

# *Contrôle multi-objectifs $H_2/H_\infty$ en utilisant l'approche LMI*

## **1. Introduction :**

Depuis la fin des années 80, les théories de la synthèse  $H_2$  et de la synthèse  $H_\infty$  sont bien établies. Ce sont principalement les applications de ce type de synthèse dans l'espace d'état à des cas pratiques de plus en plus complexes qui se sont développées ces dernières années. La confrontation de ces théories très élégantes mais en partie fermées a conduit à faire deux constats complémentaires. D'une part, il est bien connu depuis les travaux présentés, que le régulateur LQG peut présenter des marges de robustesse vis-à-vis d'incertitudes paramétriques, dramatiquement et arbitrairement faibles. D'autre part, les nombreuses applications récentes des compensateurs  $H_\infty$  à des problèmes pratiques ont également montré qu'il est relativement difficile d'obtenir avec ce type de correcteurs un niveau satisfaisant de performances mesurées par exemple par la norme  $H_2$ . Cela provient en partie du fait que la synthèse  $H_\infty$  est essentiellement fondée sur l'analyse de la performance dans le pire des cas alors que la norme  $H_2$  reflète une performance moyenne. Face à ces deux constats, l'idée d'associer ces deux types de performance est donc apparue relativement naturelle d'autant que les approches  $H_2$  et  $H_\infty$  partagent le même formalisme fondé sur le problème standard.

Pour cette raison, nous avons choisi de focaliser notre attention sur le problème mixte  $H_2/H_\infty$  qui est également un problème très largement ouvert.

## **2. Théorie de la synthèse $H_\infty$ :**

La synthèse  $H_\infty$  a été initiée par Zames au début des années 80 et développée, en particulier par Doyle, Glover, Khargonekar et Francis. Elle est devenue ces dernières années une des méthodes phares de la « commande robuste ». Le problème  $H_\infty$  consiste à concevoir une commande assurant la stabilité asymptotique du système bouclé avec un certain taux d'atténuation de l'influence des entrées exogènes sur les sorties du système. Ces entrées sont constituées des signaux de consignes et éventuellement des perturbations liées à

l'environnement du système. La synthèse  $H_\infty$  fournit une commande robuste vis-à-vis de ces perturbations et les incertitudes.

**Définition (Norme  $H_\infty$ ) :** on appelle norme  $H_\infty$  du transfert  $T(s)$  entre  $w_1$  et  $z_1$  le réel positif défini par :

$$\|T(j\omega)\|_\infty = \sup_{w_1 \neq 0} \left( \frac{\|z_1\|_2}{\|w_1\|_2} \right) \quad (\text{IV-1})$$

On peut écrire aussi:

$$\|T(j\omega)\|_\infty = \sup \bar{\sigma}(T(j\omega)) \quad (\text{IV-2})$$

Où  $\bar{\sigma}$  représente la valeur singulière maximale [29].

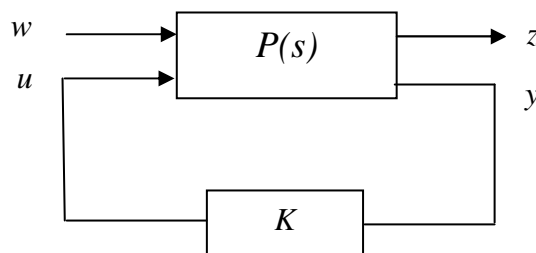
La norme  $H_\infty$  représente la valeur maximale du rapport entre l'énergie du signal de sortie et l'énergie du signal d'entrée. Il est clair que la minimisation de cette norme est nécessaire pour optimiser le rejet de perturbations et le suivi de consignes.

### 3. Problème $H_\infty$ standard :

Sous sa forme la plus simple, le problème  $H_\infty$  est un problème de réjection de perturbation. Il consiste à minimiser l'effet d'une perturbation  $w$  sur le comportement du système. Le signal  $w$  est supposé d'énergie finie et sa taille est mesurée en norme  $l_2$ . Son effet sur le système est mesuré par la norme  $l_2$  d'un vecteur (coût). Enfin, on peut agir sur le système par une commande  $u$  et on dispose d'une observation  $y$ . Il s'agit donc de synthétiser une loi de commande  $u = K(s).y$  qui minimise l'impact de  $w$  sur  $z$ . On mesurera cet impact par le rapport

$\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$ . La stabilité interne du système bouclé devra bien sûr être assurée.

Ce problème standard est représenté schématiquement par la figure IV-1.



**Figure. IV-1.** Problème  $H_\infty$  standard.

Dans cette figure  $P(s)$  représente le modèle augmenté, et  $K(s)$  le correcteur. Le système  $P(s)$  est formé des quatre transferts multivariables existant entre les entrées  $u$  (commande du système) et  $w$  (entrées exogènes: consignes, perturbations,...) et les sorties  $y$  (mesures) et  $z$  (sorties régulées, ou grandeurs à surveiller) :

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = P(s) \cdot \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \quad (\text{IV-3})$$

Cette représentation permet de calculer, avec les outils appropriés, le correcteur  $K$  de manière à optimiser, selon un critère donné, la fonction de transfert  $T_{zw}(s)$  entre les entrées exogènes  $w(t)$  et les sorties régulées  $z(t)$ . Par ailleurs, pour une loi de commande  $u = K.y$  connue,  $T_{zw}(s)$  peut se calculer de la façon suivante :

$$T_{zw}(s) = F_l(P, K) = P_{11}(s) + P_{12}(s) \cdot K(s)(sI - P_{12}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s) \quad (\text{IV-4})$$

Où :  $K = D_K + C_K(sI - A_K)^{-1}B_K$

Une réalisation de  $F_l(P, K)$  est donnée par:

$$F_l(P, K) = D_{BF} + C_{BF}(sI - A_{BF})^{-1}B_{BF} \quad (\text{IV-5})$$

La stabilité interne de la boucle fermée est équivalente à la stabilité de  $A_{BF}$ , c'est-à-dire à  $\Re(\lambda_i(A_{BF})) < 0$ . Cette expression, généralement notée  $F_l(P, K)$ , est appelée Transformation Fractionnaire Linéaire inférieure (LFT). Rappelons en outre, que  $P_{22}(s) = G(s)$ , où  $G(s)$  est la fonction de transfert du système.

En observant que le rapport  $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$  est dans le pire des cas donné par:

$$\sup_{w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \|F_l(P, K)\|_\infty \quad (\text{IV-6})$$

Le problème décrit ci-dessus peut se formuler mathématiquement comme suit:

**3.1. Problème  $H_\infty$  Optimal:** minimiser  $\|F_l(P, K)\|_\infty$  sur l'ensemble des compensateurs  $K(s)$  qui stabilisent le système de manière interne.

Le minimum est noté  $\gamma_{\text{opt}}$  appelé gain (ou atténuation) "H $\infty$  optimal". Le problème sous-optimal associé joue également un rôle important:

**3.2. Problème  $H_\infty$  Sous-Optimal:** étant donné  $\gamma > 0$ , trouver un compensateur  $K(s)$  qui stabilise le système de manière interne et assure que :  $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$  [19]

Cette performance garantit que le gain  $l_2$  du transfert  $w_1 \rightarrow z_1$  est inférieur à  $\gamma$  d'une part d'autre part que la stabilité asymptotique est préservée quelque soit une perturbation bornée, et en fin que la valeur singulière maximale de la matrice de transfert pour le couple de sorties/entrées  $(z_1/w_1)$  est inférieure à  $\gamma$  pour toutes les fréquences [30].

#### 4. Résolution du Problème $H_\infty$ :

Une réalisation minimale du système  $P(s)$ , est associée à la description interne suivante pour la représentation d'état ( $x$  étant le vecteur d'état et  $D_{22} = 0$ ) :

$$P(s) : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) \end{cases} \quad (\text{IV-7})$$

Soit  $K(s)$  un contrôleur dynamique LTI défini par :

$$K(s) : \begin{cases} \dot{x}_K(t) = A_K x_K(t) + B_K y(t) \\ u(t) = C_K x_K(t) + D_K y(t) \end{cases} \quad (\text{IV-8})$$

Avec  $P(s)$  et  $K(s)$  définis ci dessus, la boucle fermée  $T_{zw}(s)$  admet la réalisation :

$$T_{zw}(s) : \begin{cases} \dot{x}_{cl}(t) = A_{cl} x_{cl}(t) + B_{cl} w(t) \\ z(t) = C_{cl} x_{cl}(t) + D_{cl} w(t) \end{cases} \quad (\text{IV-9})$$

$$x_{cl}^T = [x^T \quad x_K^T]$$

On supposera que  $D_{12} \in \mathbb{R}^{p_1 \times m_2}$ ;  $D_{21} \in \mathbb{R}^{p_2 \times m_1}$ .

Avec :  $m_1 > p_2$  et  $p_1 > m_2$ . Enfin  $n$  désignera la taille de  $A$ , (l'ordre du système  $P(s)$ ).

La solution par variable d'état n'est applicable que sous les hypothèses suivantes :

##### Hypothèses 1:

**(A1)**  $(A, B_2, C_2)$  est stabilisable et détectable. Cette condition est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un compensateur qui stabilise le système de manière interne.

**(A2)** Les matrices  $D_{12}$  et  $D_{21}$  sont de plein rang.

$$\text{(A3)} \quad \text{rang} \begin{pmatrix} j\omega I - A & -B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} = n + m_2 \quad \text{et} \quad \text{rang} \begin{pmatrix} j\omega I - A & -B_1 \\ -C_2 & D_{21} \end{pmatrix} = n + p_2$$

Pour tout :  $\omega \in \mathbb{R}$  Autrement dit,  $P_{12}(s)$  et  $P_{21}(s)$  n'ont pas de zéro sur l'axe imaginaire. Ces deux dernières hypothèses sont appelées hypothèses de régularité. Dans un premier temps, nous ferons en plus les hypothèses simplificatrices suivantes dites de "normalisation":

(A4) normalisation:  $D_{12}^T(D_{12}, C_1) = (I, 0)$  et  $D_{21}(D_{21}^T, B_1^T) = (I, 0)$

(A5)  $D_{22} = 0$  et  $D_{11} = 0$  [23].

