

### III.1 Caractérisation

#### III.1.1 Comportement élastique d'un matériau

Dans ce travail nous nous plaçons dans le cadre des petites déformations, dont le champs de celles ci et les contraintes sont liés par des lois de comportement caractérisant le comportement mécanique du milieu ; les chargements peuvent être de type volumique ou de type surfacique dans la résolution d'un problème de structure, qui consiste à étudier trois champs tensorielles ainsi que leur relation[8].

$$\text{Le champ de déplacement, note } U(x) = \left\{ \begin{array}{l} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{array} \right\} \quad \text{III.1}$$

$$\text{Le champ des déformations noté } e_{ij} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{III.2}$$

$$\text{Le champ des contraintes noté } s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{III-3}$$

La relation qui relie le tenseur de déformation et celui des contraintes est appelée loi de HOOK généralisée, pour chaque catégorie de matériaux, correspond un type de loi[9].

L'expérience montre que de nombreux milieux déformables ont pour, une température donnée et dans une intervalle de déformation donnée, un comportement élastique linéaire, exprimé par de la relation suivante[9] :

$$\sigma_{ij} = \check{e}_{ijkl} \epsilon^{kl} \quad \text{III.4}$$

$$\text{Ou } \epsilon^{kl} = \eta^{kl ij} \sigma_{ij} \quad \text{III.5}$$

$$i, j, k, l = (1, 2, 3)$$

$\check{e}_{ijkl}$  est le tenseur d'élasticité.

$\eta^{kl ij}$  est le tenseur de souplesse.

## II.2 Matériau anisotrope

On dit qu'un matériau macroscopiquement homogène est anisotrope si les propriétés mécaniques dépendent de la direction, c'est un matériau qui n'a aucun plan de symétrie. Son tenseur d'élasticité possède 81 constants élastiques indépendants.

La loi de comportement peut être écrite sous forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{S}_{11} \\ \mathbf{S}_{22} \\ \mathbf{S}_{33} \\ \mathbf{S}_{23} \\ \mathbf{S}_{31} \\ \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{32} \\ \mathbf{S}_{13} \\ \mathbf{S}_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{1111} & \mathbf{I}_{1122} & \mathbf{I}_{1133} & \mathbf{I}_{1123} & \mathbf{I}_{1131} & \mathbf{I}_{1112} & \mathbf{I}_{1132} & \mathbf{I}_{1113} & \mathbf{I}_{1121} \\ \mathbf{I}_{2211} & \mathbf{I}_{2222} & \mathbf{I}_{2233} & \mathbf{I}_{2223} & \mathbf{I}_{2231} & \mathbf{I}_{2212} & \mathbf{I}_{2232} & \mathbf{I}_{2213} & \mathbf{I}_{2221} \\ \mathbf{I}_{3311} & \mathbf{I}_{3322} & \mathbf{I}_{3333} & \mathbf{I}_{3323} & \mathbf{I}_{3331} & \mathbf{I}_{3312} & \mathbf{I}_{3332} & \mathbf{I}_{3313} & \mathbf{I}_{3321} \\ \mathbf{I}_{2311} & \mathbf{I}_{2322} & \mathbf{I}_{2333} & \mathbf{I}_{2323} & \mathbf{I}_{2331} & \mathbf{I}_{2312} & \mathbf{I}_{2332} & \mathbf{I}_{2313} & \mathbf{I}_{2321} \\ \mathbf{I}_{3111} & \mathbf{I}_{3122} & \mathbf{I}_{3133} & \mathbf{I}_{3123} & \mathbf{I}_{3131} & \mathbf{I}_{3112} & \mathbf{I}_{3132} & \mathbf{I}_{3113} & \mathbf{I}_{3121} \\ \mathbf{I}_{1211} & \mathbf{I}_{1222} & \mathbf{I}_{1233} & \mathbf{I}_{1223} & \mathbf{I}_{1231} & \mathbf{I}_{1212} & \mathbf{I}_{1232} & \mathbf{I}_{1213} & \mathbf{I}_{1221} \\ \mathbf{I}_{3211} & \mathbf{I}_{3222} & \mathbf{I}_{3233} & \mathbf{I}_{3223} & \mathbf{I}_{3231} & \mathbf{I}_{3212} & \mathbf{I}_{3232} & \mathbf{I}_{3213} & \mathbf{I}_{3221} \\ \mathbf{I}_{1311} & \mathbf{I}_{1322} & \mathbf{I}_{1333} & \mathbf{I}_{1323} & \mathbf{I}_{1331} & \mathbf{I}_{1312} & \mathbf{I}_{1332} & \mathbf{I}_{1313} & \mathbf{I}_{1321} \\ \mathbf{I}_{2111} & \mathbf{I}_{2122} & \mathbf{I}_{2133} & \mathbf{I}_{2123} & \mathbf{I}_{2131} & \mathbf{I}_{2112} & \mathbf{I}_{2132} & \mathbf{I}_{2113} & \mathbf{I}_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{11} \\ \mathbf{e}_{22} \\ \mathbf{e}_{33} \\ \mathbf{e}_{23} \\ \mathbf{e}_{31} \\ \mathbf{e}_{12} \\ \mathbf{e}_{32} \\ \mathbf{e}_{13} \\ \mathbf{e}_{21} \end{Bmatrix} \quad \text{III.6}$$

