En introduisant le vecteur d'état modal à deux dimensions  $\{w_r(t)\}$ , et le vecteur force de contrôle modal associé sous la forme :

$$\{w(t)\}_r = \begin{Bmatrix} u_r(t) \\ v_r(t) \end{Bmatrix}^T \quad (r = 1, 2, 3, \dots, N)$$

II.8

$$\{w(t)\}_r = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{f_r(t)}{\omega_r} \end{Bmatrix}^T$$

Avec :  $f_r(t) = \frac{p_r(t)}{m_r}$  .

Les équations II.6 et II.7 peuvent être combinées sous la forme d'une équation modale d'état :

$$\{\dot{w}(t)\}_r = [A]_r \{w(t)\}_r + \{w(t)\}_r \quad (r = 1, 2, 3, \dots, N) \quad \text{II.9}$$

Avec

$$[A]_r = \begin{bmatrix} 0 & \omega_r \\ -\omega_r & -2\zeta_r\omega_r \end{bmatrix} \quad (r = 1, 2, 3, \dots, N) \quad \text{II.10}$$

## II. 2.2 Calcul des commandes

En l'absence de forces de contrôle, l'équation II.9 apparait comme une série infinie d'équations différentielles indépendantes du second ordre. L'équation II.9 est couplée par la force de contrôle car celle-ci dépend de tous les vecteurs d'état modaux. Dans le cas spécial ou on impose à de ne dépendre que de ;

$$W_r = W_r(w_r) \quad (r = 1, 2, 3, \dots, N) \quad \text{II.11}$$

Chaque équation II.9 devient à nouveau découplée. L'équation II.11 signifie que la force du mode calculée simplement est le point essentiel de la méthode de contrôle

modale (Independent Modal-Space Control Method). Cette méthode de contrôle peut être appliquée dans les cas linéaire et non linaires.

Dans le cas de contrôle linéaire, la commande optimale, se calcule facilement.

Considérons le cas du contrôle Modal proportionnel suivant :

$$\{W(t)\}_r = [G]_r \{w(t)\}_r \quad (r = 1,2,3, \dots, N) \quad \text{II.12}$$

Avec

$$[G]_r = \begin{bmatrix} g_{r11} & g_{r12} \\ g_{r21} & g_{r22} \end{bmatrix} \quad (r = 1,2,3, \dots, N) \quad \text{II.13}$$

$[G]_r$  : est la matrice, de gain modale. En introduisant l'équation II.8, dans l'équation II.13 on obtient :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ f \\ \omega \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} g_{r11}u_r + g_{r12}v_r \\ g_{r21}u_r + g_{r22}v_r \end{Bmatrix} \quad (r = 1,2,3, \dots, N) \quad \text{II.14}$$

Qui peut être satisfait si et seulement si  $g_{r11} = g_{r12} = 0$  ( $r = 1,2,3, \dots, N$ ) et la matrice de gain modale doit avoir la forme spéciale suivante :

$$[G]_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{r21} & g_{r22} \end{bmatrix} \quad (r = 1,2,3, \dots, N) \quad \text{II.15}$$

Cette relation est proposée par Meirovitch et Oz [13] . compte tenu de la relation II.7 , l'équation II.14 nous donne :

$$f_r(t) = \omega_r [g_{r21}u_r(t) + g_{r22}v_r(t)] = g_{r21}u_r(t) + g_{r22}\dot{u}(t) \quad \text{II.16}$$

$$(r = 1,2,3, \dots \dots \dots, N)$$

On obtient ainsi la force modale de contrôle  $f_r(t)$  en fonction du déplacement modal  $u_r(t)$  et de la vitesse modal  $\dot{u}(t)$ . dans le cas d'un contrôle optimal, les gains et se déterminent en minimisant le critère quadratique suivant :

$$J = \sum_{r=1}^N J_r \quad \text{II.17}$$

Avec

$$J_r = \{w_r(t_f) - \hat{w}_r\}^T [H]_r \{w_r(t_f) - \hat{w}_r\} + \int_0^{t_f} \{ [R]_r \{w_r\} + \{W_r\}^T [R]_r \{W_r\} \} dt \quad \text{II.18}$$

$J_r$  : L'indice de performance pour le

$t_f$  : Le temps final

$\hat{w}_r$  : L'état final désiré

$[H]_r$  ,  $[Q]_r$  : Sont les matrices de pondération semi-définies positives

$[R]_r$  : la matrice pondération définie-positive.

Comme le vecteur  $\{W_r\}$  ne dépend que de  $\{w_r\}$ , les indices de performance modaux  $J_r$  sont indépendants et la minimisation de l'indice de performance total  $j$  se fait en minimisant les  $J_r$  indépendamment.

On considère un problème de régulation associé  $\hat{w}_r = 0$ . on prend en plus  $H_r = 0$  et  $Q_r = \omega_r^2 I$  choix nous permet d'interpréter la minimisation de l'indice de performance  $J_r$  comme étant un processus réduisant le vecteur d'état à d'efforts de confort de modérés n'augmentant pas l'Hamiltonien du système en boucle-ouvert l'Hamiltonien du système peut s'écrire sous la forme :

$$k = \sum_{r=1}^N k_r \quad \text{II.19}$$

Avec

$$k_r = \frac{1}{2} \omega_r^2 \omega_r^T \omega_r \quad (r = 1,2,3, \dots, N) \quad \text{II.20}$$

$k_r$  est le L'Hamiltonien du r-ième mode.

Oz et Meirovitch ont montré que la matrice de gain  $[G]_r$  donnée par l'équation ..... , impose une matrice de pondération  $[R]_r$  de la forme :

$$[R]_r = \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ 0 & k_r \end{bmatrix} \quad (r = 1,2,3, \dots, N) \quad \text{II.21}$$

La minimisation de  $J_r$  défini en équation II.18, sous la contrainte II.9, nous conduit au problème suivant :

$$\{W(t)\}_r = - [R]_r^{-1} [s(t)]_r \{w(t)\}_r \quad (r = 1,2,3, \dots, N) \quad \text{II.22}$$

$[s(t)]_r$  la matrice doit satisfaire l'équation matricielle de Riccati :

$$[\dot{S}]_r = - [S]_r [A]_r - [A]_r^T [S]_r - [Q]_r + [S]_r [R]_r^{-1} [S]_r \quad (r = 1,2,3, \dots, N) \quad \text{II.23}$$

Avec la condition aux limites  $[S(t_f)]_r = [H]_r = 0$  . en introduisant les valeurs de  $[A]_r$  ,  $[Q]_r$  et  $[R]_r$  , l'équation II.23 peut s'écrire explicitement sous la forme scalaire suivante :

$$\begin{aligned} \dot{S}_{11} &= \omega_r^{-2} k_r S_{12}^2 + 2\omega_r S_{11} - \omega_r^2 \\ \dot{S}_{12} &= -\omega_r S_{11} + 2\zeta_r \omega_r S_{12} + \omega_r^{-2} k_r^{-1} S_{12} S_{22} + \omega_r S_{22} \\ \dot{S}_{21} &= -\omega_r S_{11} + 2\zeta_r \omega_r S_{12} + \omega_r^{-2} k_r^{-1} S_{12} S_{22} + \omega_r S_{22} \\ S_{22} &= -\omega_r S_{12} + 4\zeta_r \omega_r + \omega_r^{-2} k_r^{-1} S_{22} - \omega_r^2 \end{aligned}$$

$$(r = 1,2,3, \dots, N) \quad \text{II.24}$$

$S_{ij}$  ( $i,j=1,2$ ) sont les éléments de la matrice  $[S]_r$

On s'intéresse à la solution de Riccati . On a donc  $\dot{S}_{11} = \dot{S}_{12} = \dot{S}_{21} = \dot{S}_{22} = 0$  dans l'équation II.24. Et en introduisant la notation  $[R_r] = \omega_r^2 [\bar{k}_r]$  ( $r = 1,2,3, \dots, N$ )

On obtient trois équation algébriques non linéaires dont les solutions données par :

$$S_{12} = S_{21} = \omega_r^2 \{-\omega_r \bar{k}_r + T_r\}$$

$$S_{22} = \omega_r^2 \left\{ -2\zeta_r \omega_r \bar{k}_r + \left[ 4\zeta_r^2 \omega_r^2 k_r^2 + \bar{k}_r \left( 1 + 2\omega_r (-\omega_r \bar{k}_r + T_r) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$S_{22} = 2\zeta_r \omega_r^2 \{-\omega_r \bar{k}_r + T_r\} + S_{12} \left\{ \omega_r^{-1} (\omega_r^2 - \bar{k}_r^{-1})^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$(r = 1,2,3, \dots, N) \quad \text{II.25}$$

Avec  $T_r = (\omega_r^2 k_r^2 + \bar{k}_r)^{\frac{1}{2}}$

On considérant l'équation II.12, l'équation II.22 et II.25 on obtient :

$$[G]_r = -R_r^{-1}[S]_r$$

$$g_{r11} = g_{r12} = 0$$

$$g_{r21} = \omega_r - (\omega_r^2 + \bar{k}_r^{-1})^{\frac{1}{2}}$$

$$g_{r22} = 2\zeta_r \omega_r - \left[ 4\zeta_r^2 \omega_r^2 + \left( 2\omega_r \left( -\omega_r + (\omega_r^2 + \bar{k}_r^{-1})^{\frac{1}{2}} \right) \right) + \bar{k}_r^{-1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (r = 1,2,3, \dots, N)$$

II.26

Finalement, en injectant les éléments  $g_{r21}$ ,  $g_{r22}$  de la matrice de gain  $[G]_r$  dans l'équation II.16, on obtient la force modale de contrôle :

$$f_r(t) = \omega_r \left\{ \omega_r - (\omega_r^2 + \bar{k}_r^{-1})^{\frac{1}{2}} \right\} u_r(t) + \left\{ 2\zeta\omega_r - \left[ 4\zeta^2\omega_r^2 + \left( 2\omega_r \left( -\omega_r + (\omega_r^2 + \bar{k}_r^{-1})^{\frac{1}{2}} \right) \right) + \bar{k}_r^{-1} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \dot{u}_r(t)$$

$$(r = 1,2,3, \dots \dots \dots, N) \quad \text{II.27}$$

Il est à noter que l'implantation de la méthode de contrôle – modale nécessite la connaissance du déplacement et la vitesse généralisé,  $\mathbf{u}_r(\mathbf{t})$  et  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{t})$  à chaque instant.

### II.3 Modèle statique de couplage piézoélectriques/structure

Deux modèles de couplage seront présentés. Le premier modèle suppose qu'il existe une certaine épaisseur de couche de liant (couche de colle) élastique entre les actionneurs et la structure. Le deuxième modèle suppose que le couplage entre actionneurs et la structure est parfait, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mouvement relatif entre les actionneurs et la structure.

La figure II.1 montre deux éléments piézo-électriques collés sur une structure élastique. Les flèches montrées sur la figure indiquent le signe des tensions électriques qui provoquent la dilatation des piézo-électriques. Si une tension électrique est appliquée avec le signe défini dans la figure, la structure se déforme en extension. Si les signes des tensions des deux piézo-électriques sont opposés, la structure se déforme en flexion.

Afin d'obtenir les équations qui gouvernent le couplage entre les piézoélectriques et la structure, on examine l'état d'équilibre d'un petit élément entouré par les traits en fig II.1. Sous l'hypothèse que l'on a, dans la couche de colle, un état de contrainte de cisaillement pur et monodimensionnel et que l'on a, dans les piézoélectriques et la structure, un état de contrainte en traction-compression pur, les relations entre les déformations et les déplacements s'écrivent :

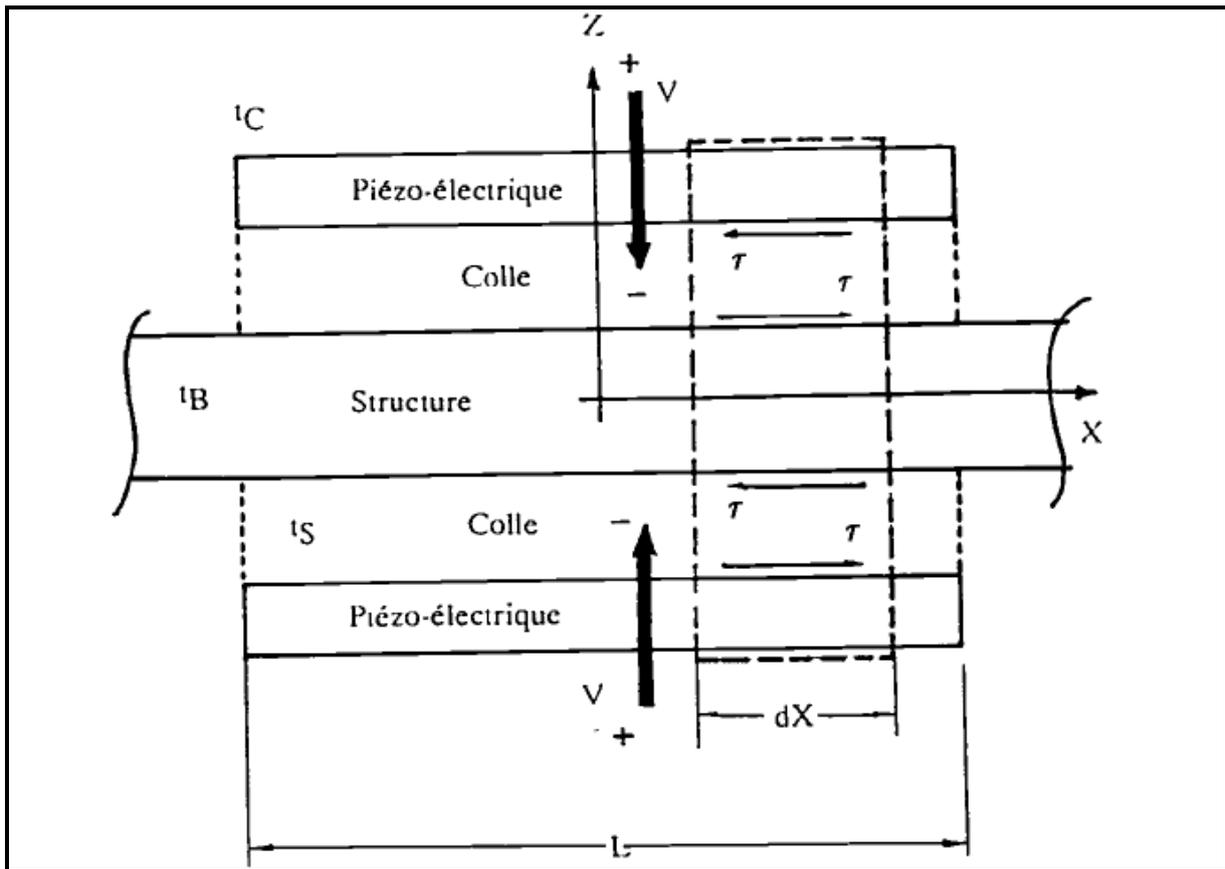


Figure II.1 : Géométrie d'un couplage piézoélectrique/structure

$$\varepsilon_c = \frac{U_c}{d_x} = U'_c \quad \text{II.28}$$

$$U_B^S = \frac{dU_B^S}{dx} \quad \text{II.29}$$

$$\gamma = \frac{U_c - U_B^S}{t_S} \quad \text{II.30}$$

$\varepsilon$ ,  $U$  sont respectivement la déformation, le déplacement et l'épaisseur. Les indices  $B$ ,  $c$  et  $S$  représente respectivement la structure, le piézoélectrique et la couche de colle, tandis que l'exposant  $S$  indique la surface de la structure et  $x$  la coordonnée du centre des piézoélectriques.

Dans la cinématique associée à la flexion, on suppose une distribution linéaire des déformations (variation du type Euler-Bernoulli), figure II.1. Pour le mouvement en traction-compression, les distributions est supposée uniforme (figure II.2). Sous ces hypothèses, l'équation d'équilibre de l'élément étudié s'écrit :

$$\frac{dU_c}{dx} - \frac{\tau}{U_c} = 0 \quad \text{II.31}$$

$$\frac{d\sigma_B^S}{dx} + \frac{\alpha^\tau}{t_B} \quad \text{II.32}$$

$\sigma$  et  $\tau$  sont respectivement les contraintes de traction-compression et de cisaillement, et  $\alpha$  est un paramètre caractérisant la distribution des contraintes. Pour la distribution du type Euler-Bernoulli,  $\alpha = 6$  (figure II.2b), et pour la distribution du type uniforme,  $\alpha = 2$  (figure II.2a).

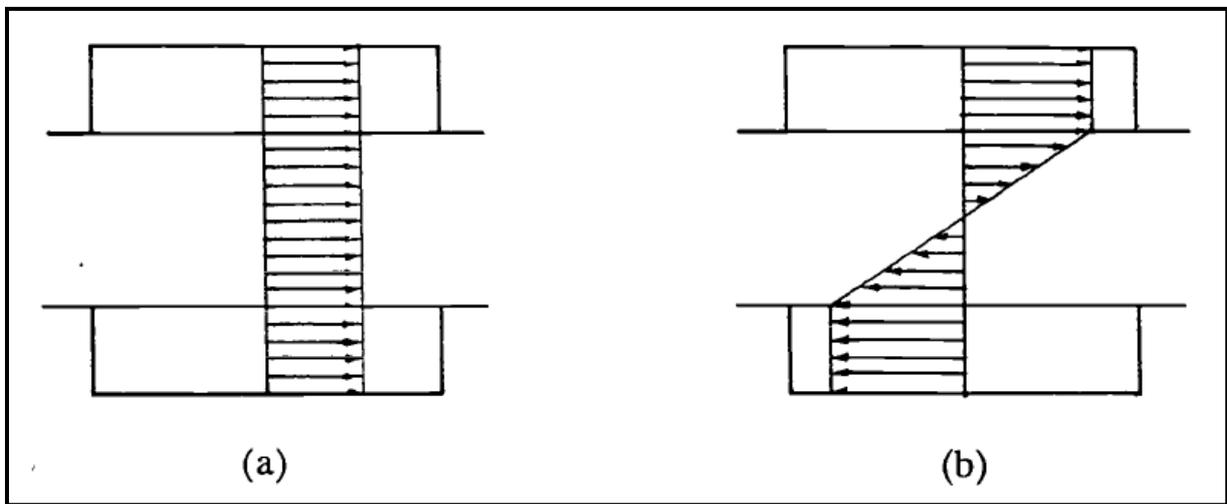


Figure II.2 Hypothèse des déformations

Pour le matériau piézo-électrique, la relation de contrainte-déformation est semblable à celle d'un matériau thermoélastique [6], le terme de dilatation thermique est remplacé par le terme de déformation piézo-électrique  $A$  et nous donne:

$$\sigma_c = E_c(\varepsilon_c - A) \quad \text{II.33}$$

Avec

$$A = \frac{d_{31}}{t_c} V$$

$V$  : Est la tension électrique appliquée sur le piézoélectrique et  $d_{31}$  est une constante piézoélectrique (module de piézoélectrique) reliant la tension appliquée et la déformation. Pour la structure et la colle, la loi de Hooke donne :

$$\sigma_B^S = E_B \varepsilon_B^S \quad \text{II.34}$$

$$\tau = G\gamma \quad \text{II.35}$$

$E$  ,  $G$  sont respectivement des modules d'élasticité et de cisaillement.