### 5. Techniques LMI pour la synthèse $H_\infty$ :

En dehors de l'approche fondée sur les équations algébriques de Riccati et des techniques utilisant des représentations en transfert, il existe une approche plus récente pour la résolution du problème  $H_\infty$ . Il s'agit des techniques LMI (Linear Matrix Inequalities). Ces dernières utilisent une formulation du problème en termes d'inégalités matricielles linéaires en les variables X et Y. Du fait de la linéarité, l'ensemble ainsi décrit est convexe et il résulte de cette propriété que l'on peut aisément et avec une grande efficacité calculatoire extraire une solution particulière [30].

Dans le cadre  $H_\infty$ , les techniques LMI utilisent le lemme fondamental suivant.

**Lemme :** La solution du problème  $H_\infty$  est alors fondée sur l'utilisation du Lemme Réel Borné.  $T_{zw}(s)$  est stable de manière interne et  $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si il existe une matrice symétrique  $P > 0$  telle que:

$$\begin{pmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P & -\mathcal{A} & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\mathcal{A} \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{IV-10})$$

$P$  : représente la matrice de Lyapunov définie positive [30].

Les matrices inconnues de l'inégalité (IV-9) sont  $P$  et  $A_K, B_K, C_K$  et  $D_K$ . Par conséquent

(IV-10) n'est pas une LMI, c'est une inégalité matricielle bilinéaire BMI en  $P$  et  $A_K, B_K, C_K$  et  $D_K$ . Ce sont des inégalités difficiles à résoudre. Pour se ramener à un ensemble de LMI, nous effectuons un changement de variable linéarisant [31].

La matrice  $P$  peut être obtenue en effectuant une décomposition, où on déduit deux matrices non singulières  $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de rang plein vérifiant:

$MN^T = I - XY$ . En partitionnant  $P$  et  $P^{-1}$  comme suit :

$$P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N' & Y' \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M & X' \end{bmatrix}, \quad \text{où : } X \in S_n, Y \in S_n.$$

$S_n$  : sous-espace vectoriel des matrices symétriques de dimension  $n$  [29].

**Théorème 1 :** Il existe un compensateur  $K(s)$  solution du problème  $H_\infty$  sub-optimal de performance  $\gamma$ , si et seulement si il existe des matrices symétriques  $X$  et  $Y$  solution du problème LMI :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} XA + A^T X & XB_1 & C_1^T \\ B_1^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV-11})$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} YA^T + AY & YC_1^T & B_1 \\ C_1 Y & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV-12})$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{IV-13})$$

Où  $\mathcal{N}_X$  et  $\mathcal{N}_Y$  sont des bases des noyaux des matrices  $[C_2 \ D_{21}]$  et  $[B_2^T \ D_{12}^T]$ .

Le système de LMI ci-dessus peut être aisément résolu par des algorithmes de programmation (convexe) semi-définie. Lorsqu'on dispose d'une solution des contraintes LMI (IV-11), (IV-12) le compensateur associé est directement obtenu par des relations algébriques de Théorème (2).

**Théorème 2 :** Supposons (A1)-(A5) et soit  $\gamma > \gamma_{\text{opt}}$ . Alors le compensateur

$$K_c = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c \quad (\text{IV-14})$$

Avec :

$$A_K = A + (\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T)X - (I - \gamma^{-2}YX)^{-1}YC_2^T C_2 \quad (\text{IV-15})$$

$$B_K = (I - \gamma^{-2}YX)^{-1}YC_2^T, \quad C_K = -B_2^T X$$

Stabilise le système de manière interne et satisfait :

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma \quad (\text{IV-16})$$

Cette solution particulière du problème  $H_\infty$  sous-optimal est appelée compensateur central.

On notera que le compensateur central est strictement propre et d'ordre égal à celui du système  $P(s)$ , et l'optimum est caractérisé par  $\rho(X Y) = \gamma_{opt}^2$

$\rho$  : désigne le module de la plus grande valeur propre.

Ces formules deviennent singulières au voisinage de  $\gamma_{opt}$  ( $-\gamma^{-2}YX$  n'est plus inversible à l'optimum). Cependant, on montre que  $K_c$  tend alors vers un compensateur d'ordre réduit, la chute d'ordre étant égale à la chute de rang de  $(-\gamma_{opt}^{-2}YX)$ . Cette réduction d'ordre provient de la simplification de pôle(s) à l'infini.

Pour conclure cette section, notons que lorsque  $\gamma \rightarrow +\infty$ , le compensateur central tend vers le compensateur de paramètres:

$$A_K = A + B_2 B_2^T X - Y C_2^T C_2 \quad (IV-17)$$

$$B_K = Y C_2^T, \quad C_K = -B_2^T X$$

Où  $X$  et  $Y$  sont les solutions stabilisantes des équations de Riccati [30]

$$A^T X + X A + X B_2 B_2^T X + C_1^T C_1 = 0 \quad (IV-18)$$

$$A Y + Y A^T + Y C_2^T C_2 Y + B_1 B_1^T = 0 \quad (IV-19)$$

Le but est celui de trouver des matrices  $A_K$ ,  $B_K$ ,  $C_K$  et  $D_K$  telles que la norme  $\|T_{zw}(s)\|_\infty$  de la boucle fermée soit la plus petite possible :

$$\gamma_{opt} = \text{Min } \gamma \quad (IV-20)$$

$$\text{tel que : } \|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$$

Donc (IV-10) peut être remplacée par les LMIs (IV-11), (IV-12) les nouvelles inconnues matricielles sont  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, X$  et  $Y$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & * & * & * \\ M_{21} & M_{22} & * & * \\ M_{31} & M_{32} & -\gamma I & * \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (IV-21)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0$$

On trouve la matrice (\*) par le symétrique transposé.

$$\begin{cases} M_{11} = AX + XA^T + B_2\hat{C} + (B_2\hat{C})^T \\ M_{21} = \hat{A} + (A + B_2\hat{D}C_2)^T \\ M_{22} = A^TY + YA + \hat{B}C_2 + (\hat{B}C_2)^T \\ M_{31} = (B_1 + B_2\hat{D}D_{21})^T \\ M_{32} = (YB_1 + \hat{B}D_{21})^T \\ M_{41} = C_1X + D_{12}\hat{C} \\ M_{42} = C_1 + D_{12}\hat{D}C_2 \\ M_{43} = D_{11} + D_{12}\hat{D}D_{21} \end{cases} \quad (\text{IV-22})$$

Comme  $\gamma$  entre linéairement dans (IV-21) et (IV-22) il peut être directement minimisé par une optimisation LMI pour chercher la plus petite norme  $H_\infty$  atteignable.

Une fois les matrices  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, X$  et  $Y$  obtenues, la procédure de construction du contrôleur consiste à trouver des matrices non singulières  $M$  et  $N$  satisfaisant  $MN^T = I - XY$  (une décomposition orthogonale triangulaire QR peut être utilisée), et ensuite à calculer le contrôleur par [32].

$$K(s): \begin{cases} D_K = \hat{D} \\ C_K = (\hat{C} + D_K C_2 X)(M^{-1})^T \\ B_K = N^{-1}(\hat{B} - Y B_2 D_K) \\ A_K = N^{-1}(\hat{A} - N B_K C_2 X - Y B_2 C_K M^T - Y(A + B_2 D_K C_2)X)(M^{-1})^T \end{cases} \quad (\text{IV-23})$$

**Remarque.** La méthodologie de synthèse d'un régulateur  $H_\infty$  proposée ci-dessus n'est pas la seule, ce problème peut être résolu avec un autre ensemble de LMI en passant par des compléments orthogonaux de certaines matrices.

## 6. Problème de performance $H_2$ :

Historiquement, l'utilisation de la norme  $H_2$ , est apparue dans les années 1960 avec la théorie de la commande Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG). La norme  $H_2$  d'un transfert  $w_2 \rightarrow z_2$  est une mesure précise de la puissance du signal de sortie  $z_2$  pour un bruit blanc unitaire en entrée. Il s'agit d'un critère qui mesure la performance d'atténuation de la puissance des perturbations.

**Définition (Norme  $H_2$ ) :** on appelle norme  $H_2$  du transfert  $G$  entre  $w$  et  $z$  le réel positif défini par :

$$\|G(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}[G(-j\omega)^T G(j\omega)] d\omega = \sup_{W \neq 0} \frac{\|Z(s)\|_2}{\|W(s)\|_\infty} \quad (\text{IV-24})$$

La norme  $\|G(s)\|_2$  est finie si et seulement si  $G(s)$  est strictement propre ( $D = 0$ ).