Du fait de la symétrie des contraintes ( $\sigma_{kl}=\sigma_{lk}$ ), les constantes concernées sont indiquées :

$$\lambda_{ijkl}=\lambda_{ijlk}$$

Du fait de la symétrie des déformations ( $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$ ), les constantes concernées sont identiques,

$$\text{soit : } \lambda_{ijkl}=\lambda_{jikl}$$

Autrement dit ; seule la connaissance des constantes incluses dans la matrice 6\*6, ci-dessus, est nécessaire[9].

De plus, l'application du théorème des travaux virtuels pour des états de contraintes particuliers permet de montrer que les constantes  $\lambda_{ijkl}$  sont symétriques, c'est à dire:  $\lambda_{ijkl}=\lambda_{klij}$

En résumé :

Réciprocité des contraintes :  $\lambda_{ijkl}=\lambda_{ijlk}$

Définition des déformations :  $\lambda_{ijkl}=\lambda_{jikl}$

Symétrie des termes :  $\lambda_{ijkl}=\lambda_{klij}$

⇒ il ne reste que 21 constantes distinctes  $\lambda_{ijkl}$  [9].

alors l'expression III.6 s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{S}_{11} \\ \mathbf{S}_{22} \\ \mathbf{S}_{33} \\ \mathbf{S}_{32} \\ \mathbf{S}_{31} \\ \mathbf{S}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{1111} & \mathbf{I}_{1122} & \mathbf{I}_{1133} & \mathbf{I}_{1123} & \mathbf{I}_{1131} & \mathbf{I}_{1112} \\ \mathbf{I}_{2211} & \mathbf{I}_{2222} & \mathbf{I}_{2233} & \mathbf{I}_{2223} & \mathbf{I}_{2231} & \mathbf{I}_{2212} \\ \mathbf{I}_{3311} & \mathbf{I}_{3322} & \mathbf{I}_{3333} & \mathbf{I}_{3323} & \mathbf{I}_{3331} & \mathbf{I}_{3312} \\ \mathbf{I}_{2311} & \mathbf{I}_{2322} & \mathbf{I}_{2333} & \mathbf{I}_{2323} & \mathbf{I}_{2331} & \mathbf{I}_{2312} \\ \mathbf{I}_{1311} & \mathbf{I}_{1322} & \mathbf{I}_{1333} & \mathbf{I}_{1323} & \mathbf{I}_{1331} & \mathbf{I}_{1312} \\ \mathbf{I}_{1211} & \mathbf{I}_{1222} & \mathbf{I}_{1233} & \mathbf{I}_{1223} & \mathbf{I}_{1231} & \mathbf{I}_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{11} \\ \mathbf{e}_{22} \\ \mathbf{e}_{33} \\ \mathbf{e}_{23} \\ \mathbf{e}_{31} \\ \mathbf{e}_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{III.7}$$

### II.3 Matrice de rigidité, matrice de souplesse

Dans plusieurs domaine et pour simplifier l'écriture on utilise la notation suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \sigma_{\alpha} & (\alpha=i) \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{\beta} & (i \neq j) \quad \beta=(9-i-j) \end{aligned}$$

De la même façon on définit une matrice de rigidité [C] et une matrice de souplesse[S] telles que :

$$\begin{aligned} \lambda_{ijkl} &= C_{\alpha\beta} & \alpha=i=j & \text{ si } i=j & \text{ et } & \beta= k=l & \text{ si } k=l \\ \lambda_{ijkl} &= C_{\alpha\beta} & \alpha=9-i-j & \text{ si } i \neq j & & \beta=9-k-l & \text{ si } k \neq l \end{aligned}$$

