

**CHAPITRE I :****GENERALITES****I-1 ) INTRODUCTION :**

L'utilité pratique de la mécanique des fluides est évidente à partir de ses applications technologiques qui couvrent tout un spectre de domaines: aérodynamique, énergétique, hydraulique, turbomachine, génie des procédés, etc. le domaine d'application de la mécanique des fluides, qui consiste à étudier les mouvements de fluide, est extrêmement vaste incluant ainsi, par exemple, domaines de l'aéronautique, la combustion, le nucléaire et l'hydraulique. On s'intéresse en général à deux types d'écoulements:

- Les écoulements externes utiles dans la conception de profils aérodynamiques.
- Les écoulements internes utiles dans la conception de systèmes de combustion, de refroidissement, etc. ...

Bien que très ancienne, la science de la mécanique des fluides a connue un développement très rapide ce siècle. Plus récemment, grâce à l'apport de moyens informatiques puissants et au développement des méthodes numériques, la résolution numérique d'écoulements pratiques complexes incluant les phénomènes de turbulence avec des transferts de chaleur et (ou) de masse, est devenue possible.

Dans quelques cas d'étude en s'intéresse au mouvement d'un corps solide dans l'air. Cependant, il faut souligner que les écoulements considérés sont caractérisés par ses vitesses.

D'une manière générale, les problèmes de la dynamique des fluides sont généralement difficiles à résoudre car les équations de base sont non linéaires. Il est donc impossible de trouver les solutions exactes, sauf dans quelques cas très simples. Pourtant, l'évolution de la science de la dynamique des fluides a porté ses fruits. Ceci est démontré par l'avancement spectaculaire des secteurs technologiques dans les quels la qualité et l'originalité des solutions des problèmes d'écoulement sont joué un rôle primordial, par exemple dans le secteur du transport (avions, bateaux, voitures, etc. ... ) et de la production d'énergie (turbines, compresseurs, réacteurs, etc. ...). dans

une grande mesure, ces réussites sont dues aux échanges étroits entre la théorie et l'expérience en dynamique des fluides. Il faut noter que récemment on s'est penché beaucoup plus sur le côté numérique à cause des développements rapides des moyens informatiques puissants.

Néanmoins les études expérimentales gardent leurs importances car elles restent indispensables pour la validation de nouvelles théories.

### **I-2 ) LIGNES DE COURANT :**

La ligne de courant est une ligne tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse  $\vec{q}$ .

En effet : soit  $\vec{q} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  et  $\overline{OM} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$  un vecteur sur la ligne de courant,  $\vec{q}$  et  $\overline{OM}$  sont parallèles alors on peut écrire dans les coordonnées cartésiennes :

$$udy - vdx = 0, \text{ donc la pente } \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}. \text{ Les lignes de courant sont connues aussi}$$

par la définition de la fonction de courant  $\psi$  qui est constante sur chaque ligne.

Le long de la même ligne de courant on a :  $\psi = Cst$ ,  $d\psi = 0$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0, \text{ alors } \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial y} = u. \quad (\text{I-1})$$

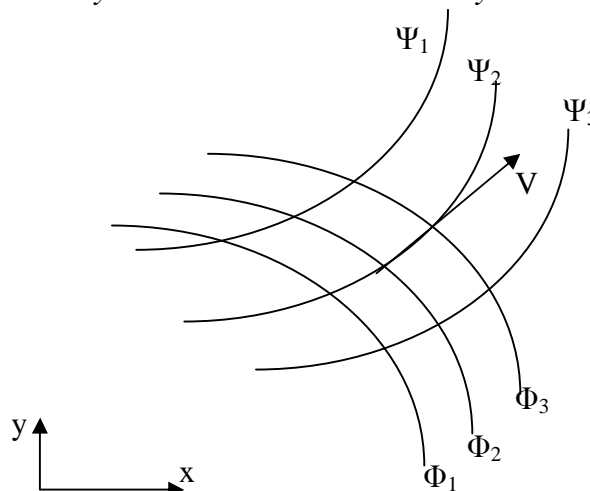


Fig1 : Lignes de courant et lignes équipotentielles

### **I-3) LIGNES EQUIPOTENTIELLES :**

La ligne équipotentielle est une ligne où le potentiel est égale dans tous ses points c-à-d que  $\phi = Cst$ . Comme  $\phi$  est une fonction scalaire définit tel que :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}\phi},$$

En coordonnées cartésiennes :  $\frac{\partial\phi}{\partial x}=u$  et  $\frac{\partial\phi}{\partial y}=v$ .

De  $\phi=Cst$ , on peut aussi écrire que  $d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy=0$  (I-2)

Donc :  $udx+vdy=0$ , la pente  $\frac{dy}{dx}=-\frac{u}{v}$ .

On peut remarquer aisément que le produit des deux pentes  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi=Cst} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi=Cst} = -1$  et par

conséquent les lignes de courant et les lignes équipotentielles sont orthogonales.

