

## II.1 Introduction

Les structures stratifiées composites sont largement employées en conception, dans de nombreux domaines tels que les loisirs, les sports et les transports. Dans le but de répondre à des normes de sécurité, le dimensionnement de ces structures nécessite la prise en compte des phénomènes d'endommagement qui peuvent apparaître lors de certaines sollicitations statiques et dynamiques. Ainsi les stratifiés qui subissent des impacts peuvent montrer une sensibilité au délaminage, qui est préjudiciable à l'intégrité mécanique de la structure. Le délaminage (fissuration à l'interface entre plis) est couplé aux endommagements intra-laminaires des plis et constitue un phénomène majeur dans la dégradation des caractéristiques mécaniques d'un stratifié et l'endommagement résultant d'un impact à faible vitesse (inférieure à 10 m/s) peut être difficile à déceler[4].

## II.2 Mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture a pour objet essentiel l'étude des fissures macroscopiques : elle s'applique lorsqu'il existe dans le matériau des discontinuités telles dans la matière qu'elles viennent modifier l'état de contrainte, déformation et déplacement, si bien que l'homogénéisation du milieu n'a plus de sens.

La séparation en deux parties disjointes d'un corps se produit à la suite de la phase d'amorçage, qui a vu le développement de microcavités, microfissures sous l'action de sollicitations mécaniques, thermiques, chimiques. La propagation de la ou des fissures macroscopiques peut conduire à la séparation complète de plusieurs morceaux ou bien au contraire les fissures peuvent s'arrêter. Le mode de rupture peut être fragile, la rupture se produisant alors souvent sans déformation plastique, ou ductile, en présence d'une déformation plastique importante[1].

## II.3 Modes de rupture.

Trois modes de rupture principaux sont considérés

### II.3.1 Mode I

Un déplacement uniquement suivant  $oy$  correspond à un problème plan particulier désigné par le mode I. Ce mode est, le plus souvent, le plus dangereux.

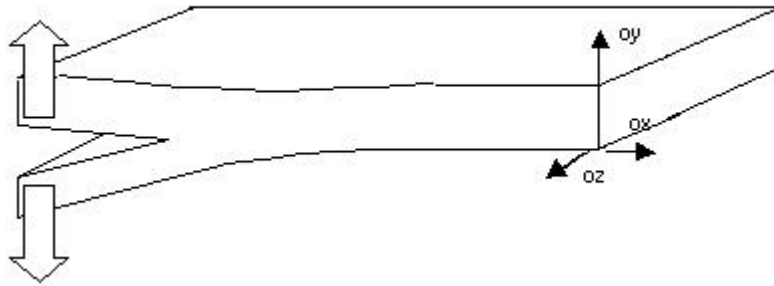


Figure.II.1 : Mode I : ouverture

### II.3.1.2 Mode II

Il est engendré par un cisaillement dans le plan de la fissure et parallèle à l'axe OX.

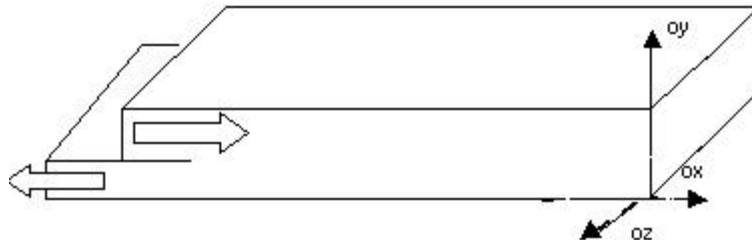


Figure.II.2 : Mode II : glissement dans le plan

### II.3.1.3 Mode III

Il est produit par un cisaillement antiplan, situé dans le plan de la fissure  $oxz$  et parallèle à l'axe  $oz$ .

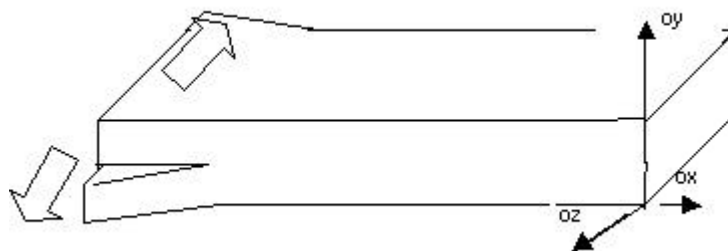


Figure.II.3 : Mode III : glissement antiplan.

