

## Commande à structure variable

### III.1 Introduction

De nombreux systèmes réels et notamment les machines électriques présentent, en plus des perturbations extérieures, des non linéarités et des erreurs paramétriques.

Les lois de commande utilisant les régulateurs de type PID donnent de bons résultats dans le cas des systèmes linéaires à paramètres constants. Pour des systèmes non linéaires ou ayant des paramètres non constants, ces lois de commande classique peuvent être insuffisantes car elles ne sont pas robustes surtout lorsque les exigences sur la précision et autres caractéristiques dynamiques du système sont strictes. On doit faire appel à des lois de commande insensible aux variations de paramètres, aux perturbations et aux non linéarités.

Le recours à des algorithmes de commande robuste est donc souhaitable aussi bien en stabilisation qu'en poursuite de trajectoire.

La commande à structure variable (CSV) qui par sa nature est une commande non linéaire, possède cette robustesse. Elle est basée sur la commutation de fonctions de variables d'état, utilisées pour créer une variété (ou surface) de glissements, dont le but de forcer la dynamique du système à correspondre avec celle définie par l'équation de surface [UTK 93]. Quand l'état est maintenu sur cette surface, le système se trouve en régime glissant. Sa dynamique est alors insensible aux perturbations extérieures et aux variations des paramètres tant que les conditions du régime glissant sont assurées [ZAH 98].

Dans la pratique, l'utilisation de cette technique de commande a été longtemps limitée par les oscillations liées aux commutations de la commande et qui peuvent se manifester sur les grandeurs asservies. Depuis de nombreuses solutions ont été proposées permettant de réduire ces oscillations : augmentation de la fréquence de commutation, commande continue dans une bande autour de la variété de glissements ou décomposition de la commande en une composante continue de basse fréquence et en commande discontinue de haute fréquence [OUN 03].

L'étude présentée dans ce mémoire concerne des algorithmes de CSV appliqués à un moteur synchrone à aimants permanents pour le contrôle en vitesse ou en position.

## III.2 Principe de la commande par mode de glissement

### III.2.1 Bases mathématiques de la commande à structure variable

La modélisation mathématique de la commande à structure variable (formalisation dans le contexte de la théorie des équations différentielles) conduit à des équations différentielles de la forme [UTK 93] [KOU 02]:

$$\dot{x}(t) = F(x, t, u) = f(x, t) + B(x, t) \cdot u(x, t) \quad (\text{III.1})$$

où :

$x$  (vecteur d'état)  $\in \mathcal{R}^n$ ,

$f$  (vecteur de fonctions de  $x$  et  $t$ )  $\in \mathcal{R}^n$ ,

$B$  (matrice de fonctions de  $x$  et  $t$ )  $\in \mathcal{R}^{n \times m}$ ,

$u$  (vecteur de commande)  $\in \mathcal{R}^m$ .

$F$  représente des fonctions continues par morceaux, ayant des discontinuités sur une surface  $S$ .

Ainsi la surface  $S(x)$  représente le comportement dynamique désiré du système. J.J Slotine propose une forme d'équation générale pour déterminer la surface de glissement qui assure la convergence d'une variable vers sa valeur désirée [MAD 98]:

$$S(x) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_x \right)^{r-1} \cdot e(x) \quad (\text{III.2})$$

avec :

$$e(x) = x_{\text{ref}} - x$$

où:

$e(x)$ : écart de la variable à régler .

$\lambda_x$  : Constante positive qui interprète la bande passante du contrôle désiré.

$r$  : degré relatif, égal au nombre de fois qu'il faut dériver la sortie pour faire apparaître la commande.

$S(x) = 0$  : est une équation différentielle linéaire dont l'unique solution est  $e(x) = 0$  .

Après le choix de la surface  $S$ , le vecteur de commande  $u$ , dont chaque composante  $u_i$  subit une discontinuité sur  $S_i(x) = 0$ , est donné par [BRO 94] [UTK 77] :

$$\begin{cases} u_i(x) = u_i^+(x) & \text{si } S_i(x) > 0 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m \\ u_i(x) = u_i^-(x) & \text{si } S_i(x) < 0 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

L'équation (III.3) nous montre que le changement de valeur du vecteur de commande  $u$  dépend du signe de la surface  $S(x)$ . La surface  $S(x) = 0$  s'appelle surface de commutation et la commande est indéterminée sur cette surface.