#### **I-4 ) EQUATION DE CONTINUITÉ :**

Quelque soit le domaine D de fluide en mouvement, sa masse  $m=\iiint_D \rho(M,t)d\omega$  reste constante.  $d\omega$  est l'élément de volume.

Nous avons par conséquent :

$$\frac{dm}{dt}=\frac{d}{dt}\iiint_D \rho(M,t)d\omega=0 \quad (\text{I-3})$$

D'après le théorème de la dérivée particulaire  $\frac{d}{dt}$  d'une intégrale de volume d'une fonction scalaire, il vient :

$$\frac{d}{dt}\iiint_D \rho d\omega=\iiint_D \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\text{div}\rho\vec{V}\right)d\omega \quad (\text{I-4})$$

Le domaine D est arbitraire. Nous obtenons l'équation ponctuelle :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\text{div}\rho\vec{V}=0 \quad \text{équation de continuité} \quad (\text{I-5})$$

Nous avons en effet :

$$\text{div}\rho\vec{V}=\rho\text{div}\vec{V}+\vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}\rho} \quad (\text{I-6})$$

l'équation de continuité peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\text{div}\rho\vec{V}=\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{grad}\rho}}_{\frac{d\rho}{dt}}+\rho\text{div}\vec{V} \quad (\text{I-7})$$

et par suite il vient :

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\text{div}\vec{V}=0 \quad (\text{I-8})$$

En coordonnées cartésiennes les équations (I-5) et (I-8)

Se traduisent par les équations suivantes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (\text{I-9})$$

ou 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$$

et : 
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{I-10})$$

ou 
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

**Cas d'un fluide incompressible :** Par définition ce sont des fluides tels que :

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (\text{I-11})$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\text{div} \vec{V} = 0 \quad (\text{I-12})$$

Soit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho = 0 \quad (\text{I-13})$$

### **I-5) FORME INTEGRALE DE L'EQUATION DE CONTINUTE :**

L'équation (I-2) peut s'écrit sous la forme intégrale.

$$\iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega + \iint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (\text{I-14})$$

En effet l'élément différentiel  $\rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS$  représente un débit massique élémentaire  $dq$  traversant  $dS$  :

$$dq = \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \rho V_n dS \quad (\text{I-15})$$

La forme (I-11) est intéressante quand  $\rho$  ne dépend pas de temps, il vient alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{I-16})$$

$$\iint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \text{ou} \quad \iint_S dq = 0$$

et elle peut être réduite à :

$$\iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega + \iint_S \rho V_n dS = 0 \quad (\text{I-17})$$

**I-6 ) EQUATION DE QUANTITES DE MOUVEMENT :**

La dérivée par rapport au temps du torseur  $[\rho\vec{V}]_D$  des quantités de mouvement est égal au torseur des forces extérieures appliquées au domaine D .

$$\frac{d}{dt}[\rho\vec{V}]_D = \underbrace{[\rho\vec{F}]_D}_{[\vec{F}_e]} + [\vec{T}]_S \quad (\text{I-18})$$

Cette égalité peut se traduire par:

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \rho \vec{V} d\omega = \iiint_D \rho \vec{F} d\omega + \iint_S \vec{T} dS \quad (\text{I-19})$$

En projetant cette équation sur trois axes trirectangulaires, on obtient trois équations intégrales telles que :

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \rho u_i d\omega = \iiint_D \rho F_i d\omega + \iint_S T_i dS \quad (\text{I-20})$$

Nous allons faire les transformations suivantes pour ramener tous les termes de ces équations à des intégrales de volume, ainsi on a:

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \rho u_i d\omega = \iiint_D \rho \frac{du_i}{dt} d\omega \quad (\text{I-21})$$

Voir démonstration ci dessous

$$\text{et} \quad \iint_S T_i dS = \iint_S \sigma_{ij} n_j dS = \iiint_D \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} d\omega \quad (\text{I-22})$$

Il vient donc :

$$\iiint_D \rho \frac{du_i}{dt} d\omega = \iiint_D \rho F_i d\omega + \iiint_D \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} d\omega \quad (\text{I-23})$$

on peut écrire :

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ij} \quad (\text{I-24})$$

Quand les forces de volume  $\vec{F}$  dérivent d'un potentiel  $U$  et dans le cas des fluides newtoniens, nous avons :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}U} \quad \text{donc} \quad F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (\text{I-25})$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{I-26})$$

Démonstration :

D'une manière générale, si  $f$  est une fonction scalaire du point  $M$ , montrons que:

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \rho f d\omega = \iiint_D \rho \frac{df}{dt} d\omega \quad (\text{I-27})$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \rho f d\omega = \iiint_D \left[ \frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + f \operatorname{div} \rho \vec{V} \right] d\omega \quad (\text{I-28})$$

$$= \iiint_D \left[ \rho \frac{df}{dt} + f \underbrace{\left( \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \rho \vec{V} \right)}_{=0} \right] d\omega \quad (\text{I-29})$$

donc (I-24) s'écrit :

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\rho \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}}_{f_i} \quad (\text{I-30})$$