C'est le mode I qui est l'objet de notre travail.

## II.4 Facteur d'intensité des contraintes, $K$

Tous les problèmes plans faisant intervenir une fissure conduisent à des

contraintes et des déformations infinies lorsque  $r \rightarrow 0$ . (Figure II. 4) On dit que la pointe de la fissure constitue une singularité ; quand on considère la fissure comme la limite d'une entaille de forme elliptique aiguë ( $b \ll a$ ),  $a$  est un facteur de concentration de contraintes.

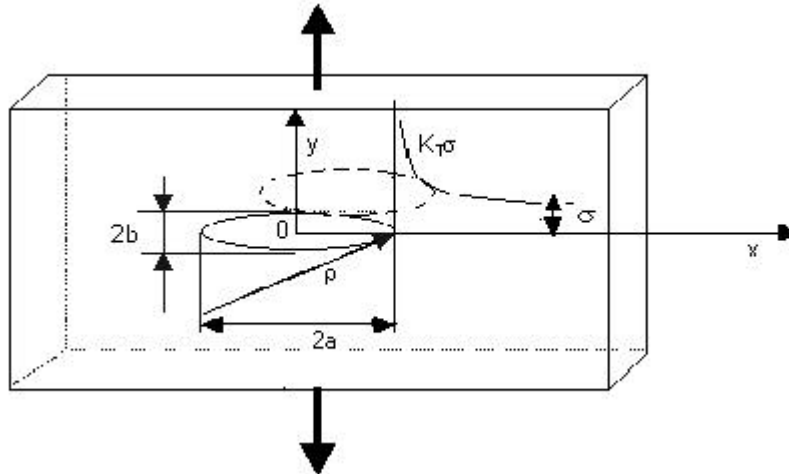


Figure.II.4 : Plaque percée d'un trou de section elliptique

$$K_T \cong 2 \sqrt{\frac{a}{r}} \quad \text{II.1}$$

$K_T$  : Facteur de concentration de contrainte  
Si  $a \gg \rho$

Ainsi pour une fissure, lorsque  $\rho \rightarrow 0$ ,  $K_T \rightarrow \infty$  : C'est ce qui se passe pour une fissure très aiguë, comme celle produite par fatigue. Le terme prépondérant de cette singularité est en  $(1/r)^{1/2}$  pour tous les problèmes. Seule cette solution permet à l'énergie élastique de rester finie[1].

## II.5 Champs de contraintes et de déplacements [2]

### II.5.1 Mode I

#### a) Contraintes

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2pr}} \left( \cos \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \left( 1 - \sin \frac{\mathbf{q}}{2} \sin \frac{3\mathbf{q}}{2} \right) \\
 \mathbf{s}_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2pr}} \left( \cos \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \left( 1 + \sin \frac{\mathbf{q}}{2} \sin \frac{3\mathbf{q}}{2} \right) \\
 \mathbf{s}_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2pr}} \left( \cos \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \left( \sin \frac{\mathbf{q}}{2} \sin \frac{3\mathbf{q}}{2} \right) \\
 \mathbf{s}_{zz} &= \mathbf{n}(\mathbf{s}_{xx} + \mathbf{s}_{yy}) \quad \text{en déformation plane} \\
 \mathbf{s}_{zz} &= 0 \quad \text{en contrainte plane}
 \end{aligned}
 \tag{II.2}$$

#### b) Déplacements

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{K_I}{2m} \sqrt{\frac{r}{2p}} \left( \cos \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \left( k - 1 + 2 \sin^2 \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \\
 u_y &= \frac{K_I}{2m} \sqrt{\frac{r}{2p}} \left( \sin \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \left( k + 1 - 2 \cos^2 \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \\
 k &= 3 - 4\mathbf{n} \quad \text{en déformation plane} \\
 k &= \frac{3 - \mathbf{n}}{1 - \mathbf{n}} \quad \text{en contrainte plane}
 \end{aligned}
 \tag{II.3}$$

