Etude des inégalités matricielles linéaires LMIs

1. Introduction :

Les inégalités matricielles linéaires sont utilisées pour résoudre plusieurs problèmes d'automatique, (problèmes d'optimisation en théorie du contrôle, identification de système,…) qui sont généralement difficiles à résoudre de façon analytique. L'intérêt des méthodes basées sur les LMIs vient du fait que ces dernières peuvent être résolues en utilisant la programmation convexe. Avec cette approche, on n'est plus limité aux problèmes ayant une solution analytique. En résolvant ces inégalitées, on obtient un domaine de solutions faisables, c'est-à-dire de solutions satisfaisant ces LMIs, plus vaste que celui généré par la recherche de solutions analytiques. En utilisant le fait qu'une inégalité possède davantage de solutions qu'une équation, il est possible d'employer les degrés de liberté supplémentaires pour inclure d'autres objectifs que ceux initialement retenus.

Les notions des LMIs se retrouvent dans plusieurs travaux depuis de nombreuses années. Ainsi Lyapunov a conditionné la stabilité d'un système par LMI. Plus tard, Kalman, Yakubovich et Popov ont généralisé le résultat de stabilité proposé par Lyapunov. La terminologie des LMIs a été utilisée par Willems en 1971. En 1994, Nesterov et Nemirovski ont trouvé une solution pour résoudre les LMIs de manière efficace en utilisant des méthodes basées sur les points intérieurs.

Ce chapitre présent un ensemble des notions et propriétés concernent les inégalités matricielles linéaires LMIs et leurs applications en commande des systèmes.

2. Définition :(inégalité matricielle linéaire LMI) :

On appelle une inégalité matricielle linéaire notée (LMI) le problème suivant : étant données les matrices réelles, carrées et symétriques: $F_i = F_i^T \in \Re^{n\times n}$, $i = 0...m$ et $x \in \Re^m$ telles que :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0 \qquad \text{(I-1)}$$

L'inégalité (I-1) implique que: $F(x)$ est une matrice définie positive c'est-à-dire :

$\forall z \in \Re^n$ et $z \neq 0$: $z^T F(x) z > 0$ De manière équivalente, la valeur propre la plus petit de $F(x)$ est positive.

Les matrices symétriques F_i sont fixées (connues) et $x = [x_1, x_2, ...x_m]^T$ est un vecteur de valeurs inconnues (variables). On dit que $F(x) > 0$ est une LMI affine des éléments de x.

Remarque :

L'inégalité (I-1) est une LMI stricte si $F(x)$ est seulement définie positive (non négative) autrement LMI est dite non stricte.

Le succès des LMIs vient du développement des méthodes dites *du point intérieur* qui permettent de résoudre ces problèmes de manière efficace [1].

3. Problème de faisabilité :

Le problème de faisabilité d'une LMI est le problème de trouver l'ensemble des points: $x \in C$ où $C = \{x \in \Re^n \,/\, F(x) > 0\}$ qui vérifient LMI: $F(x) > 0$ alors le problème $F(x) > 0$ est dit faisable (ou réalisable) et ces points appelées points faisables [2].

Exemple :

Les LMIs ne se présentent pas souvent directement sous la forme (I-1) prenons un exemple classique de l'automatique: la stabilité au sens de Lyapunov pour un système linéaire $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Il s'agit de trouver une matrice réelle $P = P^T > 0$ de même dimensions que A telle que: $A^T P + PA < 0$

Considérons à titre d'exemple le cas où A est une matrice 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \tag{I-2}$$

La matrice symétrique P dépend alors de 3 paramètres $x_i : i = 1, 2, 3$. on peut s'écrire :

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} \tag{I-3}$$

La condition de positivité $P > 0$ s'écrit :

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} > 0 \tag{I-4}$$

L'inégalité de Lyapunov $A^T P + PA < 0$, peut se réécrire sous la forme suivante:

$$x_1 \begin{bmatrix} 2a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & a_1 + a_4 \\ a_1 + a_4 & a_2 + a_3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ a_3 & 2a_4 \end{bmatrix} < 0 \tag{I-5}$$

Cette inégalité est une LMI affine des éléments: x_1, x_2, x_3 [3].