### III.2.2 Exemple de synthèse d'une commande à structure variable

Le réglage par mode de glissement, connu aussi comme système de réglage à structure variable (CSV), est fondamentalement une méthode qui s'adapte bien lorsque la réponse est forcée à glisser le long d'une trajectoire prédéfinie. De plus, un système à structure variable peut posséder de nouvelles propriétés qui ne sont pas présentées dans les structures individuelles. Par exemple, un système asymptotiquement stable peut être composé de deux structures qui sont, asymptotiquement, non stables.

Dans cette section, cette possibilité est éclairée par deux exemples très simples, dont le but est de présenter les avantages de changement des structures pendant une phase de contrôle.

- Considérons, pour le premier exemple, un système de  $2^{\text{ème}}$  ordre [UTK 77] [YAN] :

$$\dot{x} = -\Psi \cdot x \quad (\text{III.4})$$

avec :

$\Psi$  : la commande du système.

$x$  : la variable d'état.

Le comportement du système dépend de la valeur de la commande  $\Psi$ . Ce système à deux structures est définies par :

$$\Psi = \alpha_1^2 \quad \text{et} \quad \Psi = \alpha_2^2, \quad \text{avec} \quad \alpha_1^2 > \alpha_2^2.$$

Le système change de structure et sa représentation dans le plan de phase est donnée par les figures 3.1.a, 3.1.b. Par conséquent, aucune des deux structures n'est asymptotiquement stable. Cependant, pour aboutir à une structure asymptotiquement stable, on fait une combinaison entre les deux structures.

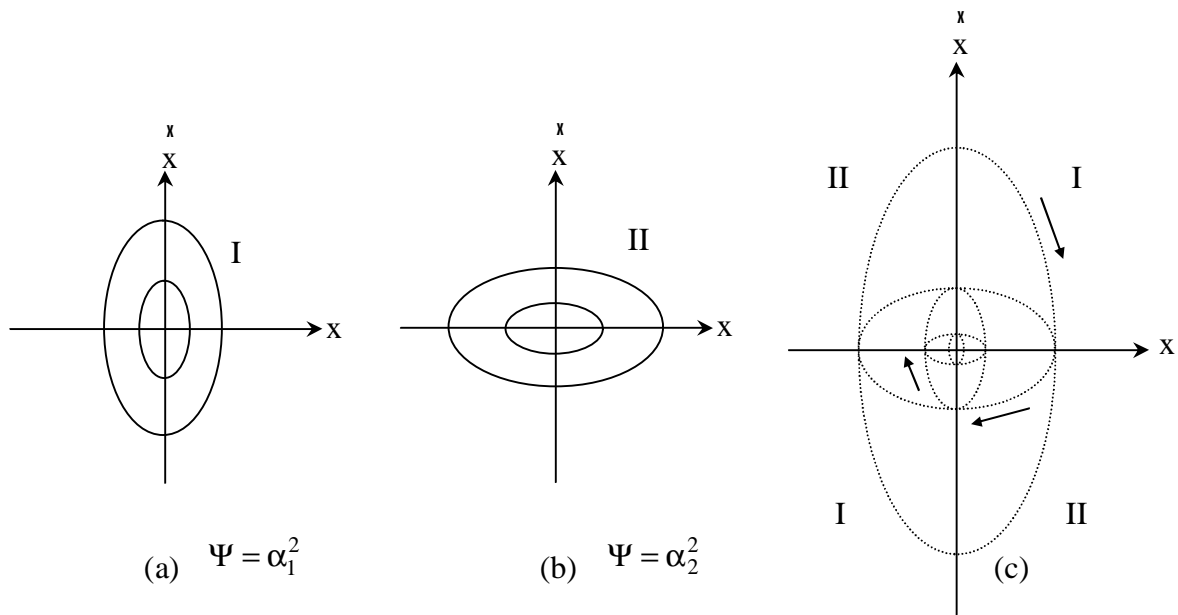


Figure 3.1: Stabilisation asymptotique d'un CSV constitué de deux structures marginalement stables.

Le système est donc stable (figure 3.1.c) lorsque sa structure varie selon la commutation suivante:

$$\Psi = \begin{cases} \alpha_1^2 & \text{si } x \cdot \dot{x} > 0 \\ \alpha_2^2 & \text{si } x \cdot \dot{x} < 0 \end{cases} \tag{III.5}$$

- pour le deuxième exemple [UTK 77] [YAN ], on a le système suivant :

$$\ddot{x} - \xi \cdot \dot{x} + \Psi \cdot x = 0, \quad \xi > 0 \tag{III.6}$$

où la structure linéaire correspond aux réactions négative et positive quand  $\psi$  est équivalent soit à  $\alpha > 0$  ou à  $-\alpha$ .