### II.5.2 Mode II

#### a) Contraintes

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_{xx} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2pr}} \left( -\sin \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \left( 2 + \cos \frac{\mathbf{q}}{2} \cos \frac{3\mathbf{q}}{2} \right) \\
 \mathbf{s}_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2pr}} \left( \sin \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \left( \cos \frac{\mathbf{q}}{2} \cos \frac{3\mathbf{q}}{2} \right) \\
 \mathbf{s}_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2pr}} \left( \cos \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \left( 1 - \sin \frac{\mathbf{q}}{2} \sin \frac{3\mathbf{q}}{2} \right) \\
 \mathbf{s}_{zz} &= \mathbf{n}(\mathbf{s}_{xx} + \mathbf{s}_{yy}) \quad \text{en déformation plane} \\
 \mathbf{s}_{zz} &= 0 \quad \text{en contrainte plane}
 \end{aligned}
 \tag{II.4}$$

**b) Déplacements**

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_{II}}{2m} \sqrt{\frac{r}{2p}} \left( \sin \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \left( k + 1 + 2 \cos^2 \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \\ u_y &= \frac{K_{II}}{2m} \sqrt{\frac{r}{2p}} \left( -\cos \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \left( k - 1 - 2 \sin^2 \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \end{aligned} \quad \text{II.5}$$

**II.5.3 Mode III**

**a) Contraintes**

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{zz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2pr}} \left( -\sin \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \\ \mathbf{s}_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2pr}} \left( \cos \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \end{aligned} \quad \text{II.6}$$

**b) Déplacements**

$$u_z = \frac{2K_{III}}{m} \sqrt{\frac{r}{2p}} \left( \sin \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \quad \text{II.7}$$

avec  $\theta$  : c'est l'angle entre le plan de la fissure et le rayon

Ces relations montrent que la seule connaissance du facteur d'intensité de contrainte  $K$ , qui est fonction à la fois du chargement et de la géométrie, permet de décrire la distribution des contraintes en pointe de fissure. Cette propriété permet de comparer les résultats obtenus sur des éprouvettes au comportement de structures fissurées. Leur identité, en condition d'élasticité linéaire, est assurée par l'égalité des facteurs d'intensité des contraintes. Ces expressions correspondent au premier terme du développement limité. De façon générale[1] :

$$\mathbf{s}_{ij} = \frac{K_a}{\sqrt{2pr}} f_{ij}^a(\mathbf{q}) + o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad \text{II.8}$$

Dès qu'on s'éloigne de la fissure, d'autres termes dits réguliers interviennent, le symbole  $o(1/r^{-1/2})$  signifiant que ces termes sont négligeables devant  $-(1/r^{-1/2})$  quand  $r \rightarrow 0$ .

Dans un problème réel, la solution sera souvent une combinaison linéaire des trois modes d'ouverture élémentaires I, II et III.

Irwin a montré que  $K_I$  peut s'exprimer par[1] :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{P}}{2} \mathbf{s}_{\max} \sqrt{r} \quad \text{II.9}$$

Le mode I est physiquement le plus important puisque l'ouverture de la fissure conduit assez facilement à la rupture. De plus, les autres modes ne sont pas toujours aisés à contrôler. En particulier, les problèmes liés au frottement des lèvres dans les deux modes de cisaillement ne sont pas toujours faciles à maîtriser. Enfin, en mode I, une fissure se propage dans son propre plan par symétrie. Il n'en est pas de même dans les autres cas[1].

## II.6 Taux de restitution d'énergie[1]

### Définition

Dans le cas où l'énergie cinétique est négligée, la puissance mécanique disponible pour ouvrir une fissure de surface A (Figure II.5) est égale à la variation de l'énergie potentielle totale P, résultat de la variation de l'énergie élastique stockée dans la structure et de la variation d'énergie liée aux forces extérieures. Cette contribution mécanique est appelée taux de restitution d'énergie. Elle peut se définir quel que soit le type de comportement. Son unité est le joule/m<sup>2</sup> [1].

$$G = - \frac{\partial P}{\partial A} \quad \text{II.10}$$

avec :

- P : l'énergie potentielle stockée dans la structure.
- $\partial A$  : l'incrément de surface correspondant à l'extension de la fissure.
- G : le taux de restitution d'énergie élastique

Cette énergie sert à créer de nouvelles surfaces libres, ce qui implique des apports d'énergie. En appelant  $\gamma_s$  l'énergie spécifique de rupture par unité de surface, il est donc nécessaire pour que la fissure se propage que la contribution mécanique équilibre au moins l'énergie dissipée (théorie de Griffith pour la rupture fragile), soit dans un milieu plan d'épaisseur unité. [1]

Considérons le système fermé de la figure II. 5 constitué d'une pièce fissurée et les forces qui lui sont appliquées. Le matériau a un comportement élastique linéaire.