### 6.1. Calcul de la norme $H_2$ :

Pour calculer la norme  $H_2$  d'une fonction de transfert :  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ , avec  $D = 0$ . on supposera que :  $A$  est stable. En remarquant que  $G(j\omega)$  est la transformée de Fourier de :  $Ce^{At}B$ , l'identité de Parseval donne[21]:

$$\int_0^{+\infty} B^T e^{tA^T} C^T C e^{tA} B dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} G^T(-j\omega)G(j\omega) d\omega \quad (\text{IV-25})$$

On peut obtenir une expression algébrique précise de la norme  $H_2$ . Pour son calcul on emploie les grammians d'observabilité  $X$  et de commandabilité  $Y$ , qui sont solutions des inégalités de Lyapunov suivantes:

$$\begin{cases} A^T X + XA + C^T C < 0 \\ AY + YA^T + BB^T < 0 \end{cases} \quad (\text{IV-26})$$

Si le système  $G(s)$  est strictement propre ( $D = 0$ ) on écrit:

$$\|G(s)\|_2^2 = \text{trace}\left[B^T \int_0^{+\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt B\right] = \text{trace}(B^T X B) \quad (\text{IV-27})$$

$$\text{Avec : } X = \int_0^{+\infty} e^{tA^T} C^T C e^{tA} dt$$

et :

$$\|G(s)\|_2^2 = \text{trace}\left[C \int_0^{+\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt C^T\right] = \text{trace}(C Y C^T) \quad (\text{IV-28})$$

$$\text{Avec : } Y = \int_0^{+\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

Donc [7] :

$$\|G(s)\|_2^2 = \text{trace}(B^T X B) = \text{trace}(C Y C^T) \quad (\text{IV-29})$$

Le critère de performance  $H_2$  assure que pour un bruit blanc Gaussien  $w$ , la variance de réponse  $z$  est bornée par  $\gamma$ , que pour une entrée scalaire  $w$  du type impulsion, l'énergie de la sortie  $z$  est inférieure à  $\gamma$ , et que pour une sortie scalaire la déviation de  $z$  est bornée en amplitude par  $\gamma$  quelque soit une entrée  $w$  d'énergie unitaire [33].

### 6.2. Problème de Synthèse $H_2$ :

Le but est celui de trouver des matrices  $A_K$ ,  $B_K$ ,  $C_K$  et  $D_K$  du contrôleur  $K$  telles que la norme  $H_2$  de la boucle fermée  $T_{zw}(s)$  est inférieure à  $\gamma_2$  :

$$\|T_{zw}(s)\|_2 < \gamma_2 \quad (\text{IV-30})$$

**Proposition:** Supposons que le système LTI de fonction de transfert  $G(s)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \\ z(t) = Cx(t) + Dw(t) \end{cases} \quad (\text{IV-31})$$

Ce système est asymptotiquement stable et strictement propre ( $D = 0$ ), les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $\|G(j\omega)\|_2 < \gamma_2$

2. il existe  $X = X^T > 0$  avec :

$$\text{Trace}(B^T X B) < \gamma_2^2$$

$$A^T X + X A + C^T C < 0$$

3. il existe  $Y = Y^T > 0$  avec :

$$\text{Trace}(C Y C^T)$$

$$A Y + Y A^T + B B^T < 0$$

4. il existe  $P_2 = P_2^T > 0$  et  $Z$  où les LMIs suivantes sont faisables :

$$\text{Trace}(Z) < \gamma_2^2$$

$$\begin{bmatrix} A^T P_2 + P_2 A & P_2 B \\ B^T P_2 & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} P_2 & C^T \\ C & Z \end{bmatrix} > 0$$

5. il existe  $P_2 = P_2^T > 0$  et  $Z$  avec les LMIs suivantes sont faisables :

$$\text{Trace}(Z) < \gamma_2^2 \quad (\text{IV-32})$$

$$\begin{bmatrix} A^T P_2 + P_2 A & P_2 C^T \\ C P_2 & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} P_2 & B \\ B^T & Z \end{bmatrix} > 0$$

On peut écrire le problème de contrôle H<sub>2</sub> en boucle fermé comme suit [32] :

$$\text{Trace}(Z) < \gamma_2^2 \quad (\text{IV-33})$$

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P_2 + P_2 A_{cl} & P_2 B_{cl} \\ B_{cl}^T P_2 & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} P_2 & C_{cl}^T \\ C_{cl} & Z \end{bmatrix} > 0$$

**Théorème 3 :** La norme H<sub>2</sub> d'un système  $G$ , est obtenue par le problème d'optimisation suivant [34] :

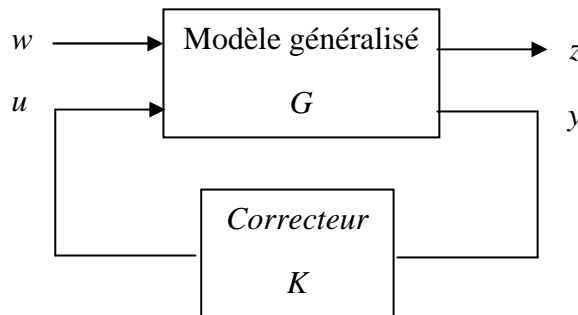
$\text{Min Trace}(Z)$

$$A^T P_2 + P_2 A + C C^T < 0$$

$$B^T P_2 B < Z$$

$$P_2 > 0$$

Soit la boucle de synthèse optimale H<sub>2</sub> suivante :



**Figure IV.2 :** La synthèse optimale H<sub>2</sub>

$G(s)$  est donné par la représentation suivante :

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-34})$$

La synthèse optimale H<sub>2</sub> consiste à déterminer le correcteur  $K$  minimisant une norme H<sub>2</sub> du transfert entre les sorties exogènes  $z$  et les entrées exogènes  $w$  :

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|T_{zw}\|_2 \quad (\text{IV-35})$$

- $\gamma > 0$  et  $G(s)$  étant donnés, déterminer un correcteur  $K$  tel que :  $\|T_{zw}\|_2 \leq \gamma$

$\mathcal{K}$  : est l'ensemble des compensateurs  $K$  stabilisant l'interconnexion de manière interne ou ensemble des compensateurs admissibles.

### Hypothèses 2:

1-  $(A, B_1)$  et  $(A, B_2)$  stabilisables,  $(C_1, A)$  et  $(C_2, A)$  détectables.

2-  $D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [0 \ I]$  et  $[B_1^T \ D_{21}^T] D_{21}^T = [0 \ I]^T$ .

3- soit  $G$  et  $K$  rationnelles, réelles et propres.

4-  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$  sont de rang plein  $\forall \omega$

Définissant les deux équations de Riccati algébriques duales :

$$A'X_2 + X_2A - X_2B_2B_2'X_2 + C_1'C_1 = 0$$

$$AY_2 + Y_2A' - Y_2C_2'C_2Y_2 + B_1B_1' = 0$$

Avec :

$$F_2 = -B_2'X_2, \quad L_2 = -Y_2C_2' \quad \text{et} \quad \hat{A}_2 = A + B_2F_2 + L_2C_2$$

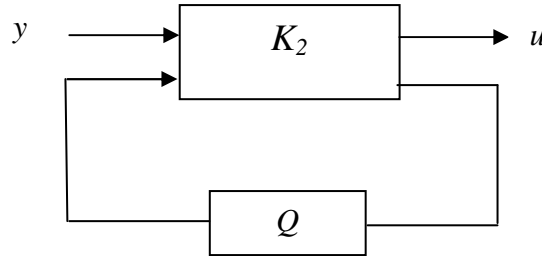
**Théorème 3:** L'unique compensateur H<sub>2</sub> optimal est donné par:

$$K_{H_2}^* \sim \begin{bmatrix} \hat{A}_2 & -L_2 \\ F_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-36})$$

Où :

$$\gamma^* = \min_{K \in \mathcal{K}} \|T_{zw}\|_2^2$$

**Théorème 4:** Si les hypothèses 2 sont vérifiées,  $\gamma > 0$  et G étant données, l'ensemble de tous les correcteurs H<sub>2</sub> sous-optimaux i.e.  $\|T_{zw}\|_2 \leq \gamma$  sont données par [35] :



**Figure IV.3** correcteur H<sub>2</sub> sous optimal.

$$K_{H_2} = \mathcal{L}_l(Q, K_2), \quad \text{avec} : Q \in \mathcal{RH}^{m_2 \times p_2}$$

Le compensateur H<sub>2</sub> sous optimal est donné par

$$K_2 = \begin{bmatrix} \hat{A}_2 & -L_2 & B_2 \\ F_2 & 0 & I_{m_2} \\ -C_2 & I_{p_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-37})$$

### 6.2.1. Solution du problème de synthèse $H_2$ par les formulations LMIs:

On trouve le correcteur  $K(s)$  qui résous le problème de synthèse  $H_2$  par retour de sortie dynamique, si et seulement si il existe les matrices  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, X$  et  $Y$  qui vérifient les LMIs suivantes pour minimiser  $\gamma_2$  :

$$\text{Trace}(Z) < \gamma_2 \quad (\text{IV-38})$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{21}^T & M_{31}^T \\ M_{21} & M_{22} & M_{32}^T \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{21}^T & N_{31}^T \\ N_{21} & N_{22} & N_{32}^T \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{bmatrix} < 0$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{11} = AX + XA^T + B_2\hat{C} + (B_2\hat{C})^T \\ M_{21} = \hat{A} + (A + B_2\hat{D}C_2)^T \\ M_{22} = A^TY + YA + \hat{B}C_2 + (\hat{B}C_2)^T \\ M_{31} = (B_1 + B_2\hat{D}D_{21})^T \\ M_{32} = (YB_1 + \hat{B}D_{21})^T \\ M_{33} = -I_{nu} \\ N_{11} = X \\ N_{21} = I_n \\ N_{22} = Y \\ N_{31} = C_1X + D_{12}\hat{C} \\ N_{32} = C_1 + D_{12}\hat{D}C_2 \\ N_{33} = Z \end{array} \right. \quad (\text{IV-39})$$

On trouve  $K(s)$  par l'utilisation de formulation (IV-23) [32].

### 7. Problème multi-objectifs mixte $H_2/H_\infty$ :

Cette idée a été étudiée à la fin des années 80, en prenant la forme de la définition du problème mixte  $H_2/H_\infty$  dont le schéma standard est représenté par la figure IV.4

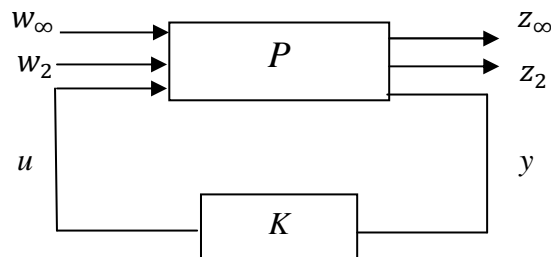


Figure IV.4. Modèle standard du problème  $H_2/H_\infty$ .