**1<sup>ère</sup> cas:  $\psi = \alpha$**

Les racines de ces équations sont complexes. Par conséquent, le système représenté dans le plan diverge avec un point d'équilibre instable à l'origine (figure 3.2). (a,b).

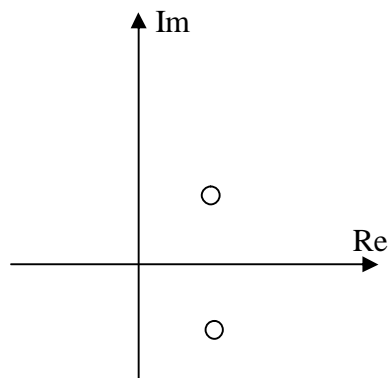


Figure 3.2.a: Lieu de racines pour  $\psi = \alpha$

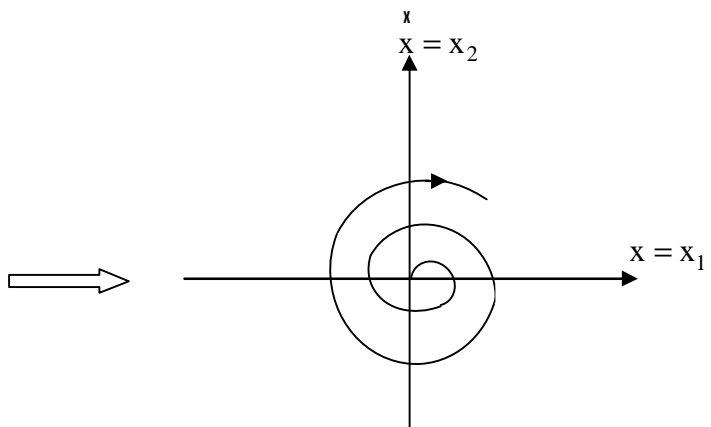


Figure 3.2.b: Plan de phase

**2<sup>ème</sup> cas:  $\psi = -\alpha$**

Le portrait de phase du système ayant des racines réelles, représente une colle avec des asymptotes (figure 3.2). (c,d).

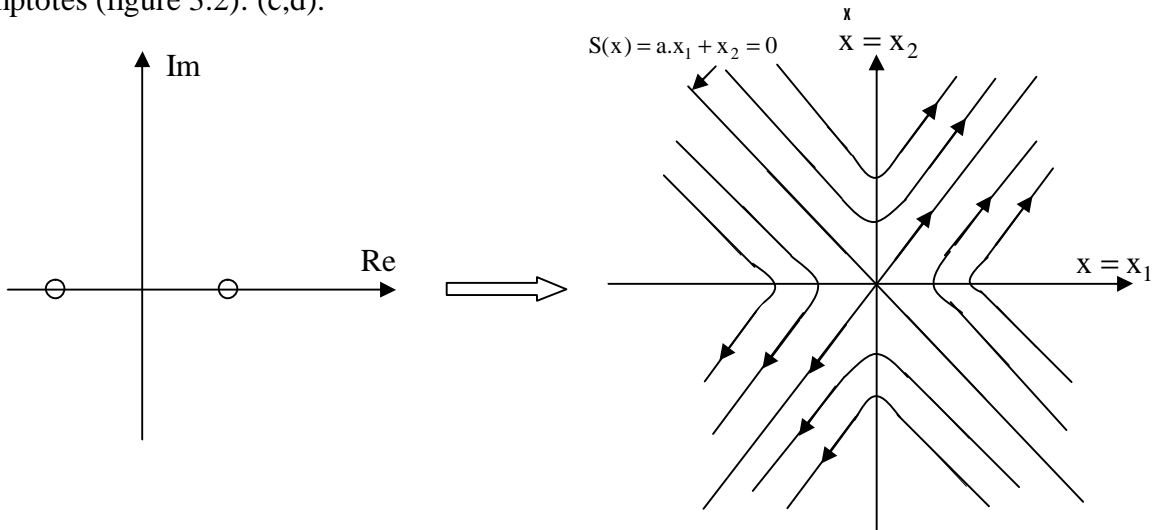


Figure 3.2.c: Lieu de racines pour  $\psi = -\alpha$

Figure 3.2.d: Plan de phase

Les deux structures présentées par ce système sont donc instables. Nous remarquons qu'un seul mouvement qui converge vers l'origine le long d'un vecteur stable de la structure qui correspond à  $\psi = -\alpha$ .