Les matrices [C]et[S] sont symétriques et les relations contraintes déformations s'écrivent[10] :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_x \\ \mathbf{S}_y \\ \mathbf{S}_z \\ \mathbf{S}_{yz} \\ \mathbf{S}_{xz} \\ \mathbf{S}_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_3 \\ \mathbf{S}_4 \\ \mathbf{S}_5 \\ \mathbf{S}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ \cdot & C_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & C_{26} \\ \cdot & \cdot & C_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{55} & \cdot \\ C_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_5 \\ \mathbf{e}_6 \end{bmatrix} \quad \text{III.8}$$

Et de même façon on défini la matrice de souplesse.

$$\text{Avec} \quad \mathbf{S}=\mathbf{C}^{-1} \quad \text{III.9}$$

### III.4 Matériau avec un plan symétrique :

Considérons un matériau constitué de fibres parallèles à l'axe  $X_3$ . (Figure III.1).

Ce matériau présente une symétrie par rapport au plan  $X_1X_2$ . Appelons  $X'_3$  l'axe opposé de l'axe  $X_3$ . Les relations entre contraintes et déformations, doivent s'écrire de la même façon dans les repères  $(0, X_1X_2X_3)$  et  $(0, X_1X_2X'_3)$ .

Dans ce cas les fibres sont déposées d'une façon symétrique par rapport à un plan. Donc le matériau a un seul plan de symétrie, ce qui nous donne :

$$C_{14}=C_{15}=C_{24}=C_{34}=C_{35}=C_{46}=C_{56}=0$$

Le nombre de constantes indépendantes de la matrice de rigidité se réduit à 13 [10].

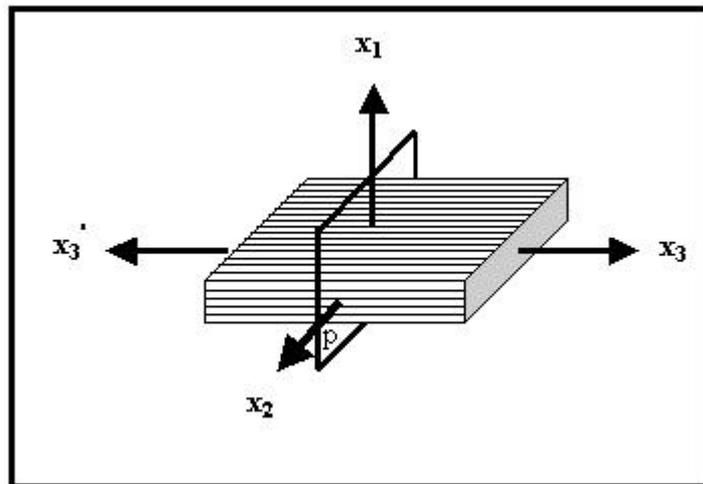


Figure .III.1.symétrie par rapport un plan

### III.5 Matériau orthotrope

Pour un matériau orthotrope, ( Figure.III.2 ) la symétrie se présente par rapport aux trois plans.

Le tenseur d'élasticité ne contient que 9 constantes indépendantes et s'écrit [10]:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_4 \\ \mathbf{s}_5 \\ \mathbf{s}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & & & \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_5 \\ \mathbf{e}_6 \end{Bmatrix} \quad \text{III.10}$$

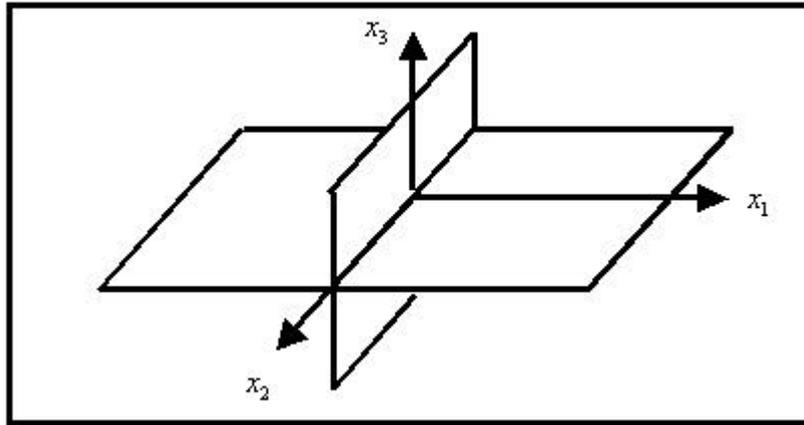


Figure.III.2.Matériau orthotrope

### III.6 Matériau isotrope transverse

Dans ce cas le matériau possède une direction privilégiée(Figure.III.3), c'est à dire qu'il existe un axe de symétrie.

