

CHAPITRE III : CALCUL DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE

III-1) INTRODUCTION :

Pour calculer la couche limite autour des corps fuselés, les méthodes analytiques sont très rares mêmes sur des simples configurations. Des méthodes plus au moins approchées ont été employées, généralement ces méthodes utilisent des valeurs empiriques obtenues à partir des mesures expérimentales. C'est ainsi par conséquent qu'ont pu être déterminer les caractéristiques du champs de l'écoulement.

En effet la plus part des chercheurs s'intéressent au corps de révolution. La transformation de **Mangler[13]** conçue pour les corps à symétrie de révolution reste inapplicable au corps fuselés.

Cependant la méthode approximative la plus célèbre est toujours celle des épaisseurs intégrales annoncée par **Polhausen** pour un fluide incompressible, et par **Gruschwitz** pour un fluide compressible[13].

Pour la résolution de l'équation différentielle intégrale, les grandeurs inconnues sont exprimées en fonction d'un ou plusieurs paramètres. Cette méthode reste utile pour la pratique, mais elle ne possède pas de base systématique à fin d'obtenir des relations d'extension nécessaires pour avoir des possibilités meilleures.

Loitsianski[33] a proposé une méthode paramétrique appuie sur une base mathématique stable. Ensuite **Askovic** et **Atmani** ont transformé ces équations de la couche limite tridimensionnelle sous une forme universelle dont les relations obtenues sont indépendante des conditions extérieurs [24]. Notons que cette méthode a été utilisé déjà par **M.Djeric** dans le cas instationnaire d'un cylindre infini.

III-2) EQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE TRIDIMENSIONNELLE :

Nous adaptons la méthode appliquée par **W.D. Hayes[22]**, nous écrivons les équations de Navier–Stokes complétées par l'équation de continuité sous forme

tensorielle. Le développement du calcul fournit les formules bien connues des transformations en coordonnées curvilignes, qui permettent d'écrire les équations en coordonnées (s, z, n) pour les composantes correspondantes des vitesses (u, v, w) .

L'application des hypothèses habituelles de **Prandtl** relatives à la couche limite d'un fluide incompressible en écoulement permanent, permet d'écrire les équations sous la forme suivante :

$$\rho \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial n} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{uw}{e_1} \cdot \frac{\partial e_1}{\partial z} - \frac{wz}{e_2} \cdot \frac{\partial e_2}{\partial s} \right) = - \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$\frac{1}{e_2} \cdot \frac{\partial}{\partial s} (e_2 \rho u) + \frac{\partial}{\partial n} (\rho v) + \frac{1}{e_1} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (e_1 \rho w) = 0$$

$$\rho \left(u \cdot \frac{\partial w}{\partial s} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{uw}{e_2} \cdot \frac{\partial e_2}{\partial s} - \frac{uz}{e_1} \cdot \frac{\partial e_1}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\mu \cdot \frac{\partial w}{\partial n} \right)$$

Dans ce système, e_1 représente la distance locale de deux lignes équipotentielles voisines, et e_2 la distance correspondante pour les lignes de courant de l'écoulement potentiel; elle dépend normalement plus de s que de z , et $e_3 = 1$; ils sont les coefficients métriques du système.

En ajoutant deux hypothèses supplémentaires à celle de **Prandtl**[8] et à celle de convexité de l'obstacle:

- Le vecteur vitesse (u, w, v) est une fonction de s, z, n régulière dans toute la région proche de la paroi de l'obstacle (hypothèse de régularité de **Von Mises**).
- La distance des lignes de courant de l'écoulement visqueux diffère peu près de la paroi de celle des lignes de courant de l'écoulement potentiel; autrement dit, l'écoulement longitudinal prévaut sur l'écoulement transversal dans toute la couche limite.

En tenant compte de ces hypothèses, le système (I-1) devient:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} \right) = - \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial n} \right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (\text{III-2})$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (e_2 \rho u) + \frac{\partial}{\partial n} (e_2 \rho v) = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial w}{\partial s} + v \frac{\partial w}{\partial n} \right) - \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} u^2 = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial n} \right)$$

avec les conditions aux limites :

$$n=0, \quad u=0, \quad v=0, \quad w=0;$$

$$n \rightarrow \infty, \quad u=U_e, \quad w=0.$$

Les gradients de pression $\frac{\partial p}{\partial s}$ et $\frac{\partial p}{\partial z}$ sont obtenus à partir des équations de l'écoulement potentiel.

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\rho U_e \frac{\partial U_e}{\partial s}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\rho}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} U_e^2$$

Comme nous traitons le cas d'un fluide incompressible, nous allons introduire une fonction semblable à la fonction de courant Ψ bien connue dans le cas bidimensionnel, pour satisfaire l'équation de continuité sous la forme :

$$u = \frac{1}{e_2} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \quad \text{et} \quad v = -\frac{1}{e_2} \frac{\partial \Psi}{\partial s}$$

On obtient alors un système composé d'une équation en Ψ et une deuxième équation en w .

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial n^3} + \frac{1}{e_2} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n^2} - \frac{1}{e_2} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial n} + \frac{1}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n} \right)^2 = -\frac{e_2}{\nu} U_e \frac{\partial U_e}{\partial s} \quad (\text{a})$$

$$\frac{1}{e_2} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{1}{e_2} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial n} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \left[\frac{1}{e_2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n} \right)^2 - U_e^2 \right] \quad (\text{b})$$

(III-3)

avec les conditions aux limites :

$$\text{- pour } n=0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0, \quad w=0.$$

$$\text{- pour } n \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = e_2 U_e, \quad w=0.$$

III-3) METHODE DE CALCUL :

Traditionnellement, il a été utile de considérer l'écoulement de la couche limite comme un écoulement séparé. A partir des perspectives de calcul il est plus cohérent de classer l'écoulement de la couche limite comme un écoulement avec diffusion visqueuse considérable dans la direction normale à la surface sur laquelle la couche limite se produit, et pour laquelle l'équation de quantité de mouvement dans la direction normale peut être remplacé par la condition que la pression est constante. Pour ces écoulements les équations gouvernantes sont non elliptiques si la solution des pressions est donnée. Ceci permet une démarche effective d'algorithme introduit dans la direction des s , (Fig37).

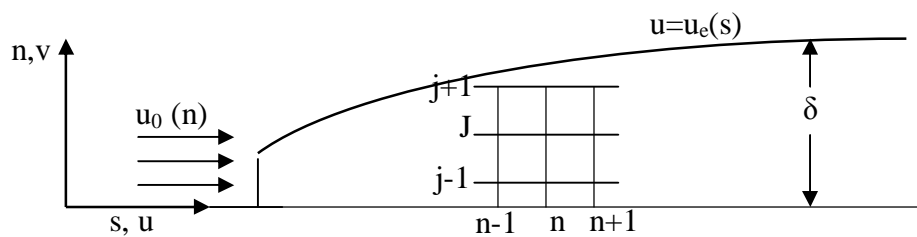


Fig37 : Ecoulement dans la couche limite

L'écoulement dans la couche limite contient des gradients sévères de vitesse dans la direction normale à la surface. Ces faits nous laissent désirer d'introduire des transformations qui rendent ces gradients moins sévères dans les coordonnées transformées[15]. Plusieurs transformations effectives sont décrites, en plus le maillage est géométriquement grand dans la direction normale à la surface, ce qui donne un chemin efficace pour accomplir une bonne résolution près de la paroi. L'équation qui gouverne l'écoulement de la couche limite tridimensionnelle a le caractère hyperbolique dans les plans parallèles à la surface où la couche limite se développe, cela introduit une complication du domaine d'influence et de dépendance dans ces plans parallèles à la paroi. Le domaine d'influence affecte la valeur du pas de marche admissible dans le schéma explicite.

La couche limite turbulente est résolu par les mêmes techniques de calcul que la couche limite laminaire. Cependant l'augmentation rapide du gradient de la vitesse

normale au voisinage de la paroi peut exiger l'utilisation d'un maillage très raffiné dans la direction normale. Ce problème est évité par l'adaptation de la formulation **Orodnitsyn**, par le traitement de la composante de vitesse d'écoulement dans la direction des lignes de courant (u) comme une variable indépendante. Une autre alternative, pour éviter l'utilisation d'un maillage fin près de la paroi, est l'incorporation des fonctions dites de paroi. Cela donne une analyse local du profil de vitesse dans la zone adjacente à la paroi. Des fonctions de paroi sont discutés en [15].