Si la commutation se trouve au niveau de cette ligne et à  $x_1 = 0$  avec la loi de commutation:

$$\psi = \begin{cases} \alpha & \text{si } x_1 \cdot S(x) > 0 \\ -\alpha & \text{si } x_1 \cdot S(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

où  $S(x) = a \cdot x_1 + x_2$ ,  $a = \lambda = -\frac{\zeta}{2} \pm \sqrt{\frac{\zeta^2}{4} + \alpha}$

alors, le système CSV résultant sera asymptotiquement stable (figure 3.2.e).

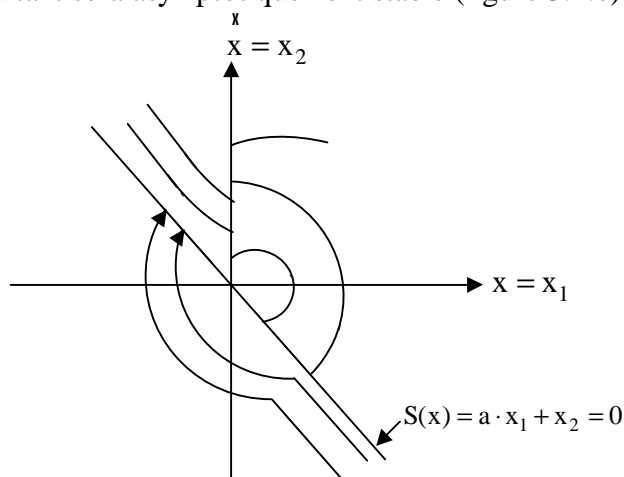


Figure 3.2.e: Stabilité asymptotique d'un système CSV constitué de deux structures instables.

### III.2.3 Démonstration du mode de glissement

Les deux structures traitées ci-dessus sont instables. Les propriétés du nouveau système sont obtenues par la composition des trajectoires désirées à partir de celles des différentes structures. Pour montrer comment un tel mouvement a lieu, nous reconsidérons le deuxième exemple avec  $0 < a < \lambda$  au lieu de  $a = \lambda$  (figure 3.3). On y remarque que les trajectoires de phase sont dirigées vers la ligne de commutation  $S(x) = a \cdot x_1 + x_2 = 0$  [UTK 77].

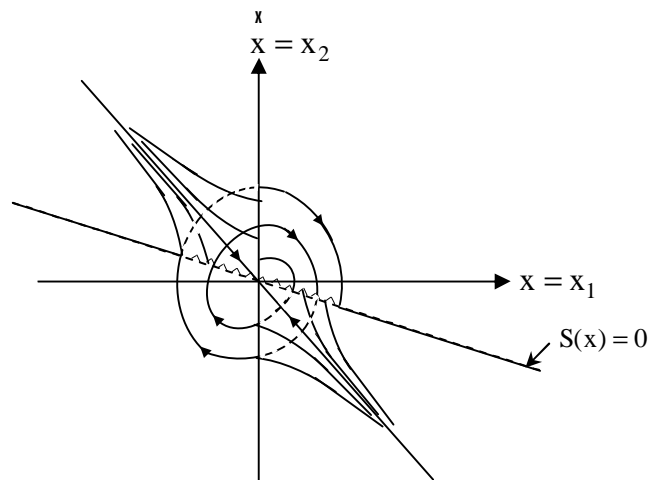


Figure 3.3: modes de glissement d'un système à structure variable du 2<sup>ème</sup> ordre

Le mouvement le long de la ligne, qui ne représente la trajectoire d'aucune des deux structures, crée le mode de glissement.

Le phénomène de commutation le long de cette ligne de glissement peut être démontré à l'aide de la figure 3.4.

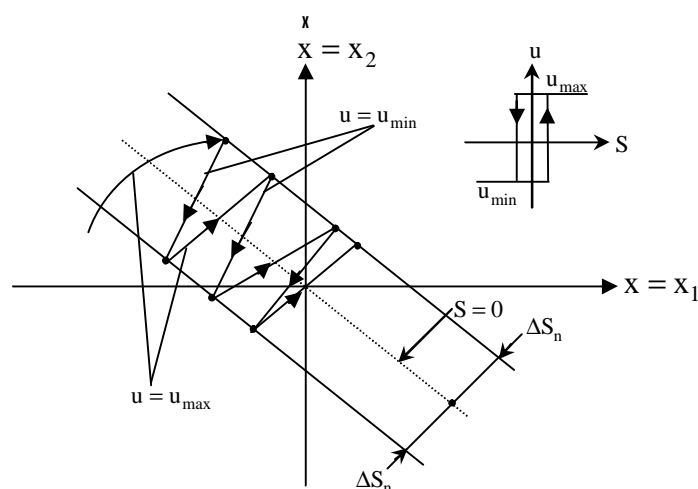


Figure 3.4: Démonstration du mode de glissement

La trajectoire dans le plan de phase est constituée de trois parties distinctes [FAQ 03], (figure 3.5).