4. Propriétés:

Parmi les propriétés les plus importantes des inégalités matricielles linéaires, on peut mentionner:

4.1. Propriété 1 : (LMIs multiples peuvent être écrites comme une seule LMI)

Parmi les propriétés remarquables des LMIs, la possibilité de regrouper plusieurs LMIs $F_1(x) > 0,\ F_2(x) > 0, ...,\ F_n(x) > 0$ en une seule LMI bloc diagonale [1]:

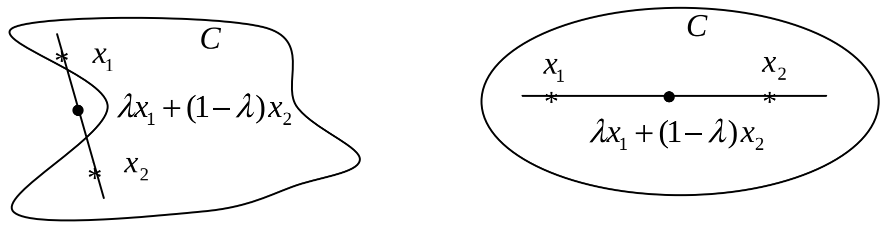
$$\begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & F_2(x) & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & F_n(x) \end{bmatrix} > 0 \qquad \text{(I-6)}$$

4.2. Propriété 2 :(La convexité)

La convexité est une propriété géométrique importante, qu'on trouve dans la théorie d'optimisation globale.

4.2.1. Définition :(Un ensemble convexe):

Un ensemble C est dit convexe si pour toutes les points : $(x_1, x_2) \in C$ et $0 < \lambda < 1$, alors: $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in C$



(a) *Ensemble non convexe* (b) *Ensemble convexe*

Figure I.1 *Représentation d'un ensemble convexe et non convexe.*

4.2.2. Définition : (Fonction convexe)

Soit une fonction f avec : $f : \Re^n \to \Re$ la fonction f est convexe si:

$\forall (x, y) \in \Re^n, 0 < \lambda < 1$ Alors :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \text{(I-7)}$$

La fonction f est convexe si pour tous les pairs (x, y) : $f(\lambda x + (1-\lambda)y)$ est toujours en bas de $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$,

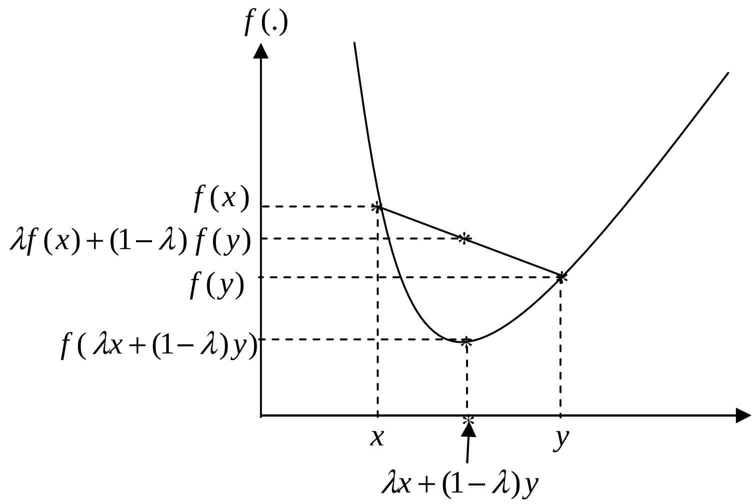


Figure I.2 *Graphe d'une fonction convexe.*

4.2.3. Définition: (contrainte LMI convexe)

Une importante propriété des LMIs est que l'ensemble : $C=\{x:F(x)>0\}$ est convexe. C'est à dire LMI (I-1) définit un ensemble convexe sur la variable x [4].

Prenons : x et y deux vecteurs, avec: $F(x)>0$, $F(y)>0$ et $0<\lambda<1$ si:

$$F(\lambda x+(1-\lambda)y)>0 \qquad \text{(I-8)}$$

Donc on peut écrire [5] : $\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)>0$ (I-9)

4.3. Propriété 3 :(l'intersection de deux ensembles convexes)

Soit: $F(x)>0$ et $G(x)>0$ deux LMIs, liées respectivement avec les deux ensembles convexes suivants: $C_1=\{x\in\Re^m / F(x)>0\}$ et $C_2=\{x\in\Re^m / G(x)>0\}$

Alors l'intersection de C_1 et C_2 est définie par l'ensemble convexe suivant:

$$C_1\cap C_2=\left\{x\in\Re^m \,/\, \begin{bmatrix} F(x) & 0 \\ 0 & G(x)\end{bmatrix}>0\right\} \qquad \text{(I-10)}$$

Alors l'intersection de deux ensembles convexes donne un ensemble convexe [6].