III-4) DISCRETISATION DES EQUATIONS

Les équations (III-2) qui gouverne l'étude de l'écoulement tridimensionnel laminaire d'un fluide incompressible sont :

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial n} = -u \left(\frac{1}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} \right) \quad (\text{III-4})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} = U_e \frac{dU_e}{ds} + v \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \quad (\text{III-5})$$

$$u \frac{\partial w}{\partial s} + v \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} u^2 = -\frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} U_e^2 + \frac{\partial}{\partial n} \left(v \frac{\partial w}{\partial n} \right) \quad (\text{III-6})$$

$U_e(s)$ étant la vitesse de l'écoulement extérieur à la couche limite.

Remarquons d'abord que l'équation (III-6) se résout séparément des équations (III-4) et (III-5) une fois que les vitesses u et v sont disponibles.

Le système d'équation (III-4, III-5) est mixte (parabolique/ hyperbolique) avec s comme variable-temps au conditions initiales:

$$u(s_0, n) = u_0(n) \quad (\text{III-7})$$

et de conditions aux limites:

$$u(s, 0) = 0, \quad v(s, 0) = 0 \quad \text{et} \quad u(s, \delta) = u_e(s) \quad (\text{III-8})$$

L'équation de quantité de mouvement (III-5) peut être comparer avec l'équation de diffusion unidimensionnelle et l'équation de transport, la seule différence majeure est la nature non linéaire des termes convectifs et l'accouplement avec l'équation de continuité à travers la composante normale de la vitesse \mathbf{v} .

Cependant le terme $U_e \frac{dU}{ds}$ est connu, il se comporte comme un terme source avec une petite influence sur le choix pour la méthode de calcul, aucun des schémas décrits précédemment ont le potentiel d'être appliqués. Le schéma explicite est exclu, il conduit à une restriction sur la marche de la taille du pas (Δs) pour la stabilité de la solution.

A la fois le schéma Crank-Nicolsons et le schéma implicite à trois niveaux sont inconditionnellement stables à la précision en Δs , ou Δt .

Dans la résolution de (III-5), pour atteindre une bonne précision en Δs dans l'équation de diffusion, il nous faut un traitement en second ordre des termes non-linéaires $u \frac{\partial u}{\partial s}$ et $v \frac{\partial u}{\partial n}$.

En ce qui concerne le schéma de Crank-Nicolsons, il exige des itérations à chaque station de maillage. Dans le schéma implicite à trois niveaux l'itération est évitée par la projection de u et v à partir des lignes de courant précédentes.

III-5) SCHEMA IMPLICITE :

Pour développer un algorithme de calcul, les expressions des différences finies sur un maillage uniforme, sont introduites pour les différents termes des équations (III-4) et (III-5) comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{(1,5u_j^{n+1} - 2u_j^n + 0,5u_j^{n-1})}{\Delta s} + O(\Delta s^2) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})}{2\Delta n} + O(\Delta n^2) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = \frac{(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1})}{\Delta n^2} + O(\Delta n^2) \end{array} \right. \quad (\text{III-9})$$

La grille d'identification (fig37) et une bonne description des expressions précédentes sont introduites pour améliorer le rôle du pas temporel suivant la coordonnées s .

Pour obtenir un système d'équations linéaires en u^{n+1} , les composantes de la vitesse u et v figurants dans le membre gauche de (III-5) sont extrapolées comme suite :

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + 0(\Delta s^2), \quad v_j^{n+1} = 2v_j^n - v_j^{n-1} + 0(\Delta s^2) \quad (\text{III-10})$$

La substitution des expressions (III-9) et (III-10) dans l'équation (III-5) avec un réarrangement en u^{n+1} donne le système d'équations tri-diagonal suivant associé à la ligne (n+1) à travers la couche limite.

$$a_j u_{j-1}^{n+1} + b_j u_j^{n+1} + c_j u_{j+1}^{n+1} = d_j \quad (\text{III-11})$$

avec:

$$a_j = -\frac{\Delta s}{2\Delta n} (2v_j^n - v_j^{n-1}) - v \frac{\Delta s}{\Delta n^2},$$

$$b_j = 1,5(2u_j^n - u_j^{n-1}) + 2v \frac{\Delta s}{\Delta n^2},$$

$$c_j = \frac{\Delta s}{2\Delta n} (2v_j^n - v_j^{n-1}) - v \frac{\Delta s}{\Delta n^2}, \quad \text{et}$$

$$d_j = (2u_j^n - u_j^{n-1})(2u_j^n - 0,5u_j^{n-1}) + \Delta s \left(U_e \frac{dU_e}{ds} \right)^{n+1}$$

L'équation (III-11) n'est pas appliquée à $j=1$ ($n=0$) et à $j = j_{\max}$ ($n = n_{\max}$).

Pour l'équation formée à ($j = j_{\max} - 1$), $u_{j_{\max}} = U_e$ par conséquent dans l'expression (III-11) d_j est remplacé par $d_j - c_j U_e^{n+1}$ avec c_j approximativement égal à zéro.

Pour l'équation formée à ($j = 2$) avec $u_1 = 0$, l'équation (III-11) peut être résolu efficacement en utilisant l'algorithme T.D.M.A.

Une fois u_j^{n+1} est calculé v_j^{n+1} sera obtenu de (III-4) sous la forme discrétisée suivante:

$$v_j^{n+1} = v_{j-1}^{n+1} - 0,5 \frac{\Delta n}{\Delta s} \left[(1,5u_j^{n+1} - 2u_j^n + 0,5u_j^{n-1}) + (1,5u_{j-1}^{n+1} - 2u_{j-1}^n + 0,5u_{j-1}^{n-1}) \right] - 0,5(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) \frac{1}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} \quad (\text{III-12})$$

avec $v_1^{n+1} = 0$.

La combinaison de (III-11) et (III-12) est développée en second ordre en $\Delta s, \Delta n$, inconditionnellement stable (dans le sens de Von Neumann)[15], efficace et solide. Elles doivent être complétées par un algorithme de premier niveau, pour démarrer la marche de départ ($n = 1$). Une autre alternative consiste dans les données sous forme de conditions initiales pour les marches (n) et ($n-1$). Si le schéma de Crank-Nicolsons est introduit pour la résolution de (III-5), la solution u^{n-1} n'est pas utilisée, cela réduit l'exigence de stockage et nécessite seulement un niveau de données initiales.

Cependant l'extrapolation (III-10) est remplacée par :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + O(\Delta s), \quad v_j^{n+1} = v_j^n + O(\Delta s).$$

Pour accomplir une exactitude totale en second ordre en (Δs) , une itération est exigée à chaque station.

Après la résolution de l'équivalente de (III-11) et (III-12), la courante solution itérative u_{k+1}, v_{k+1} est utilisée à la place de (III-10), et les équations équivalentes de (III-11) et (III-12) sont résolus une seconde fois. Au début de l'itération, $u^k = u^n$ et $v^k = v^n$, l'itération est terminée lorsque $u_{k+1} = u^k$ à une tolérance acceptable et u_{n+1}, v_{n+1} seront près à u_{k+1}, v_{k+1} .

Dans la pratique il est plus efficace de ne pas itérer à chaque station mais de réduire la taille du pas (Δs) pour atteindre la précision demandée, bien que cela ralentit la convergence.

III-6) DEVELOPPEMENT DES EQUATIONS :

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial n} = -u \left(\frac{1}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} \right)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} = U_e \frac{dU_e}{ds} + v \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$$

$$u \frac{\partial w}{\partial s} + v \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} u^2 = -\frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} U_e^2 + \frac{\partial}{\partial n} \left(v \frac{\partial w}{\partial n} \right)$$