Ceci étant la projection de l'équation vectorielle suivante :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\rho \overrightarrow{\operatorname{grad}} U - \overrightarrow{\operatorname{grad}} p + \vec{f} \quad (\text{I-31})$$

Dans le cas des fluides visqueux on remplace dans (I-30) les composantes de  $\tau_{ij}$  par :

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \eta \delta_{ij} e = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \eta \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

il vient en supposant que  $\mu$  et  $\eta$  sont invariable :

$$\rho \frac{du}{dt} = -\rho \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u + (\mu + \eta) \frac{\partial e}{\partial x}$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\rho \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v + (\mu + \eta) \frac{\partial e}{\partial y} \quad (\text{I-32})$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\rho \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w + (\mu + \eta) \frac{\partial e}{\partial z}$$

où :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{I-33})$$

$$e = \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Les équations (I-32) sont les projections sur les axes cartésiens de l'équation vectorielle :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\rho \overrightarrow{\text{grad}U} - \overrightarrow{\text{grad}p} + \mu \Delta \vec{V} + (\mu + \eta) \overrightarrow{\text{grad}(\text{div}\vec{V})} \quad (\text{I-34})$$

### **I-7) FORME INTEGRALE DE L'EQUATION DE QUANTITE DE MVEMENT**

En développant le premier membre de l'équation (I-19), il vient :

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) d\omega + \iint_S \rho \vec{V} V_n dS = \iiint_D \rho \vec{F} d\omega + \iint_S \vec{T} dS \quad (\text{I-35})$$

En utilisant la formule de Gauss, on peut écrire :

$$\iiint_D \rho \vec{F} d\omega = -\iiint_D \overrightarrow{\text{grad}} \rho U d\omega = -\iint_S \rho U \vec{n} dS$$

En utilisant la formule  $\vec{T} = -p \vec{n} + \vec{\tau}$ , on obtient :

$$\iint_S \vec{T} dS = -\iint_S p \vec{n} dS + \iint_S \vec{\tau} dS$$

L'équation (I-35) s'écrit donc maintenant :

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) d\omega + \iint_S \rho \vec{V} V_n dS = -\iint_S (p + \rho U) \vec{n} dS + \iint_S \vec{\tau} dS \quad (\text{I-36})$$

Dans le cas où  $U = g \cdot h$ , on peut mettre en évidence la pression motrice  $p_g = p + \rho g h$ , et écrire :

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) d\omega + \iint_S \rho \vec{V} V_n dS = -\iint_S p_g \vec{n} dS + \iint_S \vec{\tau} dS \quad (\text{I-37})$$

Par ailleurs comme  $\vec{F} = \vec{g}$ , l'intégrale  $\iiint_D \rho \vec{F} d\omega$  représente le poids  $m\vec{g}$  du domaine D, de sorte qu'on peut écrire :

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) d\omega + \iint_S \rho \vec{V} V_n dS = m \vec{g} - \iint_S p \vec{n} dS + \iint_S \vec{\tau} dS \quad (\text{I-38})$$

### **I-8 ) EQUATIONS DE NAVIER-STOKES :**

Dans le cas des fluides visqueux incompressibles,  $e = \text{div}\vec{V} = 0$ , les équation ( I-32 ) se présentent sous forme simplifiée :

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= -\rho \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u \\ \rho \frac{dv}{dt} &= -\rho \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v \\ \rho \frac{dw}{dt} &= -\rho \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w \end{aligned} \quad (\text{I-39})$$

Telles sont les équations de Navier-stokes sous forme cartésienne. L'équation vectorielle est :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\rho \overrightarrow{\text{grad}} U - \overrightarrow{\text{grad}} p - \mu \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}) \quad (\text{I-40})$$

Si en outre  $\rho = cte$  ( fluide incompressible homogène) on peut faire entrer  $\rho$  sous le signe différentiel et écrire :

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(p + \rho U) + \mu \Delta u_i \quad \text{ou :} \quad (\text{I-41})$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p + \rho U) - \mu \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V})$$

$\Delta \vec{V}$  est le vecteur de composantes cartésiennes  $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ . Nous avons :

$$\Delta \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{V}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V})$$

Quand le fluide est incompressible puisque  $\text{div}\vec{V} = 0$ ,  $\Delta \vec{V}$  se réduit à  $-\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V})$ .

Dans le champ des forces de pesanteur,  $U = gh$  nous obtenons :

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(p + \rho gh) + \mu \Delta u_i \quad \text{ou :}$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p + \rho gh) - \mu \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}) \quad (\text{I-42})$$

## I-9) TYPES D'ÉCOULEMENTS :

### I-9-1) ÉCOULEMENT LAMINAIRE ET ÉCOULEMENT TURBULENT :

L'introduction de marqueurs (fumée dans le cas des gaz, colorant pour les liquides), permet d'observer des différences importantes dans le comportement des écoulements des fluides. Dans certains écoulements, les particules marquées diffusent très lentement c'est à dire s'écartent peu les unes des autres, les différentes couches (lamelles) glissent les unes par rapport aux autres sans se mélanger: l'écoulement est dit laminaire. Au contraire dans d'autres écoulements les particules marquées s'éloignent très rapidement de manière "aléatoire, irrégulière, dans toutes les directions "les unes des autres, on ne retrouve plus de trace de marquage significative très près de l'endroit où le marqueur a été introduit: l'écoulement est dit turbulent.