5. Lemme du complément de Schur :

Le lemme du complément de Schur converti une classe des inégalités non linéaires à des inégalités matricielles linéaires LMIs convexes qui apparaissent régulièrement dans les problèmes de commande.

Les inégalités non linéaires convexes sont:

$$\begin{aligned} &R(x) > 0 \\ &Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^{T}(x) > 0 \end{aligned} \tag{I-11}$$

Où: $Q(x) = Q^{T}(x),\ R(x) = R^{T}(x)$ et $S(x)$ dépend d'une manière affine de x.

Le lemme du complément de Schur converti ces inégalités non linéaires convexes à une LMI équivalente [5] :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^{T}(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \tag{I-12}$$

Exemple :

Soit l'inégalité matricielle quadratique suivante :

$$\begin{aligned} &R > 0 \\ &A^{T}P + PA + PBR^{-1}B^{T}P + Q < 0 \end{aligned} \tag{I-13}$$

Où: $A,\ B,\ Q = Q^{T}, R = R^{T} > 0$ sont des matrices données et $P = P^{T}$ est la variable.

On peut reformuler cette inégalité matricielle quadratique sous forme d'une inégalité matricielle plus simple, en utilisant le lemme du complément de Schur [7] **:**

$$\begin{bmatrix} -A^{T}P - PA - Q & PB \\ B^{T}P & R \end{bmatrix} > 0 \tag{I-14}$$

6. Les applications des LMIs:

Nous allons donner quelques problèmes qui font appel aux LMIs :

6.1. Analyse de Stabilité au sens de Lyapunov:

La méthode de Lyapunov proposée en 1982 dans le cadre de l'étude de stabilité des systèmes linéaires. Etant donné un système LTI:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \tag{I-15}$$

Ce système est stable s'il existe une fonction $V(x)$ définie positive telle que sa dérivée est définie négative :

$$V(x) = x^T(t)Px(t) \tag{I-16}$$

Où: P est une matrice symétrique et définie positive : $P = P^T > 0$

$$\dot{V}(x) = x^T(A^T P + PA)x \tag{I-17}$$

La condition de stabilité consiste à trouver la matrice P qui vérifie l'inégalité matricielle :

$$A^T P + PA < 0 \tag{I-18}$$

On peut écrire :

$$\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P > 0 \\ A^T P + PA < 0 \end{cases} \tag{I-19}$$

Donc il résulte :

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -A^T P - PA \end{bmatrix} > 0 \tag{I-20}$$

Le système (I-16) est stable lorsque l'inégalité matricielle (I-20) est faisable [5]

6.2. Problème de stabilité quadratique des systèmes incertains:

La notion de stabilité quadratique est le prolongement de la notion de stabilité de Lyapunov lorsque l'on considère des systèmes incertains, nous supposons que les matrices incertaines A du modèle d'état appartiennent à des ensembles compacts Ω.

Nous considérons le système linéaire incertain suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t).x(t) \tag{I-21}$$

Ce système est dit stable quadratiquement lorsqu'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que quelle que soit la matrice *A* appartenant à l'ensemble Ω nous avons $\dot{V}(x) < 0$:

$$x^T(A^T(t)P + PA(t))x < 0 \tag{I-22}$$

Nous pouvons alors montrer qu'une condition nécessaire et suffisante de stabilité quadratique du système incertain (I-21) est :

- ❖ Dans le cas des incertitudes bornées en norme avec l'ensemble compacts :
  $\Omega = \{A_0 + DF(t)E, \quad \|F(t)\|_2 \leq 1\}$ avec : $\|F\|_2 = \lambda_{\max}(F^T F)$ où $\lambda_{\max}$ représente la valeur propre maximale de $F^T F$

Qu'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que l'inégalité matricielle :

$$A_0^T P + PA_0 + PDD^T P + E^T E < 0 \tag{I-23}$$

Soit vérifiée, pour une matrice nominale A_0 et des matrices constantes *D*, *E* données.