- **Le mode de convergence (MC)** : durant lequel la variable à réguler se déplace à partir de n'importe quel point du plan de phase vers la surface de commutation  $S(x) = 0$  et l'atteint dans un temps fini. Ce mode est caractérisé par la loi de commande et le critère de convergence.
- **Le mode de glissement (MG)** : durant lequel la variable d'état a atteint la surface glissante et tend vers l'origine du plan de phase. La dynamique dans ce mode est caractérisée par le choix de la surface de glissement  $S(x) = 0$ .
- **Le mode de régime permanent (MRP)** : il est ajouté pour l'étude de la réponse du système autour de son point d'équilibre. Il caractérise la qualité et la performance de la commande. Il est utilisé spécialement pour l'étude des systèmes non linéaires.

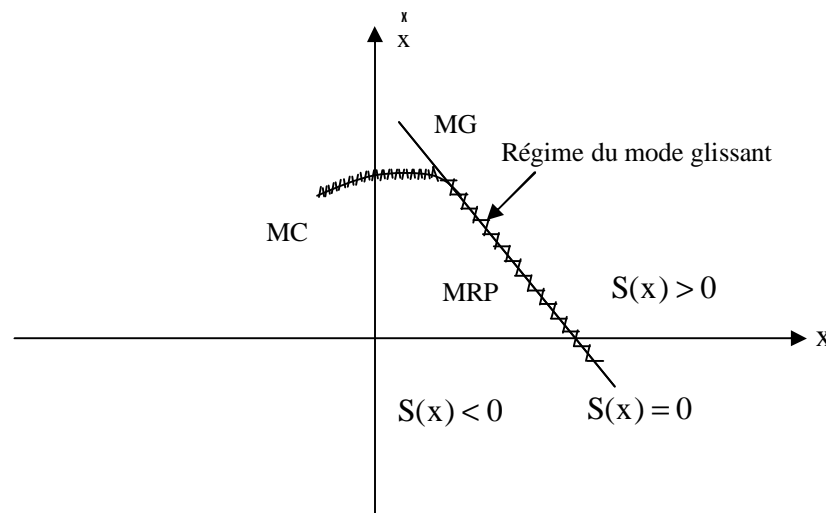


Figure 3.5: Les différents mode de trajectoire dans le plan de phase.

### III.2.4 Conditions d'existence du mode de glissement

Le deuxième aspect important, après la conception de la surface de commutation, est d'assurer l'existence du mode de glissement.

Le problème d'existence ressemble à un problème de stabilité généralisé. La deuxième méthode de Lyapunov nous fournit un milieu naturel pour l'analyse. Spécifiquement, la stabilité de la surface de commutation exige le choix d'une fonction scalaire généralisée de Lyapunov  $V(x, t)$  définie positive. C'est la première condition de convergence qui permet aux dynamiques du système de converger vers les surfaces de glissement.

Cette fonction de Lyapunov est définie comme suit: [MER 02] [BEL 02] :

$$V(x) = \frac{1}{2} S^2(x) \quad (\text{III.8})$$

Pour que la fonction de Lyapunov décroisse, il suffit d'assurer que sa dérivée est négative. Ceci est vérifié si :

$$S(x) \cdot \dot{S}(x) < 0 \quad (\text{III.9})$$

Cette inégalité fondamentale, connue comme une condition d'existence, est utilisée pour résoudre le problème de la synthèse des systèmes à structure variable. Elle nous permet donc de déterminer les paramètres de réglage.

Tant que  $S(x) \cdot \dot{S}(x) < 0$  est vérifié, la dynamique du système sur  $S(x)$ , ainsi que sa stabilité sont indépendantes de la fonction  $f(x,t)$ . Elles dépendent uniquement des paramètres de la surface choisie. Ceci explique l'invariance de ces lois de commande par rapport aux perturbations agissant sur la partie commande.