### A. Cas d'un collage non-parfait

Les équations II.28 – II.35 constituent un système de huit équations à huit inconnues : les contraintes et les déformations dans le piézoélectrique, dans la structure et la couche de colle ( $\sigma_C, \sigma_C^S, \tau, \varepsilon_C, \varepsilon_C^S, \gamma$ ) et les déplacements dans le piézoélectrique et dans la structure ( $U_C, U_C^S$ ). En introduisant l'équation II.30 les résultats dans l'équation II.31 et II.32 on obtient :

$$\frac{d\sigma_C}{dx} - \frac{G(U_C - U_C^S)}{t_C t_S} = 0 \quad \text{II.36}$$

$$\frac{d\sigma_C^S}{dx} + \frac{\alpha G(U_C - U_C^S)}{t_B t_S} = 0 \quad \text{II.39}$$

En dérivant ces deux dernières équations et en utilisant les équations II.28 et, II.29, II. 33, et II.34, on obtient :

$$E_C \left( \frac{d^2 \varepsilon_C}{dx^2} - A \right) - \frac{G}{t_C t_S} (\varepsilon_C - U_B^S) = 0 \quad \text{II.38}$$

$$E_B \left( \frac{d^2 \varepsilon_B^S}{dx^2} - A \right) - \frac{\alpha G}{t_B t_S} (\varepsilon_C - U_B^S) = 0 \quad \text{II.39}$$

Les équations II.38 et II.39 peuvent se réduire à deux équations différentielles découplées du quatrième-ordre :

$$\frac{d^4 \varepsilon_B^S}{d^4 \bar{x}} - r^4 \frac{d^2 \varepsilon_B^S}{d^2 \bar{x}} = 0 \quad \text{II.40}$$

$$\frac{d^4 \varepsilon_C}{d^4 \bar{x}} - r^4 \frac{d^2 \varepsilon_C}{d^2 \bar{x}} = 0 \quad \text{II.41}$$

Avec :

$$r^2 = \frac{\bar{\Gamma} \bar{\theta}_S}{\bar{t}_S} \left[ \frac{\psi + \alpha}{\psi} \right] \quad \text{II.42}$$

$$\psi = \frac{E_B t_B}{E_C E_C} = \bar{E} \theta_B \quad \text{II.43}$$

Ou  $\bar{x} = \frac{2x}{L}$ ,  $L$  est la longueur de piézoélectrique  $\bar{G} = \frac{G}{E_C}$  et  $\bar{t}_S = \frac{t_S}{L}$

Bien que les équations II.42 et II.43 apparaissent comme des équations découplées, leurs solutions sont couplées par des équations du seconde-ordre, II.38 la solution des équations II.42 et II.43 donne les distributions des déformations dans le piézoélectrique et dans la structure :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_C \\ \varepsilon_B^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} B_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} B_2 \bar{x} + \begin{bmatrix} \psi/\alpha \\ 1 \end{bmatrix} B_3 \sin \Gamma \bar{x} + \begin{bmatrix} -\psi/\alpha \\ 1 \end{bmatrix} B_4 \cos \Gamma \bar{x} \quad \text{II.44}$$

On doit imposer quatre conditions aux limites pour déterminer les quatre constantes  $B_1, B_2, B_3$  et  $B_4$ . il faut noter que la déformation du piézoélectrique  $A$  n'apparaît pas explicitement dans l'équation II.44, mais elle va apparaître dans la solution de l'équation par l'intermédiaire des conditions aux limites. Les états de contraintes nulles aux extrémités libres du piézoélectrique impliquent qu'à ces points  $\varepsilon_C$  est égale à la déformation du piézoélectrique  $A$  (équation II.33). Sous ces hypothèses, les conditions aux limites deviennent :

$$\text{Au point } \bar{x} = +1 : \quad \varepsilon_C = A \quad \varepsilon_B^S = \varepsilon_B^S +$$

Et au point :

$$\bar{x} = -1 : \quad \varepsilon_C = A \quad \varepsilon_B^S = \varepsilon_B^S -$$

$\varepsilon_B^S -$  et  $\varepsilon_B^S +$  sont les déformations de la structure au coté gauche (-) et de coté droite de l'élément piézoélectrique.

En injectant les conditions limites ci-dessus dans l'équation II.44, on obtient les quatre constantes  $B_1, B_2, B_3$ , et  $B_4$

$$B_1 = \frac{\psi}{\psi + \alpha} \left[ \frac{\varepsilon_B^S + + \varepsilon_B^S -}{2} + \frac{\alpha A}{\psi} \right] \quad \text{II.45a}$$

$$B_2 = \frac{\psi}{\psi + \alpha} \left[ \frac{\varepsilon_B^S + - \varepsilon_B^S -}{2} \right] \quad \text{II.45b}$$

$$B_3 = \frac{\alpha}{(\psi + \alpha) \sin \Gamma} \left[ \frac{\varepsilon_B^S + - \varepsilon_B^S -}{2} \right] \quad \text{II.45c}$$

$$B_4 = \frac{\psi}{(\psi + \alpha) \cos \Gamma} \left[ \frac{\varepsilon_B^S + + \varepsilon_B^S -}{2} - A \right] \quad \text{II.45d}$$

Pour faciliter l'intégration du modèle de couplage statique dans le modèle de couplage dynamique piézoélectrique / structure, il est nécessaire d'avoir l'expression des forces introduite par piézoélectrique sur la structure. Dans ce cas, la contrainte de cisaillement  $\tau$  se détermine en substituant les équations II.44 et II.45 dans les équations II.28 et II.29, pour obtenir les expressions de  $U_C'$  et  $U_B^S'$ . après l'intégration de ces dernière et la substitution dans l'équation II.30, le résultat est injecté dans l'équation II.35 pour obtenir :

$$\frac{\tau}{E_B} = \frac{\bar{G}}{\bar{t}_S E \Gamma} \left[ \frac{\varepsilon_B^S + - \varepsilon_B^S -}{2} \frac{\cos \Gamma \bar{x}}{\sin \Gamma} + \left\{ \frac{\varepsilon_B^S + - \varepsilon_B^S -}{2} - L \right\} \frac{\sin \Gamma \bar{x}}{\cos \Gamma} \right] \quad \text{II.46}$$

La déformation (équations II.44 et II.45) et la contrainte peuvent être considérées comme fonction des déformations de la structure aux extrémités du piézoélectrique  $\varepsilon_B^S +$  et  $\varepsilon_B^S -$  et la tension appliquée dans le piézoélectrique  $A = \frac{d_{31} V}{t_c}$ . les termes dépendants de  $\varepsilon_B^S +$  et  $\varepsilon_B^S -$  représentent de  $A$ . pour illustrer, on suppose que les déformations limites  $\varepsilon_B^S +$  et  $\varepsilon_B^S -$  sont nulles, et les équations II.44, et II.46, se réduisent à :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_C / A \\ \varepsilon_B^S / A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\alpha}{\psi + \alpha} - \begin{bmatrix} -\psi / \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\alpha \cos \Gamma \bar{x}}{(\psi + \alpha)} \quad \text{II.47}$$

$$\frac{\tau}{E_B} = \frac{-G}{t_S E_G} \left[ \frac{\sin \Gamma \bar{x}}{\cos \Gamma} \right] \quad \text{II.48}$$

L'équation (II. 47) est tracée en figure 4.3 pour plusieurs valeurs de  $\Gamma$  et pour  $\psi = 14.5$  et  $\alpha = 6$ , dans le cas typique d'un piézoélectrique du type céramique collé sur une poutre d'aluminium d'épaisseur égale à 10 fois l'épaisseur du piézoélectrique et excitée en flexion. Le paramètre non-dimensionnel  $\Gamma$  (équations II. 42) est un paramètre de décalage de cisaillement indiquant l'efficacité du transfert de cisaillement du piézoélectrique à la structure ou vice versa. Ce paramètre dépend principalement de la rigidité et de l'épaisseur de la couche de colle. L'augmentation du paramètre  $\Gamma$  (par une

augmentation du module de cisaillement  $G$  ou une diminution d'épaisseur de la couche de colle  $t_s$ ) signifie que le décalage de cisaillement devient moins important et que le cisaillement est efficacement transféré à travers une petite zone près de l'extrémité du piézoélectrique .

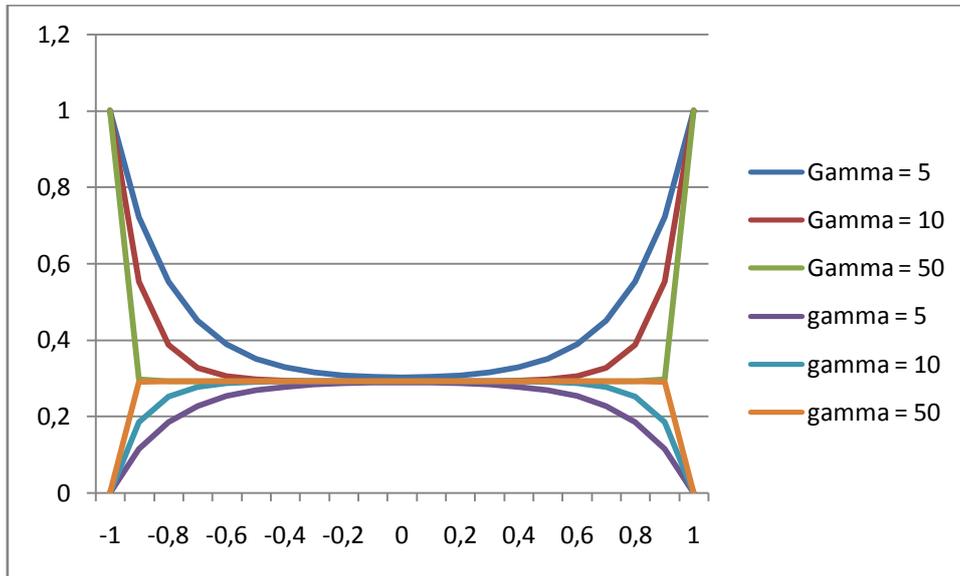


Figure II.3 Déformation du piézoélectrique et de la structure pour plusieurs valeur de  $\Gamma$

Le paramètre  $\psi$  défini en équation (II. 43) donne la fraction maximale de déformation du piézo-électrique transférée dans la structure. Pour une valeur de proche de zéro, la déformation induite dans la structure est égale à la déformation du piézo-électrique A équation II. 47. C'est le cas pour une structure d'épaisseur très mince par rapport à l'épaisseur du piézo-électrique et dont le module d'élasticité,  $E_B$  est proche du module d'élasticité du piézoélectrique  $E_c$  . A l'opposé, une grande valeur de  $\psi$ , qui correspond au cas d'un rapport d'épaisseur très grand ou à une structure de module d'élasticité très élevé, implique que la déformation induite dans la structure est petite. Ainsi, les paramètres souhaitables dans le couplage entre un actionneur du type piézo-électrique et la structure sont une grande valeur de  $\Gamma$  (ce qui nécessite une colle parfaite) et une petite valeur de  $\psi$  .

## B. Cas d'un collage parfait

Un matériau parfait est associé à une valeur de  $\Gamma$  infinie. Dans ce cas, il existe une concentration importante de la contrainte de cisaillement aux deux extrémités du piézoélectrique, indiquant que la déformation se transfère du piézoélectrique à la structure à travers une petite zone proche des extrémités de l'actionneur. Sous cette hypothèse idéale, les équations II.44 et II.45 deviennent :

$$\varepsilon_B = \varepsilon_C = \frac{\psi}{\psi + \alpha} \left[ \frac{\varepsilon_B^S + \varepsilon_B^S}{2} + \frac{\varepsilon_B^S - \varepsilon_B^S}{2} \bar{x} \right] + \frac{\alpha}{\psi + \alpha} A \quad \text{II.49}$$

La force de cisaillement totale est alors transférée effectivement aux points d'extrémités du piézoélectrique. Cette force, appliquée aux  $\bar{x} = \pm 1$ , et

$$\frac{F}{E_B t_B b} = \frac{\psi}{\psi + \alpha} \left[ \frac{\varepsilon_B^S + \varepsilon_B^S}{2} + \frac{\varepsilon_B^S - \varepsilon_B^S}{2} \bar{x} \right] - \frac{\alpha}{\psi + \alpha} A \quad \text{II.50}$$

Le moment produite par cette force est égal à

$$M_0 = F t_B \quad \text{II.51}$$

Les équations (II.49) - (II.51) associées à un couplage parfait entre le piézoélectrique et la structure peuvent être obtenues par l'un des deux moyens suivants : soit en déterminant la valeur limite de l'équation (II.44) lorsque  $r$  tend vers l'infini, ou en imposant l'égalité de la déformation dans le piézo-électrique et dans la structure (équations II. 28 et II. 29) et en résolvant les équations d'élasticité obtenues. Pour une valeur de  $\Gamma$  égale à 30 ou plus grande, l'énergie de déformation induite dans la structure par l'actionneur est égale à 95 pour cent de l'énergie de déformation induite dans le cas d'un couplage parfait. Par conséquent, pour une valeur de  $r$  plus grande que 30, le modèle de couplage parfait donnera des résultats suffisamment précis pour un modèle d'ingénierie. Pour cette raison, l'exemple traité dans cette étude, utilisera un modèle de couplage parfait. Dans le cas d'un matériau de colle moins rigide et/ou plus épais, on utilise la modélisation complète (équations II.44 et II.45).

On vient de voir précédemment l'analyse complète du couplage d'un actionneur du type piézo-électrique et d'une structure élastique pour des excitations en flexion et en

extension. Si les tensions électriques appliquées sur les actionneurs sont dans le sens indiqué sur la figure II.1, une extension sera induite dans la structure et  $\alpha = 2$ . Si l'une des tensions est inversée, la structure est fléchie et  $\alpha = 6$ . Pour une grande valeur de  $a$ , les piézo-électriques sont plus efficaces dans le cas de la flexion.

## II.4 Dynamique du couplage piézoélectrique / structure

Après avoir construit un modèle statique du couplage piézoélectrique/ structure, on peut maintenant l'intégrer dans l'analyse dynamique de la structure. En supposant que la masse du piézo-électrique est relativement petite par rapport à la masse totale du système et que les résonances des actionneurs sont hautes par rapport aux fréquences étudiées, on peut considérer que les actionneurs agissent de façon quasi-statique. On peut ainsi négliger les caractéristiques dynamiques de l'actionneur et utiliser le modèle de couplage statique actionneur/structure.

### A. Cas d'un collage non-parfait

Dans le cas d'un actionneur collé sur une poutre, la force généralisée est induite par la contrainte de cisaillement surfacique. La figure II.4 montre une poutre cantilever activée en flexion par une paire de piézoélectriques. La force induite par l'actionneur piézo-électrique apparaît dans l'équation du mouvement de la poutre sous la forme d'une force généralisée  $Q$

$$Q = \int_{(\bar{a}-\bar{n})}^{(\bar{a}+\bar{n})} [\tau b t_B Q'] d\bar{x} \quad \text{II.52}$$

$a$  est la coordonnée du centre de piézo-électrique,  $n$  la demi-longueur du piézoélectrique,  $b$  la largeur de l'actionneur et la déformé modale de la poutre. Dans l'équation (IV. 52), la seule inconnue est la contrainte de cisaillement  $r$  induite par le piézo-électrique donnée par l'équation (II. 46). Afin d'injecter  $\Gamma$  dans l'équation (II.52), on doit déterminer les conditions aux limites  $\varepsilon_B^S +$  et  $\varepsilon_B^S -$  (i.e., les déformations qui sont présentes dans la structure en l'absence d'actionneurs. Ces déformations sont causées par le mouvement modal et s'expriment en fonction des coordonnées généralisées  $u$ .

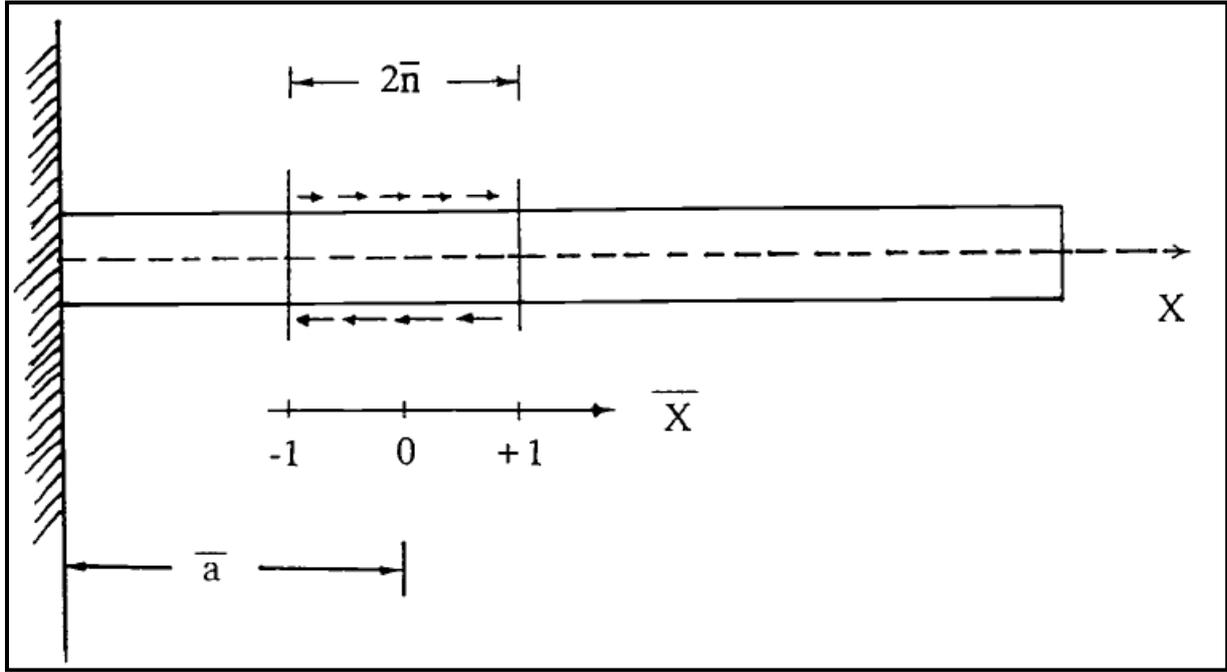


Figure II.4 Poutre console à des contraintes de cisaillement

$$\varepsilon_S^B = -\frac{t_B}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{t_B}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} u \quad \text{II.53}$$

$w(x, t)$  : Est le déplacement transversal de la poutre. En injectant les équations II.53 et II.46 dans les équations II.52 et après intégration, on obtient l'expression de la forces généralisée du mode correspondant :

$$Q = \frac{-Gbt_B}{4\bar{\varepsilon}_S GL_B} \left[ \frac{\Phi''(\bar{a}+\bar{n}) - \Phi''(\bar{a}-\bar{n})}{\sin \Gamma} I_C + \frac{\Phi''(\bar{a}+\bar{n}) - \Phi''(\bar{a}-\bar{n})}{\cos \Gamma} I_S \right] u \frac{Gbt_B}{\bar{\varepsilon}_S \Gamma} \left[ \frac{I_S}{\cos \Gamma} \right] \quad \text{II.54a}$$

$$Q = K_{PIEZO} u + Q_V A \quad \text{II.54b}$$

Ou

$$I_C = \int_{(\bar{a}-\bar{n})}^{(\bar{a}+\bar{n})} \cos \left[ \frac{2\Gamma}{L} (\bar{x} - \bar{a}) \right] \Phi'(\bar{x}) d\bar{x} \quad \text{II.55}$$

$$I_S = \int_{(\bar{a}-\bar{n})}^{(\bar{a}+\bar{n})} \sin \left[ \frac{2\Gamma}{L} (\bar{x} - \bar{a}) \right] \Phi'(\bar{x}) d\bar{x} \quad \text{II.56}$$

L'équation (IV. 54) exprime la force modale induite par le piézo-électrique en fonction du mouvement de la poutre et de la tension appliquée sur le piézoélectrique. Le premier terme est proportionnel à  $u$  et exprime la rigidité passive modale ajoutée,  $K_{PIEZO}$  due au piézo-électrique. Le deuxième terme dépend de la déformation du

piézoélectrique A, et il est proportionnel à la tension appliquée V. L'équation du mouvement du système poutre/piézoélectrique pour le modèle à un seul mode s'écrit alors

L'équation du mouvement du système poutre / piézoélectrique pour le modèle à un seul mode s'écrit alors :

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + (k + K_{PIEZO}) u = Q_V A = Q_V d_{31} V / t_C \quad \text{II.57}$$

m, c et k sont la masse modale, l'amortissement modal et la rigidité modale du système structure/piézo-électrique. Cette équation peut être utilisée pour déterminer la réponse dynamique de la structure.