- ❖ Dans le cas des incertitudes polytopiques avec : $\Omega = Co\{A_1, \ldots, A_n\}$

Co : représente l'ensemble convexe et $\{A_1, \ldots, A_n\}$ une série de matrices constantes données.

Qu'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que l'inégalité matricielle :

$$A_i^T P + PA_i < 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n \tag{I-24}$$

Soit vérifiée.

Notons que ces conditions sont uniquement suffisantes pour assurer la stabilité robuste du système incertain (I-21), c'est à dire sa stabilité pour toute incertitude admissible. De manière générale la stabilité quadratique implique la stabilité robuste mais l'inverse n'est pas vrai [8].

6.3. Stabilité des modèles Takagi-Sugeno (TS) :

L'étude de la stabilité des modèles Takagi-Sugeno s'effectue principalement en utilisant la méthode directe de Lyapunov. Soit le modèle Takagi-Sugeno continu suivant en régime libre :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))A_i x(t) \tag{I-25}$$

$$h_i(z(t)) \geq 0,\ \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) = 1,\ \forall i \in \{1,\ldots,r\} \tag{I-26}$$

Les matrices $A_i \in \Re^{n\times n}$ représentent un ensemble de *r* modèles linéaires.

Les fonctions d'appartenance $h_i(.)$ ont la propriété de somme convexe (I-26) et sont fonctions d'un vecteur $z(t) \in \Re^{z}$ appelé vecteur des prémisses.

La stabilité quadratique du modèle TS (I-25) revient à résoudre le problème suivant :

Trouver une matrice $P > 0$, telle que [9]:

$$A_i^T P + PA_i < 0,\ \ \forall\, z(t) \in \Re^{z} \tag{I-27}$$

6.4. Problème de Stabilisation :

Les LMIs permettent également de générer des lois de commande stabilisantes. La condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité du système commandé :

$$\dot{x} = A.x + Bu \tag{I-28}$$

Par un retour d'état : $u = K.x$ est l'existence des matrices *P* et *K* telles que :

$$\begin{aligned} &(A + BK)^T P + P(A + BK) < 0 \\ &P = P^T > 0 \end{aligned} \tag{I-29}$$

Cette inégalité est bilinéaire en *P* et *K* mais à l'aide du changement de variables $P = W^{-1}$ et $K = RW^{-1}$ elle devient une LMI en *R* et *W*:

$$\begin{aligned} &AW + WA^T + BR + R^T B^T < 0 \\ &W = W^T > 0 \end{aligned} \tag{I-30}$$

6.5. Problèmes d'optimisation sous contraintes LMIs :

Beaucoup de problèmes d'Automatique et particulièrement les problèmes de contrôle des systèmes peuvent se formuler comme des problèmes d'optimisation sous contraintes LMIs. Et plusieurs problèmes sont mieux écrits en termes d'une simple ou multiple fonction objectif avec un ensemble des contraintes LMIs, car les problèmes d'optimisation convexe apparaissent

souvent en pratique. Ceci est la force de l'utilisation des formulations LMIs dans les applications réelles qui concernent les lois de commande des divers systèmes.
L'introduction des contraintes LMIs permet de définir un ensemble de problèmes d'optimisation suivants:

6.5.1. Programmation Semi Définie (SDP):

La programmation semi définie SDP appelé aussi problème d'optimisation LMI, est une généralisation de la programmation linéaire (LP), où l'égalité de contraint remplacer par une LMI, un problème SDP formulé comme suivant:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min}\,(c^T x) \\ &F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0 \end{aligned} \tag{I-31}$$

$x \in \Re^m$: vecteur des variables de décision.
c^T : vecteur ligne donnée
$F(x)$: contraint LMI [5].

6.5.2. Problèmes des valeurs propres (Eigenvalue Problem EVP):

Un large nombre de propriétés de commande peuvent être calculés comme un problème de valeur propre (EVP) qui est le problème de minimisation de la valeur propre maximale : $\lambda_{\max}$ d'une matrice: $A(x) > 0$ qui dépend affinement de la variable x, soumise à une contrainte LMI $F(x) > 0$.
Plusieurs tests d'analyse de performance, tel que le calcul de la norme H_∞ peuvent être écrit sous forme d'un problème des valeurs propres (EVP) avec contrainte LMI.
On écrit la forme générale d'un problème des valeurs propres (EVP) comme suivant [5].

