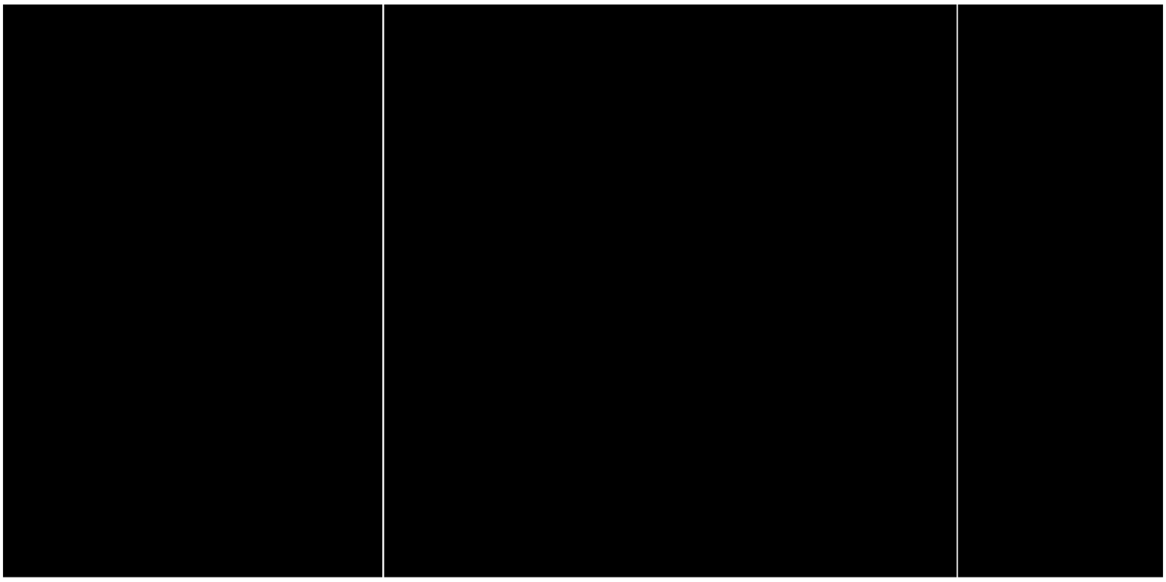
IV-Problématique et modélisation de la température à la sortie de l'échangeur air/sol

La structuration du système

Dans cette étude on s'intéresse à:

❖ Trouver l'évolution de la température du sol de sa surface à une certaine profondeur dite optimale pour placer l'échangeur air/sol (transfert de chaleur par conduction): résoudre un problème de conduction.

❖ Trouver la température de l'air à la sortie du tube enterré (transfert de chaleur par convection), donc la modélisation de la température de l'air à la sortie du tube enterré verticalement et horizontalement, en considérant l'écoulement permanent d'un fluide Newtonien, incompressible à viscosité constante dans un tube de section circulaire on supposera que le régime dynamique est établi.



. . . é è é à ’é /

IV- Modélisation de la température du sol et de l'air à la sortie de l'échangeur air/sol

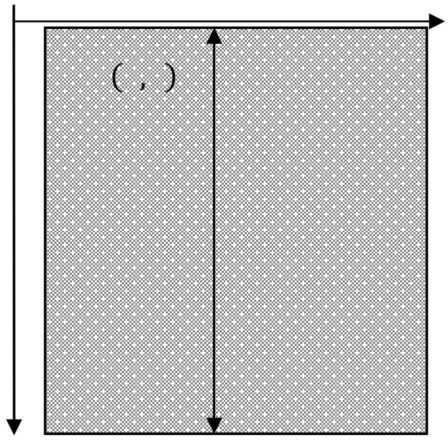
IV-1 Modélisation de la température du sol (transfert de chaleur par conduction)

Dans la géothermie de surface, on s'intéresse aux quelques premiers mètres en dessous de la surface du sol. De ce point de vue, le sol peut être considéré comme un milieu semi-infini. L'évaluation du potentiel de l'utilisation de la géothermie de surface et de la technologie appropriée pour son exploitation, passe par la détermination des variations, le long de l'année, de la température du sol à différentes profondeurs( ).