### B. Cas d'un collage parfait

Dans le cas où l'épaisseur de la colle est faible ( $\Gamma > 30$ ), on peut utiliser le modèle de couplage statique parfait. L'expression de la force modale Q dépend de  $M_0$ , moment de flexion appliqué aux extrémités gauche et droite du piézoélectrique, et de la pente Q' en ces deux points,

$$Q = \left[ \left\{ \frac{M_0}{L_B} \Phi(x) \right\} \Big|_+ + \left\{ \frac{M_0}{L_B} \Phi(x) \right\} \Big|_- \right] \quad \text{II.58}$$

Il faut noter que pour un couplage parfait, la force généralisée est appliquée seulement aux extrémités du piézoélectrique.

En substituant l'équation (II. 51 dans l'équation II. 58) et en tenant compte des équations (IV. 50) et (IV. 53), on obtient l'expression de la force modale Q:

$$Q = \frac{E_B t_B^3 b}{2 t_B^3 (6 + \psi)} [\bar{\Phi}' (\bar{a} + \bar{n}) \bar{\Phi}' (\bar{a} + \bar{n}) - \bar{\Phi}' (\bar{a} - \bar{n}) \bar{\Phi}' (\bar{a} - \bar{n})] u - \frac{E_B t_B^3 b}{t_B^3 (6 + \psi)} [\bar{\Phi}' (\bar{a} + \bar{n}) + \bar{\Phi}' (\bar{a} - \bar{n})] A \quad \text{II.59a}$$

Avec

$$Q = K_{PIEZO} u + Q_V A \quad \text{II.59b}$$

On utilise l'équation (IV. 59) pour déterminer la tension à appliquer aux piézoélectriques pour générer la force de contrôle généralisée calculée précédemment dans le sous-chapitre II.2 (équation II. 27).

## II .5 Filtre modale

L'implantation de la méthode de contrôle nécessite la détermination des coordonnées modales. Pour extraire ces coordonnées à l'aide des mesures ponctuelles, nous utilisons la méthode du filtre modal.

En utilisant le théorème d'expansion, pour déterminer les coordonnées modales, on a la relation:

$$q_r(t) = \int [q(x, t) m(x) \Phi_r(x)] dx, \quad (r = 1, 2, 3, \dots, N) \quad \text{II.60}$$

$q_r(t)$  est coordonnée modale.

$q(x, t)$  est le déplacements à l'instant t au point x.

$m(x)$  est la masse de structure.

$\Phi_r(x)$  la déformée modale.

L'application de cette stratégie nécessite une infinité de points de mesure ce qui n'est pas envisageable. L'implantation du filtre modal à l'aide de mesures discrètes, nécessite de générer une approximation de la déformée par interpolation ou extrapolation des mesures effectuées. Cette approximation peut s'écrire sous la forme suivante:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^p q(x_j, t) G(x, x_j) \quad \text{II.61}$$

Où  $u(x, t)$  est la déformée approchée,  $x_j$  dénote la position de capteur ( $j = 1, 2, 3, \dots, p$ ) est  $p$  le nombre de capteurs et  $G(x, x_j)$  la fonction de l'interpolation ou d'extrapolation.

En introduisant l'équation (IV. 61) dans l'équation (IV. 60), on obtient l'expression pour les coordonnées modales approchées  $u_r(t)$  sous la forme:

$$u_r = \int [u(x, t) m(x) \Phi_x(x)] dx = \sum_{j=1}^p g_{rj} q(x, t) \quad (r = 1, 2, 3, \dots, N) \quad \text{II.62}$$

Ou :

$$g_{rj} = \int [G(x,t)m(x)\Phi_x(x)] dx, (j = 1,2,3, \dots p), (r = 1,2,3, \dots, N) \quad \text{II.63}$$

La précision du filtre modal dépend du nombre et de la position des capteurs et du type de la fonction d'interpolation ou d'extrapolation utilisée. En notant m le nombre de modes qu'on veut extraire (modes retenus), on effectue une partition du vecteur de coordonnées modales q(t) :

$$q(t) = \{q_1(t), q_2(t) \dots \dots \dots\}^T = \{q_M(t) | q_R(t)\}^T \quad \text{II.64}$$

Où q(t) est le vecteur des coordonnées modales correspondant aux modes retenus et q(t) celui correspondant aux modes résiduels. On introduit aussi le vecteur des coordonnées modales, u\_M(t) sous la forme:

$$u(t) = \{u_1(t), u_2(t) \dots \dots \dots u_M(t)\}^T \quad \text{II.65}$$

Et la mesure effectuée par le j-ième capteur :

$$y_j(t) = u(x_j, t) + b_j(t) \quad (j = 1,2,3, \dots \dots \dots p) \quad \text{II.66}$$

où b\_j(t) dénote le bruit de mesure. En tenant compte des équations II. 64, II. 65 et II. 66, on peut écrire la relation entre les modes retenus et les mesures discrètes effectuées, sous la forme:

$$u_M(t) = Gy(t) \quad \text{II.67}$$

Ou y(t) est le vecteur regroupant les p mesures effectués. Les composants de G sont g\_rj (r = 1,2,3, ... .. ., m ; j = 1,2,3 ... .. . p) , l'équation peut s'écrire sous la forme :

$$u_m(t) = GH_M q_M(t) + GH_R q_R(t) + Gb(t) \quad \text{II.68}$$

Ou :

$$H_M(i, j) = \Phi_j(X_i) \quad (i = 1,2,3 \dots \dots \dots p ; j = 1,2,3, \dots \dots \dots \dots m)$$

$$H_R = \Phi_{m+j}(X_i) \quad (i = 1,2,3 \dots \dots \dots p ; j = 1,2,3, \dots \dots \dots \dots m)$$

L'objectif de la conception du filtre modal est de déterminer le nombre et la position des capteurs et la fonction de l'interpolation, pour que la matrice  $GH_m$  soit proche de la matrice identité, et la matrice  $GH_R$  soit proche de la matrice nulle.

Pour déterminer le nombre minimum nécessaire de capteurs, on constate, à partir des équations précédentes, que la matrice  $G$  est d'ordre  $(m \times p)$  et la matrice  $H_m$  est d'ordre  $(p \times m)$ . Pour que la matrice  $GH_m$  soit proche de la matrice identité d'ordre  $(m \times m)$ , la matrice  $GH_m$  doit avoir le rang  $m$ . On peut obtenir la matrice  $GH_m$  de rang  $m$  si les deux matrices  $G$  et  $H_M$  sont de rang  $m$ , ce qui implique que  $p > m$ . L'interprétation physique de cette remarque est que le nombre de capteurs doit être au moins égal au nombre de modes qu'on veut extraire. Il faut noter que ce nombre minimum nécessaire ne garantit pas la précision du filtre modal. Dans le cas où on considère le filtre modal du type Rayleigh-Ritz, le profil approché de la déformée peut s'écrire sous la forme Dans le cas ou on considère le filtre modale du type Rayleigh Ritz, le profil approché de la déformée peut s'écrire sous la forme [15] :

$$u(t) = \sum_{r=1}^p \varphi_r(X) \eta_r(t) \quad \text{II.69}$$

Ou :

$\varphi_r(X)$  : est une fonction cinématiquement admissible.

Pour déterminer l'amplitude de  $\eta_r(t)$ , on exprime le vecteur des mesures sous la forme :

$$y(t) = D\eta(t) \quad \text{II.70}$$

Ou  $D_{ij} = \varphi_{rj}(X_i)$  ( $i = 1,2,3 \dots \dots p ; j = 1,2,3, \dots \dots \dots m$ ) et

$$\eta(t) = \{\eta_1, \quad \eta_2 \dots \dots\}^T$$

Si on prendre le nombre de modes retenus égal au nombre de capteurs,  $p = m$ , les coordonnées modales peuvent être obtenues par l'inversion de la matrice constituée des  $m$  premières colonnes de la matrice  $D$ , notée  $D_M$ , ce qui donne ;

$$\eta_M(t) = D_M^{-1}y(t) \quad \text{II.71}$$

Ou :

$\eta_M(t)$  est un vecteur constitué des  $m$  premières composantes de  $\eta(t)$  . En injectant l'expression dans l'équation , le profil approché de la déformée s'écrit :

$$u(x, t) = \sum_{s=1}^p \varphi_s(x) \sum_{j=1}^p [D_M^{-1}]_{sj} y_j(t) \quad \text{II.72}$$

Les composantes de la matrice de gain du filtre modal,  $G_{rj}$  s'écrivent alors :

$$G_{rj} = \sum_{s=1}^p [D_M^{-1}]_{sj} \int [m(x) \Phi_r(x) \varphi_s(x)] dx \quad \text{II.73}$$

Dans le cas ou on prend la déformée modal comme fonction cinématiquement admissible, la matrice  $D_M$  s'identifie à la matrice  $H_M$  , et le vecteur  $\eta_M(t)$  , ce qui donne :

$$u_M(t) = H_M^{-1} y(t) \quad \text{II.74}$$

L'expression II.74, peut être comme filtre modal le plus simple.

## Chapitre III : Modélisation par la méthode des éléments finis

### III.1 : Détermination des fréquences propres d'une poutre

#### III.1.1 Poutre encastree - libre en flexion

Avant l'analyse des modes tentées, en utilisant le code ANSYS, une solution analytique pour des fréquences de résonance sera obtenue pour confirmer la validité de la solution ANSYS. La solution analytique de fréquences de résonance pour une poutre Bernoulli (figure III.1) dans le sens  $y$  est proposée par [6]:

$$f_i = \frac{\lambda_i}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{M}} \quad \text{III.1}$$

La longueur de la poutre en porte à faux,  $L = 0.09$  m, section transversale de la poutre,  $A = 5 * 10^{-5} \text{m}^2$ .

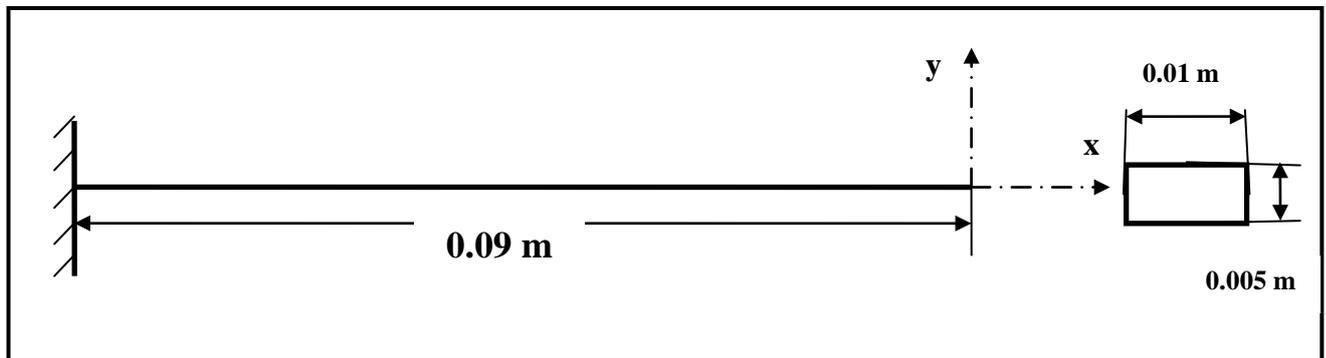


Figure III.1 Poutre encastree - libre (Bernoulli)

### III.1.1.1 poutre d'aluminium :

Matériau	Constante	Notation	Valeur
Aluminium	Module d'Young ( $\text{GNm}^{-2}$ )	$E$	69
	Coefficients de Poisson	$\nu$	0.3
	Masse volumique ( $\text{Kgm}^{-3}$ )	$\rho$	2700

Tableau III.1 : Propriétés des matériaux de la poutre en aluminium

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0.01 * 0.005)}{12} = 1.042 * 10^{-10} \text{m}^4$$

Masse par unité de largeur

$$M = \frac{\rho AL}{L} = \rho A = 2.7 * 10^3 * 5 * 10^{-5} = 0.135 \text{kg/m}$$

$$\lambda_i = \frac{2i-1}{2} \pi \quad \lambda_1 = 1.875 \quad \lambda_2 = 4.694 \quad \lambda_3 = 7.855$$

Pour cet ensemble de données, les solutions suivantes sont obtenues :

$$f_1 = 504.01 \text{Hz} , f_2 = 3150.4 \text{Hz} \text{ et } f_3 = 8770.25 \text{Hz}$$

La validation par ANSYS (figure III.2) récapitulée dans les tableaux :

Fréquence propres $\text{Hz}$	Mode 1	Mode 2	Mode 3
analytique	504.01	3150.4	8770.25
ANSYS	503.87	3146.5	8760.4

Tableau III.2 : fréquences propres des trois modes analytique et validées par ANSYS

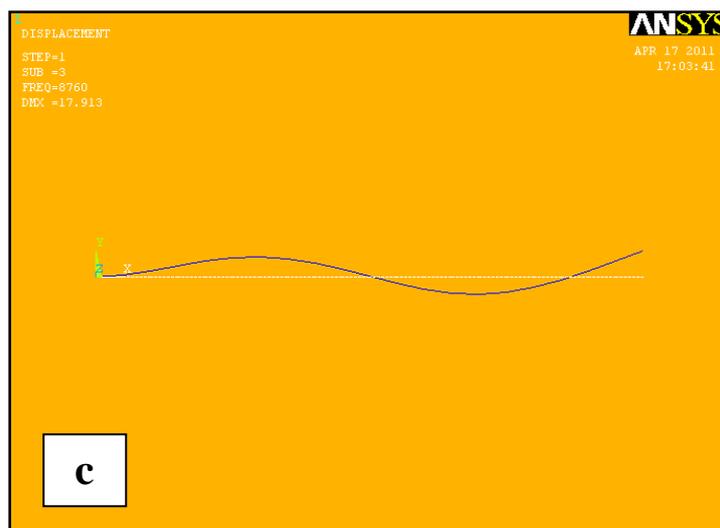
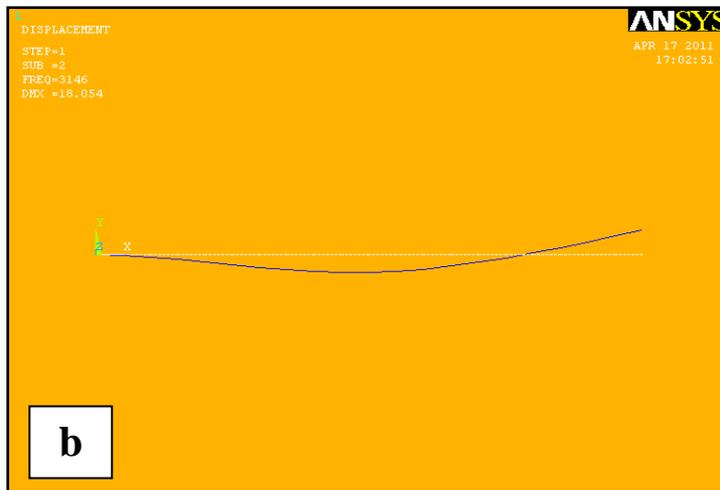
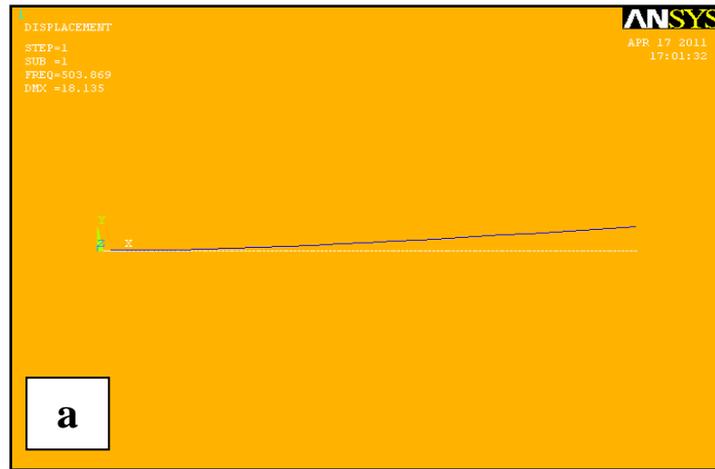


Figure III.2 : Trois modes de vibration de la poutre en aluminium

### III.1.1.2. Poutre d'encastrement libre avec deux actionneurs collés symétriquement par rapport l'axe horizontale de la poutre pour trois locations

La poutre étudiée indiquée dans la figure III.3, est de longueur 0.1m, largeur 0.01m et l'épaisseur de 0.1, 0.01, 0.005 m, Chaque actionneurs PZT, a une longueur, largeur et épaisseur égale à 0.02, 0.0025 et 0.0004 m, respectivement.

La poutre est accouplée à 20 éléments, lorsque les actionneurs sont maillés en 4 éléments pour chacun. La poutre est considérée comme ayant trois degrés de liberté, deux de translation et une rotation, la PZT est à trois degrés de libertés deux de translation et un de volts. Le système a un total de 80 ddl mécanique, et 10 ddl électriques. La figure III.4 montre le modèle dans elle est en prise, les éléments de poutre sont de 5 mm pour chacun, où les éléments de PZT sont 2.5 mm carrés. Notons que, à la frontière avec des éléments du PZT du faisceau, sont en prise avec une taille de 2,5 mm de chaque (figure III.4).