La matrice de transfert  $P$  est usuellement partitionnée suivant les signaux d'entrée et de sortie.

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{\infty} & P_{\infty 2} & P_{\infty u} \\ P_{2\infty} & P_2 & P_{2u} \\ P_{y\infty} & P_{y2} & P_{yu} \end{bmatrix} \quad (\text{IV-40})$$

La réalisation du modèle d'état généralisé est donnée par :

$$P(s) = \begin{bmatrix} A & B_{\infty} & B_2 & B \\ C_{\infty} & D_{\infty} & 0 & D_{\infty u} \\ C_2 & 0 & D_2 & D_{2u} \\ C & D_{y\infty} & D_{y2} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-41})$$

En définissant les matrices de transfert obtenues comme des transformations fractionnaires linéaires de  $K$  sur la partition adéquate de  $P$  :

$$\begin{cases} T_{z_{\infty}w_{\infty}}(K) = P_{\infty} + P_{\infty u}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{y\infty} \\ T_{z_2w_2}(K) = P_2 + P_{2u}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{y2} \end{cases} \quad (\text{IV-42})$$

### 7.1. Problème H<sub>2</sub>/H<sub>∞</sub> avec retour de sortie dynamique d'ordre plein :

Etant donné un niveau de performance  $H_{\infty}$  admissible  $\gamma$ , déterminer un retour de sortie admissible tel que:

$$\inf_{(K)} \|T_{z_2w_2}(K)\|_2 \quad (\text{IV-43})$$

$$\text{Sous: } \|T_{z_{\infty}w_{\infty}}(K)\|_{\infty} \leq \gamma$$

L'objectif est de résoudre un problème d'optimisation des performances nominales de la boucle fermée, mesurées par la norme  $H_2$ , sous une contrainte de stabilité robuste exprimée par la norme  $H_{\infty}$ . Le problème mixte  $H_2/H_{\infty}$  permet d'intégrer ainsi l'exigence de performances optimisées et de robustesse en un seul correcteur.

Le système bouclé par un tel correcteur s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{X}} = \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{B}_{\infty}w_{\infty} + \mathcal{B}_2w_2 \\ z_{\infty} = \mathcal{C}_{\infty}\mathcal{X} + \mathcal{D}_{\infty}w_{\infty} + \mathcal{D}_{\infty 2}w_2 \\ z_2 = \mathcal{C}_2\mathcal{X} + \mathcal{D}_2w_2 + \mathcal{D}_{1\infty}w_2 \end{cases} \quad (\text{IV-44})$$

Avec :  $\mathcal{X} = [x \quad x_K]^T \in \mathbb{R}^{2n}$

$x_K$  : Le vecteur d'état du correcteur  $K$ ,  $x_K \in \mathbb{R}^n$

Où ;

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} A + BD_K C & BC_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_\infty = \begin{bmatrix} B_\infty + BD_K D_{y\infty} \\ B_K D_{y\infty} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 + BD_K D_{y2} \\ B_K D_{y2} \end{bmatrix} \\ \mathcal{C}_\infty &= [C_\infty + D_{\infty u} D_K C \quad D_{\infty u} C_K], \quad \mathcal{C}_2 = [C_2 + D_{2u} D_K C \quad D_{2u} C_K] \\ \mathcal{D}_\infty &= [D_\infty + D_{\infty u} D_K D_{y\infty}], \quad \mathcal{D}_{\infty 2} = [D_{\infty 2} + D_{\infty u} D_K D_{y2}] \\ \mathcal{D}_{2\infty} &= [D_{2\infty} + D_{2u} D_K D_{y\infty}], \quad \mathcal{D}_2 = [D_2 + D_{2u} D_K D_{y2}] \end{aligned}$$

## 7.2. Formulation par la théorie de Lyapunov :

La théorie de Lyapunov permet de reformuler et de paramétrer le problème 7.1 à l'aide de variables matricielles additionnelles solutions d'équations de Riccati et de Lyapunov ou d'inégalités matricielles.

### 7.2.1. Formulation par inégalités matricielles:

Etant donné un niveau de performance H $\infty$  admissible  $\gamma$ , le problème mixte est de déterminer un correcteur  $K$  et deux matrices de Lyapunov  $P_2 \in S_n^+$ ,  $P_\infty \in S_n^+$  solutions de :

$$\text{Min}_{K, P_2, P_\infty} \text{Trace}(P_2 \mathcal{C}'_2 \mathcal{C}_2) \quad (\text{IV-45})$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathcal{A}P_2 + P_2\mathcal{A}' & \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{B}'_2 & -I \end{bmatrix} < 0 \\ &\begin{bmatrix} \mathcal{A}P_\infty + P_\infty\mathcal{A}' & \mathcal{B}_\infty & P_\infty\mathcal{C}_\infty \\ \mathcal{B}'_\infty & -I & 0 \\ \mathcal{C}'_\infty P_\infty & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Où : } \mathcal{D}_2 = D_2 + D_{2u} D_K D_{y2} = 0$$

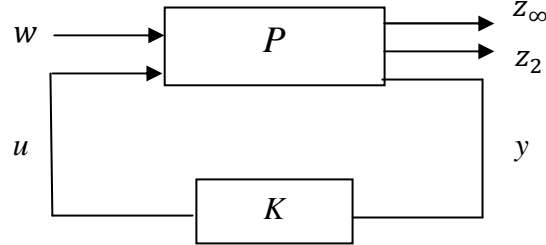
La formulation (IV-44) fait clairement apparaître le caractère bilinéaire du problème d'optimisation associé au problème mixte à travers les multiplications entre les variables de décision définissant le correcteur et les variables de décision liées à la théorie de Lyapunov.

## 7.3. Approches par relaxation convexe

Comme nous venons de le voir, les approches numériques directes ne sont pas réellement bien adaptées à la solution du problème mixte. Un certain nombre d'approches fondées sur des relaxations convexes obtenues par la définition de problèmes associés permettent de donner des solutions sous-optimales au problème initial.

La modélisation comprend un signal d'entrée exogène commun et deux sorties exogènes distinctes. Le compensateur recherché est choisi strictement propre ( $D_K = 0$ ) d'ordre fixé

$$n_k = n$$



**Figure IV.5.** Problèmes H<sub>2</sub>/H<sub>∞</sub> à une entrée - deux sorties.

Le modèle du système est le même que précédemment avec  $w_2 = w_\infty$  et par conséquent :

$$B_\infty = B_2 = B_{\infty 2}, \quad D_{y_\infty} = D_{y_2} = D_{y_\infty 2}, \quad D_2 = D_\infty = 0$$

La réalisation minimale d'état du modèle en boucle fermée est :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{X}} = \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{B}_{\infty 2}w \\ z_\infty = \mathcal{C}_\infty\mathcal{X} + \mathcal{D}_\infty w \\ z_2 = \mathcal{C}_2\mathcal{X} + \mathcal{D}_2 w \end{cases} \quad (\text{IV-46})$$

Il est possible dans le cadre le plus général du modèle (IV-42) de proposer une relaxation convexe du problème mixte initial par l'utilisation conjointe d'un changement de variables linéarisant et la relaxation connue sous le nom de « Lyapunov Shaping Paradigm ». Pour cela, nous reprenons la formulation du problème mixte par inégalités matricielles.

Les inégalités présentées dans (IV-45) ne sont pas conjointement linéaires en  $K$ ,  $P_2$  et  $P_\infty$ . L'idée principale de la relaxation consiste à ne rechercher qu'une seule et unique matrice de Lyapunov attestant de la performance  $H_2$  et de la contrainte  $H_\infty$ .

$$P_\infty = P_2 = P \quad (\text{IV-47})$$

Ce choix introduit un certain degré de pessimisme mais permet par ailleurs de montrer à l'aide d'un changement de variables linéarisant que le nouveau problème ainsi posé est un problème d'optimisation LMI. En effet, en partitionnant  $P$  et  $P^{-1}$  comme :

$$P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N' & Y \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M & X \end{bmatrix}$$

Où :  $X \in S_n$ ,  $Y \in S_n$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$



$S_n$  : sous-espace vectoriel des matrices symétriques de dimension  $n$

Le changement de variables inversible est défini par :

$$\begin{cases} \hat{D} = D_K \\ \hat{C} = C_K M + D_K C X \\ \hat{B} = N B_K + Y B D_K \\ \hat{A} = N A_K M^T + N B_K C X + Y B C_K M + Y(A + B D_K C) X \end{cases} \quad (\text{IV-48})$$

Après application du changement de variables linéarisant et de la relaxation « Lyapunov shaping paradigm », la relaxation convexe du problème mixte est définie par :

$$\text{Min}_{X,Y,Z,\hat{A},\hat{B},\hat{D},\hat{C}} \text{Trace}(Z) \quad (\text{IV-49})$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B\hat{C} + \hat{C}^T B^T & * & * & * \\ \hat{A} + (A + B\hat{D}C)^T & A^T Y + YA + \hat{B}C + (\hat{B}C)^T & * & * \\ (B_\infty + B_2 \hat{D} D_{y_\infty})^T & (YB_1 + \hat{B} D_{21})^T & -\gamma I & * \\ C_\infty X + D_{\infty u} \hat{C} & C_\infty + D_{\infty u} \hat{D} C & D_\infty + D_{\infty u} \hat{D} D_{y_\infty} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B\hat{C} + \hat{C}^T B^T & * & * \\ \hat{A} + (A + B\hat{D}C)^T & A^T Y + YA + \hat{B}C + (\hat{B}C)^T & * \\ (B_2 + B\hat{D} D_{y_2})^T & (YB_2 + \hat{B} D_{y_2})^T & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} X & * & * \\ I & Y & * \\ C_2 X + D_{2u} \hat{C} & C_2 + D_{2u} \hat{D} C & Z \end{bmatrix} < 0$$

$$\text{Où : } D_2 + D_{2u} \hat{D} D_{y_2} = 0$$

$$X \in S_n^{++}, Y \in S_n^{++}, Z \in S_r^{++}, \hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \hat{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}, \hat{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \hat{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$$

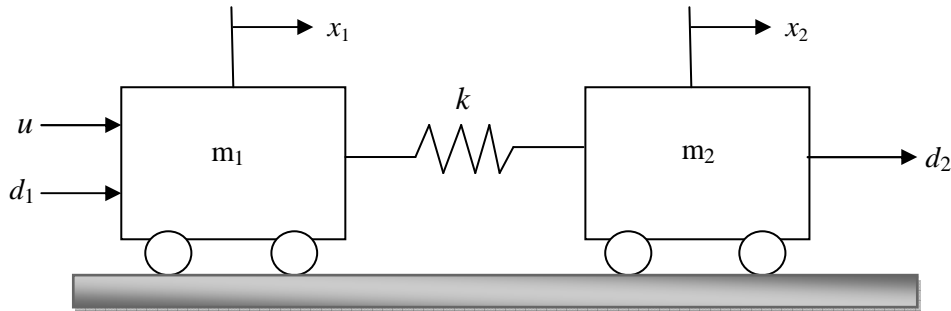
$S_n^{++}$  : Cône convexe des matrices symétriques semi définies positives de dimension  $n$ .