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min}\,\lambda \\ &\lambda I - A(x) > 0 \\ &F(x) > 0 \end{aligned} \tag{I-32}$$

6.5.3. Problèmes des valeurs propres généralisées (GEVP):

Le problème de valeur propre généralisée consiste à minimiser la plus grande valeur propre d'une paire de matrices $F(x)$ et $G(x)$ dépendant linéairement de la variable *x*, sous contraintes LMIs.
Le problème GEVP est exprimé par:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \lambda \\ &\text{Tel que : } \lambda F(x) - G(x) > 0 \\ &\qquad F(x) > 0 \text{ et } H(x) > 0 \end{aligned} \tag{I-33}$$

$F(x)$, $G(x)$ et $H(x)$ sont des matrices symétriques [10].

6.5.4. Minimisation du déterminant :

Le problème de minimisation du déterminant est exprimé par:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \left\{\log[\det(G^{-1}(x))]\right\} \\ &\text{Tel que : } F(x) > 0 \;\; et \;\; G(x) > 0 \end{aligned} \tag{I-34}$$

Où $F(x)$ et $G(x)$ sont des matrices symétriques et affines en x [5].

Ces problèmes d'optimisation peuvent être résolus par différents types de méthodes :

- méthode des points intérieurs (méthode des centres, méthode primale-duale, méthode projective de Nemiroviskii).
- Méthode des plans sécants.
- Méthode de l'ellipsoïde.
- Méthode du type simplex [10].

6.6. Problème de commande Linéaire Quadratique (LQ):

On parle de commande linéaire quadratique : LQ ou LQR (linear quadratic regulator). Le système est linéaire et la commande est quadratique.
Dans le cas d'un système linéaire à temps invariant LTI suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{I-35}$$

On écrit la loi de commande optimale à horizon infinie ($t_{final} \to +\infty$) par retour d'état comme suivant : $u(t) = -K.x(t)$ où: $K = -R^{-1}B^T P$ avec les matrices: $R = R^T > 0$ et $P = P^T > 0$ vérifie l'équation algébrique de Riccati (ARE) suivante :

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{I-36}$$

Q : est une matrice symétrique fixée et définie positives [3].

Les équations algébriques de Riccati (ARE) sont excessivement utilisées dans la commande optimale, un résultat nécessitant une ARE peut être remplacé par un résultat équivalent où l'égalité est remplacée par une inégalité. Plus précisément ces contrôleurs optimaux peuvent être construits en calculant une matrice P symétrique définie positive qui satisfait l'inégalité algébrique de Riccati (ARI) :

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q < 0 \tag{I-37}$$

L'ARI est quadratique en P mais elle peut être exprimée comme une LMI en appliquant le lemme du complément de Schur [5]:

$$\begin{bmatrix} -A^T P - PA - Q & PB \\ B^T P & R \end{bmatrix} > 0 \tag{I-38}$$

6.7. Problème de commande LQG (Quadratique Linéaire Gaussienne) :

Le problème d'atténuation des perturbations est traité par les méthodes de la commande optimale où une certaine mesure de l'amplitude de la sortie est minimisée soumise à des suppositions sur les perturbations. Une procédure standard connue sous le nom du problème de la commande LQG (quadratique linéaire Gaussienne) est souvent utilisée, où la somme des variances de sortie est minimisée soumise à la supposition que les perturbations sont caractérisées comme des processus stochastiques [5].

Soit le système LTI stable suivant :

$$G(s) : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{I-39}$$

Où: w est un bruit blanc gaussien unitaire.

La commande LQG peut se mettre sous une forme particulière dite forme standard. Il s'agit alors de synthétiser un correcteur minimisant une norme H_2 sur les signaux de transfert.
La fonction du coût minimisée est donnée par :

$$J = \|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 \, d\omega \qquad \text{(I-40)}$$

La norme H_2 est une mesure de la moyenne du carré de gain pris sur toutes les fréquences.