Pour éclaircir l'écriture nous écrivons u comme U et v comme V

$$U_j^{n+1} \left(\frac{1,5U_j^{n+1} - 2U_j^n + 0,5U_j^{n-1}}{\Delta s} \right) + V_j^{n+1} \left(\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta n} \right) = U_e \frac{\partial U_e}{\partial s} + v \left(\frac{U_{j-1}^{n+1} + 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}}{\Delta n^2} \right)$$

avec: $U_j^{n+1} = 2U_j^n - U_j^{n-1}$ et $V_j^{n+1} = 2V_j^n - V_j^{n-1}$

$$[2U_j^n - U_j^{n-1}] [1,5U_j^{n+1} - 2U_j^n + 0,5U_j^{n-1}] + \Delta s [2V_j^n - V_j^{n-1}] \left(\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta n} \right) =$$

$$\Delta s U_e \frac{\partial U_e}{\partial s} + v \Delta s \left(\frac{U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}}{\Delta n^2} \right)$$

soit:

$$a_j U_{j-1}^{n+1} + b_j U_j^{n+1} + c_j U_{j+1}^{n+1} = d_j$$

avec:

$$a_j = \frac{-\Delta s}{2\Delta n} (2V_j^n - V_j^{n-1}) - \frac{v\Delta s}{\Delta n^2}$$

$$b_j = 1,5(2U_j^n - U_j^{n-1}) + 2\frac{v\Delta s}{\Delta n^2}$$

$$c_j = \frac{\Delta s}{2\Delta n} (2V_j^n - V_j^{n-1}) - \frac{v\Delta s}{\Delta n^2}$$

$$d_j = (2U_j^n - U_j^{n-1})(2U_j^n - 0,5U_j^{n-1}) + \left[\Delta s \left(U_e \frac{\partial U_e}{\partial s} \right) \right]^{n+1}$$

soit à l'ordre $n+1$:

$$a_j U_{j-1} + b_j U_j + c_j U_{j+1} = d_j \quad (\text{III-13})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} j=1 ; U_1 = 0 & \text{condition limite à la paroi} \rightarrow (1) \\ j=2 ; a_2 U_1 + b_2 U_2 + c_2 U_3 = d_2 & \rightarrow (2) \\ \cdot & \\ \cdot & \\ j=m-1 ; a_{m-1} U_{m-2} + b_{m-1} U_{m-1} + c_{m-1} U_m = d_{m-1} & \rightarrow (m-1) \\ j=m ; U_m = U_e & \rightarrow (m) \end{array} \right.$$

Avec $j=2$ à $m-1$ les équations peuvent être écrit sous la forme :

$$U_j = P_j U_{j+1} + Q_j$$

en effet :

de (III-13) on écrit :

$$U_j = \frac{d_j}{b_j} - \frac{a_j}{b_j} U_{j-1} - \frac{c_j}{b_j} U_{j+1} \quad (c)$$

si (III-13) est admise alors on peut écrire que :

$$U_{j-1} = P_{j-1} U_j + Q_{j-1}$$

remplaçons U_{j-1} dans (c) :

$$U_j = \frac{d_j}{b_j} - \frac{a_j}{b_j} (P_{j-1} U_j + Q_{j-1}) - \frac{c_j}{b_j} U_{j+1}$$

$$U_j [b_j + a_j P_{j-1}] = d_j - a_j Q_{j-1} - c_j U_{j+1}$$

Donc : $U_j = \frac{-c_j}{b_j + a_j P_{j-1}} U_{j+1} + \frac{d_j - a_j Q_{j-1}}{b_j + a_j P_{j-1}}$, par analogie à (III-13) on aura :

$U_j = P_j U_{j+1} + Q_j \quad \text{avec}$ $P_j = \frac{-c_j}{b_j + a_j P_{j-1}} \quad \text{et} \quad Q_j = \frac{d_j - a_j Q_{j-1}}{b_j + a_j P_{j-1}}$ <p style="text-align: center;">j=2,3,.....,m-1</p>	(III-14)
---	----------

Pour démarrer le calcul de P_j et Q_j on a besoin de P_1 et Q_1 , or en $j=1$ les équations ne sont pas définis c.à.d les formules (III-14) ne sont valables que pour $j=2, 3, \dots$, jusqu'à $m-1$.

Pour déterminer U_2 et U_{m-1} on doit retourner aux équations .

a) Calcul de U_2 :

De l'équation (2) on détermine U_2 et de l'équation (m-1) on détermine U_{m-1} .

En effet de (2) on a :

$$a_2 U_1 + b_2 U_2 + c_2 U_3 = d_2$$

or $U_1 = 0$

$$U_2 = \frac{-c_2 U_3 + d_2}{b_2}$$

On remarque que si on utilise la forme $U_j = P_j U_{j+1} + Q_j$ c.à.d $U_2 = P_2 U_3 + Q_2$, par conséquent $P_2 = \frac{c_2}{b_2}$ et $Q_2 = \frac{d_2}{b_2}$

Si on compare à la forme : $P_j = \frac{-c_j}{b_j + a_j P_{j-1}}$ et $Q_j = \frac{d_j - a_j Q_{j-1}}{b_j + a_j P_{j-1}}$ avec $j=2$ on déduit que $P_1 = 0$ et $Q_1 = 0$ par conséquent on peut calculer de P_2 jusqu'à P_{m-1} et de Q_2 jusqu'à Q_{m-1}

b) Calcul de U_{m-1} :

L'équation (m-1) est : $a_{m-1} U_{m-2} + b_{m-1} U_{m-1} + c_{m-1} U_m = d_{m-1}$

$$\text{or } U_m = U_e$$

$$a_{m-1} U_{m-2} + b_{m-1} U_{m-1} = d_{m-1} - c_{m-1} U_e$$

$$a_{m-1} (P_{m-2} U_{m-1} + Q_{m-2}) + b_{m-1} U_{m-1} = d_{m-1} - c_{m-1} U_e$$

$$U_{m-1} [b_{m-1} + a_{m-1} P_{m-2}] = d_{m-1} - c_{m-1} U_e - a_{m-1} Q_{m-2}$$

$$U_{m-1} = \frac{-c_{m-1}}{b_{m-1} + a_{m-1} P_{m-2}} U_e + \frac{d_{m-1} - a_{m-1} Q_{m-2}}{b_{m-1} + a_{m-1} P_{m-2}}$$

U_{m-1} se calcule facilement si on connaît les P_j et Q_j , on remarque en comparant à la formulation $U_j = P_j U_{j+1} + Q_j$ c.à.d $U_{m-1} = P_{m-1} U_m + Q_{m-1}$ que :

$$P_{m-1} = \frac{-c_{m-1}}{b_{m-1} + a_{m-1} P_{m-2}} \quad \text{et} \quad Q_{m-1} = \frac{d_{m-1} - a_{m-1} Q_{m-2}}{b_{m-1} + a_{m-1} P_{m-2}}$$

Il est tout à fait normal de retrouver la formulation de P_j et Q_j respectée puis-que j prend la valeur $m-1$ aussi, par contre ne prend pas la valeur m .

En fin le calcul se résume en:

Premier balayage : Calcul dans l'ordre croissant de P_j et Q_j

c. à d $P_1, P_2, \dots, \text{jusqu'à } P_{m-1}$.

$Q_1, Q_2, \dots, \text{jusqu'à } Q_{m-1}$.

2^{ème} balayage : Calcul dans l'ordre décroissant de U_j

c. à d $U_{m-1}, U_{m-2}, \dots, \text{jusqu'à } U_2$.

Dans ce qui suit nous présentons l'organigramme de calcul d'un programme établi en langage Turbo Pascal:

III-7) ORGANIGRAMME DE CALCUL DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE (T.D.M.A) :

DECLARATION DES CONSTANTES :

dn=0.02;

nn=5;

m=400;

LL=20 ;

Eps1=1.E-3;

Eps2=100;

EPS=1;

Q0 =1.5;{1.3141;}

KK=6;

nu=1E-6; {m²/s}

Quantités dépendantes de la forme de l'ellipsoïde :

A0=6;B0=3;C0=1;C1=1.0055;{1.0904029;} C2=3.339295;

ANG= 0.1047; (*6 degres*)

X1=1;Y1=0;Z1=0;

DECLARATION DES TYPES DES VARIABLES:

chaine = array[1..9] of char;

colon1= array[1..21] of text;

colon2= array[1..21] of chaine;

tab0=array[0..ll] of real;

tab1=array[0..m] of real;

tab2=array[0..ll,0..m] of real;

tabLDIV=array[0..21] of real;

bloc0=^tab0; bloc1=^tab1; bloc2=^tab2;

Indice1=0..ll; Indice2=0..m;

DECLARATION DES VARIABLES:

```

P,Q:bloc1;
  ss,ds,Ue,UeDUeDS,DE2DS,DE1DZ :bloc0;
  u0, u,v,u1,v1,w,usue,wsue ,dss,DZS,H,Cf: bloc2;
  l: indice1; j:indice2;
  s, mm,ld,Kcomp, dis,k:integer;
landa,aj,bj,cj,dj,Test1, Test2,test3,ER,Er1,Er2: real;
fichiers d'entrees:
  logss,logUe,logdue,logde2,logde1,loguw: colon1;
  physs,phyUe,phydue,phyde2,phyde1,phyuw: colon2;
fichiers de sortie :
label 1,2,3,4,5,6;