Ces variations sont obtenues à l'aide d'une modélisation simple utilisant les propriétés du sol et les températures ambiantes. On a considéré les températures ambiantes journalières durant une année.

Afin de faciliter l'emploi de ces données de température, lors des calculs, les évolutions de température en fonction du temps (jour) ont été représentées adéquatement par des fonctions cosinus:

$$(\ ) = \quad + \quad (\ - \ )$$



Le problème supposé unidimensionnel suivant l'axe( ). Le mode de transfert de chaleur dominant est la conduction. En supposant un milieu homogène, l'équation instationnaire de la chaleur dans ce cas s'écrit:

$$= \frac{}{} . \frac{}{}$$

Ou bien: $\frac{}{} = \ . \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots.(\ .1)$

: Température ambiante journalière [°]

: Fréquence angulaire [$= 2\ /365$] [rad/jour].

: Température moyenne annuelle [°].

: C'est l'amplitude de la variation de température.

(La ville de Biskra égale 12°c). [°]

: Jour de l'année où la température maximale.($= 206$) [ ]

: Conductivité du sol [/(.°)]

: Capacité calorifique massique du sol [/ .°]

: Masse volumique du sol [/]

: Température du sol, fonction de et de [°]

: Temps [ ]

: Profondeur en dessous de la surface du sol [ ]

: Diffusivité thermique [/]

Où: $= \ /(\ ).$

Pour résoudre cette équation différentielle, on a besoin de défini des conditions initiales et aux limites.

$$\frac{}{} = \frac{1}{}\,\frac{}{} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .2)$$

Avec les conditions aux limites:

- $(\quad = 0,) = \quad + \quad (\quad - \quad)$
- $(\infty, \;) =$

Introduisons la variable: $\quad = \quad - \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*)$

: C’est la température de sol à une profondeur , telle que $(\;) = \quad (\forall \quad > \;)$

L’équation différentielle aux derivées partielle prendra la forme:

$$\frac{}{} = \frac{1}{}\,\frac{}{} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (\quad .3)$$

En posant:

$$= \quad - \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (**)$$

Avec:

- $(\quad = 0,) = \quad + \quad (\quad - \quad)$
- $(\infty, \;) = 0$

En utilisant la méthode de séparation des variables:

$$=\propto(\;). \quad (\;) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .4)$$

Remplaçons dans l’équation différentielle aux derivées partielles:

$$(\;). \quad (\;) = \frac{1}{}. \quad (\;). \quad (\;) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .5)$$

Divisons les deux membres de l’équation par $\propto$ et :

$$\frac{(\;)}{(\;)} = \frac{(\;)}{(\;)} = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .6)$$

:Constant

La température sinusoïdale imposée en surface, régime périodique où le problème étant linéaire, en recherche d’une solution de même fréquence que l’excitation.

En supposons : $\quad = \quad$ où $\quad = -1$

$$(\quad .)6 \Rightarrow \quad ( ) - \quad ( ) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .)7$$

$\Rightarrow —— - \quad . \quad = 0$

$\Rightarrow —— = \quad .$

$\Rightarrow —— = \quad .$

$\Rightarrow \ln \quad = \quad . \quad +$

$\Rightarrow \quad = \quad ^{.}$

$\Rightarrow \quad = K. \quad ^{.}$

K , : Constants.

Cherchons :

$$\frac{( )}{( )} = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .)8$$

$\Rightarrow \quad ( ) - - \quad ( ) = 0$

C'est une équation différentielle 2^{è} ordre homogène qui admis comme solution:

$\Rightarrow \quad ( ) = \quad - \quad + \quad . \quad - -$

lim $_{\rightarrow}$ ( ) vers une limite finie $\Longrightarrow \quad \rightarrow 0$

$\Rightarrow \quad ( ) = \quad . \quad — \quad .$

On considère soit la partie réelle soit la partie imaginaire de la solution selon que la température varie comme cos (ωt) ou sin (ωt) et de nature périodique.