[1]

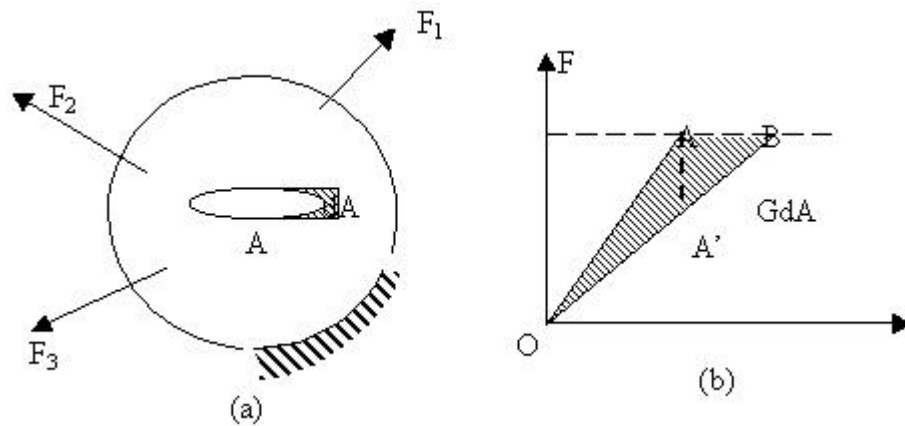


Figure.II.5: Taux de restitution d'énergie

le premier principe de la thermodynamique donne :

$$dU+dE+d(2A+S)\gamma_s+dW_c=0 \quad \text{II.11}$$

U :Energie potentielle des forces appliquées

E :Energie élastique emmagasinée

$(2A+S)\gamma_s$  : Energie de surface avec (A :Surface de la fissure, S :Surface externe

et  $\gamma_s$  :Constante caractéristique du matériau).

$W_c$  :Energie cinétique.

Soit :  $dS=0 \quad dP=dU+dE$

P :Energie potentiel total (U+E)

La relation(II.11) devient :  $dP+2\gamma_s dA +dW_c=0 \quad \text{II.12}$

Soit :  $G=2\gamma_s+dW_c/dA \quad \text{II.13}$

A l'équilibre :  $dW_c=0$  donc  $G=G_c=2\gamma_s \quad \text{II.14}$

Lorsque  $G=2\gamma_s$ ,on peut dire que la rupture est contrôlée, il n'y a pas accroissement de l'énergie cinétique.

Si G dépasse ce seuil critique, la fissure se propage.

Si  $G \leq 2\gamma_s$  la fissure devrait se refermer (  $dA < 0$  puisque  $dW_c > 0$  ). En réalité, cela ne se produit pas en raison de l'apparition de divers processus irréversibles[1].

## II.7 Relation entre le taux de restitution et la compliance de la structure

Soit :  $F_i$  les forces appliquées à la structure et  $u$  les déplacements de leur point d'application. On définit *compliance*  $C$  (inverse de la raideur) par

$$C = u/F \quad \text{II.15}$$

$G$  représente l'aire située dans le triangle OAB lorsque l'essai est effectué à charge imposée au triangle OAA' (Figure.II.5b), quand on opère à déplacement imposé[1].

### II.7.1 Cas d'un déplacement imposé

$$\begin{aligned} dU &= 0 \\ E &= \frac{1}{2} Fu = \frac{1}{2} u^2 \\ G &= -\frac{\partial p}{\partial A} = -\frac{\partial E}{\partial A} = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{C}\right)^2 \frac{\partial C}{\partial A} = F^2 \frac{\partial C}{\partial A} \end{aligned} \quad \text{II.16}$$

### II.7.2 Cas d'un chargement à effort imposé

$$\begin{aligned} U &= -Fu = -CF^2 \\ E &= \frac{1}{2} Fu = -\frac{1}{2} CF^2 \\ G &= -\frac{\partial p}{\partial A} = -\left(\frac{\partial u}{\partial A} + \frac{\partial E}{\partial A}\right) \frac{\partial C}{\partial A} \\ G &= \frac{1}{2} F^2 \frac{\partial C}{\partial A} \end{aligned} \quad \text{II.17}$$

On remarque que lorsque la fissure se propage, il y a augmentation de l'énergie élastique stockée ( $dE > 0$ ). Le travail des forces extérieures compense cette diminution. Dans les deux cas, on arrive à la relation générale[1] :

$$G = \frac{1}{2} F^2 \frac{\partial C}{\partial A} \quad \text{II.18}$$

Cette relation est utile, dans certains cas, pour déterminer le facteur d'intensité de contraintes[1].