Si on suppose que la direction  $X_3$  est un axe de symétrie, les constantes des tenseurs de rigidités sont liés par les relations suivantes :

$$C_{22}=C_{33}, C_{12}=C_{13}, C_{55}=C_{66}$$

$$C_{22}=C_{23}+2C_{44}$$

Dans se cas le tenseur de rigidité ne contient que 5 constantes distinctes est s'écrit[10] :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_4 \\ \mathbf{s}_5 \\ \mathbf{s}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & & & \\ & C_{23} + 2C_{44} & C_{23} & & & \\ & & C_{23} + 2C_{44} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & \text{Sym} & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_5 \\ \mathbf{e}_6 \end{Bmatrix} \quad \text{III.11}$$

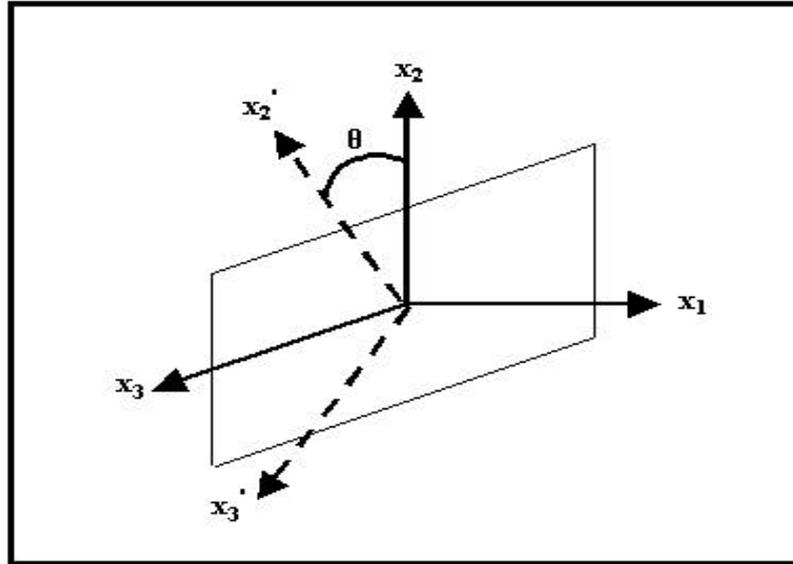


Figure.III.3.Matériau isotrope tranerse.

### III.7 Matériau isotrope :

Dans ce cas il existe les mêmes propriétés dans toutes les directions.

On a:

$$C_{12}=C_{13}=C_{23}, C_{44}=C_{55}$$

$$C_{11}=C_{22}=C_{33}+2C_{44}$$

La relation de comportement s'écrit[10] :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_4 \\ \mathbf{s}_5 \\ \mathbf{s}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{23} + 2C_{44} & C_{12} & C_{12} & & & \\ & C_{23} + 2C_{44} & C_{23} & & & \\ & & C_{23} + 2C_{44} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{44} & \\ & & & & & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_5 \\ \mathbf{e}_6 \end{Bmatrix} \quad \text{III.12}$$

Il reste donc que 2 constantes distinctes.

-Module de YOUNG

-Coefficient de POISSON

Et de la même façon on définit la matrice de souplesse S.