On aura: $( ) = \quad . \quad - -$ comme $\sqrt{\ } = \sqrt{\ }$

On aura : é [( ). ( ])= *é* . .. $—(\quad)$ ………… (.9)

Qui doit satisfaire l'équation (,) au point d'origine des abscisses $= 0$

$(\quad = 0,) = \quad + \quad (\quad - \quad)$

$= \quad$ é $\quad .1$

$= \quad$ é $[\quad . \quad .(\cos \quad + \quad \sin] \quad)$

$\Rightarrow \quad = \frac{(\quad)}{}$

$$(\quad .9) \Rightarrow (\quad ,) = \frac{-}{\quad (\quad) \quad} \quad . \quad \frac{-}{-}(\quad) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .10)$$

$$\Rightarrow (\quad ,) = \frac{(\quad)}{\quad} . \quad \frac{-}{-} \quad . \quad \frac{-}{-}$$

$$\Rightarrow (\quad ,) = \frac{- + \quad (\quad - \quad)}{\cos} . \quad \frac{-}{-} \quad (\cos \quad + \quad \sin \,). \quad \cos \quad - \frac{-}{2}$$

$$+ \quad \sin \quad - \frac{-}{2}$$

$$\Rightarrow (\quad ,) = \frac{+ \quad (\quad - \quad)}{\cos} . \quad \frac{-}{-} \quad \cos \quad . \cos \frac{-}{2} \quad - \quad \cos \quad \sin \frac{-}{2}$$

$$+ \quad \sin \quad \cos \frac{-}{2} \quad - \sin\omega t . \sin \quad \frac{-}{2}$$

Alors:

$$\Rightarrow (\quad ,) = \frac{+ \quad (\quad - \quad)}{\cos} . \quad \frac{-}{-} \quad \cos \quad . \cos \frac{-}{2} \quad + \sin\omega t . \sin \quad \frac{-}{2}$$

$$+ \quad \sin \quad \cos \frac{-}{2} \quad - \cos \quad \sin \frac{-}{2}$$

$$\Rightarrow (\quad ,) = \frac{+ \quad (\quad - \quad)}{\cos} . \quad \frac{-}{-} \quad \cos \quad \frac{-}{2}$$

$$+ \quad \sin \quad \cos \frac{-}{2} \quad - \cos \quad \sin \frac{-}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .11)$$

La partie réelle dans l'équation:

$$\frac{+ \quad (\quad - \quad)}{\cos} . \quad \frac{-}{-} \quad \cos \quad - \frac{-}{2}$$

Donc la solution de l'équation $(\quad .3)$

$$(\quad ,) = \frac{+ \quad (\quad - \quad)}{\quad} . \quad \frac{-}{-} \quad \frac{-}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .12)$$