```

PROCEDURES:(sous-programmes):**Procedure ecrfichUW;**

```

begin
  assign(loguw[kcomp],phyuw[kcomp]+' .dat');
  rewrite(loguw[kcomp]);
writeln(loguw[kcomp],"");
writeln(loguw[kcomp],'les valeurs des composantes u et w de la vitess
en fonction de n . ');
writeln(loguw[kcomp],"");
writeln(loguw[kcomp], ' s      n      u/Ue      v/Ue      W/Ue ');
writeln(loguw[kcomp], '_____');

```

LECTURE DE L'ECOULEMENT POTENTIEL**Procedure lect Ecpot ;**

```

BEGIN
assign(Logss[kcomp],Physs[kcomp]+' .dat')

```

```

reset(logss[kcomp]);
    assign(LogUe[kcomp],PhyUe[kcomp]+' .dat');
    reset(logUe[kcomp]);
assign(logdUe[kcomp],PhydUe[kcomp]+' .dat');
reset(logdUe[kcomp]);
    assign(logde2[kcomp],Phyde2[kcomp]+' .dat');
    reset(logde2[kcomp]);
assign(logde1[kcomp],Phyde1[kcomp]+' .dat');
reset(logde1[kcomp]);
    for l:=0 to ll do begin
readln(logss[kcomp],ss^[l]); (*donne s *)
readln(logUe[kcomp],Ue^[l]); (*donne Ue*)
readln(logdue[kcomp], UedUeds^[l]);(*donne UedUe/ds*)
readln(logde2[kcomp], DE2DS^[l]);(*donne 1/e2*de2/ds*)
readln(logde1[kcomp], DE1DZ^[l]);(*donne 1/e1*de1/dz*)
    end;
    END;

```

ORGANIGRAMME PRINCIPAL :

```

BEGIN
    REPEAT
new(ss);new(ue);new(uedueds);new(de2ds);new(de1dz);
lecture des fichiers d'entrée :
Lect_Ecpot;
Ecrfichuw;
for l:=1 to ll-1 do ds^[l]:=ss^[l+1]-ss^[l-1]/2;
ds^[ll]:=ss^[ll]-ss^[ll-1];

```

CALCUL DES VITESSES u et v :**LES CONDITIONS AUX LIMITES:**

```
(*pour j=0 *) for l:=0 to ll do begin
    u^[1,0]:=0.000;
    v^[1,0]:=0.000; end;
(*pour j=m*) for l:=1 to ll do begin
    u^[1,m]:=ue^[l];
    v^[1,m]:=0.0; end;
(*pour l=0 *) for j:=1 to m do begin
    u^[0,j]:=0;
    v^[0,j]:=0; end;
```

CALCUL PAR LA METHODE TDMA:

landa: facteur de relaxation $0 < \text{landa} < 2$, $\text{landa} > 1$ accélère la convergence
d'un processus convergent $\text{landa} < 1$ convèrge un processus divergent.

landa:=0.8;

k:=0;(Nbre d'itérations) :

(***REPETER LES ITERATIONS sur u(1,j) *****)

ER1:=0;

NEW(P);NEW(Q);

for l:=1 to ll-1 do BEGIN

k:=0;

if l=1 then begin REPEAT

Er1:=0; k:=k+1;

U^[1,0]:=0; V^[1,0]:=0; U^[1,m]:=Ue^[1];V^[1,m]:=0;

for j:=1 to m-1 do begin

P^[0]:=0;Q^[0]:=0;

aj:=- (ds^[l]/(2*dn))*v^[1,j]-nu*ds^[l]/sqr(dn); { writeln('aj=',aj:4:4); }

cj:=(ds^[l]/(2*dn))*v^[1,j]-nu*ds^[l]/sqr(dn); { writeln('cj=',cj:4:4); }

bj:=u^[l,j]-u^[l-1,j]+nu*ds^[l]/sqr(dn);

```

dj:=ds^[l]*UedUeds^[l];{ writeln('dj=',dj:4:4); }
  P^[j]:= -cj/(bj+aj*P^[j-1]);
  Q^[j]:=(dj-aj*Q^[j-1])/(bj+aj*P^[j-1]);
end; (**de la boucle j**)
  j:=m-1;
  Repeat
    test1:=u^[1,j]; test2:=v^[1,j];
    U^[1,J]:=P^[j]*U^[1,J+1]+Q^[j];
    if abs(Test1-u^[1,j]) > EPS1 then Er1:=Er1+abs(test1-u^[1,j]);
      u^[1,j]:=test1+landa*(u^[1,j]-test1);
      v^[1,j]:=test2+landa*(v^[1,j]-test2);
      j:=j-1; until j=0;
    for j:=1 to m-1 do
      V^[1,j]:= v^[1,j-1]-0.5*(dn/ds^[l])*(u^[1,j]+u^[1,j-1])-
        dn*(u^[1,j])*de2ds^[1];
      writeln (' Er1=',Er1:4:2,'-----');
      writeln('-----iteration',k:4,'-----');
UNTIL ER1<EPS2;
      for j:=1 to mm-1 do
        V^[1,j]:= v^[1,j-1]-0.5*(dn/ds^[l])*(u^[1,j]+u^[1,j-1])-
          dn*(u^[1,j])*de2ds^[1];
          for j:=0 to mm do
            writeln('u[',l,' ',j,']='u^[1,j]:6:6,' v[',l,' ',j,']='v^[1,j]:6:6);
          end;(**END de if l=1 FIN DU CALCUL POUR L=1 ***)
          CALCUL POUR L= L+1 :
          U^[l+1,0]:=0; V^[l+1,0]:=0; U^[l+1,m]:=Ue^[l+1];V^[l+1,m]:=0;
for j:=1 to m-1 do begin
          P^[0]:=0;Q^[0]:=0;
          aj:=-((ds^[l]/(2*dn))*(2*v^[l,j]-v^[l-1,j])-nu*ds^[l]/sqr(dn));
          bj:=1.5*(2*u^[l,j]-u^[l-1,j])+2*nu*ds^[l]/sqr(dn);
          cj:=(ds^[l]/(2*dn))*(2*v^[l,j]-v^[l-1,j])-nu*ds^[l]/sqr(dn);

```



```

    dj:=(2*u^[l,j]-u^[l-1,j])*(2*u^[l,j]-0.5*u^[l-1,j])+ds^[l]*UedUeds^[l+1];
    P^[j]:= -cj/(bj+aj*P^[j-1]);
    Q^[j]:=(dj-aj*Q^[j-1])/(bj+aj*P^[j-1]);
end; (**de la boucle j**)
j:=m-1; Repeat
    U^[l+1,J]:=P^[j]*U^[l+1,J+1]+Q^[j];
    j:=j-1
    Until j=0;
Fixation de jmax:
j:=0; repeat
j:=j+1;
until U^[l+1,j]>=Ue^[l+1];mm:=j; V^[l+1,mm]:=0;
for j:=1 to mm-1 do
V^[l+1,j]:=v^[l+1,j-1]-0.5*(dn/ds^[l])*((1.5*u^[l+1,j]-2*u^[l,j]+0.5*u^[l-1,j])+(1.5*u^[l+1,j-1]-2*u^[l,j-1]+0.5*u^[l-1,j-1])) - n*(u^[l+1,j])* de2ds^[l+1];

```

ECRITURE SUR LES FICHIERS DE SORTIE:

```

writeln(loguw[kcomp],"ss^[l+1]:4:4","j*dn:4:4",U^[l+1,j]:4:4);end;
writeln('u[' ,l+1,' ',j,']=',u^[l+1,j]:6:6,' v[' ,l+1," ,j,']=',v^[l+1,j]:6:6);
end;(* de j*) end; (** de la boucle l **)
dispose(P);dispose(Q);

```

(REPITITION DES CALCULS POUR D'AUTRES FAISSEAUX)

```

Kcomp:=Kcomp+1;
Until Kcomp>=21 ;
readln;
close(logss[kcomp]); close(logUe[kcomp]); close(logdUe[kcomp]);
close(logde2[kcomp]); close(logde1[kcomp]);
close(loguw[kcomp]);
end.