D'évidence, l'écoulement sera laminaire à faible vitesse alors que les grandes vitesses provoqueront l'instabilité des particules c'est à dire le caractère turbulent de l'écoulement. En fait, la transition entre écoulement laminaire et turbulent dépend de la vitesse, mais aussi des caractéristiques (viscosité) du fluide, de la forme de l'écoulement (espace fermé -canalisation-; espace ouvert sur une surface à l'air libre"). Il découle de ces propos que, pour un écoulement turbulent, les variables, en un point donné, qui caractérisent l'écoulement varient de manière aléatoire et que la notion d'écoulement permanent ne peut être comprise qu'en moyenne (la valeur moyenne de toute variable caractéristique de l'écoulement étant, alors, indépendante du temps). Au contraire, pour un écoulement laminaire, les fluctuations des variables sont négligeables, à la limite nulles.

### **I-9-2) ECOULEMENT UNIDIMENSIONNEL ET BIDIMENSIONNEL**

Dans certains cas particuliers intéressants. L'étude d'un problème physique réel tridimensionnel peut se ramener à l'étude d'un écoulement théorique bidimensionnel ou unidimensionnel. C'est pour quoi, on peut considérer que l'écoulement est de grande étendue suivant l'axe ( $Oz$ ) est alors sera considéré comme un écoulement bidimensionnel suivant les axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ), et toutes les grandeurs du fluide ne dépendent alors que de deux variables d'espace.

### **I-9-3) ECOULEMENT INTERNE ET ECOULEMENT EXTERNE :**

Les écoulements externes représentent les écoulements autour des obstacles. Les écoulements internes sont ceux de l'intérieur des conduites et qui sont limités par des parois fixes ou mobiles.

### **I-9-4) ECOULEMENT COMPRESSIBLE ET INCOMPRESSIBLE :**

Un fluide est dit incompressible lorsque sa masse volumique ne dépend pratiquement pas de la pression ou de la température. Traditionnellement, les liquides sont considérés comme incompressibles et les gaz sont compressibles, l'approximation fluide incompressible est souvent justifiée pour un gaz s'écoulant à faible vitesse par rapport à la vitesse du son (on montre que le fluide peut être considéré comme incompressible si le nombre de Mach -rapport de la vitesse du fluide à la vitesse du son dans le fluide- est inférieur à  $1/3$ ). Ainsi c'est la nature de l'écoulement qui permet

de distinguer l'écoulement compressible de l'écoulement incompressible et non la nature du fluide.

### I-9-5) ECOULEMENT POTENTIEL:

L'hypothèse la plus importante et à partir de laquelle découle la théorie de l'écoulement potentiel, consiste à considérer le fluide comme parfait. Dans lequel tout effet de viscosité est négligé, ce qui simplifie les équations de mouvement de fluide. Cette hypothèse est toujours valable loin des parois rigides.

Soit un écoulement permanent incompressible et homogène dont la vitesse dérivé d'un potentiel

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi \quad (\text{I-43})$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

La condition de continuité  $\text{div} \vec{V} = 0$  conduit à

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{I-44})$$

Cela élimine les termes de viscosité dans les équations de Navier-Stokes par la suite. Les forces de viscosité provoquent de la dissipation énergétique mais elles s'équilibrent entre elles, c'est pour cela qu'elles ne figurent pas dans les équations dynamiques de mouvement.

### I-9-6) ECOULEMENT IRROTATIONNEL PLANS :

Un écoulement irrotationnel a été défini à partir de  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})=0$ . Une fonction dont le rotationnel est nul peut être toujours représentée par le gradient d'une fonction scalaire  $\phi$  car  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\phi)=0$ , il existe alors une vitesse  $V$  tel que  $\vec{V}=\overrightarrow{\text{grad}}\phi$  et par conséquent un écoulement irrotationnel est dit potentiel.

On peut satisfaire l'équation de continuité en posant :

$$U_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad U_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad \psi : \text{fonction de courant} \quad (\text{I-45})$$

$$U_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad U_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad \phi : \text{fonction de potentiel} \quad (\text{I-46})$$

Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont donc liées par les relations :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (\text{I-47})$$

Rappelons que les courbes  $\psi = Cte$  représentent les lignes de courant. Les relations montrent que les équipotentielles ( $\varphi = Cte$ ) sont les lignes orthogonales aux lignes de courant. Le long d'un arc de courbe quelconque  $AB$  dans le plan,  $\varphi_B - \varphi_A$  représente la circulation du vecteur vitesse, tandis que  $\psi_B - \psi_A$  est le flux de fluide à travers cet arc. De la nullité du rotationnel de la vitesse, ou de l'équation de continuité, on déduit que la fonction de courant  $\psi$  est elle aussi harmonique :  $\Delta \psi = 0$

## **I-10 ) EXEMPLES DES ECOULEMENTS SIMPLES :**

### **I-10-1 ) ECOULEMENT DE POISEUILLE :**

L'écoulement se produit dans une conduite cylindrique de section circulaire. Le fluide est considéré incompressible en écoulement permanent.