Avec ANSYS, la poutre est modélisée avec un élément de poutre élastique 2D (BEAM3), et chaque actionneur PZT est modélisé par l'élément de champ couplé 2D (PLANE13). Les propriétés des matériaux sont énumérées dans le tableau III.3

Dans le modèle ANSYS, une force  $F$  étape unité est appliquée dans le sens positif vertical à l'extrémité de la poutre de valeur 100 N (figure III.4).

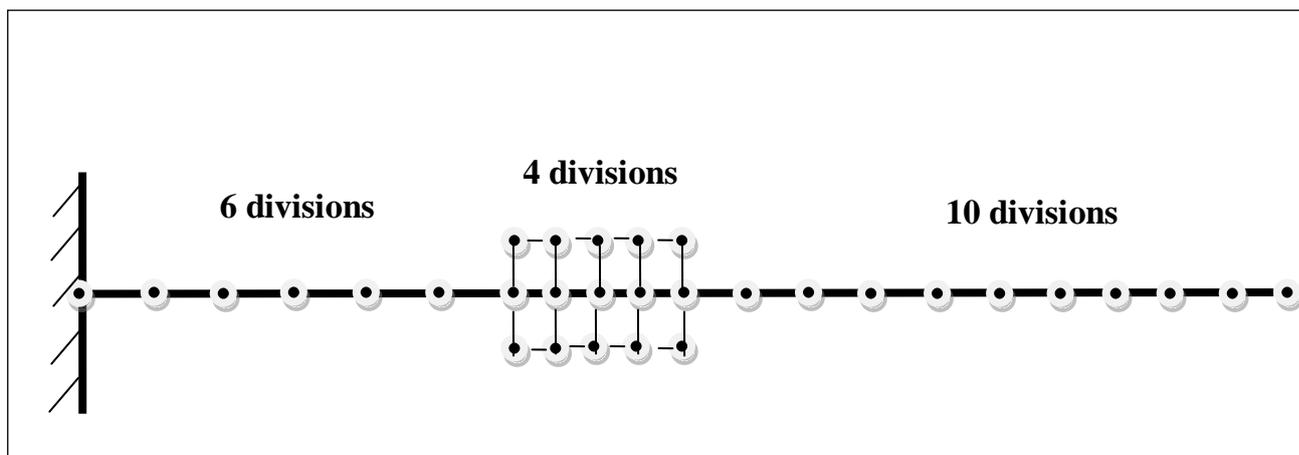


Figure III.3 : Maillage de la poutre (Beam3) et des pastilles planes PZT (Plane13) pour la première location

Matériaux	Constantes	Notations	Valeurs
<b>PZT PIC 255 (A1)</b>	Permittivité à déformation ( $nFm^{-1}$ )	$\varepsilon_{11}^s = \varepsilon_{22}^s$	8.245
		$\varepsilon_{33}^s$	7.122
	Coefficients de couplage piézoélectrique ( $Cm^{-1}$ )	$e_{31} = e_{32}$	-7.25
		$e_{33}$	14.41
		$e_{15} = e_{24}$	11.57
	Module d'Young ( $GNm^{-2}$ )	$E_1 = E_2$	62.1
		$E_3$	48.3
	Coefficients de Poisson	$\nu_{12}$	0.32
		$\nu_{13} = \nu_{23}$	0.44
	Module de cisaillement ( $GNm^{-2}$ )	$G_{12}$	23.5
		$G_{13} = G_{23}$	21
	Masse volumique ( $Kgm^{-3}$ )	$\rho$	7800
<b>Aluminium</b>	Module d'Young ( $GNm^{-2}$ )	$E$	69
	Coefficients de Poisson	$\nu$	0.3
	Masse volumique ( $Kgm^{-3}$ )	$\rho$	2700

Tableau III.3 : Propriétés des matériaux de la poutre et des pastilles [7]

### A. Passive :

- **1 ère localisation** : les deux pastilles sont collées à 3 cm d'encastrement de la poutre

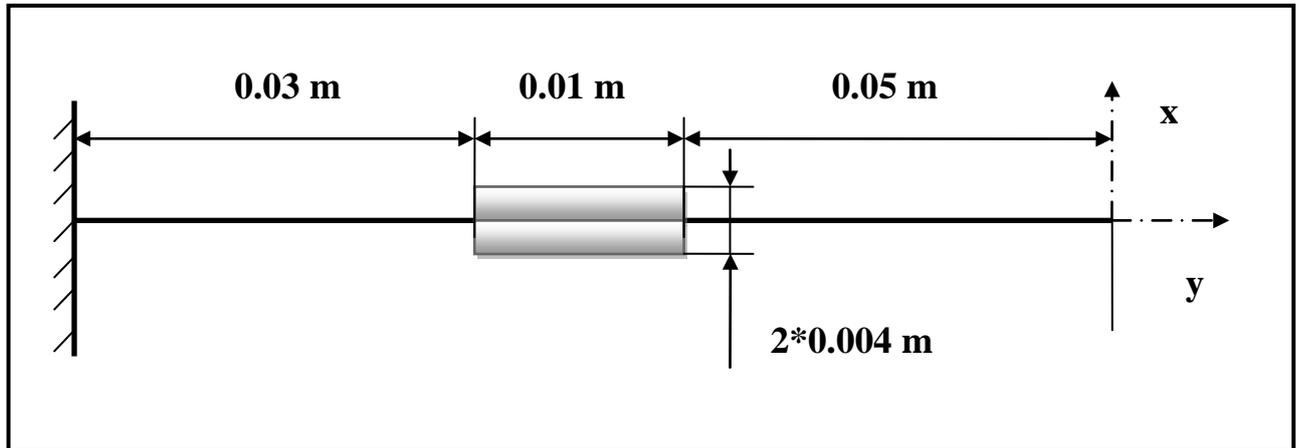


Figure III.4 : La géométrie d'une poutre couplée par deux pastille PZT ( 1ere location )

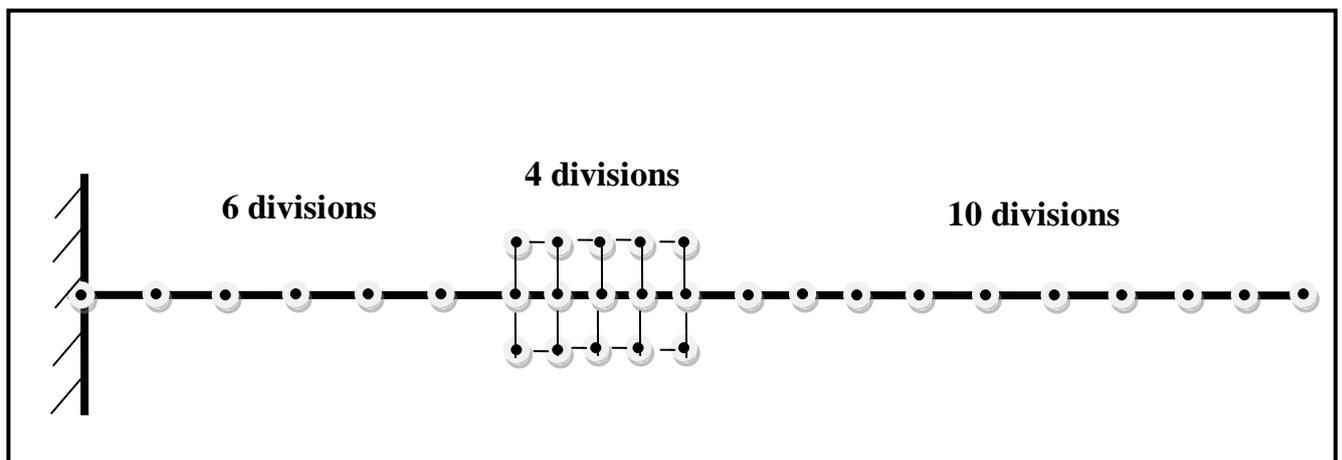


Figure III.5 : Maillage de la poutre (Beam3) et des pastilles planes PZT (Plane13) pour la première location

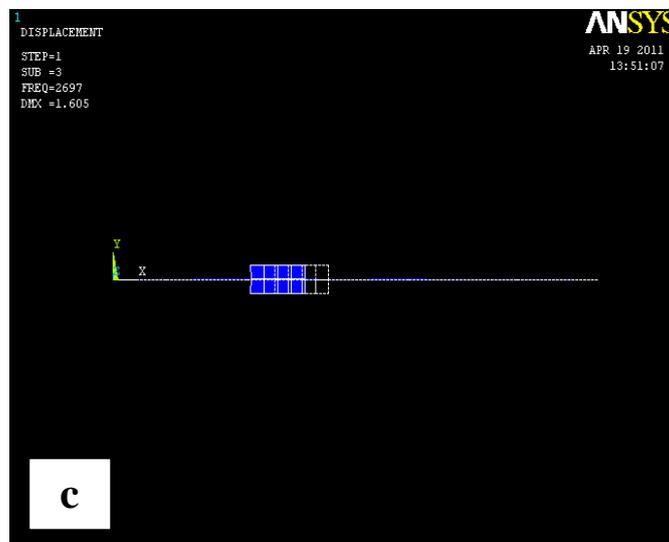
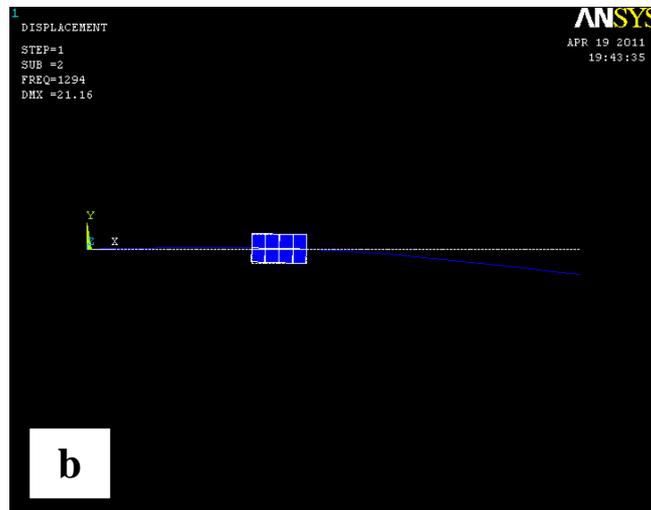
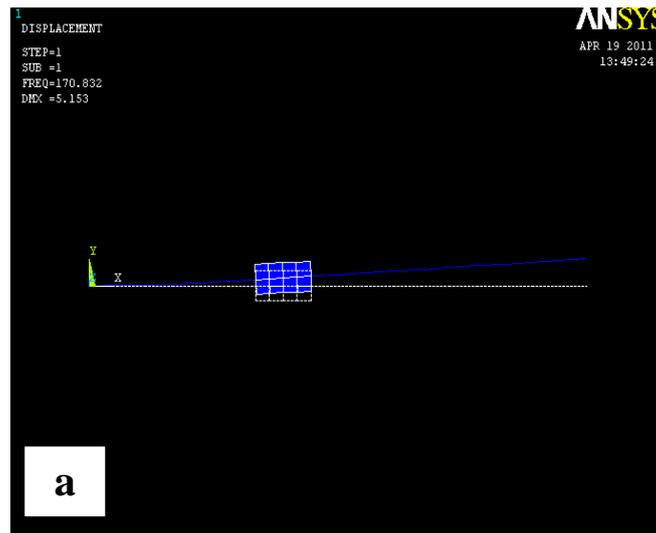


Figure III.6 : Trois modes de vibration de la poutre couplée 1ere location

- **2<sup>eme</sup> localisation:** les deux pastilles sont collées à 4 cm d'encastrement de la poutre

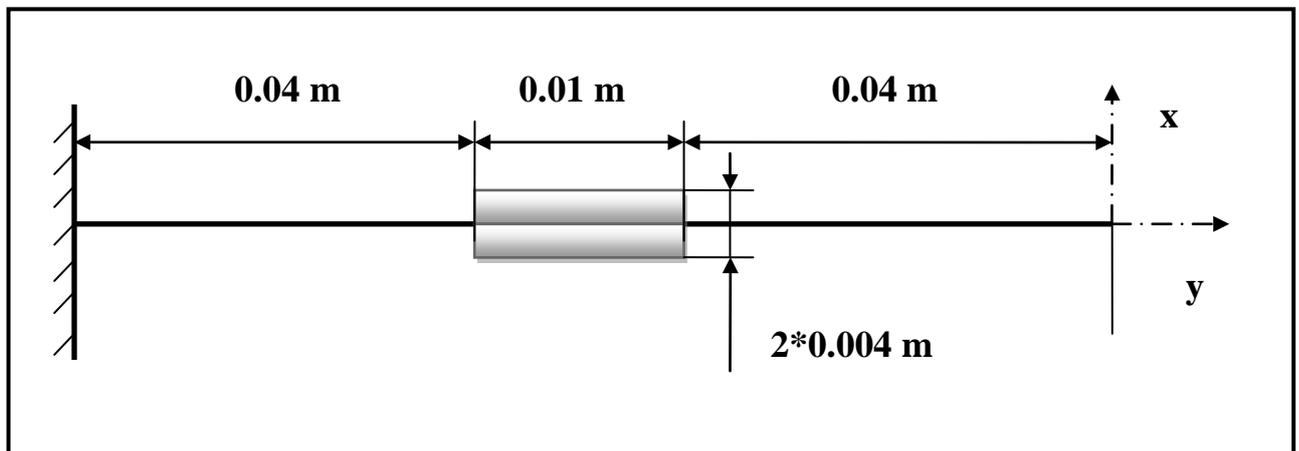


Figure III.7 : La géométrie d'une poutre couplée par deux pastille PZT (2eme location )

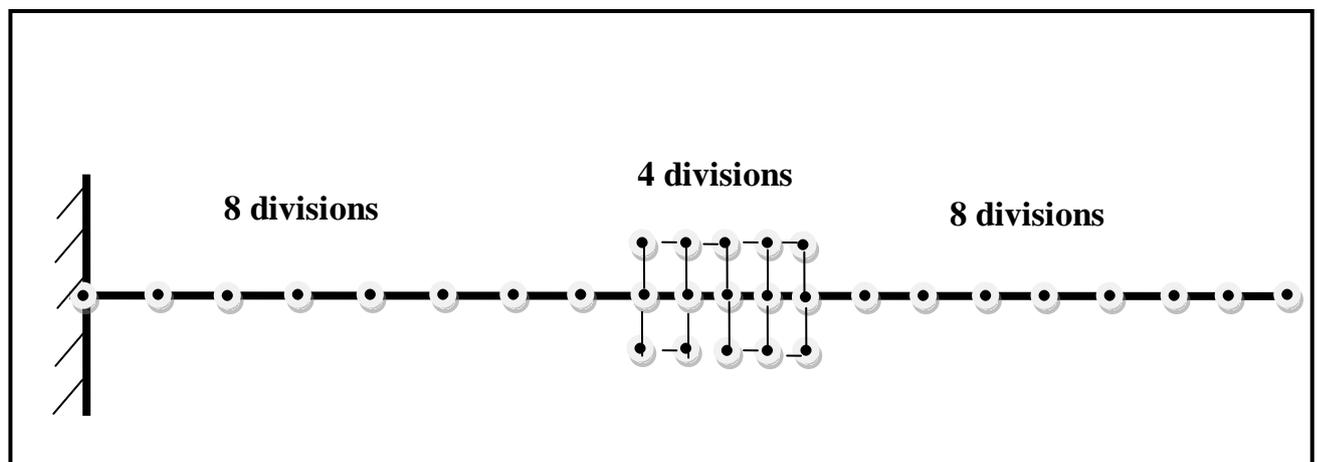


Figure III.8 : Maillage de la poutre (Beam3) et des pastilles planes PZT (Plane13) pour la deuxième location

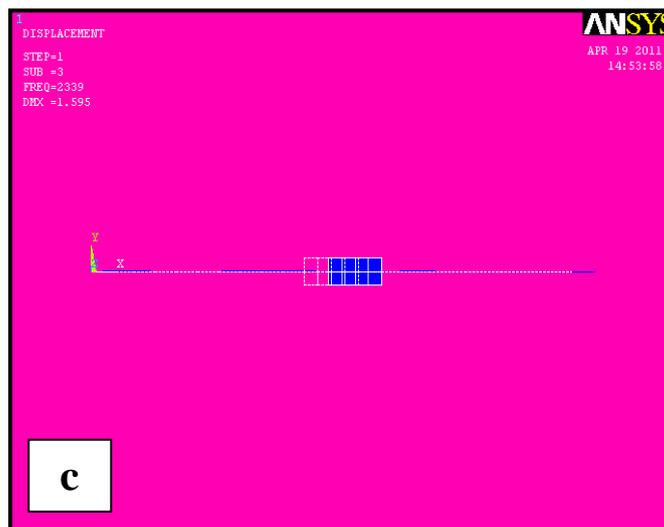
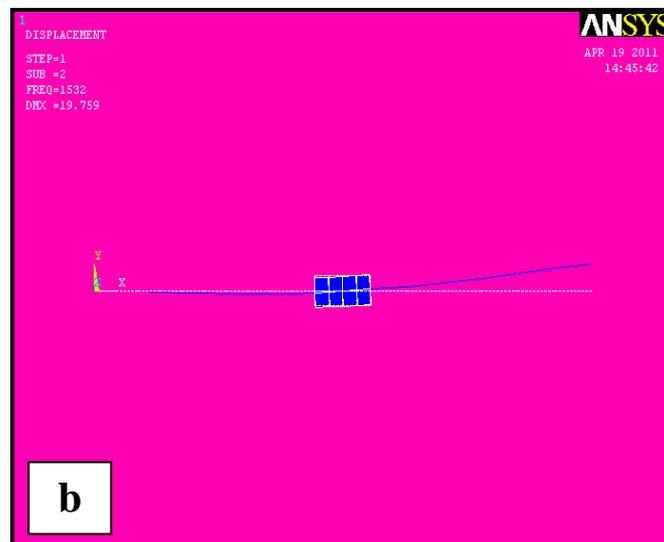
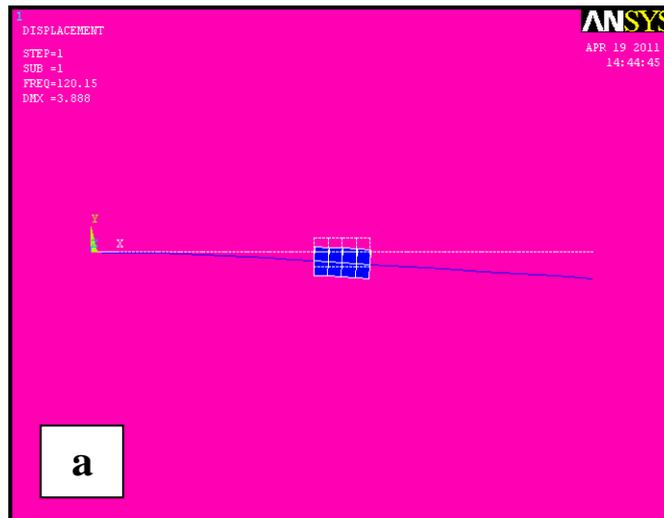