En remplaçons l'équation $(**)$ dans l'équation$(\quad .12)$

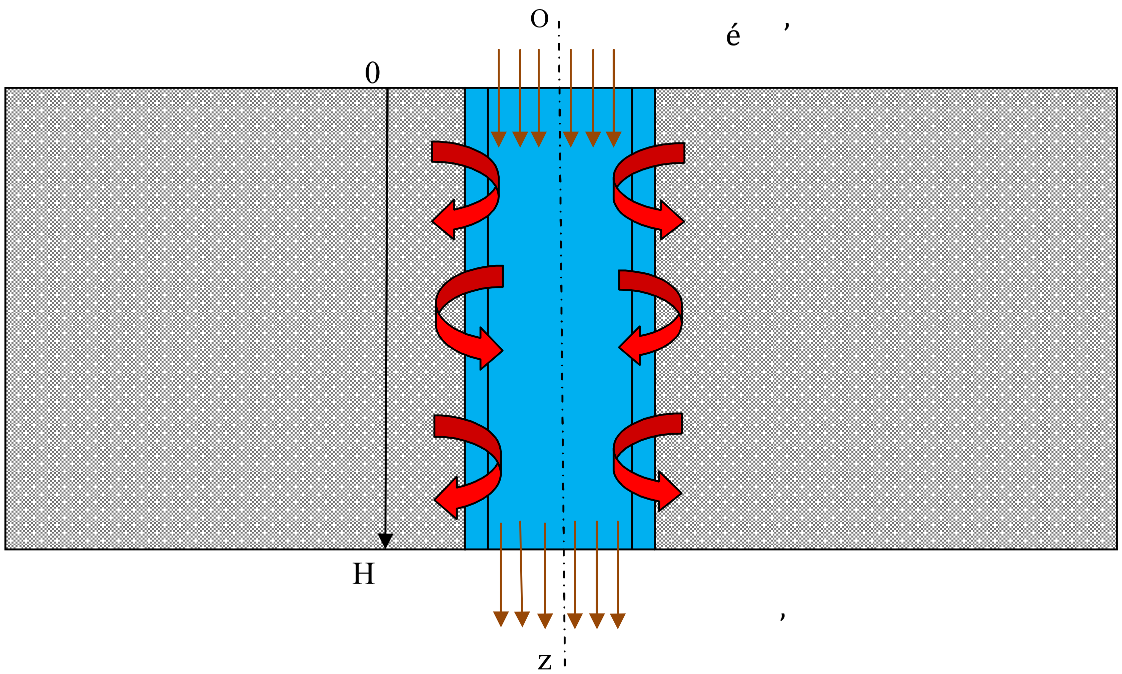
$$(\quad ,) = \frac{+ \quad (\quad - \quad)}{\quad} . \quad \frac{-}{-} \quad \frac{-}{2} \quad \frac{\quad}{\quad} \ldots\ldots (\quad .13)$$

En remplaçons l'équation (∗) dans l'équation(.13)

$$\Rightarrow \quad (\; ,) = \quad + \quad (\; - \;) \quad . \; \frac{\;}{\;} \quad \frac{\;}{2} \quad + \frac{1}{\;}$$

$$+ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .14)$$

IV-2 Modélisation de la température de l'air à la sortie du tube enterré verticalement (Transfert de chaleur par convection)



. . . é è

L'équation du bilan thermique pour ce tube est:

$$\frac{\;}{\;} = \quad \vec{\;} \quad - \quad \vec{\;} + \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .15)$$

On considère l'écoulement permanent d'un fluide Newtonien, incompressible à viscosité constante dans un tube de section circulaire on supposera que le régime dynamique est établi:

- L'air est un fluide incompressible $\vec{\;} = 0$.
- mouvement unidirectionnel suivant $\rightarrow \Rightarrow (\; = \; = 0)$

  : La vitesse de l'air suivant(.)

  : La vitesse de l'air suivant( ).

: La vitesse de l'air suivant( ).

: La pression de l'air.

$\Rightarrow — = 0 \ , — = 0$ ……………………………………………………………(.16)

- Établi $— \rightarrow 0$
- le fluide à propriétés physiques $, C , \ ,$ constantes.
- l'énergie interne est donnée par $= C \ +$

$— = \ . \ . \ —$ ……………………………………………………………(.17)

- L'écoulement de l'air est permanent:

$$— = 0$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{1}{-}.— \quad — \quad +—$$

Alor:

$$(\ .15) \Rightarrow C \ — = \frac{1}{-}.— \quad — \quad +— \quad + \quad —$$ ……………(.18)

En générale, le terme de dissipation visqueuse — et le terme de conduction longitudinale — sont négligeables.

Dans ces conditions, l'équation (.18) s'écrit:

$$C \quad — = —.— \quad —$$ ……………………………………(.19)

$$\Rightarrow \quad C \quad — = \quad — + \frac{1}{-}—$$

$$\Rightarrow — = \frac{}{C} \quad — + \frac{1}{-}—$$ ……………………………………(.20)

On peut simplifier l'équation (.20) comme suit:

$$= \frac{}{C}$$

L'équation (.20) sera:

$$— = —— \quad —— + \frac{1}{-}—— \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .21)$$