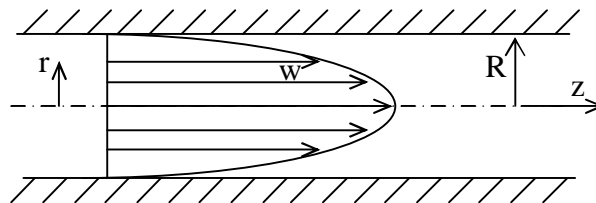


Fig2 : Ecoulement de poiseuille dans une conduite cylindrique.

#### **Equations du mouvement :**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial x} + \nu \Delta u + f_x \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial y} + \nu \Delta v + f_y \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial z} + \nu \Delta w + f_z \quad (4)$$

**Hypothèses** : Ecoulement permanent unidirectionnel suivant (oz) :  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ,  $u=0$ ,  $v=0$ .

L'équation (1) se réduit à :  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$

L'équation (4) se réduit à :  $-\frac{\partial p_s}{\partial z} + \mu \Delta w = 0$

Donc :  $\frac{\partial p}{\partial z} = -a$ ,  $\mu \Delta w = -a$

Ecrivons l'équation en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  :

Pour des raisons de symétrie  $\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0$ , en plus  $w$  est uniforme suivant  $z$  :

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left( r \cdot \frac{dw}{dr} \right) = a / \mu$$

Par intégration successive on trouve :

$$w(r) = -\frac{ar^2}{4\mu} + b \cdot \log r + c$$

Les constantes  $b$  et  $c$  sont déterminées par les conditions aux limites suivantes :

En  $r = R$   $w = 0$  et en  $r = 0$   $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$

alors :  $b = 0$  et  $c = \frac{aR^2}{4\mu}$

donc :  $w(r) = \frac{a}{4\mu}(R^2 - r^2) = \frac{W}{R^2}(R^2 - r^2)$  : expression parabolique.

avec  $W = \frac{aR^2}{4\mu}$  expression représentant la vitesse moyenne dans la conduite définit

par :  $W = \frac{1}{S} \int w(r) ds$ .

### **I-10-2) ECOULEMENT PLAN DE POISEUILLE :**

L'écoulement se produit entre deux plans parallèles fixes :

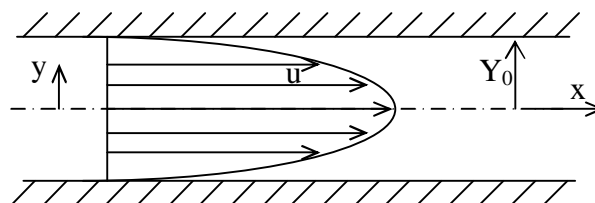


Fig3 : Ecoulement de poiseuille dans une conduite cylindrique.

Les conditions aux limites sont :  $u = 0$  pour  $y = \pm y_0$  on trouve :

$$\text{La vitesse longitudinale : } u = \frac{ay_0^2}{2\mu} \left( 1 - \frac{y^2}{y_0^2} \right) \Rightarrow u_{max} = \frac{ay_0^2}{2\mu}$$

La répartition des vitesses est parabolique.

### **I-10-3) ECOULEMENT PLAN DE COUETTE :**

On considère l'écoulement d'un fluide entre deux plans parallèles dont l'un est fixe et dont l'autre se déplace parallèlement à une vitesse  $\vec{U}$ .

On suppose le fluide - Newtonien

- Iso-volume

- A viscosité constante.

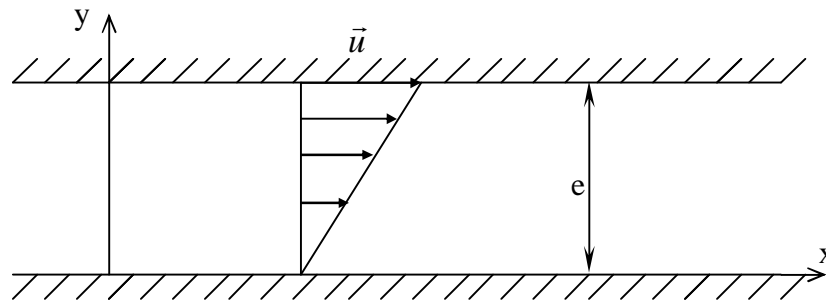


Fig4 : Ecoulement de couette entre deux plans parallèles

### **Equation du mouvement :**

On suppose le mouvement : - permanent  
- établi.