## II.8 Relation entre $K$ et $G$

Le facteur d'intensité des contraintes décrit la distribution des contraintes et des déformations près d'une fissure. Il est intuitif de penser que le taux de libération d'énergie,  $G$ , sera une grandeur très sensible à la singularité des contraintes.

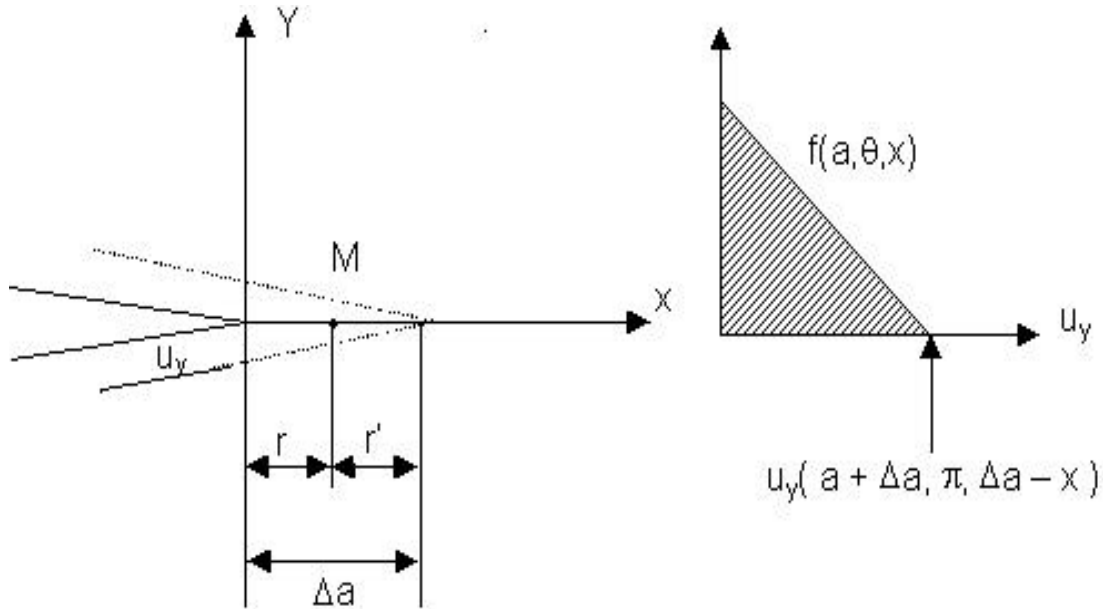


Figure.II.6 : Opération de refermeture de fissure

On se place en mode I dans un cas plan (figure.II.6). On suppose qu'une fissure de longueur,  $a$ , progresse jusqu'à  $a + \Delta a$ . Nous devons déterminer au cours de cette avancée l'énergie élastique libérée. Elle est égale, en valeur absolue, au travail  $DW$  nécessaire pour refermer la fissure sur l'étendue,  $\Delta a$ . Lorsque la fissure a une longueur  $a + \Delta a$ , le déplacement des points situés sur les lèvres entre  $a$  et  $a + \Delta a$  est celui donné par les formules du déplacement en mode I (Figure.II.1) pour une fissure de longueur  $a + \Delta a$ , un angle  $\theta = \pi$ , une distance  $r' = \Delta a - x$ .

Lorsque la fissure s'est refermée de  $\Delta a$ , sa longueur est  $a$ . Les forces de cohésion à une distance  $x$  en avant sont données par :

$$df = t\sigma_{yy}dx \quad \text{II.19}$$

où :  $t$  est l'épaisseur de la plaque,

$\sigma_{yy}$  est calculée par les formules du déplacement en mode I (III.4) pour une longueur de fissure  $a$ , un angle  $\theta = 0$  ; et une distance  $x$ . Au cours de la refermeture, les déplacements en tout point  $M$  passeront de  $u_y(a + \Delta a, \pi, \Delta a - x)$  à 0 tandis que les forces par unité d'épaisseur vont croître de 0 à  $\sigma_{yy}(a, 0, x)dy$ .