Figure III.9 : Trois modes de vibration de la poutre couplée 2 eme location

- **3eme localisation:** les deux pastilles sont collées à 5 cm d'encastrement de la poutre

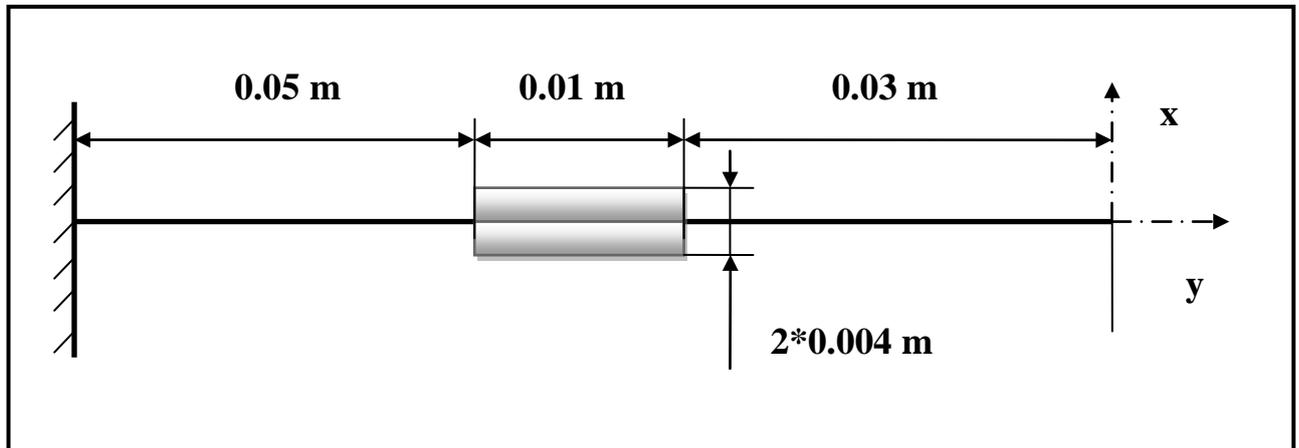


Figure III.10 : La géométrie d'une poutre couplée par deux pastille PZT( 3eme location)

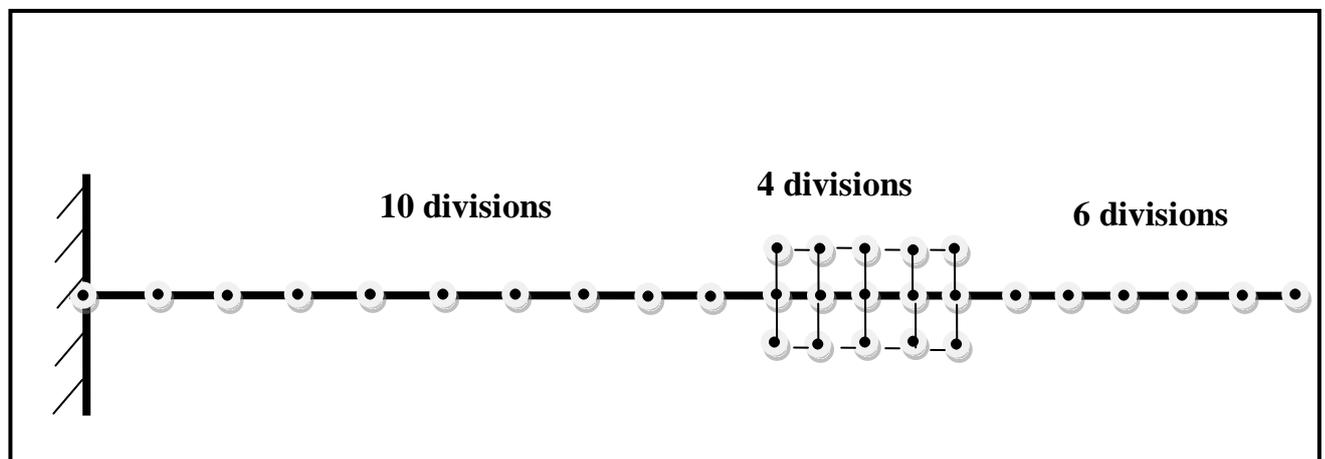


Figure III.11 : Maillage de la poutre (Beam3) et des pastilles planes PZT (Plane13) pour la troisième localisation

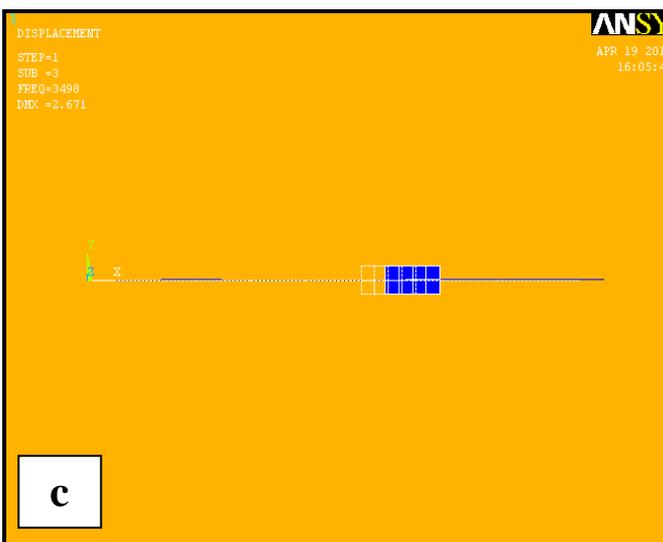
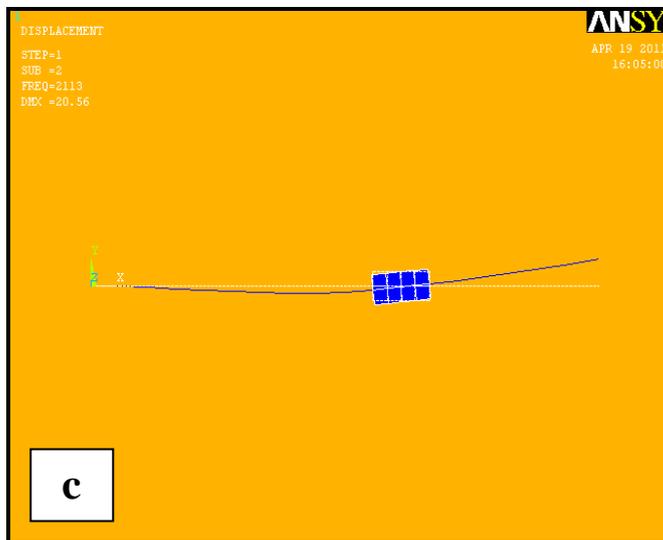
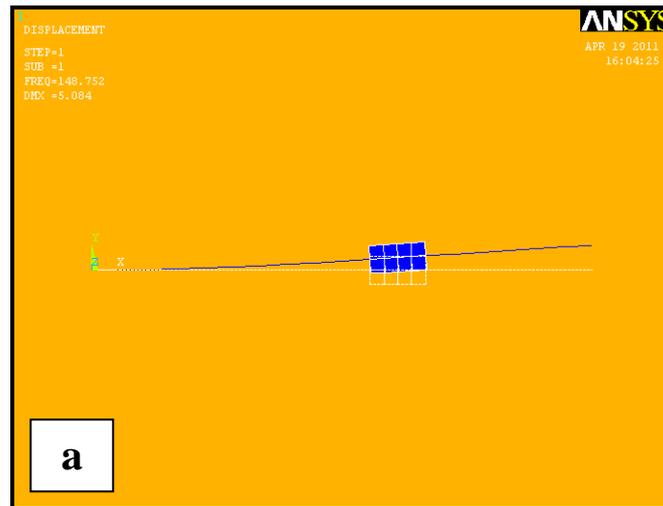


Figure III.12 : Trois modes de vibration de la poutre couplée 3 eme localisation

## B. Active :

Les tensions sont appliquées au niveau des nœuds 2 et 4 pour l'actionneur supérieur, et 7,9 pour l'actionneur inférieur de valeur 100 volts pour chaque localisations (figure III.13) dans la structure couplée et étudiée précédemment dans les mêmes conditions.

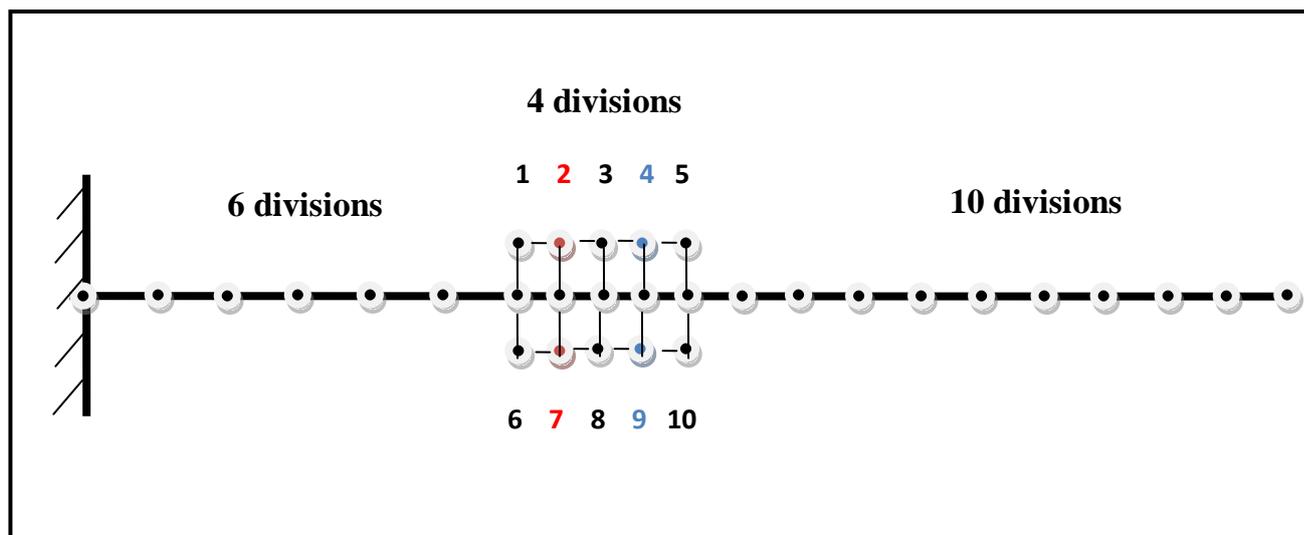


Figure III.13 : Application de la tension électrique au niveau des nœuds 2,4 et 7,9 dans la première location par exemple.

- **1 ere localisation:** les deux pastilles sont collées a 3 cm d'encastrement de la poutre

```

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****
SET TIME/FREQ  LOAD STEP  SUBSTEP  CUMULATIVE
1 98.05        1         1        1
2 877.16       1         2        1
3 1164.73      1         3        1

```

Tableau III.4 Trois modes de vibration de la poutre 1 ere location

- **2 eme localisation:** les deux pastilles sont collées à 4 cm d'encastrement de la poutre

```

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****

SET TIME/FREQ  LOAD STEP  SUBSTEP  CUMULATIVE
1 76.41        1      1      1
2 781.45       1      2      1
3 1789.97      1      3      1
    
```

Tableau III.5 Trois modes de vibration de la poutre 2 eme location

- **3 eme localisation:** les deux pastilles sont collées à 5 cm d’encastrement de la poutre

```

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****

SET TIME/FREQ  LOAD STEP  SUBSTEP  CUMULATIVE
1 69.01         1      1      1
2 1000.21       1      2      1
3 2145.44       1      3      1
    
```

Tableau III.5 Trois modes de vibration de la poutre 2 eme location

		Poutre en Aluminium (Ansys)	Poutre en aluminium avec les deux pastilles PZT PIC 255					
			Passive			Active		
			Localisation à 3 cm	Localisation à 4 cm	Localisation à 5 cm	Localisation à 3 cm	Localisation à 4 cm	Localisation à 5 cm
fréquence $f_i$ (Hz)	Mode 1	503.87	170.832	120.15	148.752	98.05	76.41	69.01
	Mode 2	3150.4	1294	1532	2113	877.16	781.45	1000.21
	Mode 3	8770.25	2697	2339	3498	1164.73	1789.97	2145.44

Tableau III.6: Tableau récapitulatif, les fréquences dans le cas actif sont diminuent par rapport le cas passif

D’après le tableau récapitulatif la localisation à 5 cm la plus efficace et rentable dans les deux cas (actif et passif) car elle est marque les plus faibles fréquences.

### III.1.2 Poutre appui simple - appui simple en flexion :



Figure III.14 Poutre appui simple - appui simple (Timoshenko)

Les résultats obtenus par ANSYS :

a- Sans piézo

```

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****
SET TIME/FREQ  LOAD STEP  SUBSTEP  CUMULATIVE
1 1413.4       1      1      1
2 5632.4       1      2      1
3 12594.       1      3      1

```

Tableau III.7 Trois modes de vibration de la poutre sans piézo

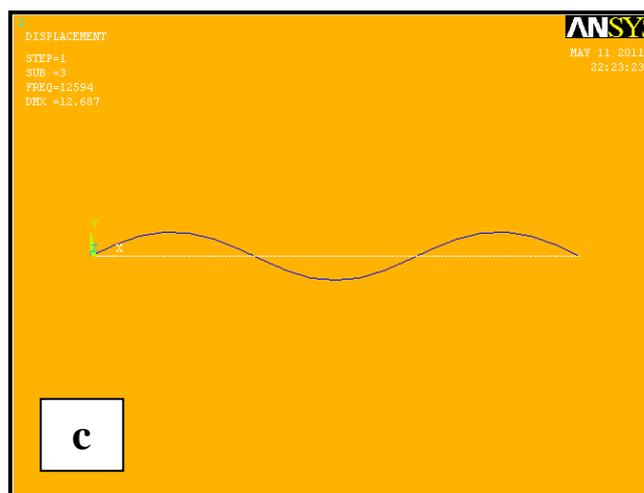
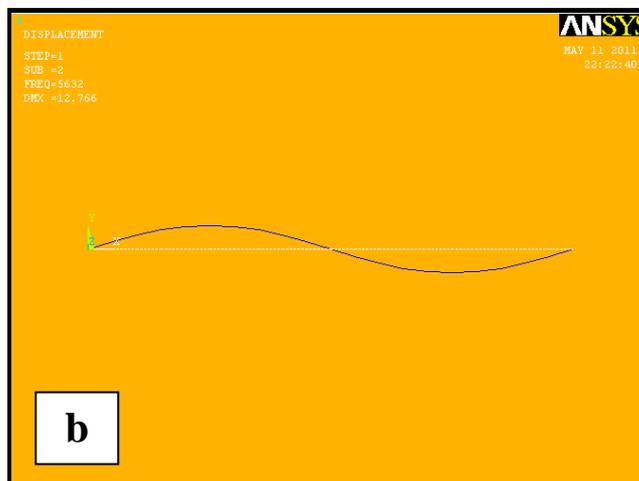
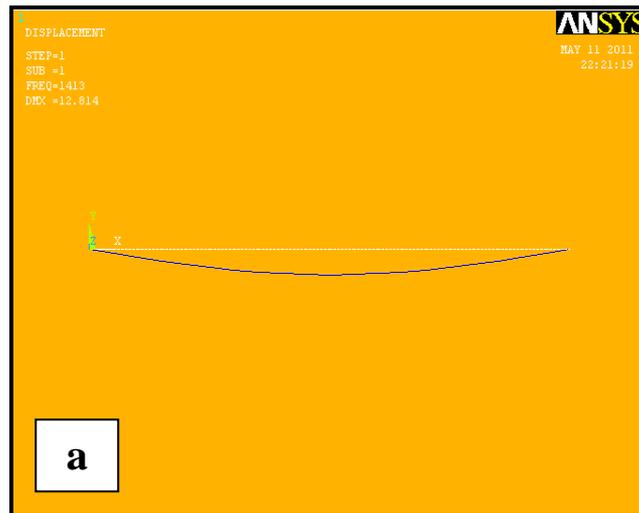


Figure III.15 : Trois modes de vibration de la poutre

**B- Avec piézo**

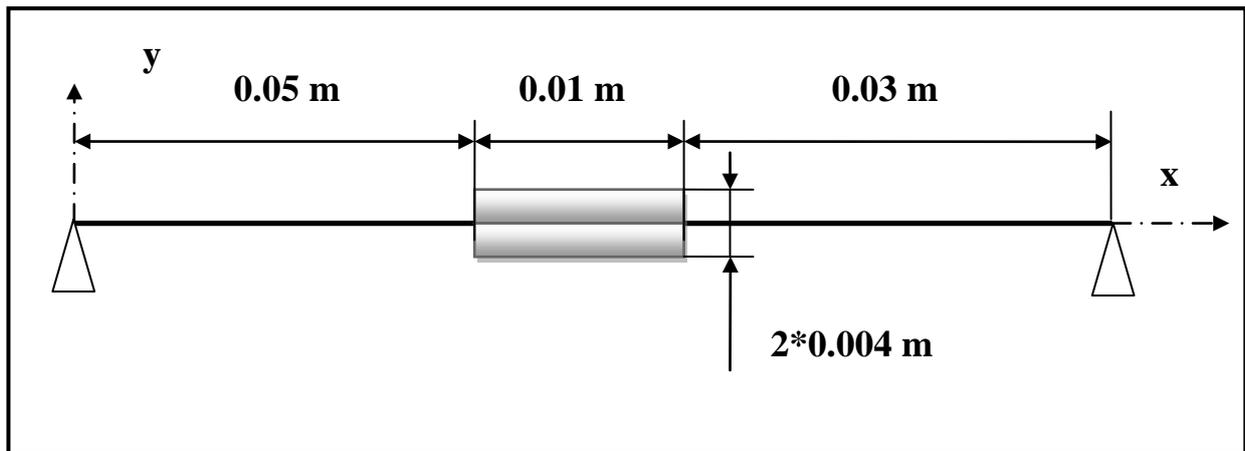


Figure III.16 : La géométrie d'une poutre couplée par deux pastille PZT

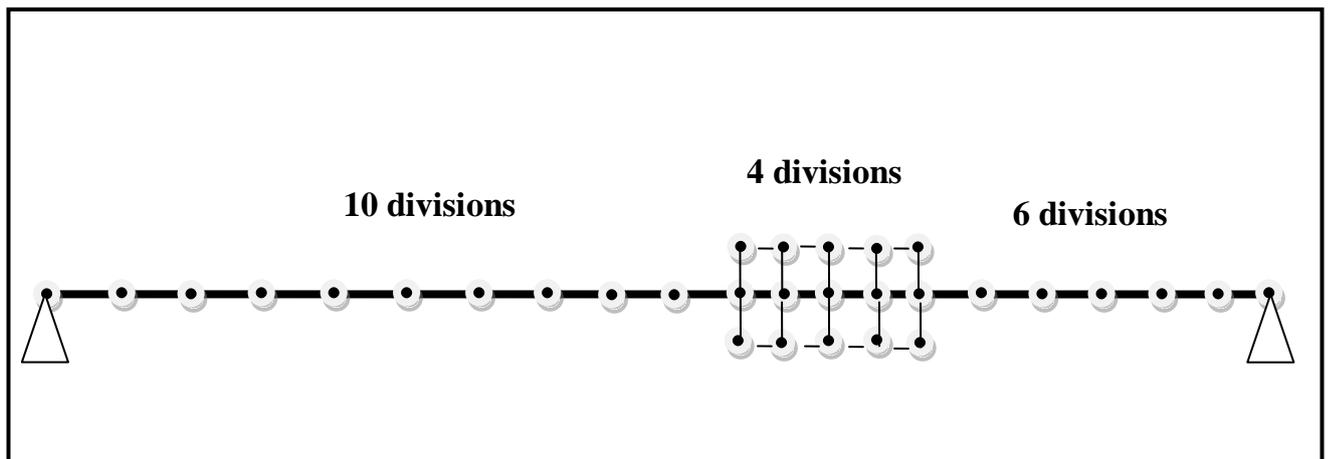


Figure III.17 : Maillage de la poutre (Beam3) et des pastilles planes PZT (Plane13)

```

***** INDEX OF DATA SETS ON RESULTS FILE *****
SET TIME/FREQ LOAD STEP SUBSTEP CUMULATIVE
1 811.24 1 1 1
2 3028.2 1 2 2
3 7120.7 1 3 3
    
```