D'autre part, comme on l'a mentionné ci-dessus (figure 2.4), il existe le mode de glissement lorsque les commutations ont lieu continûment entre  $u_{\max}$  et  $u_{\min}$ . Alors, la valeur de la grandeur de commande doit prendre une valeur bien déterminée, désignée par : grandeur de commande équivalente " $u_{\text{eq}}$ ", d'où la condition d'existence [ZAH 98], [KOU 02] :

$$u_{\min} \leq u_{\text{eq}} \leq u_{\max} \quad (\text{III.10})$$

### III.2.5 La commande équivalente

Un vecteur de commande équivalente  $u_{\text{eq}}$  se définit comme étant les équations du régime glissant idéal. Nous nous intéressons au calcul de la commande équivalente et par la suite au calcul de la commande attractive du système défini dans l'espace d'état par l'équation (III.1).

Le vecteur  $u$  est composé de deux grandeurs  $u_{\text{eq}}$  et  $u_n$  soit :

$$u = u_{\text{eq}}(t) + u_n \quad (\text{III.11})$$



Utilisons l'équation (III.1) et (III.11) permet obtenir la commande équivalente  $u_{eq}$  :

Nous avons :

$$\overset{x}{S}(x) = \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x} \left[ f(x, t) + B(x, t) u_{eq}(t) \right] + \frac{\partial S}{\partial x} [B(x, t) u_n] \quad (III.12)$$

En mode de glissement et en régime permanent, la dérivée de la surface est nulle (parce que  $S(x) = 0$ ). Ainsi nous obtenons :

$$u_{eq} = - \left[ \frac{\partial S}{\partial x} B(x, t) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial S}{\partial x} f(x, t) \right], \quad u_n = 0 \quad (III.13)$$

En portant  $u_{eq}$  dans l'équation (III.1), on obtient l'équation du régime glissant idéal [20] :

$$\overset{x}{x}(t) = f(x, t) - B(x, t) \cdot \left[ \frac{\partial S}{\partial x} B(x, t) \right]^{-1} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} f(x, t) \quad (III.14)$$

Cette équation représente la dynamique du système équivalent dans la surface de glissement [KOU 02].

La commande  $u_{eq}$  peut être interprétée comme étant la valeur moyenne que prend la commande  $u$  lors des commutations rapides entre  $u^+$  ( $u_{max}$ ) et  $u^-$  ( $u_{min}$ ) (figure 3.6).

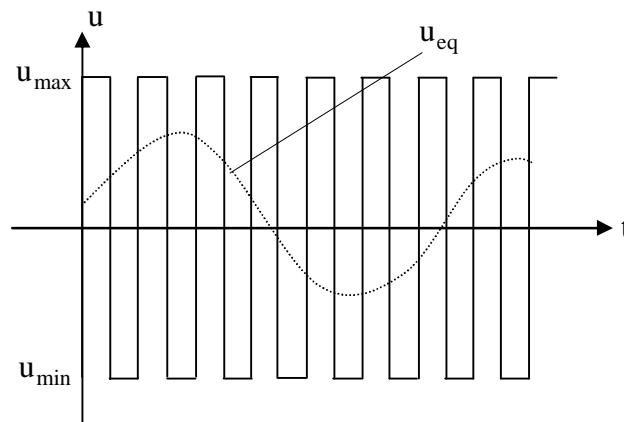


Figure 3.6: Commande équivalente  $u_{eq}$ .

Tant que le régime glissant est assuré [condition (III.9) vérifiée], le système d'écrit par l'équation (III.1) est robuste, indépendant des variations des paramètres de la partie commandée et des perturbations qui agissent sur lui. Il admet en outre des erreurs de modélisation, tant que ces variations et erreurs maintiennent les conditions du régime glissant qui s'effectue alors au voisinage de l'hyper surface de glissement  $S_i(x) = 0$ .

### III.2.6 La commande discontinue de base

L'addition du terme  $u_n$  à la loi de commande permet d'assurer l'attractivité de la surface de glissement  $S$ . Celle-ci est attractive si seulement si  $S(x) \cdot \dot{S}(x) < 0$ . Cette condition permet de définir la région dans laquelle le mode de glissement existe.