Le travail total pour les deux lèvres sera égal à [1]

$$\Delta W = t \int_0^{\Delta a} \sigma_{yy} u_y dx = Gt\Delta a \quad \text{II.20}$$

Après calcul il en résulte :

- En contrainte plane

$$K_I = \sqrt{EG} \quad \text{II.21}$$

- En déformation plane

$$K_I = \sqrt{\frac{EG}{1-\nu^2}} \quad \text{II.22}$$

## II.9 Méthode de fermeture virtuelle de la fissure

Les expressions précédentes ont permis de calculer le taux de restitution d'énergie  $G$  en connaissant les valeurs des chargements sur le contour extérieur. Elles permettent également de déterminer expérimentalement  $G$  puisque les champs mécaniques considérés sont accessibles expérimentalement. Ce sont les forces que l'on impose à la structure et les variations des déplacements correspondants que l'on mesure. On veut maintenant exprimer le taux de restriction d'énergie  $G$  en fonction des champs interne [3].

On suppose l'élasticité linéaire et le problème plans et on rapporte toutes les grandeurs mécaniques à l'unité d'épaisseur. Soit une fissure de longueur  $a$  croissant virtuellement de  $\Delta a$  (Figure.II.7)

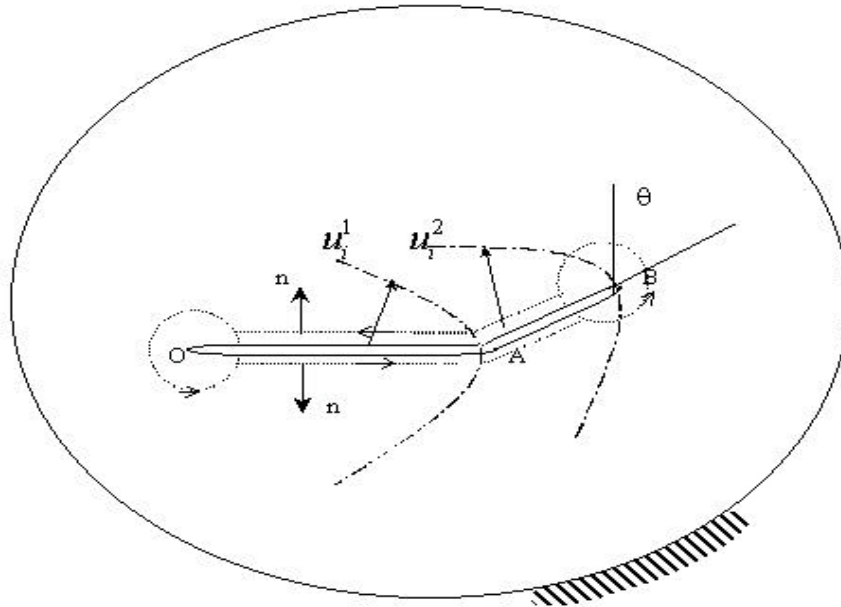


Figure. II.7: Définition locale du taux restituée d'énergie [4].

Appliquons le principe des travaux virtuel[3].

$$\frac{\partial W}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \int_V \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{e} dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial A} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial A} \right) dS \quad \text{II.23}$$

On obtient :

$$G = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial A} - \bar{\mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial A} \right) dS \quad \text{II.24}$$

Le théorème de BETTI permet de démontrer que cette intégrale est indépendante du contour fermé d'intégration.  $t$  étant l'épaisseur du milieu plan.  $A = t\alpha$  et  $W = tC$ . on peut donc écrire pour tout contour fermé C.

$$G = \frac{1}{2} \int_C \left( \bar{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial A} - \bar{\mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial A} \right) dC \quad \text{II.25}$$