```

III- 8) PRESENTATION DES RESULTATS DU CALCUL DE L'ECOULEMENT DANS LA COUCHE LIMITE :

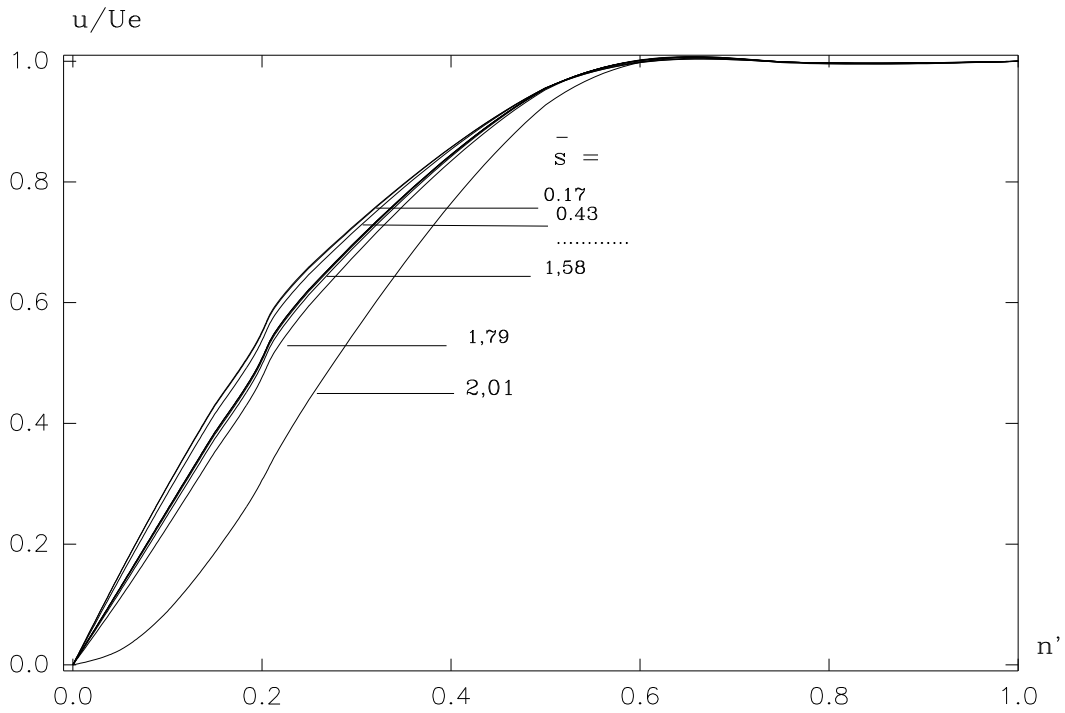


Fig38 : Profils des vitesses u/U_e pour les différentes distances \bar{s} suivant la ligne H

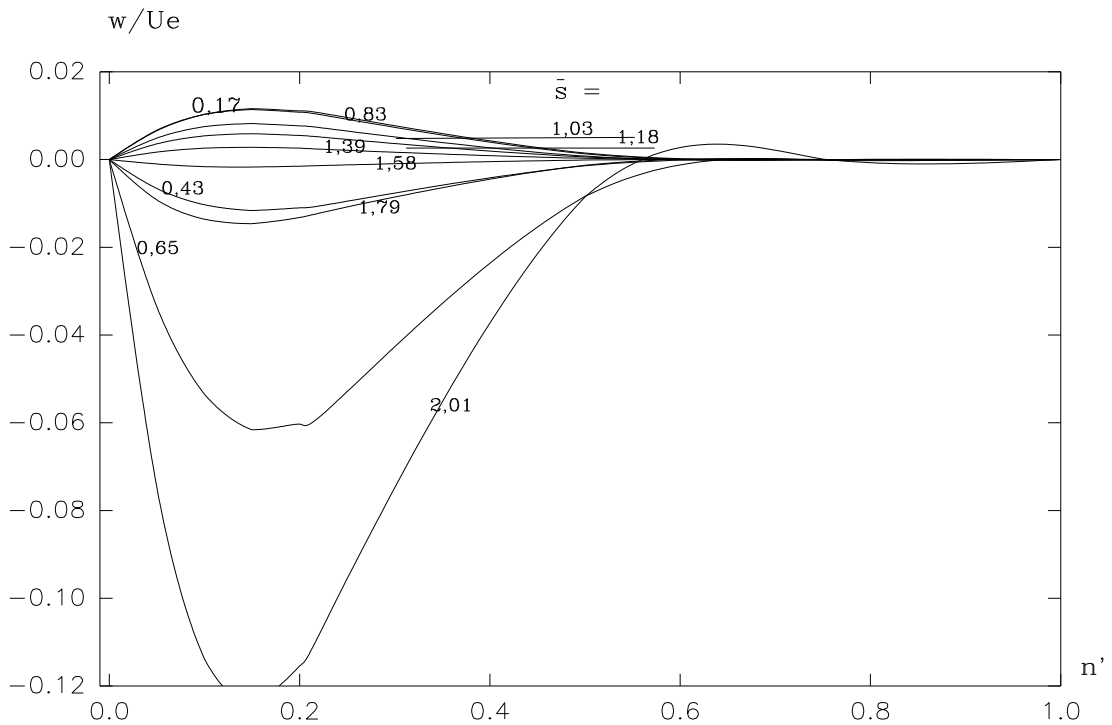


Fig39 :Variation des vitesses w/U_e pour les différentes distances \bar{s} suivant la ligne H.

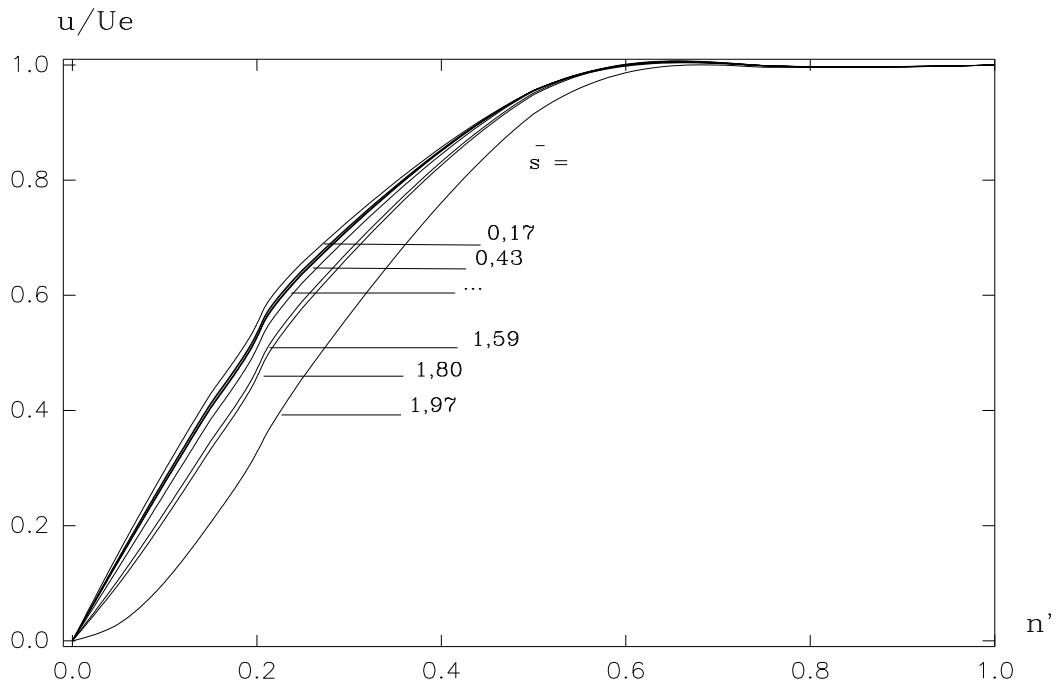


Fig40 : Profils des vitesses u/U_e pour les différentes distances \bar{s} suivant la ligne K.