L'équation du mouvement se réduit à :

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0$$

$u$  n'est fonction de  $x$  et  $v = w = 0$

Compte tenu des conditions d'adhérence du fluide sur les parois solides, la vitesse en un point quelconque est donnée par :

$$u = \frac{y}{e}$$

le profil des vitesses est linéaire.

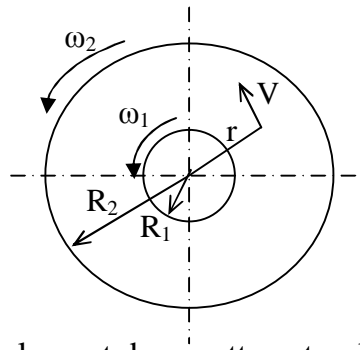
**I-10-4) ECOULEMENT DE COUETTE ENTRE DEUX CYLINDRES:**

Fig5 : Ecoulement de couette entre deux cylindres

L'étude de l'écoulement permanent bidimensionnel entre deux cylindres circulaires coaxiaux de rayon  $R_1$  et  $R_2$  tourne respectivement autour de leur axe avec  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

Soit  $V$  : la vitesse tangentielle en un point de fluide.

Les équations du mouvement se réduisent à:

$$\rho \frac{V^2}{r} = \frac{dp}{dr}$$

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left( \frac{V}{r} \right) = 0$$

Les conditions aux limites sont :  $V(R_1) = R_1 \omega_1$  et  $V(R_2) = R_2 \omega_2$ . Soit aussi  $p = p_1$  à  $r = R_1$

La solution exacte de ce système d'équations est :

$$V = \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \left[ r (\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2) - \frac{R_1^2 R_2^2}{r} (\omega_2 - \omega_1) \right]$$

$$p = p_1 + \frac{\rho}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \left[ (\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2) \left( \frac{r^2 - R_1^2}{2} \right) - 2 R_1^2 R_2^2 (\omega_2 - \omega_1) \log \frac{r}{R_1} + R_1^4 R_2^4 (\omega_2 - \omega_1) \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \right]$$

**1<sup>er</sup> cas:** L'un des deux cylindres est au repos (écoulement de couette),  $\omega_1 = 0$ .

On peut calculer le couple résistant appliqué au cylindre tournant pour la hauteur  $h$  de cylindre

$$C = 2 \Pi . R_2^2 . h . \tau_{r\theta} = 2 \Pi . R_2^2 . h . \mu . r . \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V}{r} \right)_{r=R_2}$$

$$= 4 \Pi h . \mu . \frac{R_1^2 . R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} . \omega_2$$

**2<sup>er</sup> cas:** Un cylindre unique tournant dans un milieu indéfini.

$$\omega_2 = 0 \quad \text{et} \quad R_2 \rightarrow \infty$$

$$\text{d'où} \quad V = \frac{R_1^2 \cdot \omega_1}{r}$$

$$\text{le couple} \quad C = 4 \Pi \cdot \mu \cdot h \cdot R_1^2 \cdot \omega_1$$

### **I-10-5) ÉCOULEMENTS DANS LES CONDUITES :**

Pour l'écoulement laminaire dans une conduite cylindrique rectiligne de longueur  $l$ , si le débit est  $q_v$ ,  $\Delta p_g$  est donnée par la formule:

$$\Delta p_g = \frac{K \cdot \mu \cdot l \cdot q_v}{d^4}$$

$d$  : caractérise la section de conduite.

$K$  : coefficient dépend de la forme géométrique de la section.

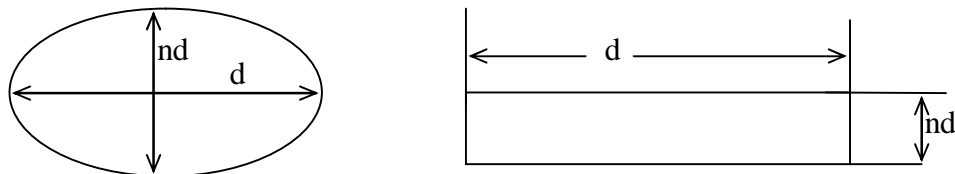


Fig6 : Écoulement dans les conduites

**Cas d' une section elliptique :** soit  $d$  est le grand axe et  $n.d$  le petit axe.

$$K = \frac{64 (1 + n^2)}{\Pi \cdot n^3}$$

**Cas d' une section circulaire :**  $n=1$

On trouve la formule de poiseuille.

**Cas d' une section rectangulaire :** soit  $d$  est le grand coté et  $n.d$  le petit coté.

$$K = \frac{12}{n^5 \cdot (1 - n \cdot S)}$$

$$S = \frac{192}{\Pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \cdot \text{tgh}(2n+1) \cdot \frac{\Pi}{2n}$$

**Cas d' une section carrée :**  $K=28,441$

**I-11) THEORIE DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE :**

On partage l'espace du fluide en écoulement en deux zones :

- Une zone irrotationnelle : l'écoulement extérieur qui obéit à l'équation d'Euler (ou Bernoulli).
- Une zone rotationnelle : la couche limite qui obéit à l'équation de Navier-Stokes.