Tableau III.8 Trois modes de vibration de la poutre avec piézo

## III.2 Réponses des structures

### III.2.1 : Poutre encastrée – libre

#### III.2.1.1 : La réponse forcée en fonction de la longueur de la poutre

On donne la réponse en fonction de la longueur de la poutre (fig III.15) par la relation suivante :

$$\phi(x) = C \sin \beta x + D \cos \beta x + E \operatorname{sh} \beta x + F \operatorname{cosh} \beta x \quad \text{III.2}$$

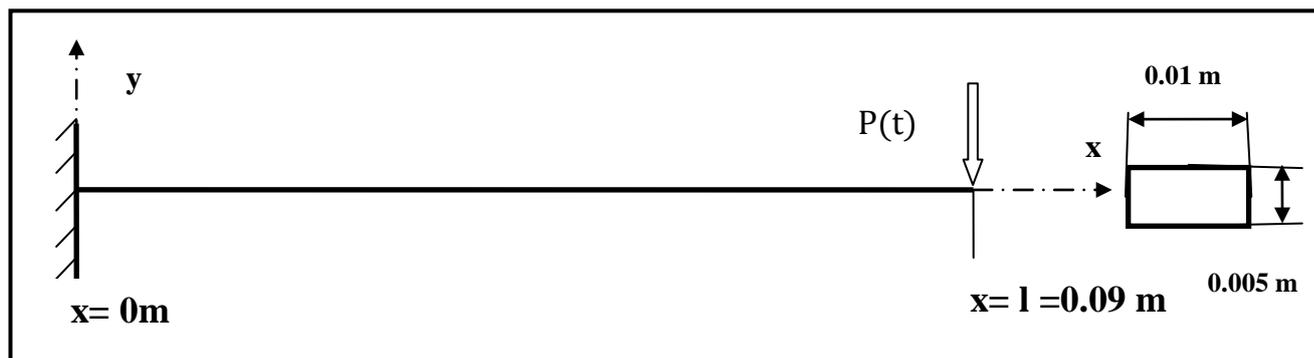


Figure III.18 : La poutre encastrée – libre étudiée

On donne les solutions du système III.3 d'après la théorie de vibration des poutres (encastrement – libre) figure III.15

$$F + D = 0$$

$$C + E = 0$$

$$-C \sin \beta l + F \cosh \beta l + D \cos \beta l + E \sinh \beta l = 0$$

$$-C \cos \beta l + F \sinh \beta l + D \sin \beta l + E \cosh \beta l = 0 \quad \text{III.3}$$

On a :  $C = \gamma$ ,  $D = -1$ ,  $E = -\gamma$ ,  $F = 1$

Avec :

$$\gamma = \frac{\sin \beta_i l + \sinh \beta_i l}{\cos \beta_i l + \cosh \beta_i l}$$

$$\beta_1 l = 1.875 \quad ; \quad \beta_2 l = 4.694 \quad ; \quad \beta_3 l = 7.855$$

$$\text{Et } \gamma_1 = 1.04 \quad ; \quad \gamma_2 = 0.1 \quad ; \quad \gamma_3 = 1$$

$$\beta_i = \sqrt[4]{\frac{\rho s \omega_i^2}{EI}}, \quad \text{IV.4} \quad \omega_i = \frac{2\pi}{f_i} \quad (\omega_i \text{ Impulsions propres}) \quad \text{III.5}$$

$$\beta_i = \sqrt[4]{\frac{2700.5.10^{-5} \omega_i^2}{69.10^9.1.042.10^{-10}}} \Leftrightarrow \beta_i = 0.37 \sqrt{\omega_i} \quad \text{III.6}$$

Dans cette étude, nous abordons le premier cas (location 1) afin de tracer les courbes des grandeurs des angles de la pente en fonction de la longueur

- **a : Mode 1**

Mode 1	Passif		Actif	
	$f_i$	$\beta_i$	$f_i$	$\beta_i$
	170.832	12,119	98.050	9,198

Le déplacement  $\phi(x)$  donné par la relation suivante en état passif (III. 3) :

$$\phi_{\text{passif}}(x) = 1.04 \sin 12,119x - \cos 12,119x - 1.04 \operatorname{sh} 12,119x + \operatorname{cosh} 12,119x \quad \text{(III. 7)}$$

Et en état actif avec la relation au dessus (III.4)

$$\phi_{\text{actif}}(x) = 1.04 \sin 9,198x - \cos 9,198x - \operatorname{sh} 9,198x + \operatorname{cosh} 9,198x \quad \text{(III. 8)}$$

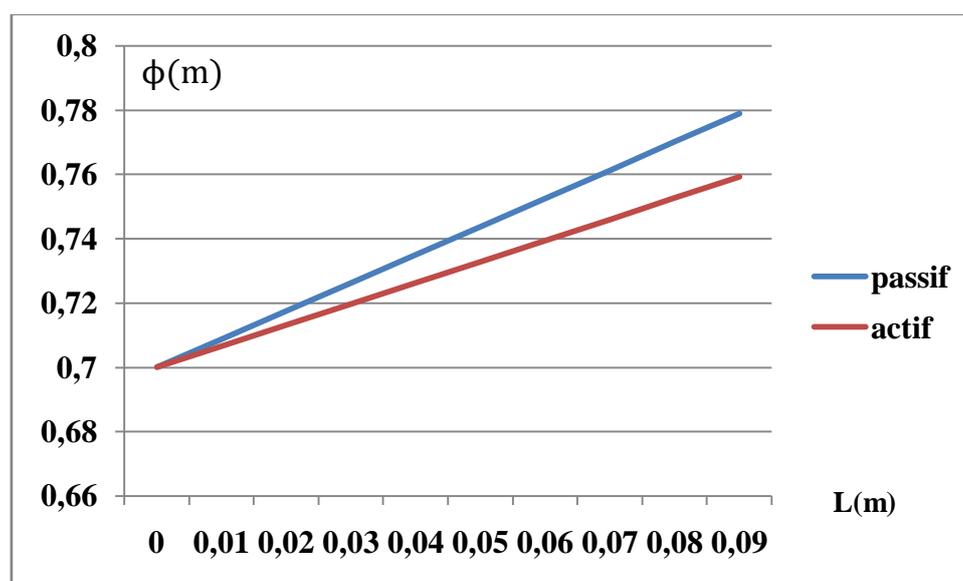


Figure III.19 : Le mode en fonction de la longueur (mode 1)

• **b : Mode 2**

	Passif		Actif	
Mode 2	$f_i$	$\beta_i$	$f_i$	$\beta_i$
	1294	8126,32	877.16	16937,16

$$\phi_{\text{passif}}(x) = 0.1\sin 33.541x - \cos 33.541x + 0.1 \operatorname{sh} 33.541x + \operatorname{cosh} 33.541x \quad (\text{III. 9})$$

$$\phi_{\text{actif}}(x) = 0.1\sin 27.461x - \cos 27.461x + 0.1 \operatorname{sh} 16937,16x + \operatorname{cosh} 27.461x \quad (\text{III. 10})$$

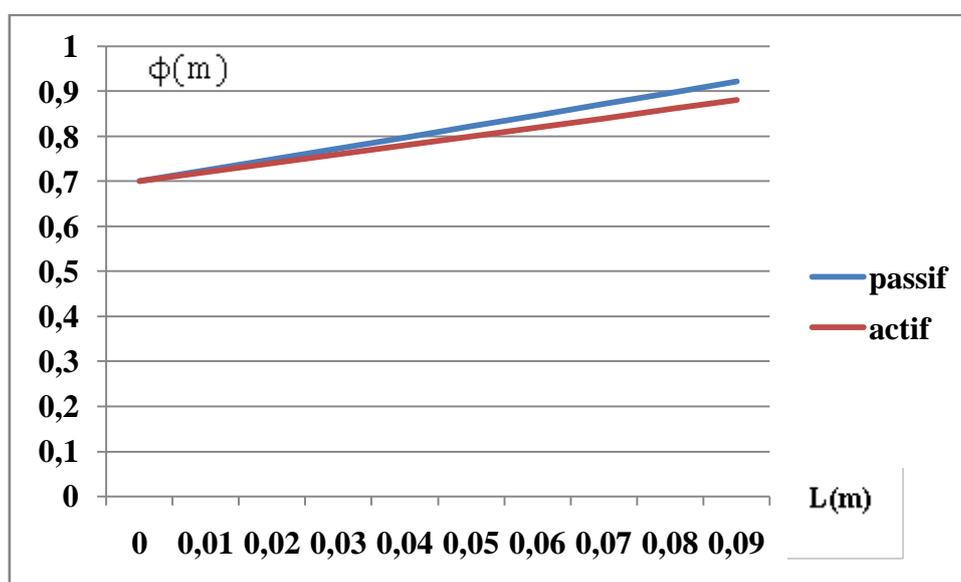


Figure III.20 : Le mode en fonction de la longueur (mode 2)

• **c : Mode 3**

	Passif		Actif	
Mode 3	$f_i$	$\beta_i$	$f_i$	$\beta_i$
	2697	4907,51	1164.73	11241,01

$$\phi_{\text{passif}}(x) = \sin 48.153x - \cos 48.153x - \operatorname{sh} 48.153x + \operatorname{cosh} 48.153x \quad (\text{III. 11})$$

$$\phi_{\text{actif}}(x) = \sin 31.644x - \cos 31.644x - \operatorname{sh} 1241,01x + \operatorname{cosh} 31.644x \quad (\text{III. 12})$$

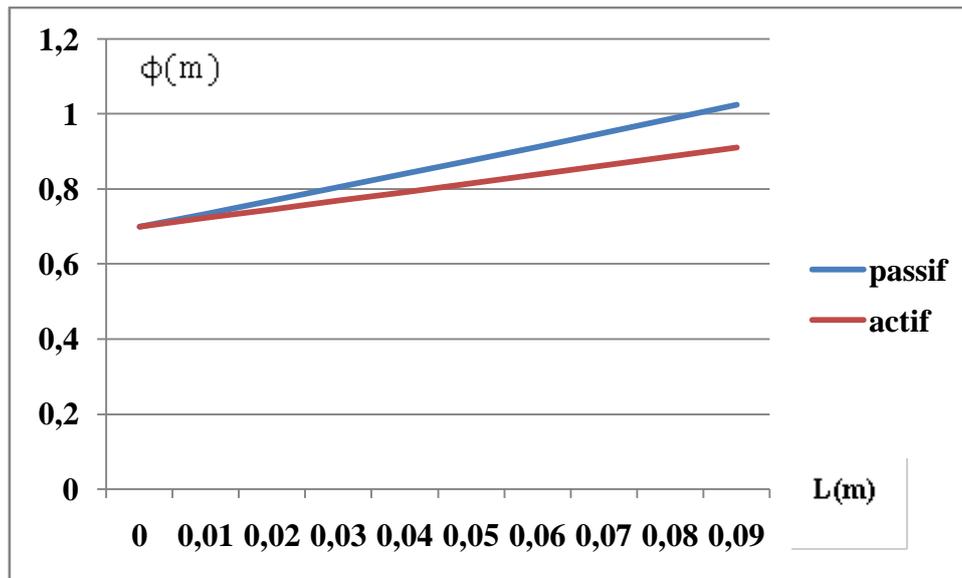


Figure III.21 : Le mode en fonction de la longueur (mode 3)

Les deux allures actives et passives dans les trois modes sont sous forme des lignes droites qui ont le même de démarrage, sachant que les valeurs de déplacement en situation active sont inférieurs aux valeurs de déplacement au situation passive.

### III.2.1.2 : La réponse libre en fonction du temps a l'extrémité $x= 0.09$ m

La théorie de vibration des poutres donne la relation de déplacement suivante :

$$w(x, t) = \phi(x)f(t) ; \text{ Avec}$$

$$\phi(x) = C\sin\beta x + D \cos \beta x + E \operatorname{sh}\beta x + F \operatorname{cosh}\beta x \quad (\text{III. 13})$$

$$f(t) = 100\sin(314t) + 100\cos(314t) \quad (\text{III. 14})$$

**Location 1 :**

**Mode 1 :**

$$\phi_{\text{passif}} (0.09) = 0.78 ; \phi_{\text{actif}} (0.09) = 0.76$$

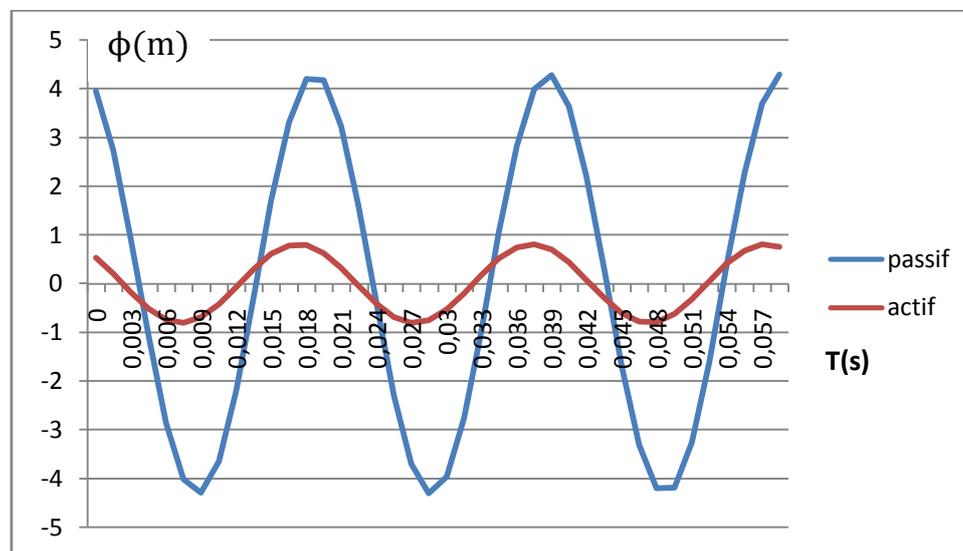


Figure III.22 La réponse libre de la poutre (localisation 1) en fonction du temps

**Mode 2:**

$$\phi_{\text{passif}} (0.09) = 0.923 ; \phi_{\text{actif}} (0.09) = 0.88$$

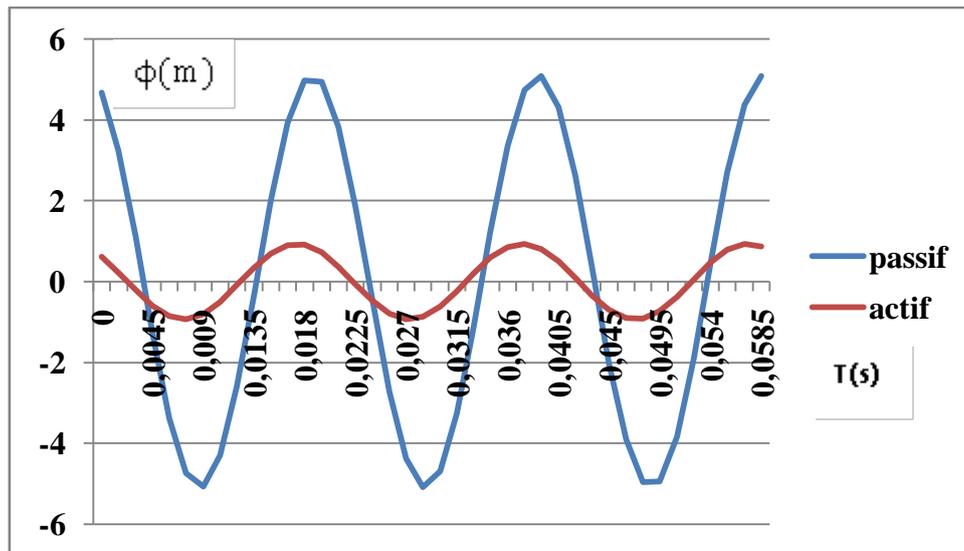


Figure III.23 La réponse libre de la poutre (localisation 2) en fonction du temps

**Mode 3:**

$$\phi_{\text{passif}}(0.09) = 1.02 ; \phi_{\text{actif}}(0.09) = 0.88$$

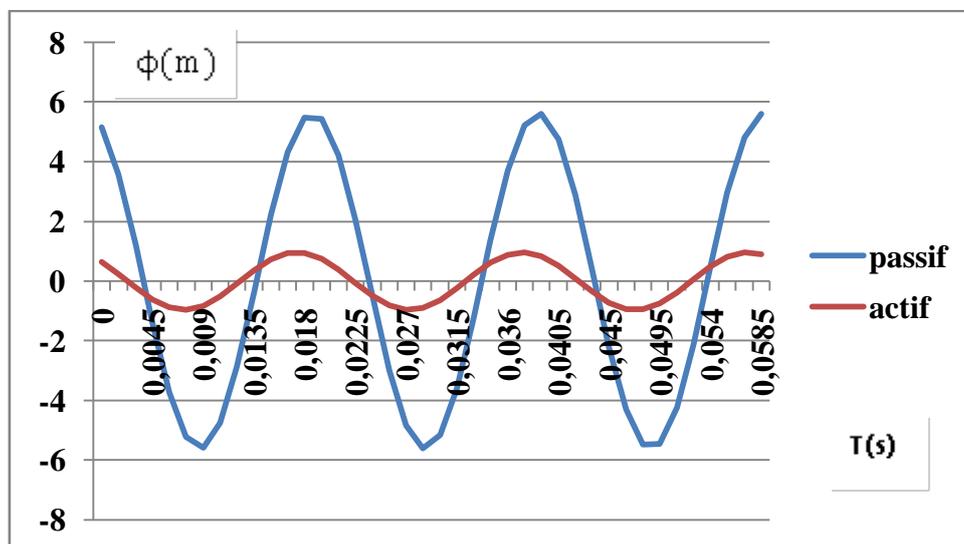


Figure III.24 La réponse libre de la poutre (localisation 3) en fonction du temps

Dans les trois modes la réponse active est toujours plus faible par rapport à la réponse passive.