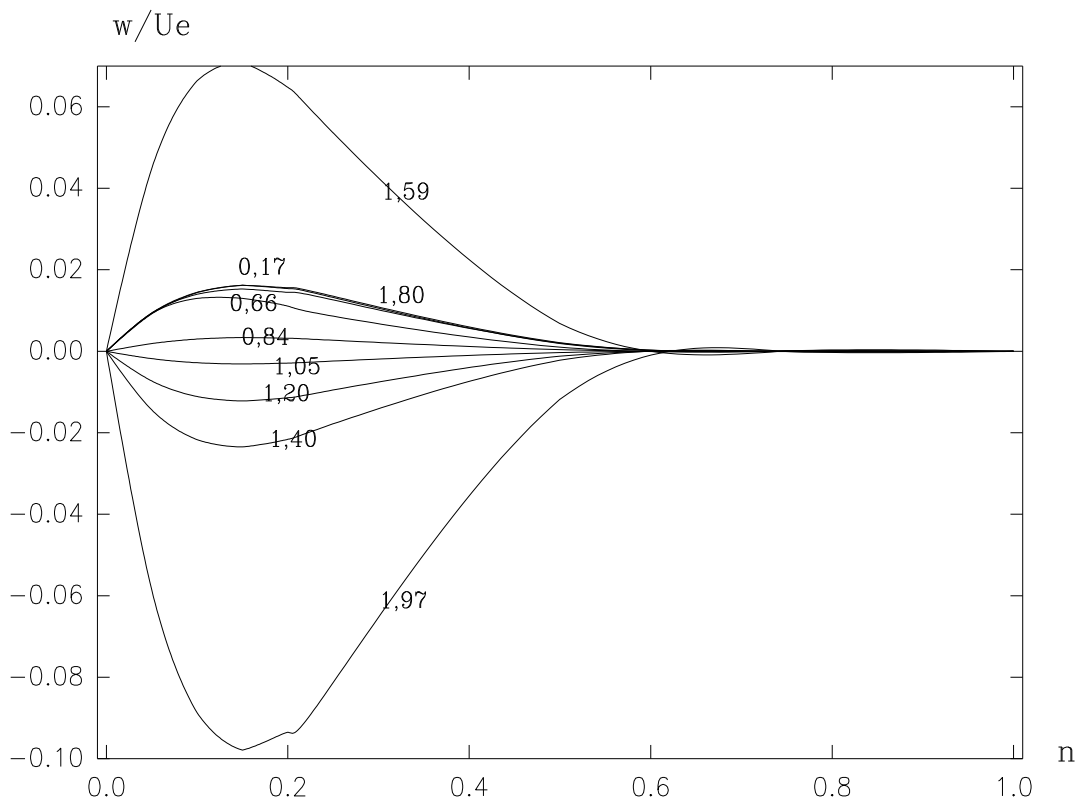


Fig41: Evolution des vitesses w/U_e pour les différentes distances \bar{s} suivant la ligne K.

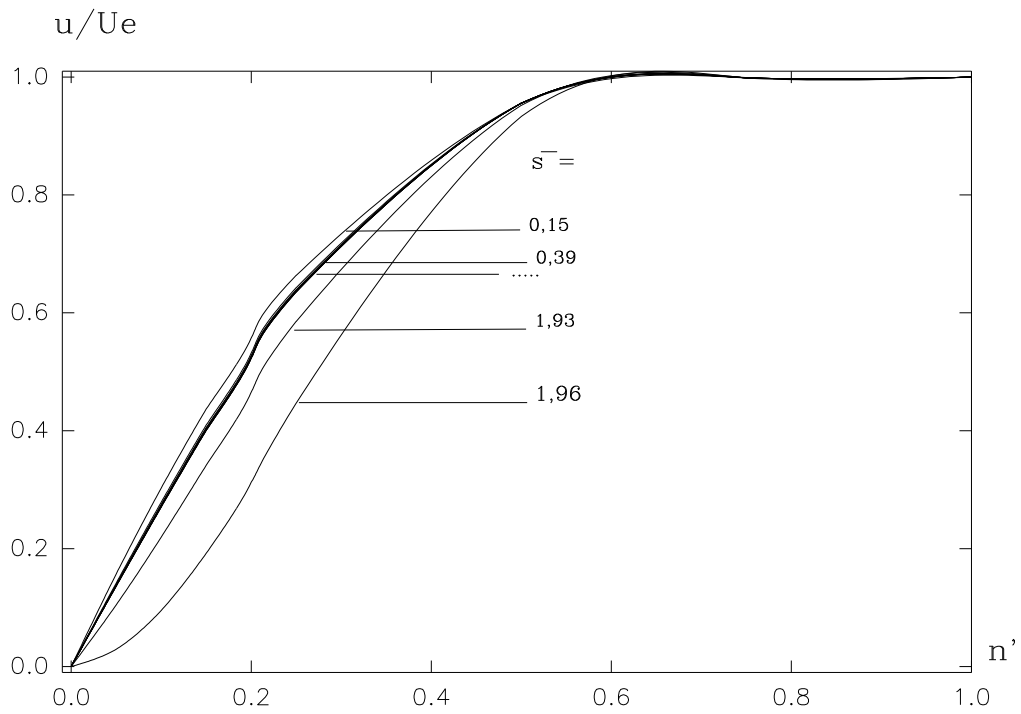


Fig42: Profils des vitesses u/U_e dans la couche limite pour les différentes distances \bar{s} suivant la ligne F' .

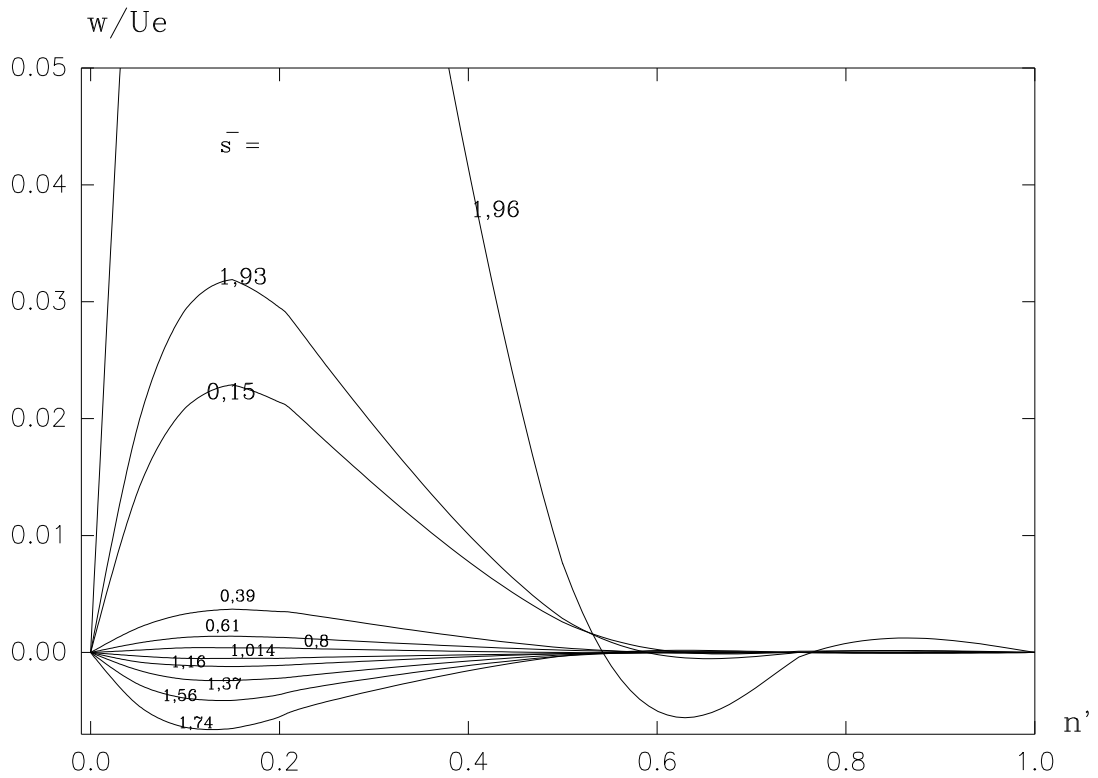


Fig43: Profils des vitesses w/U_e pour les différentes distances \bar{s} suivant la ligne F' .