Voici la formulation LMI de la norme H_2 :
Soit la solution $P_0 = P_0^T \leq 0$ qui vérifiant l'équation de Lyapunov :

$$AP_0 + P_0A^T + BB^T = 0 \qquad \text{(I-41)}$$

Alors toute matrice $P > P_0$ vérifiant :

$$AP + PA^T + BB^T < 0 \qquad \text{(I-42)}$$

Le système $G(s)$ stable, vérifié : $\|G\|_2^2 < \gamma_2$ si et seulement s'il existe une matrice symétrique positive $P > 0$ vérifiant LMI (I-42) et :

$$Trace(CPC^T) < \gamma_2 \qquad \text{(I-43)}$$

L'ensemble des inégalités (I-42) et (I-43) constitue un système LMI qui peuvent formuler le problème LQG (H_2**)** comme suivant [3]:

$$\begin{array}{c} \text{Min}\left\{Trace(CPC^T)\right\} \\ AP + PA^T + BB^T < 0 \end{array} \qquad \text{(I-44)}$$

6.8. Commande Prédictive Robuste:

La commande prédictive du modèle est devenue la méthode la plus populaire des méthodes de conception des contrôleurs multivariables à cause de sa capacité de traiter les contraintes linéaires des processus variables. Les formulations de la commande prédictive en programmation standard linéaire et quadratique peuvent être écrites en termes des LMIs. Le principe de la commande prédictive du modèle est l'utilisation d'une fonction quadratique définie positive de l'état pour borner ou limiter la fonction objective de performance elle est basée sur l'utilisation d'un modèle pour prédire par le comportement future du système sur un horizon du temps fini et puis utiliser le lemme du complément de Schur pour changer ces contraintes à une contrainte LMI [5].

Considérons le système linéaire variant dans le temps représenté par les équations d'état Suivantes:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) \end{aligned} \qquad \text{(I-45)}$$

Où chaque matrice d'état est arbitraire et se trouve dans un polytope $[A(k)\ B(k)] \in \Omega$. En considérant que les incertitudes sont définies par:

$\Omega = Co\{[A_1, B_1], [A_2, B_2] \ldots, [A_L, B_L]\}$, avec : $[A(k)\ B(k)] \in \Omega$ Peut être exprimé comme:

$$[A, B] = \sum_{i=1}^{L} \lambda_i [A_i, B_i], \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{L} \lambda_i = 1 \qquad \text{(I-46)}$$

Définissons $x(k|k)$ comme l'état d'un système incertain mesuré à l'instant d'échantillonnage k, $x(k+i|k)$ comme l'état du système à l'instant $k+i$ prédit à l'instant k, $u(k+i|k)$ comme la commande à l'instant $k+i$ calculée à l'instant k et W, et R sont des matrices de pondération définies positives. Pour ce problème de commande, l'objectif est de calculer la matrice F du retour d'état :

$$u(k+i|k) = Fx(k+i|k) \qquad \text{(I-47)}$$

Pour minimiser la borne supérieure d'une fonction objective quadratique à horizon infini

$$J(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[x(k+i|k)^T W x(k+i|k) + u(k+i|k)^T R u(k+i|k) \right] \qquad \text{(I-48)}$$

On définit une fonction quadratique $V(x) = x^T(t)Px(t)$ où: $P = P^T > 0$ et γ sa borne supérieure.

$$\begin{aligned} &\underset{u(k+i/k), i \geq 0}{Min} \{\gamma\} \\ &V(x(k/k) \leq 0 \\ &\underset{[A(k+i)\ B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0}{Max} J(k) \leq V(x(k/k) \end{aligned} \qquad \text{(I-49)}$$

Le système (I-45) est asymptotiquement stabilisé par un contrôleur de retour d'état, tout en minimisant une borne supérieure du coût quadratique $J(k)$ sous contraintes, si à chaque instant d'échantillonnage ($k = 0,1,...\infty$) il existe une matrice symétrique définie positive Q et une matrice Y solutions du problème suivant:

$$F = YQ^{-1} \tag{I-50}$$

Le problème de contrôle prédictif robuste peut être résolu à chaque itération par le problème LMI suivant [1]:

$$\min_{\gamma, Q, Y}\{\gamma\} \tag{I-51}$$

soumis à :

$$\begin{bmatrix} 1 & x^T(k|k) \\ x(k|k) & Q \end{bmatrix} \geq 0 \tag{I-52}$$

$$\begin{bmatrix} Q & QA_i^T + Y^T B_i^T & QW^{1/2} & Y^T R^{1/2} \\ A_i Q + B_i Y & Q & 0 & 0 \\ W^{1/2}Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2}Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, L. \tag{I-53}$$