### III.2.1.3 : La réponse forcée en fréquence (le gain) a l'extrémité $x= 0.09$ m

Le déplacement  $w(\omega)$  est :

$$w(\omega) = \frac{Pl^3}{EI} \sin\omega t \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i X_i \quad (\text{III. 15})$$

Avec :  $\beta_i = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}}$  (III. 16) ;  $P(t) = 100\sin(\omega t)$

Après calcul on a :

$$w(\omega) = \frac{4Pl^3}{EI} (0.08091\beta_1 + 0.00206\beta_2 + 0.00026\beta_3) \sin\omega t \quad (\text{III. 17})$$

Et finalement :

$$w_{Passif,actif}(\omega) = \frac{7901099}{1 - \omega_1^{-2}\omega^2} + \frac{183362.639}{1 - \omega_2^{-2}\omega^2} + \frac{201164837}{1 - \omega_3^{-2}\omega^2} \quad (\text{III. 18})$$

- 1 ere localisation

$$w_{Passif,actif}(\omega) = \frac{7901099}{1 - \omega_1^{-2}\omega^2} + \frac{183362.639}{1 - \omega_2^{-2}\omega^2} + \frac{201164837}{1 - \omega_3^{-2}\omega^2}$$

**Passif** :  $\omega_1 = 3163.87$  ,  $\omega_2 = 19756.88$  ;  $\omega_3 = 55012.8$  **rd/s**

**Actif** :  $\omega_1 = 618.58$  ,  $\omega_2 = 5508.5648$  ;  $\omega_3 = 7314.50$  **rd/s**

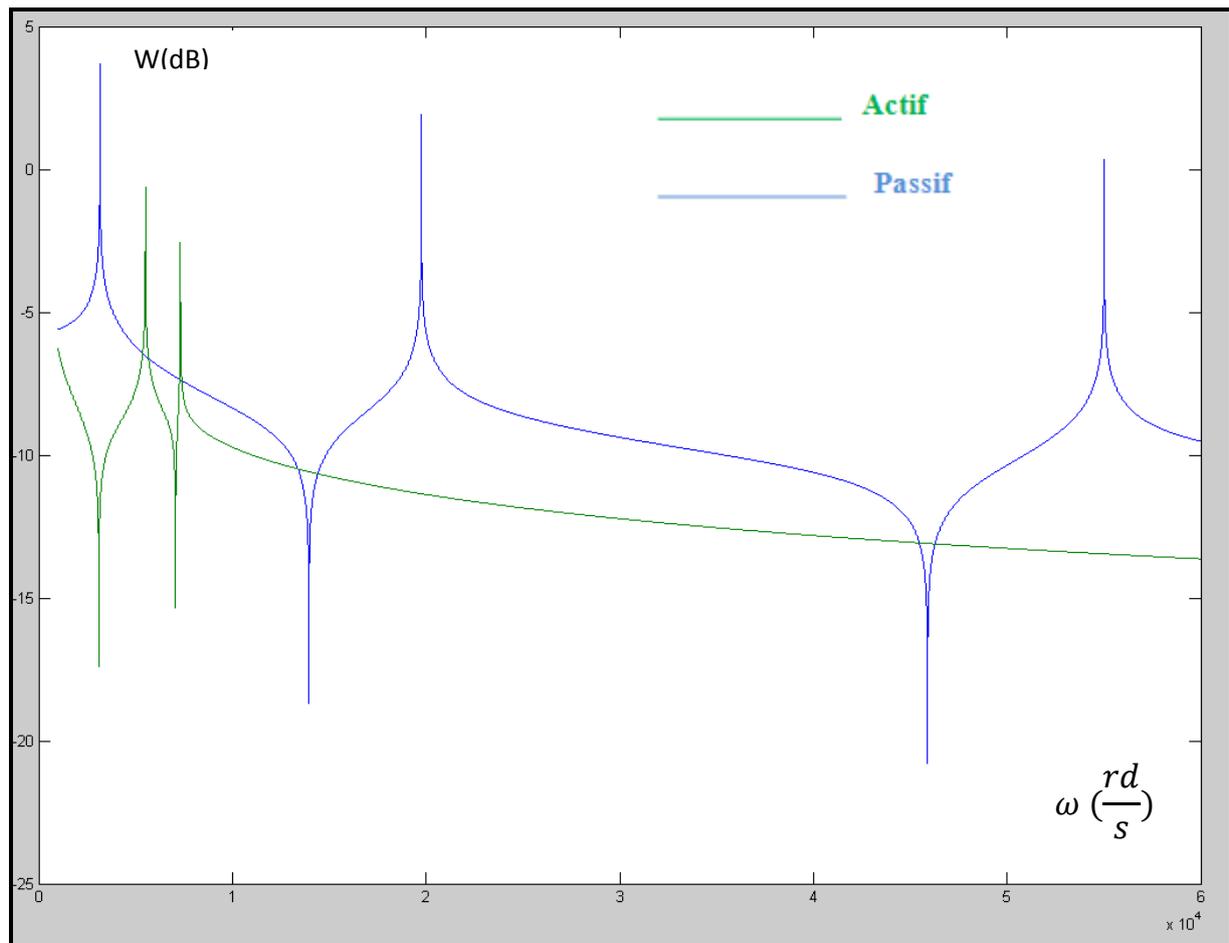


Figure III.25 : Le gain de la poutre (localisation 1)

- 2<sup>eme</sup> localisation

$$W_{Passif,actif}(\omega) = \frac{7901099}{1 - \omega_1^{-2}\omega^2} + \frac{183362.639}{1 - \omega_2^{-2}\omega^2} + \frac{201164837}{1 - \omega_3^{-2}\omega^2}$$

**Passif** :  $\omega_1 = 3163.87$  ,  $\omega_2 = 19756.88$  ;  $\omega_3 = 55012.8 \text{ rd/s}$

**Actif** :  $\omega_1 = 497.8584$  ,  $\omega_2 = 4907.506$  ;  $\omega_3 = 11241.011 \text{ rd/s}$

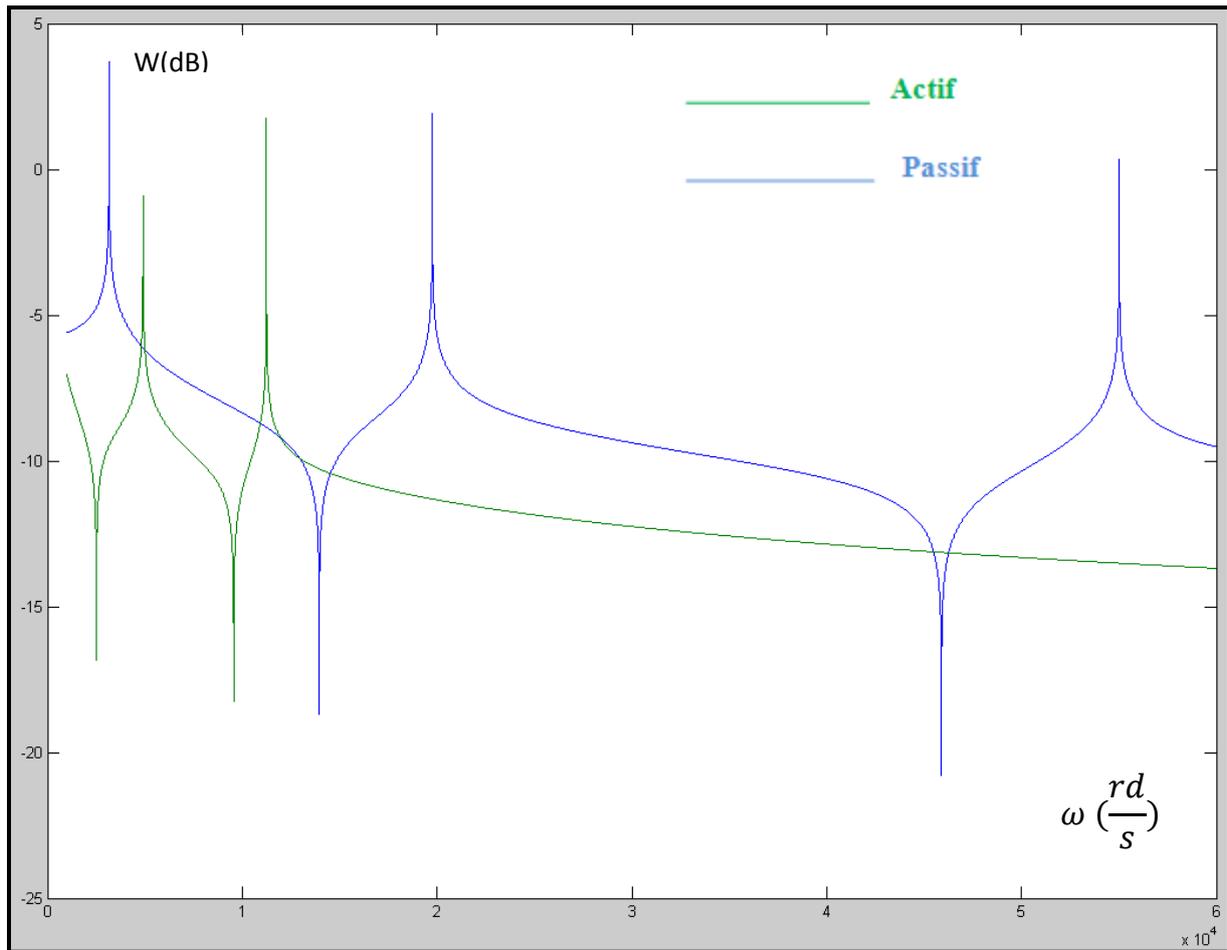


Figure III.26 : Le gain de la poutre (localisation 2)

- 3<sup>eme</sup> localisation

$$W_{Passif,actif}(\omega) = \frac{7901099}{1 - \omega_1^{-2}\omega^2} + \frac{183362.639}{1 - \omega_2^{-2}\omega^2} + \frac{201164837}{1 - \omega_3^{-2}\omega^2}$$

**Passif** :  $\omega_1 = 3163.87$  ,  $\omega_2 = 19756.88$  ;  $\omega_3 = 55012.8 \text{ rd/s}$

**Actif** :  $\omega_1 = 433.38$  ,  $\omega_2 = 6281.32$  ;  $\omega_3 = 1347881 \text{ rd/s}$

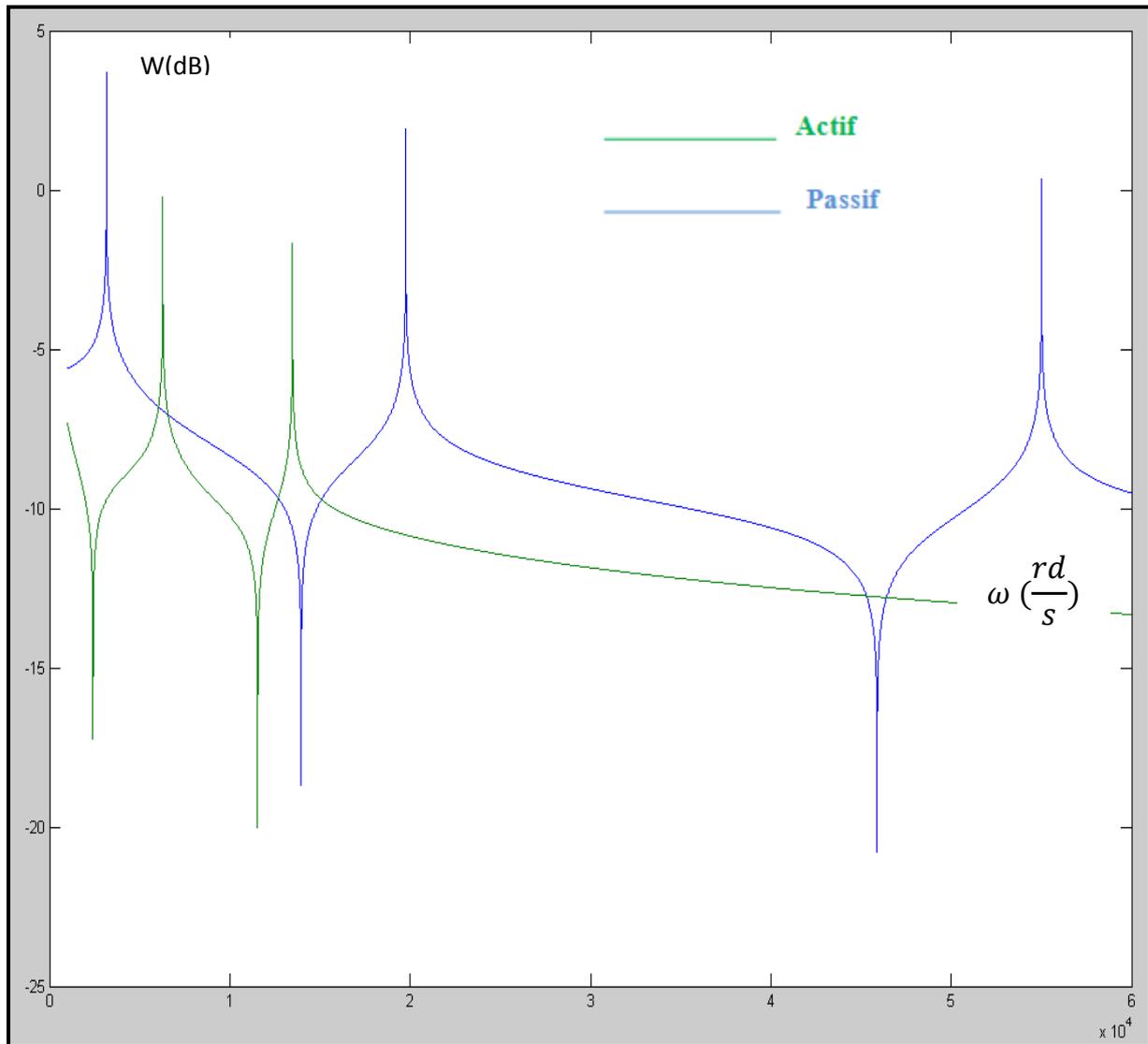


Figure III.27 : Le gain de la poutre (localisation 3)

On remarque qu'il y a une atténuation des fréquences dans les trois modes, d'autre part il y a un glissement dans les courbes des gains actifs qui subissent un glissement vers l'axe des impulsions.

### III.2.2 : Poutre appui simple - appui simple

La relation suivante détermine la réponse en fréquence :

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P}{\rho S l} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\xi_n \omega_n \omega)} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x_0\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cos \omega t \quad (\text{III. 19})$$

Avec :

$$P(t) = 100 \cos(\omega t) ; \omega = 100\pi \frac{\text{rd}}{\text{s}} ; P = 100 \text{ N}$$

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

$$S = 5 * 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$l = 0.09 \text{ m}$$

$$\xi_1 = 0.054$$

$$j = -1$$

$$x_0 = l/2 = 0.045 \text{ m}$$

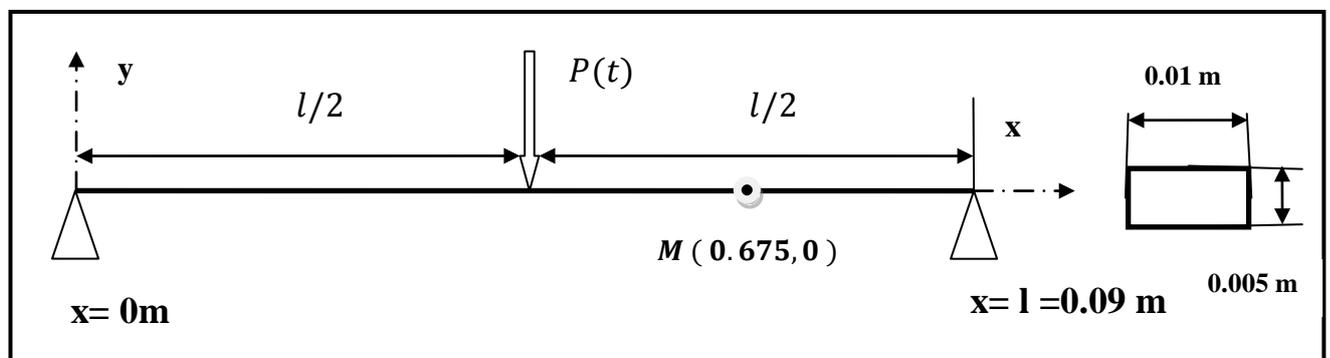


Figure III.28 Poutre appui simple - appui simple (Timoshenko)

### III.2.2.1 : La réponse libre en fréquence (Le gain) au point $M \left( \frac{3l}{4}, 0 \right)$

Sans piézo :  $\omega_1 = 21308.04$  ,  $\omega_2 = 133544.2$  ;  $\omega_3 = 186114.08 \text{ rd/s}$

#### La réponse au point $M \left( \frac{3l}{4}, 0 \right)$

Donc  $x = \frac{3l}{4} = 0.0675 \text{ m}$

Alors

$$w(x, t) = 28499.0286 * \frac{1}{(\omega_1^2 - \omega^2 - \omega_1 \omega)} * \sin\left(\frac{1\pi}{l} l/2\right) * \sin\left(\frac{1\pi}{l} 3l/4\right) * \cos\omega t +$$

$$28499.0286 * \frac{1}{(\omega_2^2 - \omega^2 - \omega_2 \omega)} * \sin\left(\frac{2\pi}{l} l/2\right) * \sin\left(\frac{2\pi}{l} 3l/4\right) * \cos\omega t + 28499.0286 * \frac{1}{(\omega_3^2 - \omega^2 - \omega_3 \omega)} * \sin\left(\frac{3\pi}{l} l/2\right) * \sin\left(\frac{3\pi}{l} 3l/4\right) * \cos\omega t \quad (\text{III. 20})$$

Finalement :

$$w(0.0675, t) = 20145.4923 * \frac{1}{(\omega_1^2 - \omega^2 - \omega_1 \omega)} * \cos\omega t - 20145.4923 * \frac{1}{(\omega_3^2 - \omega^2 - \omega_3 \omega)} * \cos\omega t \quad (\text{III. 21})$$

#### b- Avec piézo

$\omega_1 = 8876.152$  ,  $\omega_2 = 35371.47$  ;  $\omega_3 = 79090.32 \text{ rd/s}$

#### La réponse au point $M \left( \frac{3l}{4}, 0 \right)$

Donc  $x = \frac{3l}{4} = 0.0675 \text{ m}$

Finalement :

Après calcul on a :

**a)- Passif**

$$w(0.0675, t) = 20145.4923 * \frac{1}{((1413.4)^2 - \omega^2 - 79323.6\omega)} * \cos\omega t - 20145.4923 * \frac{1}{((12594)^2 - \omega^2 - 680076\omega)} * \cos\omega t \quad (\text{III. 22})$$

**Le module :**

$$|w(f)| = 20145.4923 * \frac{1}{((1413.4)^2 - \omega^2 - 79323.6\omega)} - 20145.4923 * \frac{1}{((12594)^2 - \omega^2 - 680076\omega)} \quad (\text{III. 23})$$