Donc on écrit le contrôleur  $K(s)$  comme suit [31]:

$$K(s): \begin{cases} D_K = \hat{D} \\ C_K = (\hat{C} + D_K C X)(M^{-1})^T \\ B_K = N^{-1}(\hat{B} - Y B D_K) \\ A_K = N^{-1}(\hat{A} - N B_K C X - Y B C_K M^T - Y(A + B D_K C) X)(M^{-1})^T \end{cases} \quad (\text{IV-50})$$

### 8. Exemple (Problème de Benchmark)

Le système se compose de deux masses et un ressort avec des paramètres incertains comme le montre la figure IV.6



**Figure IV.6.** Deux masses - ressort avec paramètres incertains

Supposant que :  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $k = 1$

Le système défini par la représentation suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_1 & -k/m_1 & 0 & 0 \\ -k/m_2 & -k/m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix} (u + d_1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \end{bmatrix} d_2 \quad (\text{IV-51})$$

$$y = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-52})$$

$x_1, x_2$  positions des deux masses 1 et 2 respectivement

$x_3, x_4$  correspondent les vitesses de masse 1 et 2

$u$  la force de contrôle appliqué sur la masse 1

$d_1, d_2$  entrées de perturbation

$y$  la position mesurée de la masse 2

soit la représentation d'état du système précédant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + B_u u + B_d d \\ y = C_y x + D_u u + D_d d \end{cases} \quad (\text{IV-53})$$

$$\text{avec : } C_y = I, D_u = 0 \text{ et } D_d = [0 \ 0], \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/m_1 & 0 \\ 0 & 1/m_1 \end{bmatrix}$$

En utilise la correction par retour de sortie avec:  $u = Ky$

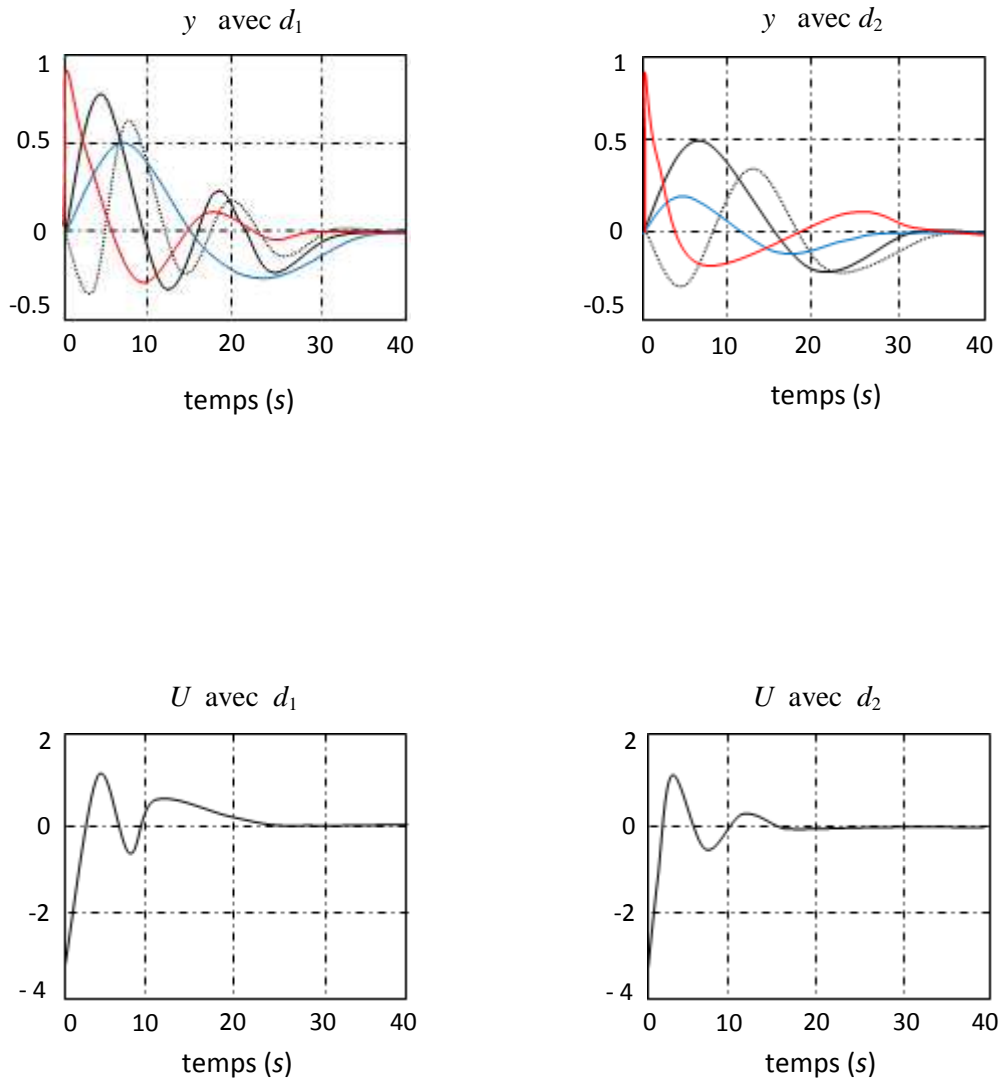
Où :  $y = x_2$  et  $0.5 \leq k \leq 2$

Le paramètre  $k$  et varie entre  $0.5 \leq k \leq 2$  donc  $k$  est une incertitude paramétrique

$k$  : paramètre incertain.

Avec  $d_1, d_2$  entrées de perturbation.

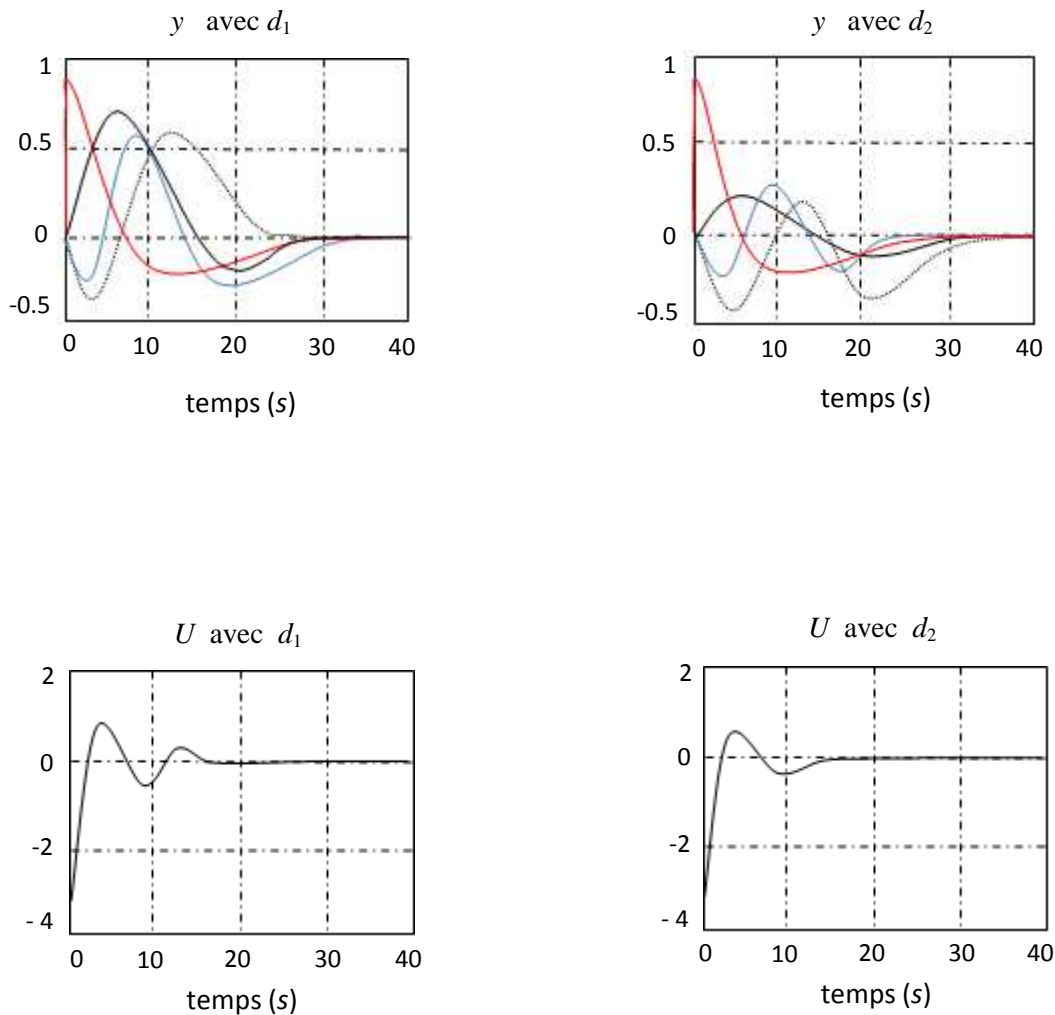
La régulation de notre système, est un cas particulier du suivi où le signal de référence est nul, c'est-à-dire on l'on désire maintenir la sortie  $y$  et les états du système en  $BF(x_1, x_2, x_3, x_4)$  à zéro.