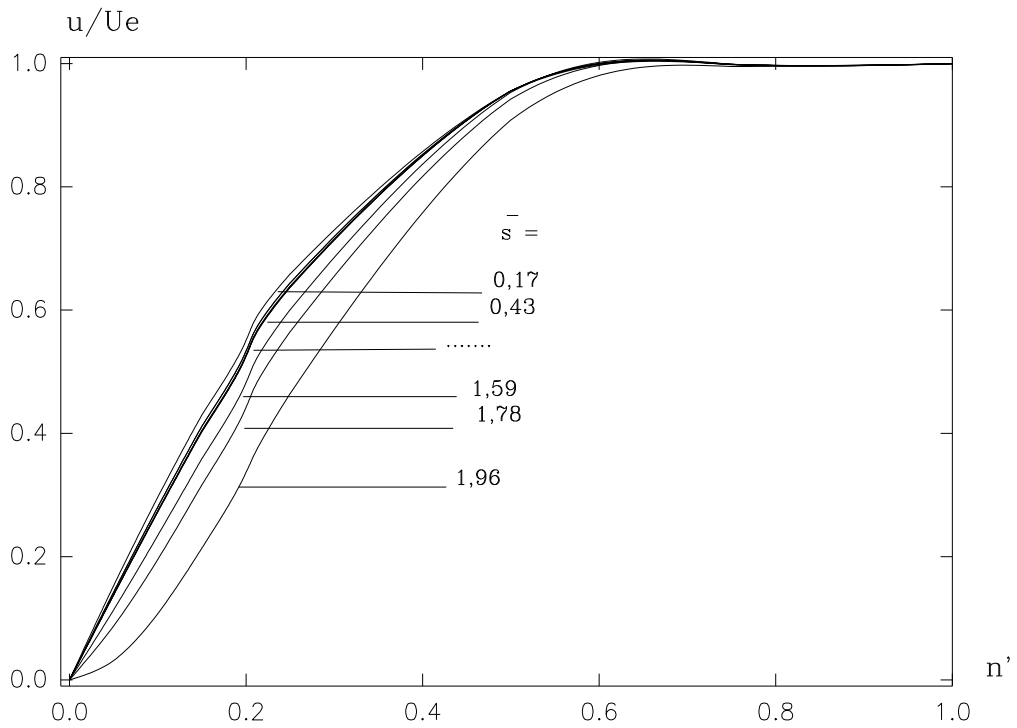


Fig44: Variation des vitesses u/U_e dans la couche limite pour les différentes distances \bar{s} suivant la ligne J'.

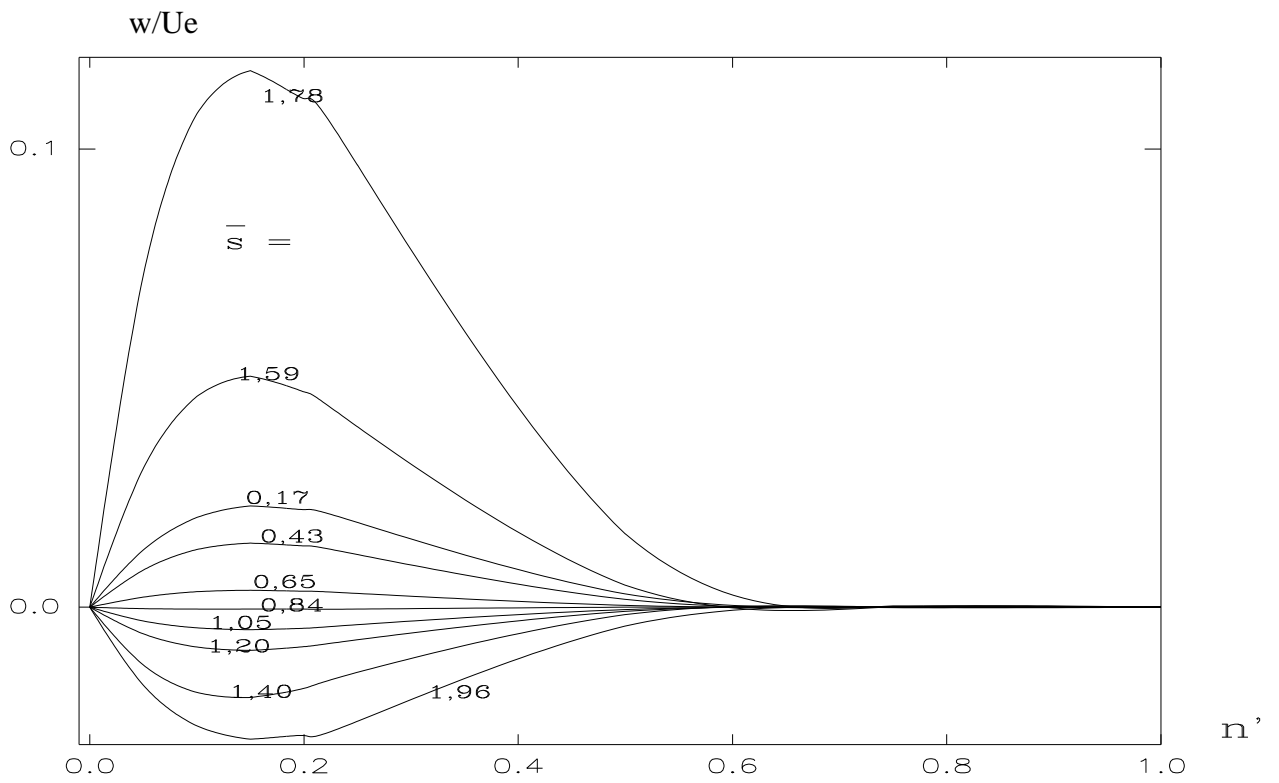


Fig45: Evolution des vitesses w/U_e dans la couche limite pour les différentes distances \bar{s} suivant la ligne J'.

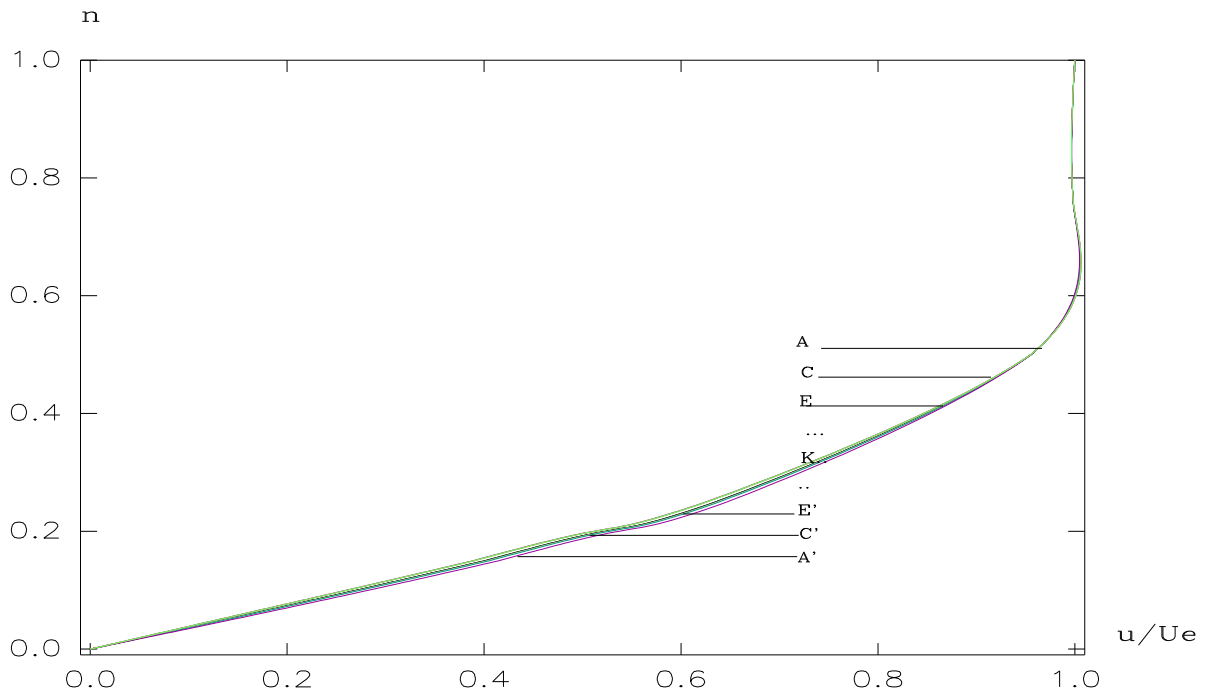


Fig46: Evolution des vitesses u/U_e sur la ligne équipotentielle $\phi = 540$ et ce du plan de symétrie intrados vers le plan de sym.extrados.