**b)- Actif**

$$w(0.0675, t) = 20145.4923 * \frac{1}{((811.24)^2 - \omega^2 - 43806.96\omega)} * \cos\omega t - 20145.4923 * \frac{1}{((7120.7)^2 - \omega^2 - 3845917.8\omega)} * \cos\omega t \quad (\text{III. 24})$$

**Le module**

$$|w(\omega)| = 20145.4923 * \frac{1}{((811.24)^2 - \omega^2 - 43806.96\omega)} - 20145.4923 * \frac{1}{((7120.7)^2 - \omega^2 - 3845917.8\omega)} \quad (\text{III. 25})$$

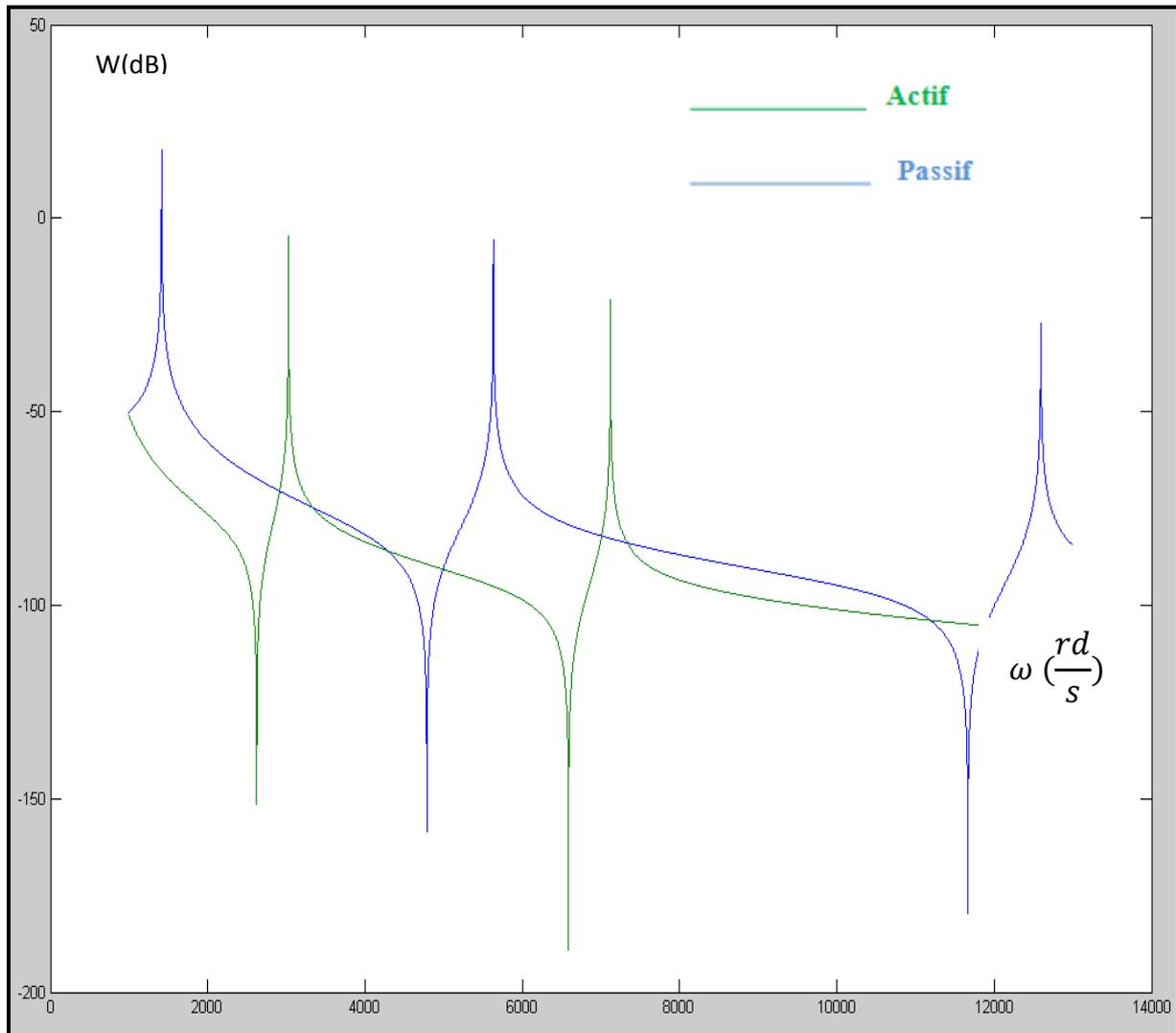


Figure III.29 : Le gain de la poutre appui simple - appui simple

Nous obtiendrons les mêmes résultats (atténuations des fréquences et glissement du gain vers l'axe des impulsions) lors d'un changement de la poutre (appui simple-appui simple).

## Conclusion

Au terme de ce travail, il nous semble opportun de dégager quelques points importants, qui constituent l'aboutissement des concepts établis, et qui ouvrent la voie aux recherches futures.

Dans le cadre des stratégies d'amortissements actif, l'application de la méthode du contrôle modal en utilisant des actionneurs du type semi-reparti diminue les risques d'instabilité des modes non-contrôlés. Dans le cas des actionneurs du type piézoélectrique, la force de contrôle est générée par la déformation. Cette déformation est limitée par les caractéristiques du matériau piézoélectrique. Nous avons présenté également les analyses statiques et dynamiques de couplage piézoélectrique/structure. Par leur taille généralement petite, les actionneurs du type piézo-électrique peuvent être collés sur une grande partie de la structure sans beaucoup modifier les caractéristiques du couplage piézoélectrique/ structure. Cette stratégie de contrôle est de plus en plus développée pour obtenir un système dynamique contrôlé activement de façon intégrale (développement des structures intelligente).

## Notifications

[M]	Matrice de masse
[C]	Matrice d'amortissement
[K]	Matrice de raideur
[ $\Phi$ ]	Matrice modale
[G]	Matrice de gain modale
[H]	Matrice de pondération semi-définie positive
[R]	Matrice pondération définie-positive
{U}	Déplacement
{ $u(t)$ } <sub>r</sub>	Vecteur des coordonnées modales
{p}	Vecteur des forces généralisées de contrôle
{e}	Vecteur des forces généralisées de d'excitation
$f_r(t)$	Force modale de contrôle
a	Coordonnée du centre de piézoélectrique
E	Module de Young
$d_{31}$	Constante piézoélectrique (module de piézoélectrique)
$q_r(t)$	Coordonnée modale
$q(x, t)$	Déplacements à l'instant t au point x.
V	Tension électrique appliquée sur le piézoélectrique
G	Module de cisaillement
$M_0$	Moment
$w(x, t)$	Déplacement transversal de la poutre
$f_i$	Fréquences de résonance
$\nu$	Coefficients de Poisson
$\rho$	Masse volumique

$\Phi_r(x)$	Déformée modale
$\omega$	Impulsions
$\varepsilon$	Déformation
$Q$	Force généralisée
$\sigma$	Contrainte de traction-compression
$\tau$	Contrainte de cisaillement
$\varepsilon_{11}^s, \varepsilon_{22}^s, \varepsilon_{33}^s$	Permittivité piézoélectrique à déformation
$e_{31}, e_{32}, e_{33}, e_{15}, e_{24}$	Coefficients de couplage piézoélectrique

## Liste des figures

<b>Figure I.1</b> Illustration extraite du brevet de P.Lueg	3
<b>Figure I.2</b> Illustration extraite d'une étude de Olson et May	4
<b>Figure I.3</b> Courbes d'iso-atténuation maximale en fonction des erreurs de phrase et d'amplitude	6
<b>Figure I.4</b> Zones d'application du contrôle actif	7
<b>Figure I.5</b> (a) Principe du actif de bruit pour conduit, (b) Dispositif commercialisé (document TechnoFirst , Aldes Aéraulique)	9
<b>Figure I.6</b> (a) Principe du casque de protection auditive actif par contrôle feedback, (b) modèle du casque actif commercialisé.	9
<b>Figure I.7</b> (a) satellite (b) Bras de satellite équipe de contrôle actif de Vibrations	10
<b>Figure I.8</b> Dispositif de contrôle actif de vibration d'une aile d'avion. (a) principe, (b) vue générale d'une aile équipée de transducteurs piézoélectriques.	11
<b>Figure I.9</b> Dispositif de contrôle actif du bruit d'un cockpit.	11
<b>Figure I.10.</b> Structure cristalline d'une céramique piézoélectrique, avant et après la polarisation	15
<b>Figure I.11.</b> Processus de polarisation : (a) Avant la polarisation des domaines polaires sont orientées au hasard; (b) Un champ très large DC électrique est utilisé pour la polarisation, (c) Après le domaine de DC est enlevé, la polarisation reste.	16
<b>Figure I.12</b> Réaction d'un élément piézoélectrique polarisé à des stimulis appliqués	16
<b>Figure I.13</b> Schéma d'un transducteur piézoélectrique	17
<b>Figure I.14.</b> La nomenclature des axes	18

<b>Figure I.15.</b> Dépôt de charge sur un transducteur piézoélectrique	20
<b>Figure I.16</b> Un circuit ouvert transducteur piézoélectrique sous une force dans la direction 1	21
<b>Figure I.17.</b> Un transducteur piézoélectrique sous réserve de la charge appliquée	22
<b>Figure II.1 :</b> Géométrie d'un couplage piézoélectrique/structure	37
<b>Figure II.2</b> Hypothèse des déformations	38
<b>Figure II.3</b> Déformation du piézoélectrique et de la structure pour plusieurs valeur de $\Gamma$	42
<b>Figure II.4</b> Poutre console à des contraintes de cisaillement	45
<b>Figure III.1</b> Poutre encastrée - libre (Bernoulli)	51
<b>Figure III.2 :</b> Trois modes de vibration de la poutre en aluminium	53
<b>Figure III.3 :</b> Maillage de la poutre (Beam3) et des pastilles planes PZT (Plane13) pour la première location	54
<b>Figure III.4 :</b> La géométrie d'une poutre couplée par deux pastille PZT (1ere location)	56
<b>Figure III.5 :</b> Maillage de la poutre (Beam3) et des pastilles planes PZT (Plane13) pour la première location	56
<b>Figure III.6 :</b> Trois modes de vibration de la poutre couplée 1ere location	57
<b>Figure III.7 :</b> La géométrie d'une poutre couplée par deux pastille PZT (2eme location )	58
<b>Figure III.8 :</b> Maillage de la poutre (Beam3) et des pastilles planes PZT (Plane13) pour la deuxième location	58
<b>Figure III.9 :</b> Trois modes de vibration de la poutre couplée 2 eme location	59
<b>Figure III.10 :</b> La géométrie d'une poutre couplée par deux pastille PZT (3eme location)	60

<b>Figure III.11</b> : Maillage de la poutre (Beam3) et des pastilles planes PZT (Plane13) pour la troisième localisation	60
<b>Figure III.12</b> : Trois modes de vibration de la poutre couplée 3 eme localisation	61
<b>Figure III.13</b> : Application de la tension électrique au niveau des nœuds 2,4 et 7,9 dans la première location par exemple.	62
<b>Figure III.14</b> Poutre appui simple - appui simple (Timoshenko)	64
<b>Figure III.15</b> : Trois modes de vibration de la poutre	65
<b>Figure III.16</b> : La géométrie d'une poutre couplée par deux pastilles PZT	66
<b>Figure III.17</b> : Maillage de la poutre (Beam3) et des pastilles planes PZT (Plane13)	66
<b>Figure III.18</b> : La poutre encastree – libre étudiée	67
<b>Figure III.19</b> : Le mode en fonction de la longueur (mode 1)	68
<b>Figure III.20</b> : Le mode en fonction de la longueur (mode 2)	69
<b>Figure III.21</b> : Le mode en fonction de la longueur (mode 3)	70
<b>Figure III.22</b> La réponse libre de la poutre (localisation 1) en fonction du temps	71
<b>Figure III.23</b> La réponse libre de la poutre (localisation 2) en fonction du temps	72
<b>Figure III.24</b> La réponse libre de la poutre (localisation 3) en fonction du temps	72
<b>Figure III.25</b> : Le gain de la poutre (localisation 1)	74
<b>Figure III.26</b> : Le gain de la poutre (localisation 2)	75
<b>Figure III.27</b> : Le gain de la poutre (localisation 3)	76
<b>Figure III.28</b> Poutre appui simple - appui simple (Timoshenko)	77
<b>Figure III.29</b> : Le gain de la poutre appui simple - appui simple	80

## Liste des tableaux

<b>Tableau III.1</b> : Propriétés des matériaux de la poutre en aluminium	52
<b>Tableau III.2</b> : fréquences propres des trois modes analytique et validées par ANSYS	52
<b>Tableau III.3</b> : Propriétés des matériaux de la poutre et des pastilles	55
<b>Tableau III.4</b> Trois modes de vibration de la poutre 1 ere location	62
<b>Tableau III.5</b> Trois modes de vibration de la poutre 2 eme location	63
<b>Tableau III.5</b> Trois modes de vibration de la poutre 2 eme location	63
<b>Tableau III.6:</b> Tableau récapitulatif, les fréquences dans le cas actif sont diminuent par rapport le cas passif	63
<b>Tableau III.7</b> Trois modes de vibration de la poutre sans piézo	64
<b>Tableau III.8</b> Trois modes de vibration de la poutre avec piézo	66

## Bibliographie

1. **Conover , W.** Fighting noise with noise. Noise Control, Springer, 1956.
2. **Crawley, E. F.** and Javier de Luis, Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures, AIAA Journal, Vol. 25, October 1987.
3. **Daraji, A.H and J. M. and Bicker, R,** Active vibration control of a smart structure, Springer, 2009.
4. **Eriksson, L. J.** Active sound and vibration control : A technology in transition. Noise Control Eng. J., 1996.
5. **Fuller, C. R. Elliott, S. J. and Nelson, P. A.** Active control of vibration. London : Academic Press, 1996.
6. **Gawronski, K.** Advanced Structural Dynamics and Active Control of structures, Springer, 1998.
7. **Ghorbel, S.** Couplage électromécanique effectif dans les structures piézoélectriques, expérimentations, simulations et corrélations, Thèse doctorat, Institut supérieur de Paris, 2009.
8. **Jalili, N.** Piezoelectric-Based Vibration Control, Springer, 2009.
9. **Lueg, P.** Process of silencing sound oscillations. Germany, Patent DRP 655, 508, 1933.
10. **Meirovitch , L. and Baruh, H.** Control of Self-Adjoint Distributed-Parameters Systems, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 5, No. 1, 1982.
11. **Olson , H. F. and May, E. G.** Electronic sound absorber. J. Acoust. Soc. Am, 1953.
12. **Rizet, N.** contrôle actif de vibration utilisant des matériaux piézoélectrique, Thèse doctorat, Institut nationale des sciences appliquées de Lyon, 1999.
13. **Suweca, W.** Contrôle vibratoire des structures, thèse doctorat, Ecole centrale de Lyon, 1990.
14. **Yang, J.** Analysis of Piezoelectric Devices, World Scientific, 2006
15. **Zhang, J.** Active Vibration Control of Piezoelectric Intelligent Structures journal of computers, vol.5 no.3, march, 2004.

## Résumé

Le contrôle des vibrations est désormais l'un des domaines les plus importants de l'ingénierie, tant dans le secteur industriel ou dans le domaine de la recherche, l'utilisation de matériaux piézoélectrique est l'un des moyens les plus importants pour contrôler les vibrations dans les systèmes mécaniques, et en raison des propriétés uniques.

Dans l'étude théorique, nous examinons l'impact d'une paire de pastilles, de petites dimensions, constitué d'un matériau piézoélectrique, de manière collage symétrique dans une poutre à deux dimensions, et pour l'étude du phénomène sismique, nous avons utilisé un moyen de contrôle modal, et face à cette méthode d'analyse du phénomène dans l'état statique et dynamique de la structure/ piézoélectriques, dans les deux types de contrôle actif et passif, la méthode des éléments finis permet de calculer les fréquences de structure couplée estimée.

En utilisant le code de simulation ANSYS, un modèle d'une poutre de console, pour plusieurs localisation, et de comparer les résultats dans les deux cas, actif et passif de s'avoir l'impact de ces puces dans Les valeurs calculées des fréquences et réduit la fréquence des valeurs propres.

**Mots clés : piézoélectricité, coefficient de couplage électromécanique, poutre, simulation par EF, fréquence, impulsions, gain.**

## **Abstract**

Vibration control is now one of the most important areas of engineering, both in industry or in research, the use of piezoelectric materials is one of the most important ways to control vibrations in mechanical systems, and because of unique properties. In the theoretical study, we examine the impact of a pair of pellets, small, consisting of piezoelectric material, so bonding in a symmetric beam in two dimensions, for the study of seismic phenomenon, we have used an average of modal control, and faced with this method of analysis of the phenomenon in the static and dynamic structure piezoelectric in both types of active and passive control, the finite element method to calculate the frequencies coupled structure estimated using the ANSYS simulation code, the first model in two dimensions and the second plate of two dimensions, and compare the results in both cases, active and passive to know the impact of these chips in the calculated values of frequencies and reduced the frequency of eigen values.

**Keywords :** piezoelectricity, electromechanical coupling coefficient , simulation , beam , EF , pulse , frequency , gain.

## ملخص المذكرة

إن التحكم بالاهتزازات يعتبر حالياً من أهم مجالات الهندسة ، سواء في القطاع الصناعي أو في مجال الأبحاث، إن استخدام المواد ذات الكهرباء الإجهادية يعتبر من أهم طرق التحكم في اهتزازات الأنظمة الميكانيكية ، و ذلك بسبب خواصها الفريدة . في الدراسة النظرية نستعرض تأثير زوج من رقاقتين صغيرة الأبعاد ، مصنوعة من مادة ذات كهرباء إجهادية ، ملصقة بطريقة تناظرية في عارضة ثنائية الأبعاد ، و من أجل دراسة الظاهرة الاهتزازية ، استخدمنا طريقة التحكم الشرطي التي تعتبر الرقاقتين عبارة عن محركين من نمط المحركات نصف المجزأة ، و تتناول هذه الطريقة تحليل الظاهرة في حالة السكون و حالة الحركة للبنية المتزاوجة "عارضة ثنائية الأبعاد/رقاقتي من مادة ذات الكهرباء الإجهادية" ، في النمطين التحكم الفعال (النشط) و التحكم غير الفعال (الخامل) ، إن طريقة العناصر المنتهية تتيح لنا حساب الترددات الذاتية للبنية المتزاوجة باستخدام المحاكاة على برنامج انسيس ، الذي خصصت له وحدة خاصة للتعريف به و بكيفية استخداماته ، واستعرضت في هذه المحاكاة مثالين ، الأول عارضة ثنائية الأبعاد و الثاني عارضة ثنائية الأبعاد مع الرقاقتين من مادة ذات كهرباء إجهادية، و مقارنة النتائج في كلتا الحالتين النشطة و الخاملة نستخلص مدى تأثير هذين الرقاقتين في قيم الترددات المحسوبة و مدى تخفيضها لقيم الترددات الذاتية .

الكلمات المفتاحية: كهروضغطية، المزوجة الكهروميكانيكية، محاكاة، عارضة، طريقة العناصر المنتهية ، نبض، تردد، اجابة .