Pour une section rectangulaire ∇ . va être remplacé par∇ . . Dans ce cas, on peut écrire l'équation d'énergie dans les coordonnées cartésiennes on aura alors:

$$— = ———— \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .22)$$

IV-3 Modélisation de la température de l'air à la sortie du tube enterré horizontalement (transfert de chaleur par convection)

- **Le coefficient d'échange convectif**

  Le coefficient d'échange convectif dans un tube est défini par:

$$h \quad = \frac{\cdot}{——} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .23)$$

Où :

	: Nombre de Nusselt	[−]
	: Conductivité thermique de l'air	[/(. °)]
	: Diamètre intérieur du tube	[ ]
h	: Coefficient d'échange convectif	[/(. °)]

Le nombre de Nusselt est calculé à l'aide de la relation de Colburn:

$$= 0.0214(\quad ^{\cdot} - 100). \quad ^{\cdot} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .24)$$

Où:

	: Nombre de Reynolds	[−]
	: Nombre de Prandtl	[−]

$$= \frac{\cdot}{———} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .25)$$

Où:

	: Vitesse de l'air	[/]
	: Diamètre intérieur du tube	[ ]
	: viscosité dynamique de l'air	[/ .]

$$= \frac{\cdot \quad \cdot}{} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .26)$$

Où:

: Viscosité cinématique de l'air [/]

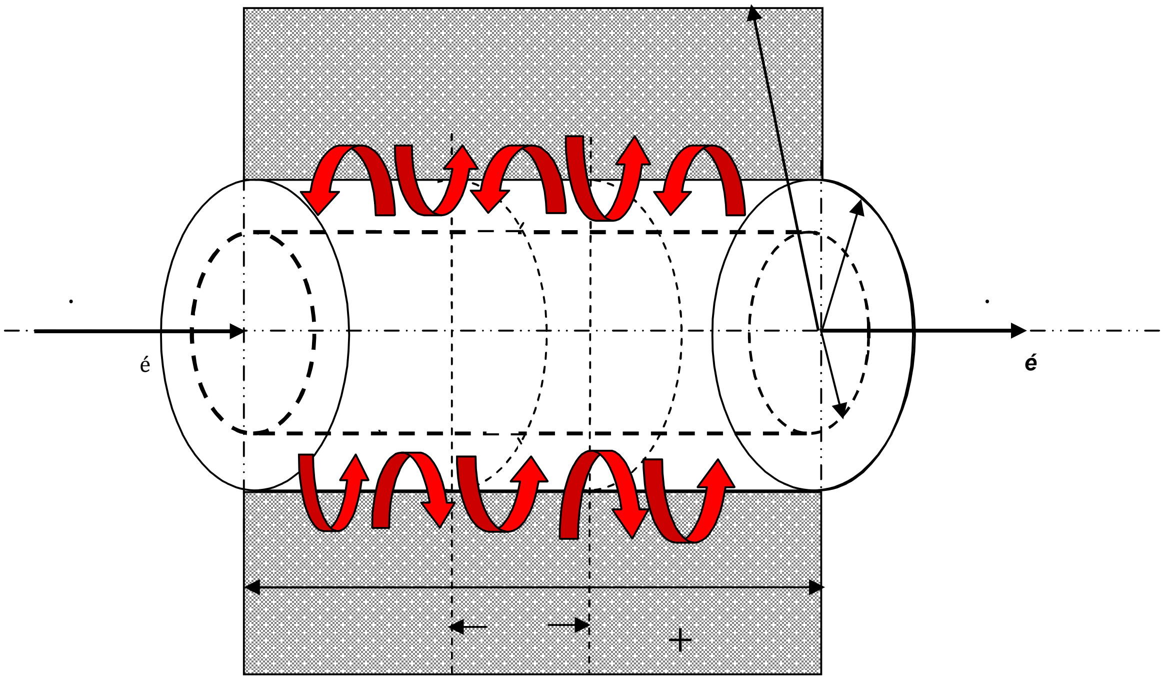
: Masse volumique de l'air [/]

: Chaleur massique de l'air [/ °.]