### III.8 Comportement du composite unidirectionnel

La cellule élémentaire d'un composite unidirectionnel peut être considérée comme constitué d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice (Figure.III.4). Le matériau se comporte donc comme un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution ou isotrope transverse. il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe ne change pas la matrice de rigidité ( ou de souplesse) cette propriété conduit à[10] :

$$C_{13}=C_{12} \quad C_{33}=C_{22} \quad C_{55}=C_{66} \quad C_{44}=(C_{22}-C_{23})/2$$

Et

$$S_{13}=S_{12} \quad S_{33}=S_{22} \quad S_{55}=S_{66} \quad S_{44}=2(S_{22}-S_{23})$$

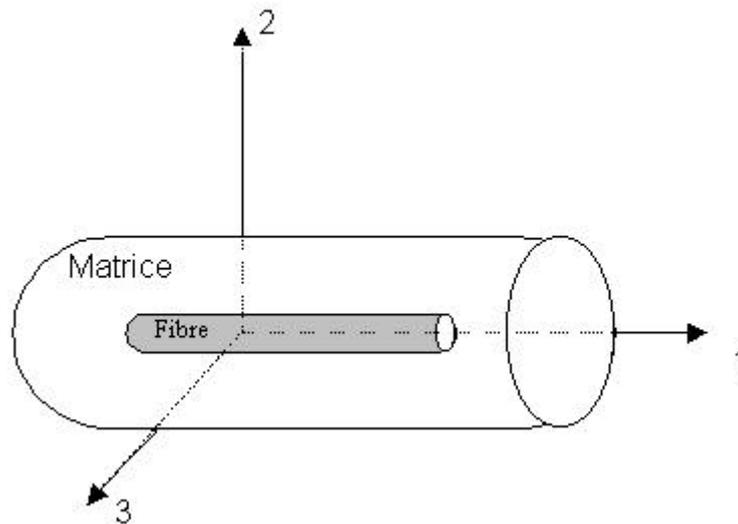


Figure.III.4 :Céllule élémentaire d'un matériau composite élémentaire.

Le tenseur d'élasticité s'écrit :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad \text{III.13}$$

Le comportement élastique du composite unidirectionnel est donc caractérisé par 5 coefficients indépendants.

$$C_{11}, C_{12}, C_{22}, C_{23}, C_{66}$$

Il en est de même pour la matrice de souplesse[10] .

### III.9 Matériau composite en dehors de ses axes principaux

Nous avons étudié le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel ou tissu, exprimé dans les directions principales: un axe suivant la direction des fibres ou de la chaîne, les deux autres axes étant orthogonaux. Or, les stratifiés sont élaborés par couches successives, dont la direction des fibres ou de la chaîne est décalée d'une couche à l'autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifiés, il est alors nécessaire de prendre un système d'axes de référence pour l'ensemble du stratifié, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence[8].

### III.10 Changement de base

La matrice de rigidités dans la base locale  $\vec{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est notée  $[C_{ij}]$  alors que dans la base de référence  $\vec{e}' = (\vec{e}'_1, \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \vec{e}'_3)$  du stratifié, elle sera notée  $[C'_{ij}]$

$$C = [C_{i,j}] \quad \text{dans la base } (\vec{e}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

$$A E = [A E] \quad \text{dans la base } (\vec{e}') = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$$

La relation entre les contraintes exprimées dans les deux repères après une rotation d'un angle  $\theta$  autour de l'axe  $e_3$  Figure(III.5) sont données par [8] ;

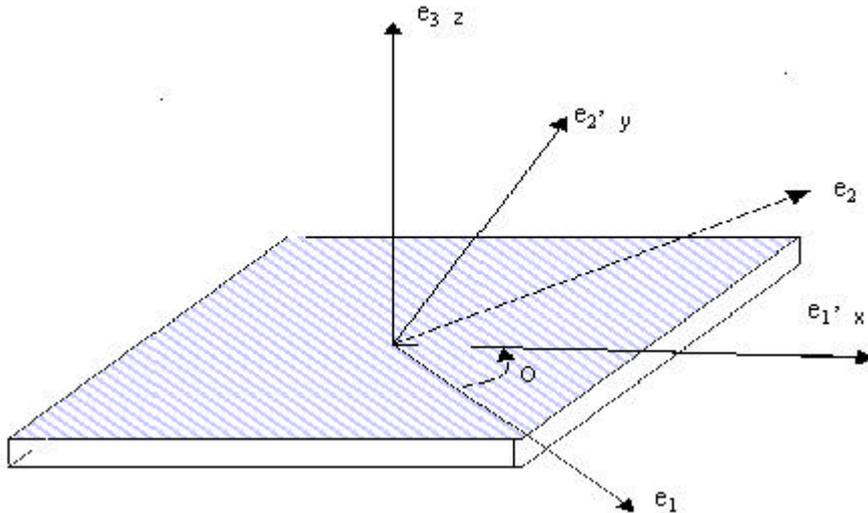


Figure.III.5 :Présentation d'une couche dans le système global du stratifié.