**8.1. Solution de problème H<sub>2</sub> avec LMI :**Pour :  $\gamma_2 = 0.7$ **Figure IV.7 :** les réponses Impulsionnelle et la commande H<sub>2</sub> avec LMI

## 8. 2. Solution de problème H<sub>∞</sub> avec LMI :

Pour :  $\gamma_\infty = 0.7$

Pour un niveau d'atténuation de perturbations spécifié :  $\gamma_\infty > 0.7$  , on veut synthétiser un correcteur pour le système (IV-51), tel que le système global résultant en boucle fermée  $T(K)$  soit stable et vérifie :  $\|T(K)\|_\infty \leq \gamma_\infty$

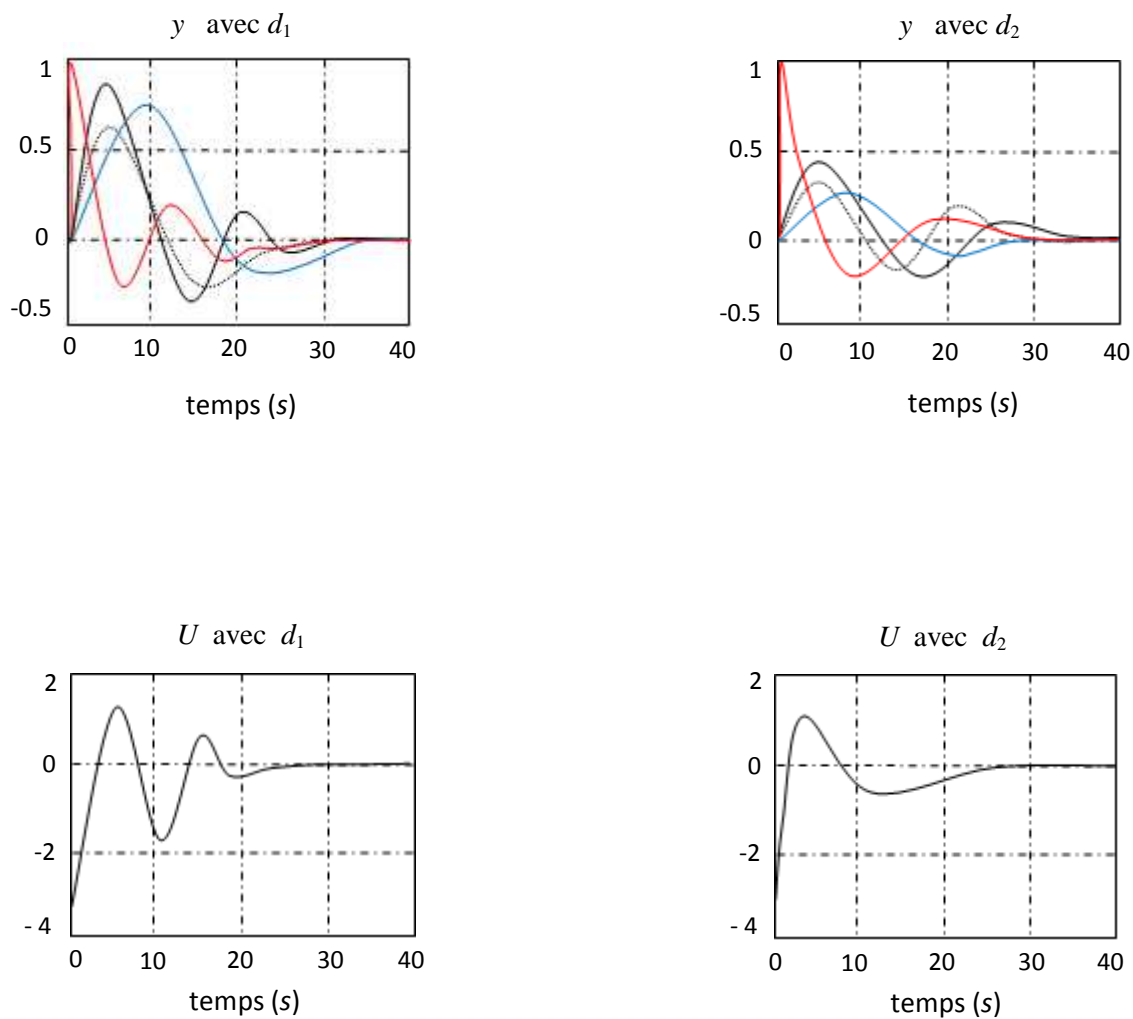


**Figure IV.8** : les réponses Impulsionnelle et la commande H<sub>∞</sub> avec LMI

On constate que la synthèse H<sub>∞</sub> fournit une commande robuste vis-à-vis des perturbations  $d_1, d_2$ . De plus, le correcteur K est pris en compte l'incertitude paramétrique ( $k$ ) du modèle du système, donc on peut dire que la commande H<sub>∞</sub> assure la stabilité en boucle fermée de système étudié et également, il est robuste vis-à-vis les incertitudes et les perturbations.

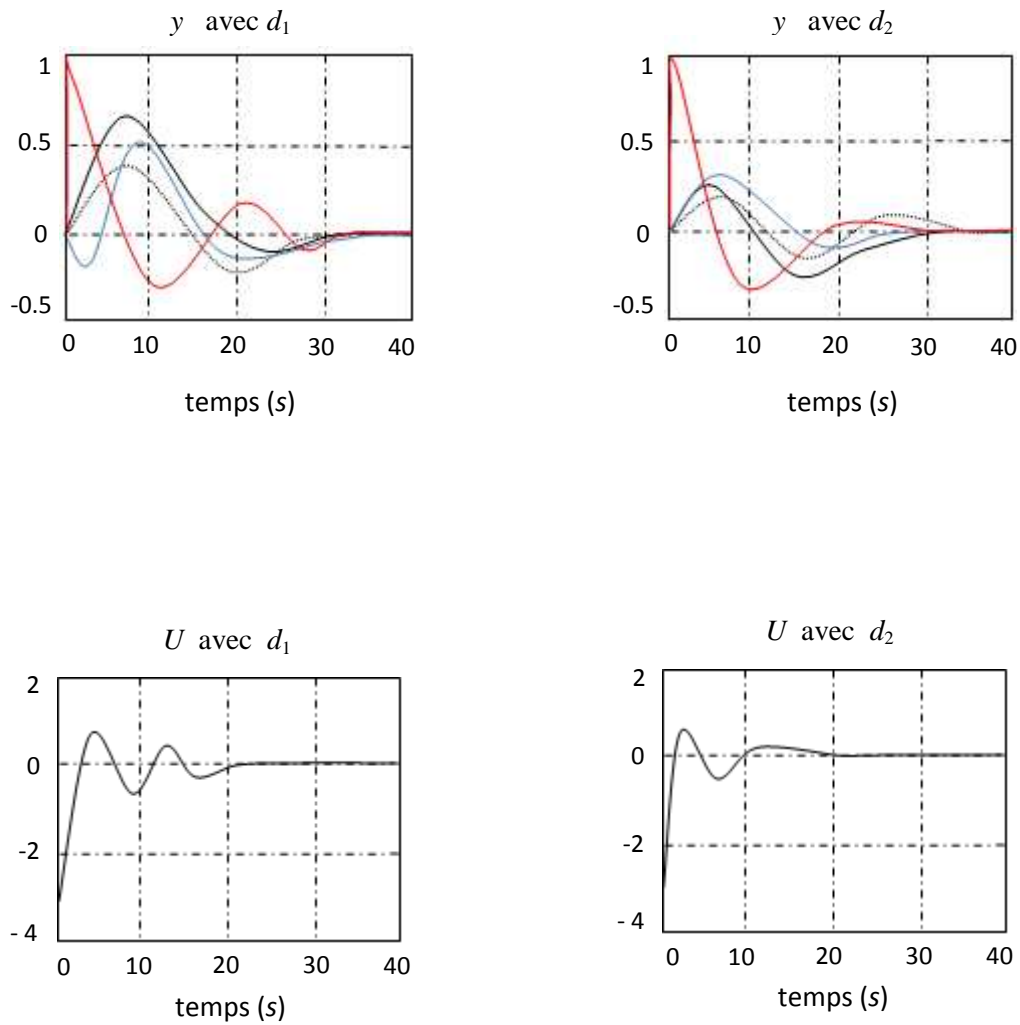
**8.3. Solution de problème  $H_2$  avec MOGA :**