: Conductivité thermique de l'air [/(.°)]

- **La modélisation de la température de l'air à la sortie du tube enterré horizontalement**

L'échangeur est représenté par un tube rectiligne d'une longueur L. On suppose que la température du sol n'est plus perturbée par le débit d'air. Prenons un élément de tube, entre x et x+dx.



. . . é

L'équation de bilan thermique pour ce tube est :

$$\dot{} . \quad .(\quad + \quad - \quad) = \frac{}{\mathcal{R} \quad + \mathcal{R} \quad + \mathcal{R}} .(\quad - \quad) \ldots\ldots\ldots (\quad .27)$$

Avec :

.

: é ’…………………………………………………………………. [/]

: Chaleur massique de l’air ……………………………………………………… [/ .°]

$\mathcal{R}$: Résistance thermique correspondant à l’échange convectif entre l’air et le tube ………………………………………………………………. [.° /]

$\mathcal{R}$: Résistance thermique du tube enterré ………………………………………. [.° /]

$\mathcal{R}$: Résistance thermique entre le tube et le sol ……………………………………. [.° /]

: Température de sol (non perturbé par le débit d’air dans le tube enterré)……… [°]

$$\mathcal{R} = \frac{1}{h \ .2. \ .} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\quad .28)$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{.2. \ .} \quad - \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\quad .29)$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{.2. \ .} \quad \frac{}{} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\quad .30)$$

Avec:

: Rayon intérieur du tube enterré [ ]

: Rayon extérieur du tube enterré [ ]

: Rayon de la couche adiabatique du sol [ ]

: Conductivité thermique du tube enterré [/(.°)]

: Conductivité thermique du sol [/(.°)]

Soit la résistance thermique totale entre l’air et le sol non perturbé:

$$= \frac{1}{\mathcal{R} + \mathcal{R} + \mathcal{R}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\quad .31)$$

L’équation(.27) devient:

$$\frac{}{-} = \frac{.}{.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\quad .32)$$

L'intégrale de (.32)

$$(\quad - \quad) = \frac{}{\cdot \; \cdot} . \quad + C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .33)$$

Pour $= 0$

$= \qquad _{é}$

$$\Rightarrow C = \; (\quad - \quad)._{é} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .34)$$

En remplaçant C par sa valeur dans (.33) on obtient :

$$\frac{-}{-_{é}} = \frac{-}{\cdot \; \cdot} . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .35)$$

Par suite:

$$+ (\quad -_{é} \quad). \overline{\cdot \; \cdot \;.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .36)$$

Pour $=$:

$$\cdot . \quad . \quad = \frac{}{+ \quad +} . (\quad - \quad)$$

$$+ (\quad -_{é} \quad). \overline{\cdot \; \cdot \;.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .37)$$

➢ **L'efficacité du tube enterré**

L'efficacité du tube enterré sera alors déterminée à l'aide de l'équation suivante:

$$= \frac{- \qquad _{é}}{- \qquad _{é}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\quad .38)$$

: L'efficacité du tube enterré.

Les équations (.37) et (.38) donnent:

$$= 1 - \frac{\cdot\ \cdot}{}.$$

$$+_{é}(\quad - \quad).\,_{é}\,1 - \frac{\cdot\ \cdot}{}. \quad \ldots\ldots(\quad .39)$$

$$+_{é}(\quad - \quad).\,_{é} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(\quad .40)$$

➢ **Perte de charge dans le tube enterré**

La différence de pression dans un tube est donnée par l'expression suivante:

$$= -.. \frac{\cdot}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(\quad .41)$$

Les pertes de charge dans un tube sont données par:

$$= -.. \frac{1}{}. \frac{}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(\quad .42)$$

Où:

: La différence de pression. [ ]

: Longueur du tube. [ ]

: Diamètre intérieur du tube. [ ]

: Masse volumique de l'air. [/]

: Vitesse de l'air. [/]

: Coefficient de perte de charge singulière. [−]

: La pesanteur [/]

: Les pertes de charge [ ]

On suppose:

L'écoulement laminaire (< 2000) donc:

$$= \frac{64}{}$$