Le calcul de cette intégrale sur un contour aplati sur la fissure, donne le sens d'un taux d'énergie de fermeture de fissure. On aboutit ainsi à une définition locale du taux d'énergie dissipée. En appelant  $\bar{\mathbf{u}}^{(1)}$  et  $\bar{\mathbf{u}}^{(2)}$  les champs de déplacement avant et après progression de A à B ( Figure.II.8) et  $\bar{\mathbf{F}}^{(1)}$  les efforts de liaison sur la portion AB dans l'état (1), on trouve[3] :

$$G da = \frac{1}{2} \int_{AB^+} \bar{\mathbf{F}}^{(i)} \cdot \bar{\mathbf{u}}^{(1)} dS + \frac{1}{2} \int_{AB^-} \bar{\mathbf{F}}^{(i)} \cdot \bar{\mathbf{u}}^{(2)} dS \quad \text{II.26}$$

Dans le cas symétrique (fissure OAB rectiligne), on a

Dans la pratique il est plus simple d'évalué cette quantité de façon globale.

$$Gda = \int_{AB} \overline{F}^{(i)} \cdot \overline{u}^{(2)} dS \quad \text{II.27}$$

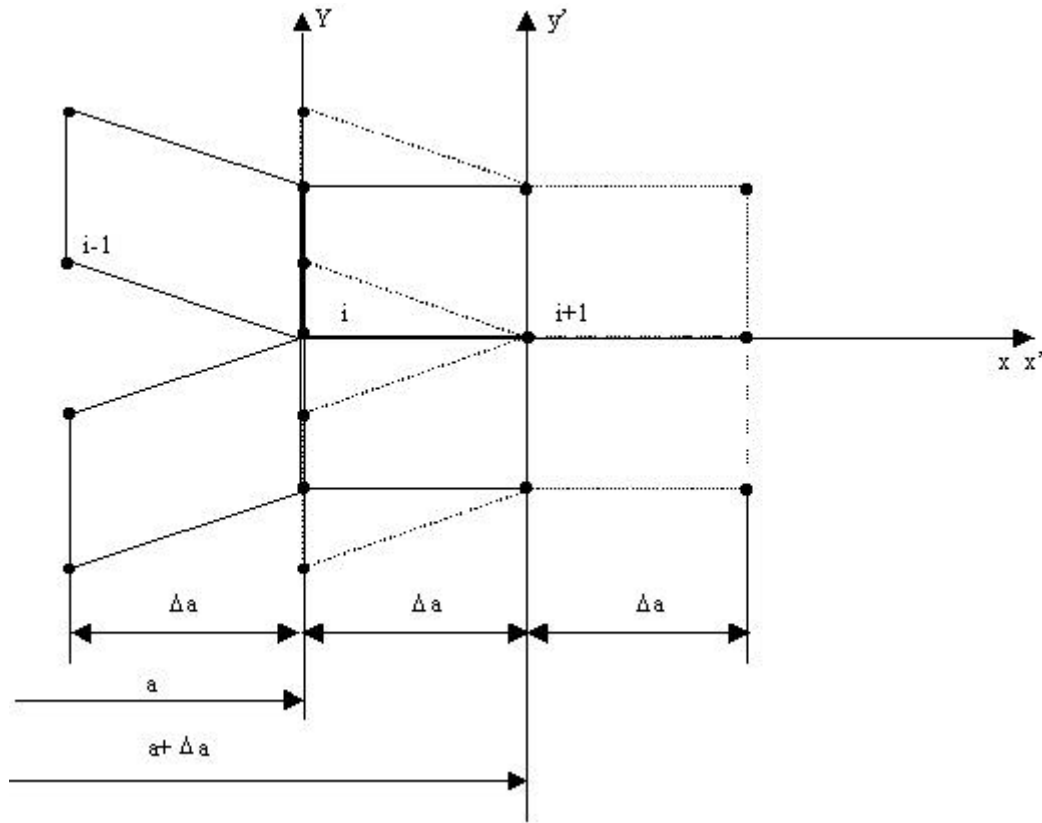


Figure II.8 : Calcul de G, par la méthode de fermeture virtuelle de la fissure.

La détermination du taux de restriction de l'énergie, par la méthode de fermeture virtuelle de la fissure, est donnée par la formule suivante[3][6][7] :

$$G_I(a) = \frac{1}{2t\Delta a} F_y^i(a) \Delta u_{i-1}(a) \quad \text{II.28}$$

avec :

- t : largeur de l'éprouvette,
- $F_y^i(a)$  : Force nodale au sommet de la fissure,
- $\Delta u_{i-1}(a)$  : déplacement relatif du nœud (i-1) direction y.