Population de 200 -500

**Figure IV.9 :** les réponses Impulsionnelle et la commande  $H_2$  avec MOGA

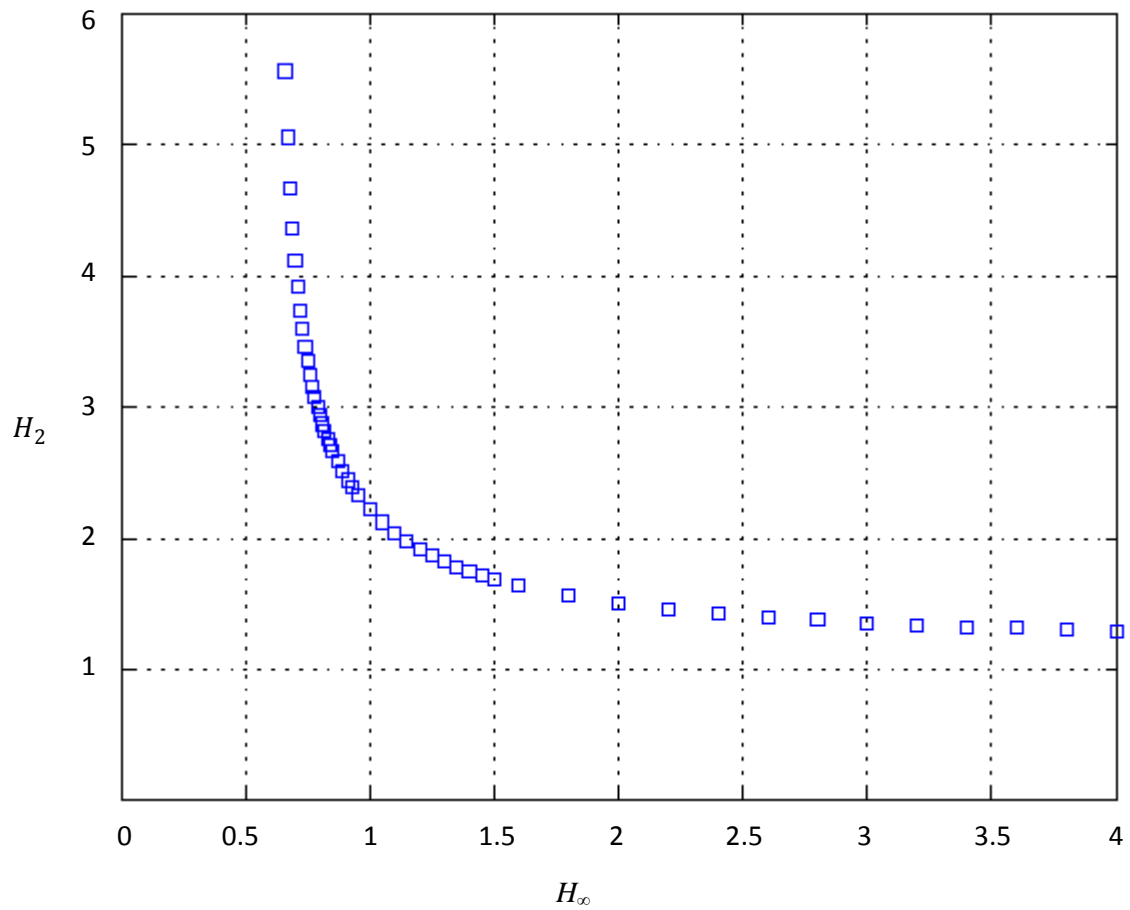
**8.4. Solution de problème H<sub>∞</sub> avec MOGA :**

Population de 200 -500

**Figure IV.10 :** les réponses Impulsionnelle et la commande H<sub>∞</sub> avec MOGA

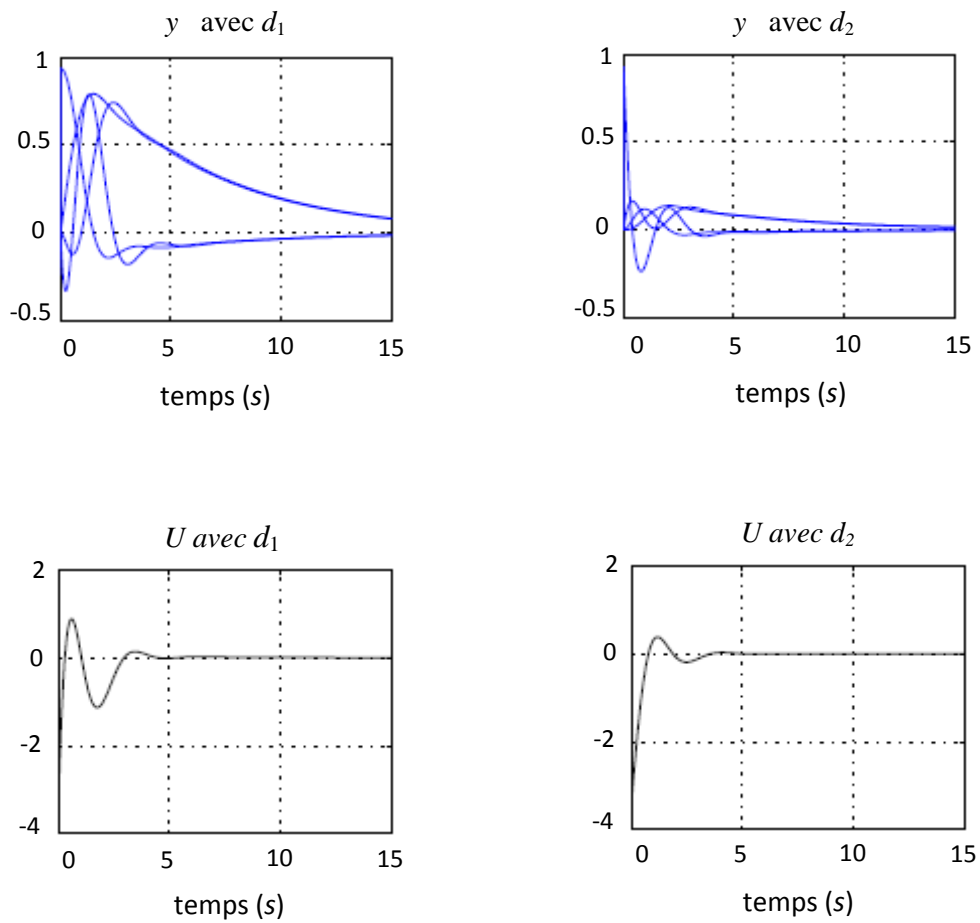
**8.5. Problème multi-objectifs  $H_2/H_\infty$  :****8.5.1. Solution de problème  $H_2/H_\infty$  avec LMI :**

Pour :  $\gamma = \gamma_2 = \gamma_\infty = 0.7$



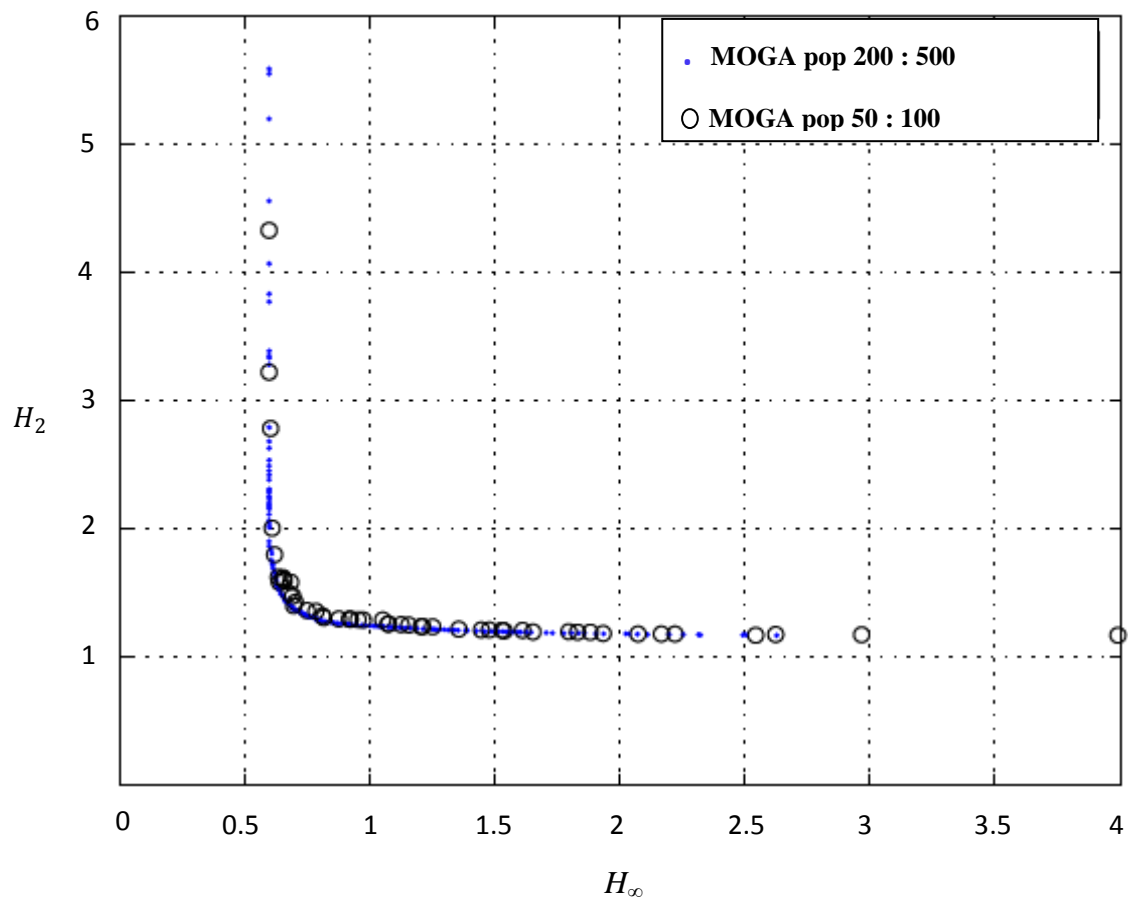
**Figure IV.11** résolution du problème  $H_2/H_\infty$  avec LMI