On suppose : Le fluide isovolume.

**I-11-1 ) EQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE :**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_g}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_g}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_g}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{équation de continuité} \quad (d)$$

**I-11-2) HYPOTHESES DE PRANDTL :**

On suppose l'écoulement bidimensionnel:

$$1^\circ) \quad u \gg v$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$$

La couche limite a une épaisseur  $\delta$  très faible le long de la paroi solide.

Les différentes grandeurs physiques varient très rapidement de la paroi à l'écoulement extérieur ( en y ).

Non valable quand  $u \approx v$  ( point d'arrêt, décollement )

Non valable si la courbure de la surface est trop grande.

$$\text{Conclusion :} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$



2°) L'écoulement est à un infiniment petit près un écoulement unidirectionnel :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2^{\text{ème}} \text{ hypothèse de PRANDTL}).$$

C'est la réduction de l'équation (b)

$$\frac{\partial v}{\partial x}, v \frac{\partial v}{\partial y}, v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad : \text{ sont négligeables.}$$

### I-11-2-1 ) EQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE BIDIMENSIONNELLE :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Si l'écoulement est bidimensionnel, permanent autour d'un obstacle, et soit L une longueur caractéristique de l'obstacle dans la direction de l'écoulement .

Les équations du mouvement sont écrites dans un système de coordonnées curvilignes où x est compté le long de la surface et y perpendiculairement à celle-ci .

On suppose que la paroi a une très faible courbure .

En faisant le changement de variables suivant :

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad U^* = \frac{U}{U_\infty}, \quad V^* = \frac{V}{U_\infty}, \quad P^* = \frac{P}{\rho U_\infty^2}$$

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial U^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \Delta^* U^*$$

$$U^* \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial V^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \Delta^* V^*$$

$$U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial V^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \Delta^* U^*$$

avec :  $Re = \frac{U_\infty L}{\nu}$  : Nombre de Reynolds

Par hypothèse  $Re \gg 1$  ( les autres cas ne peuvent pas donner lieu à couche limite ).

Une première approximation consiste à négliger le terme visqueux, On obtient les équations d'EULER. Cette approximation est souvent valable dans une grande partie du domaine fluide. Cependant, elle est en défaut au voisinage immédiat des parois solides. En effet, les équations d'EULER ne peuvent satisfaire la condition de non glissement et on aboutit au paradoxe de D'ALEMBERT.

Il faut donc que près de la paroi au moins un des termes de  $\Delta U^*$  soit comparable à  $Re$ . Puisque les grandeurs varient sauf cas très dégénérés très peu parallèlement à la surface solide, le terme  $\frac{\partial^2 U^*}{\partial y^{*2}}$  est celui de la première équation qui contrebalance  $\frac{1}{Re}$ .

Cette zone d'épaisseur  $\delta^* = \frac{\delta}{L}$  est la zone de couche limite. Dans ce cas les forces d'inertie sont du même ordre de grandeur que les forces de viscosité, soit :

$$U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} \approx \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U^*}{\partial y^{*2}}$$

Par hypothèse,  $U^*$  et  $x^*$  sont de l'ordre 1.  $y^*$  est de même ordre que  $\delta^*$  donc d'après la relation précédente :

$\delta^* \approx \frac{1}{Re}$  donc d'un ordre de grandeur plus petit que 1.

Nous écrivons alors l'équation du mouvement et au dessous de chaque terme son ordre de grandeur correspondant :

$$U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial U^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \Delta U^*$$

$$1 \cdot 1 \quad \delta^* \cdot \frac{1}{\delta^*} \quad \delta^* \cdot 1 \quad \delta^{*2} \cdot \frac{1}{\delta^*}$$

$U^*$  est de l'ordre de  $\delta^*$ . En effet, d'après l'équation de continuité  $\frac{\partial V^*}{\partial y^*}$  est de l'ordre 1, donc  $V^* \approx \delta^*$  puisque  $V^* = 0$  pour  $y = 0$ .

$$U^* \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial V^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 V^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 V^*}{\partial y^{*2}}$$

$$1 \cdot \delta^* \quad \delta^* \cdot 1 \quad \delta^{*2} \cdot \delta^* \quad \delta^* \cdot \frac{1}{\delta^{*2}}$$

Donc au mieux  $\frac{\partial P^*}{\partial y^*}$  est d'ordre  $\delta^*$ .

$$P^* = P^*(0) + y^* \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{y^{*2}}{2} \frac{\partial^2 P^*}{\partial y^{*2}} + \dots$$

$P^*(\delta) = P^*(0)$  à l'ordre  $\delta^{*2}$  près.