$$\mathbf{s}' = \mathbf{T} \mathbf{s} \quad \text{III.14}$$

où T est la matrice de changement de base qui s'écrit ;

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -sc & sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad \text{III.15}$$

$$S = \sin\theta, \quad C = \cos\theta$$

Les relations entre les déformations exprimées dans les deux repères après une rotation d'un angle  $\theta$  autour de l'axe sont données par[8] ;

$$\mathbf{e}' = \mathbf{T} \mathbf{e} \quad \text{III-16}$$

$$\mathbf{s}' = \mathbf{T} \mathbf{s} = \mathbf{T} \mathbf{C} \mathbf{e} = \mathbf{T} \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{e}' \quad \text{III.17}$$

La matrice de rigidité dans le repère de référence s'écrit [8]:

$$C' = T C T^{-1}$$

III.18

Dans ce qui suit nous considérons (Figure .III.5) une couche de matériau composite unidirectionnel ou tissu de directions principales (1,2,3), le plan (1,2) étant confondu avec le plan de la couche, et la direction 1 confondue avec la direction des fibres ou de la chaîne. L'objectif est de caractériser les propriétés élastiques de la couche. En les exprimant dans le système d'axes de référence (1',2',3) du stratifié, la direction des fibres ou de la chaîne faisant un angle  $\theta$  avec la direction 1'. Ce système d'axes est usuellement référencé comme système (x,y,z).

Le comportement élastique d'une couche, rapporté à ses axes principaux, est donné par les relations (III.13). Les matrices de rigidité  $C'$  et de souplesse  $S'$ , exprimées dans la base (1',2',3), sont obtenues en appliquant aux matrices de rigidité et de la matrice de souplesse, rapportées à la base (1,2,3), les relations de changement de base. Ces relations permettent de déterminer la matrice de rigidité  $C'$  et sont données dans le tableau suivant[8] :

Constantes de rigidité		Constantes de souplesse	
$C'_{11} =$	$C_{11}c^4 + C_{22}s^4 + 2(C_{12} + 2C_{66})s^2c^2$	$S'_{11} =$	$S_{11}c^4 + S_{22}s^4 + 2(S_{12} + 2S_{66})s^2c^2$
$C'_{12} =$	$(C_{11} + C_{22} - 4C_{66})s^2c^2 + C_{12}(s^4 + c^4)$	$S'_{12} =$	$(S_{11} + S_{22} - 4S_{66})s^2c^2 + S_{12}(s^4 + c^4)$
$C'_{13} =$	$C_{12}c^2 + C_{23}s^2$	$S'_{13} =$	$S_{12}c^2 + S_{23}s^2$
$C'_{14} =$	0	$S'_{14} =$	0
$C'_{15} =$	0	$S'_{15} =$	0
$C'_{16} =$	$(C_{11} - C_{12} - 2C_{66})sc^3 + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})s^3c$	$S'_{16} =$	$(2(S_{11} - S_{12}) - 2S_{66})sc^3 + (2(S_{12} - S_{22}) + 2S_{66})s^3c$
$C'_{22} =$	$C_{11}s^4 + 2(C_{12} + 2C_{66})s^2c^2 + C_{22}c^4$	$S'_{22} =$	$S_{11}s^4 + (2S_{12} + 2S_{66})s^2c^2 + S_{22}c^4$
$C'_{23} =$	$C_{12}s^2 + C_{23}c^2$	$S'_{23} =$	$S_{12}s^2 + S_{23}c^2$
$C'_{24} =$	0	$S'_{24} =$	0
$C'_{25} =$	0	$S'_{25} =$	0
$C'_{26} =$	$(C_{11} - C_{12} - 2C_{66})s^3c + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})sc^3$	$S'_{26} =$	$(2(S_{11} - S_{12}) - S_{66})s^3c + (2(S_{12} - S_{22}) + S_{66})sc^3$
$C'_{33} =$	$C_{22}$	$S'_{33} =$	$S_{22}$
$C'_{34} =$	0	$S'_{34} =$	0
$C'_{35} =$	0	$S'_{35} =$	0
$C'_{36} =$	$(C_{12} - C_{23})sc$	$S'_{36} =$	$2(S_{12} - S_{23})sc$
$C'_{44} =$	$((C_{22} - C_{23}) / 2) c^2 + C_{66}s^2$	$S'_{44} =$	$2(S_{22} - S_{23})c^2 + S_{66}s^2$
$C'_{45} =$	$(C_{66} - (C_{22} - C_{23}) / 2) sc$	$S'_{45} =$	$(S_{66} - 2(S_{22} - S_{23})) sc$
$C'_{46} =$	0	$S'_{46} =$	0
$C'_{55} =$	$((C_{22} - C_{23}) / 2) s^2 + C_{66}c^2$	$S'_{55} =$	$2(S_{22} - S_{23})s^2 + S_{66}c^2$
$C'_{56} =$	0	$S'_{56} =$	0
$C'_{66} =$	$(C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66}))s^2c^2 + C_{66}(s^4 + c^4)$	$S'_{66} =$	$2(2(S_{11} + S_{22} - 2S_{12}) - S_{66})s^2c^2 + S_{66}(s^4 + c^4)$