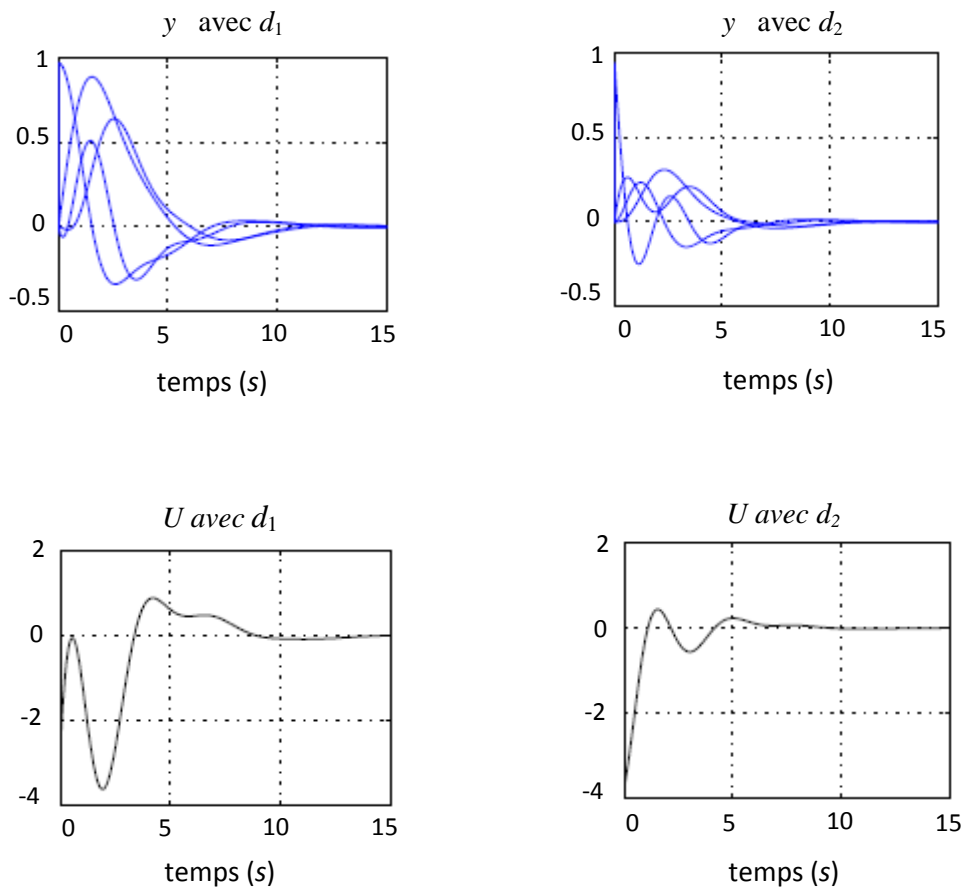


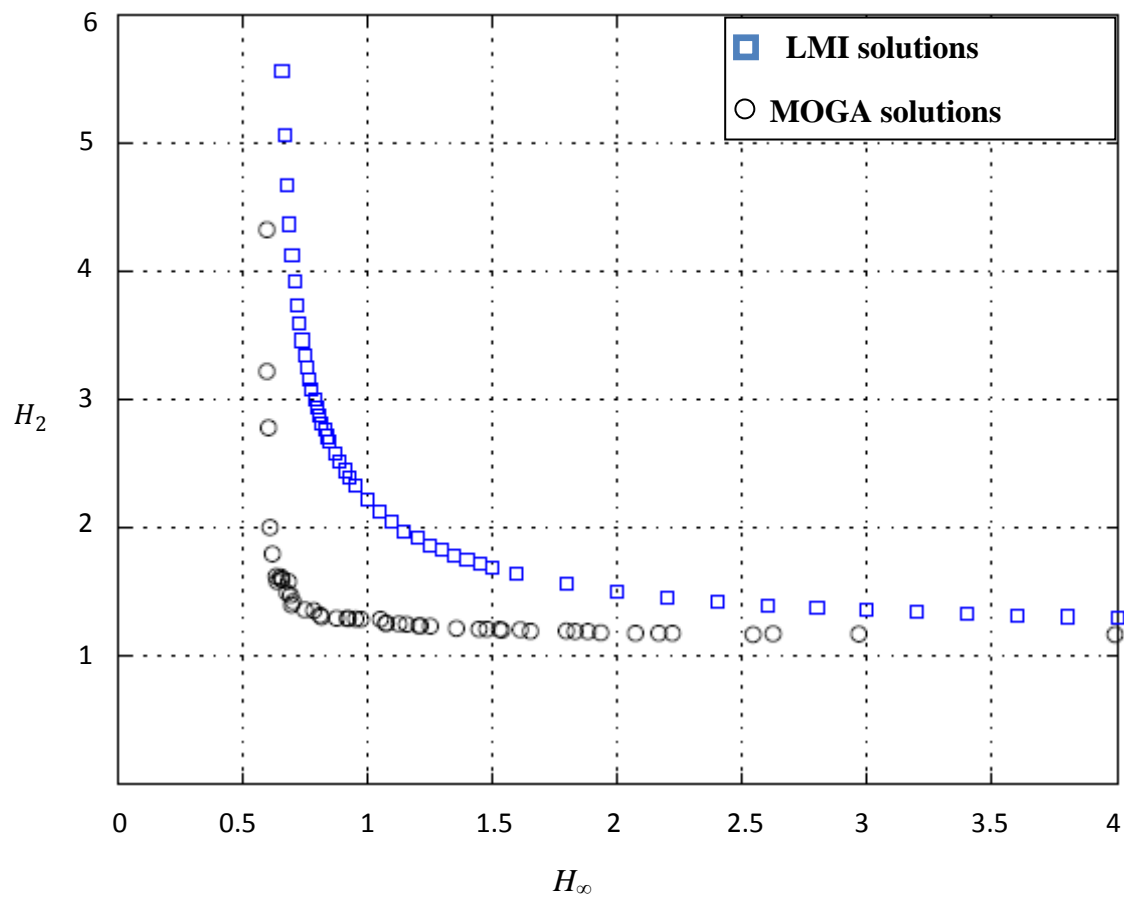
**8.5.1.1. Les réponses du système avec l'approche LMI :****Figure IV.12 :** les réponses Impulsionnelle et la commande avec LMI

**8.5.2. Solution de problème  $H_2/H_\infty$  avec MOGA :**

Population de 50-100 et de 200 -500

**Figure IV.13 :** résolution du problème  $H_2/H_\infty$  avec MOGA

**8.5.2.1. Les réponses du système avec l'approche MOGA :****Figure IV.14** : les réponses Impulsionnelle et la commande avec MOGA

**8.6. Comparaison entre les résultats de la commande LMI et MOGA :****Figure IV.15** Comparaison entre les résultats de LMI et MOGA

L'approche MOGA donne des meilleures solutions que l'approche LMI, la figure IV.15 présentée un front de Pareto de l'approche MOGA est mieux que le front de l'approche LMI puisqu'il conforme avec les exigences de la commande multi-objectifs qui exige d'atteindre le minimum de la norme H<sub>2</sub> du système en BF :  $Min ( \|T(K)\|_2 )$  avec le contrainte H<sub>∞</sub> ( $\|T(K)\|_∞ \leq 0.7$  ). Donc en trouve sur le front de l'allure MOGA le Pareto optimale qui contient les solutions efficaces, (non dominées), solutions non dominées par des autres points de front de Pareto.

On constate que les réponses du système sont stabilisées sur le consigne zéro après 15 secondes dans l'approche LMI, mais ils sont stabilisées après 10 secondes avec l'approche MOGA, malgré la présence des entrées de perturbation  $d_1, d_2$  et l'incertitude paramétrique, donc en peut dire que les deux commande LMI et MOGA sont des commandes robustes vis-à-vis les perturbations et l'incertitude.

Dans l'approche LMI et avec l'entrée de perturbation  $d_1$  en trouve un taux de dépassement sur les états supérieur que le dépassement de l'approche MOGA.

Une condition nécessaire pour les deux approches LMI et MOGA pour trouver l'optimum des solutions est la convexité de l'ensemble des objectifs

Les résultats de simulation montrent l'efficacité et les performances de deux types de commande LMI et MOGA. Ces commandes assurées, la stabilisation des systèmes et la robustesse vis-à-vis les perturbations et les incertitudes, donc d'après cette étude en peut dire :

L'approche LMI est basée sur le problème de faisabilité LMI, c'est-à-dire la résolution de problème multi-objectifs avec LMI est conditionnée par l'existence des matrice  $X, Y, Z, \hat{A}, \hat{B}, \hat{D}, \hat{C}$  qui sont formulés le correcteur et aussi la condition de convexité de l'ensemble des objectifs à optimisés mais cette technique de résolution est compliqué sur tous le choix de  $\gamma$  optimal.

L'approche MOGA est basée sur l'idée de développer une population initiale, qui est choisie aléatoirement et utiliser la notion de Pareto-optimalité (dominance de Pareto) pour faire la sélection multicritères. Cette notion de Pareto optimalité permet d'établir une relation de dominance entre les individus portant sur plusieurs critères, pour atteindre des solutions Pareto optimales dans tout le processus d'optimisation mais la réalisation du choix faux des paramètres peut produire excessivement des mauvais résultats.

D'après cette étude et ces résultats de simulation, on peut dire que le contrôleur de l'approche MOGA satisfait les exigences du contrôle multi-objectifs  $H_2/H_\infty$  d'une manière efficace et avec une simplicité de calcul des paramètres de contrôleur par contre l'approche LMI est plus compliquée.

### **9. Conclusion :**

Dans cette partie, nous avons abordé le problème de la commande multi-objectifs  $H_2/H_\infty$  par retour de sortie. Les différents critères de performances considérés incluent la stabilisation du système en boucle fermée, des performances  $H_2$  ainsi que des performances  $H_\infty$ . Nous avons proposé une caractérisation LMI des correcteurs stabilisant le système en boucle fermée et assurant des niveaux de réjection de perturbations.

L'application de deux types de commande LMI et MOGA sur un exemple de simulation (le système se compose de deux masses et un ressort avec des paramètres incertains) a donné de bons résultats pour la stabilisation et la robustesse de ces commandes.