Durant le mode de convergence, on remplace le terme  $u_{eq}$  par sa valeur donnée par (III.13) dans l'équation (III.12). Nous obtenons donc une nouvelle expression de la dérivée de la surface, soit :

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial x} \{B(x, t) \cdot u_n\} \quad (\text{III.15})$$

Le problème revient à trouver  $u_n$  tel que :

$$S(x) \cdot \dot{S}(x) = S(x) \frac{\partial S}{\partial x} \{B(x, t) u_n\} < 0 \quad (\text{III.16})$$

La solution la plus simple est de choisir  $u_n$  sous la forme de relais. Dans ce cas, la commande s'écrit comme suit:

$$u_n = K \cdot \text{sign}(S(x)) = K \cdot |S(x)| \quad (\text{III.17})$$

En remplaçant l'expression (III.17) dans (III.16) on obtient :

$$S(x) \cdot \dot{S}(x) = S(x) \cdot \frac{\partial S}{\partial x} B(x, t) \cdot K |S(x)| < 0 \quad (\text{III.18})$$

où le facteur  $\frac{\partial S}{\partial x} B(x, t)$  est toujours négatif pour la classe de systèmes que nous considérons.

Le gain  $K$  doit être positif afin de vérifier les conditions de l'attractivité et de la stabilité.

Cependant l'utilisation de la commande de type relais peut provoquer des dynamiques indésirables caractérisées par le phénomène de chattering.

#### III.2.6.1 Commande sign

Plusieurs choix pour la commande discontinue ( $u_n$ ) peuvent être faits. Le plus simple consiste à exprimer la commande discontinue  $u_n = [u_1, u_2, \dots, u_n]$  avec la fonction sign par rapport à  $S = [S_1, S_2, \dots, S_n]$ .

$$\begin{cases} \text{sign}(S(x)) = +1 & \text{si } S(x) > 0 \\ \text{sign}(S(x)) = -1 & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

$u_n$  s'exprime donc comme :

$$u_n = K \cdot \text{sign}(S(x))$$

où  $K$  est un gain positif.

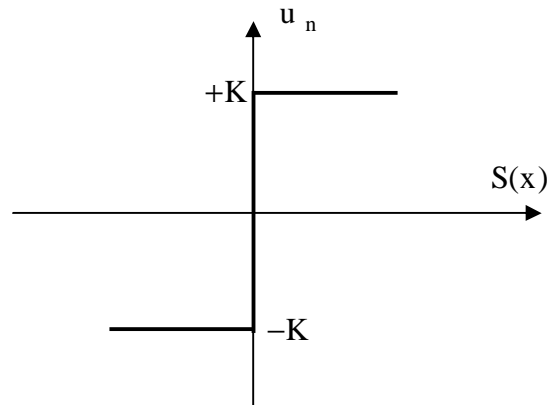


Figure 3.7: Définition de la fonction sign.

### III.2.6.2 Commande avec un seul seuil

Cette commande est caractérisée par un seul seuil et la commande discontinue est donnée par l'expression :

$$\begin{cases} u_n = 0 & \text{si } |S(x)| < e \\ u_n = K \cdot \text{sign}(S(x)) & \text{si } |S(x)| > e \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

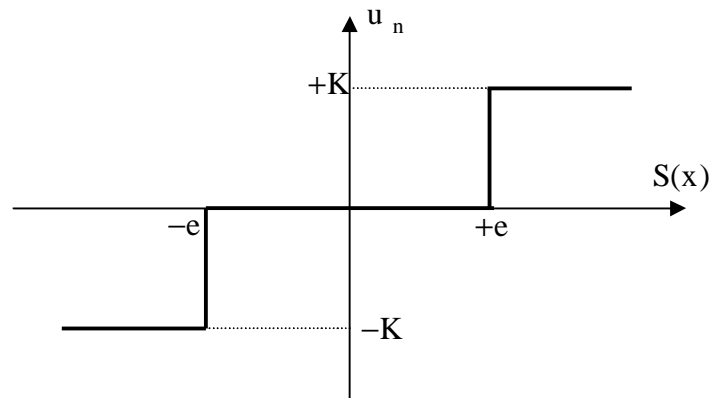


Figure 3.8: Fonction sign de la commande avec un seul seuil.

### III.2.6.3 Commande adoucie

Dans le but de diminuer progressivement la valeur de la commande  $u_n$  en fonction de la distance entre la trajectoire de la variation à régler et la surface de glissement, on doit encadrer la surface par une bande avec un ou deux seuils.

On peut distinguer trois zones qui dépendent de la distance du point à la surface de glissement. Si la distance est supérieure au seuil  $e_2$ , alors la fonction sign est activée. Si la distance est inférieure au seuil  $e_1$ , alors  $u_n$  est nulle (zone morte). Si le point est dans la bande  $(e_1, e_2)$ , alors  $u_n$  est une fonction linéaire de la distance (droite de pente  $\frac{K}{e_1 - e_2}$ ). (figure 3.9).