6.9. Séquencement de gain :

Une nouvelle approche de conception des contrôleurs de séquencement de gain est de représenter le processus comme étant linéaire à paramètres variants (LPV) :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(p(k))x(k) + B(p(k))u(k) \\ y(k) &= C(p(k))x(k) + D(p(k))u(k) \end{aligned} \tag{I-54}$$

Où les matrices de l'espace d'état sont des fonctions explicites d'un vecteur $p(k)$ de paramètres variants dans le temps. Nous supposons que le vecteur de paramètres est mesuré en temps réel et que ses composantes appartiennent a priori à des intervalles donnés.

Un processus LPV se réduit à un processus linéaire à temps variant pour une trajectoire donnée et il se réduit à un système linéaire à temps invariant pour un vecteur $p(k)$ de paramètres constants. Cette représentation du modèle forme la base pour un cadre théorique solide de conception de contrôleurs à séquencement de gains utilisant les LMIs. C'est une pratique commune de supposer que les matrices de l'espace d'état sont des fonctions affines de $p(k)$ et que le paramètre variant en temps $p(k)$ varie dans un polytope. Alors le contrôleur à séquencement de gains (LPV) a la forme

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \hat{A}(p(k))\hat{x}(k) + \hat{B}(p(k))y(k) \\ u(k) &= \hat{C}(p(k))\hat{x}(k) + \hat{D}(p(k))y(k) \end{aligned} \quad \text{(I-55)}$$

Similaire à celle du processus. Le processus est supposé être capable de mesurer ou d'estimer $p(k)$ en ligne, pour que cette information soit utilisée par contrôleur pour produire une performance améliorée par rapport aux contrôleurs qui n'exploitent pas une telle information. Les matrices du contrôleur qui garantissent la stabilité asymptotique globale et minimisent une norme 2 induite de la fonction objective de performance peuvent être calculées comme une EVP. Les LMIs sont développées utilisant une fonction quadratique de Lyapunov et une généralisation du lemme réel borné [5].

6.10. Problème de Commande H_∞ :

La synthèse H_∞ est un problème d'atténuation de perturbation, il consiste à minimiser l'effet d'une perturbation w(t) sur le comportement du système.

Ce problème est représenté schématiquement par la figure (I.5) suivante :

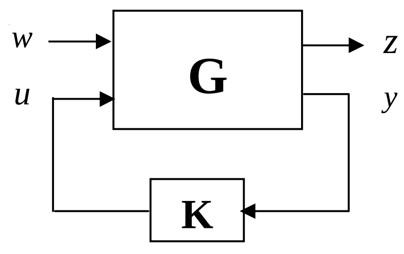


Figure I.3 *Problème H_∞ standard*

Soit G(s) un système LTI représenté par les équations d'état

$$G(s):\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+B_1w(t)+B_2u(t)\\ z(t)=C_1x(t)+D_{11}w(t)+D_{12}u(t)\\ y(t)=C_2x(t)+D_{21}w(t)\end{cases} \qquad \text{(I-56)}$$

$x\in\Re^{n}, w\in\Re^{nw}, u\in\Re^{nu}, z\in\Re^{nz}, y\in\Re^{ny}$

Les matrices A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, et D_{21} sont de dimensions appropriées**.**

L'objectif d'un problème de commande H_∞ est de trouver un contrôleur $K(s)$ pour synthétiser une loi de commande qui stabilise le processus $G(s)$.