En ne conservant que le terme d'ordre le plus grand les équations de la couche limite s'écrivent :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$P(x, y) = P_e(x, 0)$$

et  $u = v = 0$  pour  $y = 0$

$$u = U_e(y = 0) \text{ pour } y = \delta$$

On généralise aux couches limites tridimensionnelles :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P_e}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

avec les condition aux limites :

$$P(x, y, z) = P_e(x, 0, z)$$

et  $u = v = w = 0$  pour  $y = 0$

$$u = U_e(y = 0) \text{ et } w = w_e(y = 0) \text{ pour } y = \delta$$

## **I-11-2) CARACTERISTIQUEQ DE LA COUCHE LIMITE :**

### **I-11-2-1) Epaisseur de la couche limite :**

On appelle épaisseur  $\delta$  à l'abscisse  $x$ , la valeur de  $y$  correspondant à  $\frac{u}{U_0} = 0.99$ .

### **I-11-2-2) Epaisseur de déplacement :**

Pour définir l'épaisseur de déplacement, on évalue le flux manquant par rapport à

celui qu'on aurait dans l'hypothèse d'un écoulement potentiel jusqu'à la paroi. Cette définition revient à poser le principe de conservation du débit volumique.

$$\text{On a : } \int_0^{\infty} (U-u)dy = \int_0^{\delta_1} Udy = U\delta_1$$

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

**I-11-2-3) Épaisseur de quantité de mouvement :**

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

**I-11-2-4) Épaisseur d'énergie :**

$$\delta_3 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right) dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right) dy$$

**I-11-2-5) Facteur de forme de la couche limite :**

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

**I-11-3) EXEMPLES DE CALCUL DE LA COUCHE LIMITE :**

**I-11-3-1) Couche limite sur une plaque plane :**

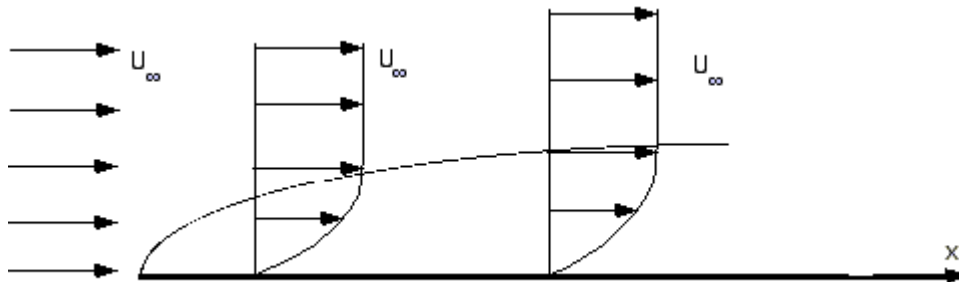


Fig7 : Couche limite sur une plaque plane

$u = u_0$  est uniforme à l'extérieur de la couche limite.

$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  d'où  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  (BERNOULI) à l'extérieur de la couche limite.

$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$  dans la couche limite.

Donc  $p = Cte$  dans la couche limite.

NAVIER-STOKES se réduit à :

$$u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{I-48})$$

On pose  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y)$  ,  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y)$

pour vérifier la conservation de la masse.

En remplaçant dans l'équation (I-44), on trouve :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

On pose  $\psi(x, y) = \sqrt{\nu U_0 x} \cdot f(\eta)$  avec :  $\eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}$

C'est la méthode de Blasius suggérée par la similitude des profils de vitesse.

On a alors :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} & u &= U_0 f'(\eta) \\ v &= \frac{\partial \psi}{\partial x} & v &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} f(\eta) - \frac{1}{2} \frac{y}{x} U_0 f'(\eta) \end{aligned}$$

de même :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left( \frac{U_0}{x} \right)^{3/2} \frac{\nu}{\sqrt{\nu}} f''(\eta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_0 \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} f''(\eta)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_0}{\nu x} f'''(\eta)$$

On reporte dans (I-44) :

$$f \cdot f'' + 2f''' = 0$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} y=0, \eta=0 & & f(0)=0 ; f'(0)=0 \\ y \rightarrow \infty, \eta \rightarrow \infty & & f'(\eta) \rightarrow 1 \end{aligned}$$

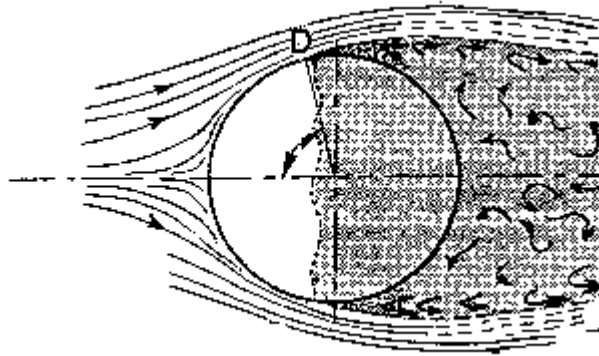
**I-11-3-2) COUCHE LIMITE SUR UN CYLINDRE :**

Fig8 : Couche limite sur un cylindre

Dans ce cas l'équation de NAVIER-STOKES s'écrit en coordonnées cylindriques comm suit :

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} \right]$$

$$= F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right]$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{uv}{r} \right] = F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]$$

$$\rho \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]$$

et l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

avec conditions aux limites :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0, \quad \text{Symétrie.}$$

$$r = R, \quad u = v = w = 0$$