## 1. Etat de contraintes planes

La plaque étant en matériau composite de faible épaisseur, la direction 3 est abandonnée dans ce cas. Les équations établies précédemment dans le cas général se simplifient ; nous étudions dans ce qui suit le cas des contraintes à deux dimensions dont les résultats sont nécessaires à l'étude du comportement mécanique des stratifiés. Dans notre étude on a besoin du comportement dans le plan (x, z) ( $\sigma_y = \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0$ )[8].

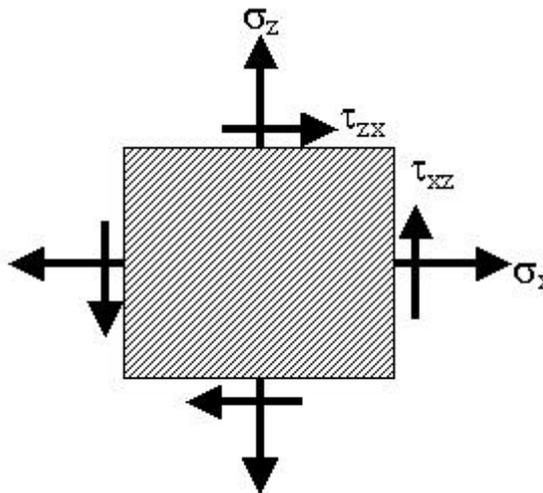


Figure III.6 :état de contrainte plane.

Un état de contraintes planes est caractérisé par un tenseur des contraintes de la forme :

$$\mathbf{s}_{(M)} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{xx} & 0 & \mathbf{s}_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{s}_{zx} & 0 & \mathbf{s}_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{III-19}$$

La loi de comportement pour un état de contraintes planes (x,z) s'écrit alors[8] :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_{xx} \\ \mathbf{s}_{zz} \\ \mathbf{s}_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{13} & 0 \\ C'_{13} & C'_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_5 \end{bmatrix} \quad \text{III.20}$$

$C'_{11} =$	$C_{11}\cos^4\theta + C_{22}\sin^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$	III.21
$C'_{13} =$	$C_{12}\cos^2\theta$	
$C'_{33} =$	$C_{22}$	
$C'_{55} =$	$((C_{22}) / 2) \sin^2\theta + C_{66}\cos^2\theta$	

$$C' = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{13} & 0 \\ C'_{13} & C'_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C'_{55} \end{bmatrix} \quad \text{III.22}$$

Ave  $C_{ij}$  en fonction des modules d'élasticité

$C_{11} =$	$E_L / (1 - \nu_{LT}\nu_{TL})$
$C_{22} =$	$E_T / (1 - \nu_{LT}\nu_{TL})$
$C_{12} =$	$\nu_{TL} E_L / (1 - \nu_{LT}\nu_{TL})$
$C_{66} =$	$G_{LT}$

$E_l$  : représente le module d'élasticité longitudinal dans le sens des fibres.

$E_t$  : représente le module d'élasticité dans le sens transverse.

$\nu_{lt}$  : coefficient de poisson, indique un raccourcissement dans la direction perpendiculaire aux fibres lorsqu'on exerce un effort dans la direction de fibre.

$\nu_{11}$  : coefficient de poisson représente le raccourcissement dans la direction de fibres lorsqu'on tire dans la direction matrice c'est la matrice qui tend à raccourcir les fibres[9].

On note :La matrice  $C'_{ij}$  sera utilisée sous le nom de  $D_{ij}$  pour la formulation en éléments finis.