Le contrôleur $K(s)$ défini par :

$$K(s):\begin{cases}\dot{x}_K(t)=A_Kx_K(t)+B_Ky(t)\\ u(t)=C_Kx_K(t)+D_Ky(t)\end{cases} \qquad \text{(I-57)}$$

Avec G(s) et K(s) définis ci dessus, la boucle fermée N(s) admet la réalisation

$$N(s):\begin{cases}\dot{x}_{cl}(t)=A_{cl}x_{cl}(t)+B_{cl}w(t)\\ z(t)=C_{cl}x_{cl}(t)+D_{cl}w(t)\end{cases} \qquad \text{(I-58)}$$

Le but est celui de trouver des matrices A_K, B_K, C_K et D_K telles que la norme H_∞ de la boucle fermée soit la plus petite possible, c'est à dire:

$$\gamma_{opt}=\text{Min}\gamma \qquad \text{(I-59)}$$

$$\text{tel que: } \|N(s)\|_\infty<\gamma$$

La résolution du problème H_∞ par LMIs, fondée sur l'utilisation des lemmes suivants [5] :

Lemme 1 (Valeur singulière maximale):

La valeur singulière maximale mesure le gain maximal d'un système multivariable, où les amplitudes des vecteurs d'entrée et de sortie sont quantifiées par la norme Euclidienne.

La valeur singulière maximale d'une matrice A qui dépend d'une manière affine de x est dénotée par $\overline{\sigma}(A(x))$ qui est la racine carrée de la plus large valeur propre de: $A(x)A^T(x)$

L'inégalité $\overline{\sigma}(A(x)) < 1$ est une contrainte convexe non linéaire de x, elle peut être écrite comme une LMI utilisant le lemme du complément de Schur :

$$\overline{\sigma}(A(x)) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad A(x)A^T(x) < I \tag{I-60}$$

$$\Leftrightarrow \quad I - A(x)A^T(x) > 0 \tag{I-61}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} I & A(x) \\ A^T(x) & I \end{bmatrix} > 0 \tag{I-62}$$

Lemme 2 (systèmes réels bornés):

Le lemme des réels bornés peut être appliqué à la commande des systèmes linéaires et non linéaires, le résultat actuel est basé sur la représentation en variables d'état d'un système linéaire suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = 0 \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{I-63}$$

Où: $A \in \Re^{n \times n}$, $B \in \Re^{n \times p}$, $C \in \Re^{p \times n}$ et $D \in \Re^{p \times p}$ sont données.

Supposons que A est stable et que (A, B, C) est minimal. La fonction de transfert matricielle est :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{I-64}$$

La performance du pire cas d'un système mesurée en termes de l'intégrale des erreurs carrées de l'entrée et de la sortie est quantifiée par la norme H_∞ :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\mathrm{Re}(s)>0} \{\overline{\sigma}(G(s))\} = \sup_{\omega \in \Re} \{\overline{\sigma}(G(j\omega))\} \tag{I-65}$$

La norme H_∞ peut être écrite en termes d'une LMI. Pour cela on emprunte un résultat de la littérature de la commande robuste que la norme $\|G(s)\|_\infty \leq \gamma$ si et seulement si la valeur singulière maximale de D inférieure ou égale γ : $D^T D < \gamma^2 I$ et qu'il existe $P = P^T > 0$ tel que :

$$(A^T P + PA + C^T C) + (PB + C^T D)(\gamma^2 I - D^T D)(B^T P + D^T C) < 0 \tag{I-66}$$

Le lemme du complément de Schur implique que cette inégalité algébrique de Riccati (ARI) est équivalente à l'existence de $P = P^T > 0$ tel que LMI suivante est valide [5].

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \qquad \text{(I-67)}$$

Donc $N(s)$ est stable de manière interne et de norme $H_\infty < \gamma$ si et seulement s'il existe une matrice symétrique $P > 0$ telle que [5]:

$$\begin{pmatrix} A_{cl}^T P + PA_{cl} & PB_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \qquad \text{(I-68)}$$

7. Conclusion :

Ce chapitre a été contenu quelques rappels sur les propriétés générales des inégalités matricielles linéaires LMIs, avec certain problèmes dépendent essentiellement par les formulations LMIs comme le problème des valeurs propres EVP et la programmation semi définie SDP, ainsi nous avons présenté aussi quelques applications des LMIs en commande et analyse des systèmes.

Nous nous intéressons dans ce mémoire à deux techniques importantes pour résoudre un problème de commande multiobjectifs, la première technique est les formulations LMIs qui apparaît depuis 1892, à grâce les études de Lyapunov sur l'analyse de stabilité asymptotique d'un Système linéaire, les formulations LMIs utilisent dans plusieurs applications tels que les lois de commande des divers systèmes ainsi, ils formulent les contraints de problème d'optimisation multicritère, et la seconde technique est les Algorithmes Génétiques (AGs).