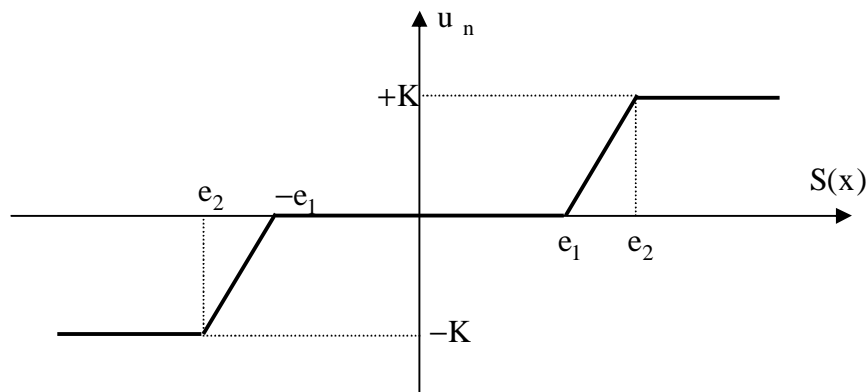


Figure 3.9: Fonction sign de la commande adoucie.

### III.2.6.4 Commande intégrale

Les oscillations de hautes fréquences qui apparaissent sur les réponses en régime glissant peuvent être évitées en rendant continue la commande discontinue  $u_n$ . Pour cela, on remplace la fonction sign par la fonction intégrale.

$$u_n = K \cdot \frac{S(x)}{|S(x)| + 1} + h \quad (\text{III.21})$$

tel que :

$$l = l_0 + |g|$$

avec:

$$\begin{cases} g = g_0 \int S(x) dt & \text{si } |S(x)| < e \\ g = 0 & \text{si } |S(x)| > e \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} h = h_0 \int S(x) dt & \text{si } |S(x)| < e \\ h = 0 & \text{si } |S(x)| > e \end{cases}$$

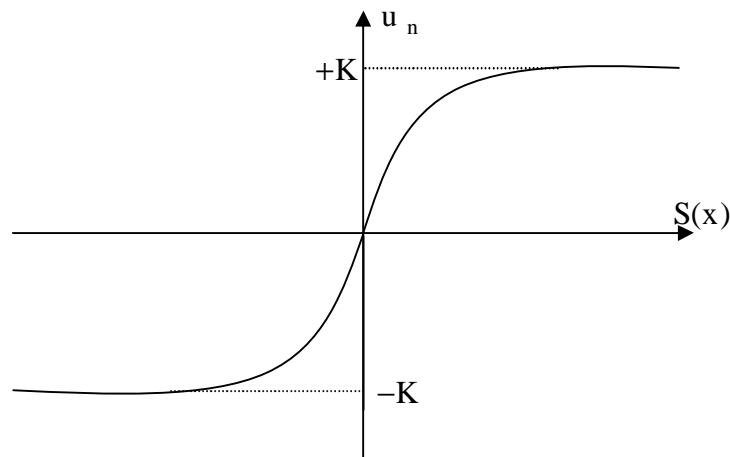


Figure 3.10: CSV rendu continue.

## Conclusion

Dans ce chapitre, on a abordé une méthode de réglage moderne, c'est le réglage par mode glissant. On a présenté le principe de la CSV pour les différentes structures de la commande non linéaire  $u_n$ . Nous avons étudié les techniques de conception des régulateurs par mode glissants. En effet, la conception de ces régulateurs prend en charge les problèmes de stabilité et les performances désirées d'une façon systématique.

La mise en œuvre de cette méthode de commande nécessite principalement trois étapes:

- *Le choix de la surface*: le choix de la surface de glissement concerne non seulement le nombre nécessaire de ces surfaces, mais également leur forme, en fonction de l'application et l'objectif visé.
- *L'établissement des conditions de la convergence*: c'est la première condition de convergence qui permet aux dynamiques du système de converger vers les surfaces de glissement.
- *La détermination de la commande*: une fois la surface de glissement choisie, ainsi que le critère de convergence, il reste à déterminer la commande nécessaire pour ramener la variable à contrôler vers la surface et ensuite vers son point d'équilibre en maintenant la condition d'existence des modes glissants.

L'étude présentée dans le chapitre suivant, concerne l'application de la CSV à un moteur synchrone à aimants permanents pour le contrôle en vitesse ou en position.