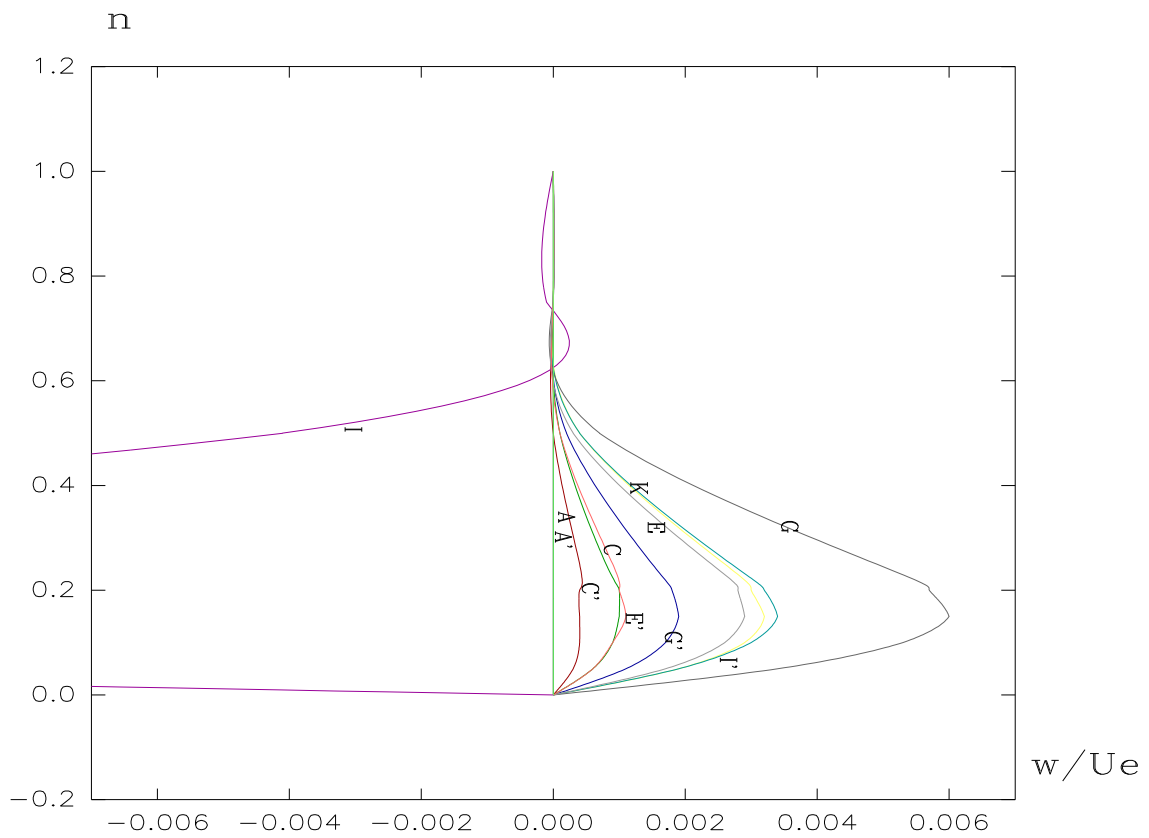


Fig47 : Evolution des vitesses w/U_e sur la ligne équipotentielle $\phi = 540$ et ce du plan de symétrie intrados vers le plan de sym.extrados.

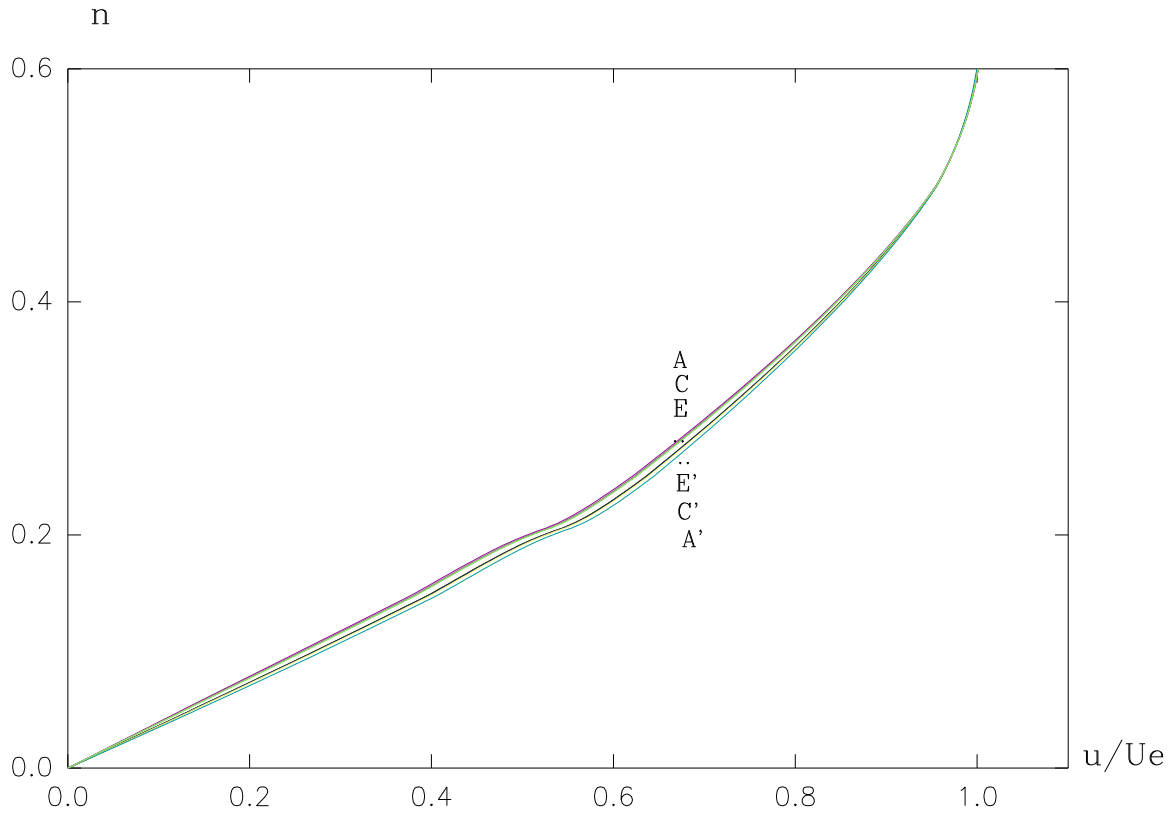


Fig48 : Profils des vitesses u/U_e sur la ligne équipotentielle $\phi = 0$ et ce du plan de symétrie intrados vers le plan de sym.extrados.

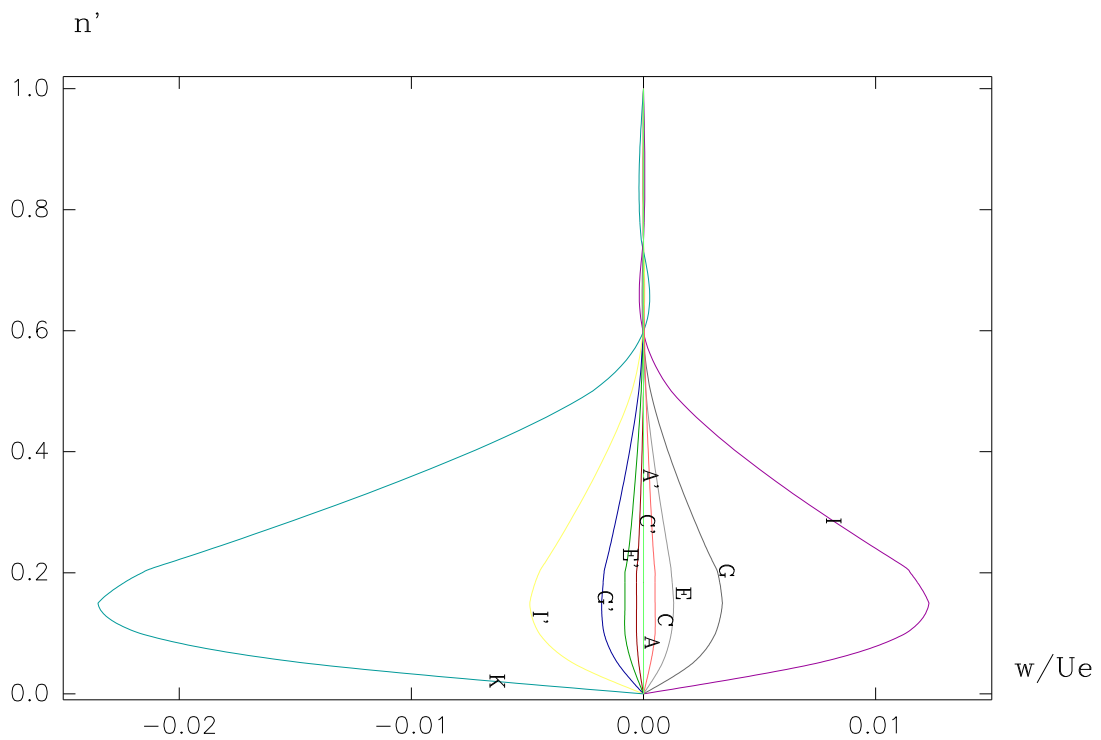


Fig49 : Profils des vitesses w/U_e sur la ligne équipotentielle $\phi = 0$ et ce du plan de symétrie intrados vers le plan de sym.extrados.

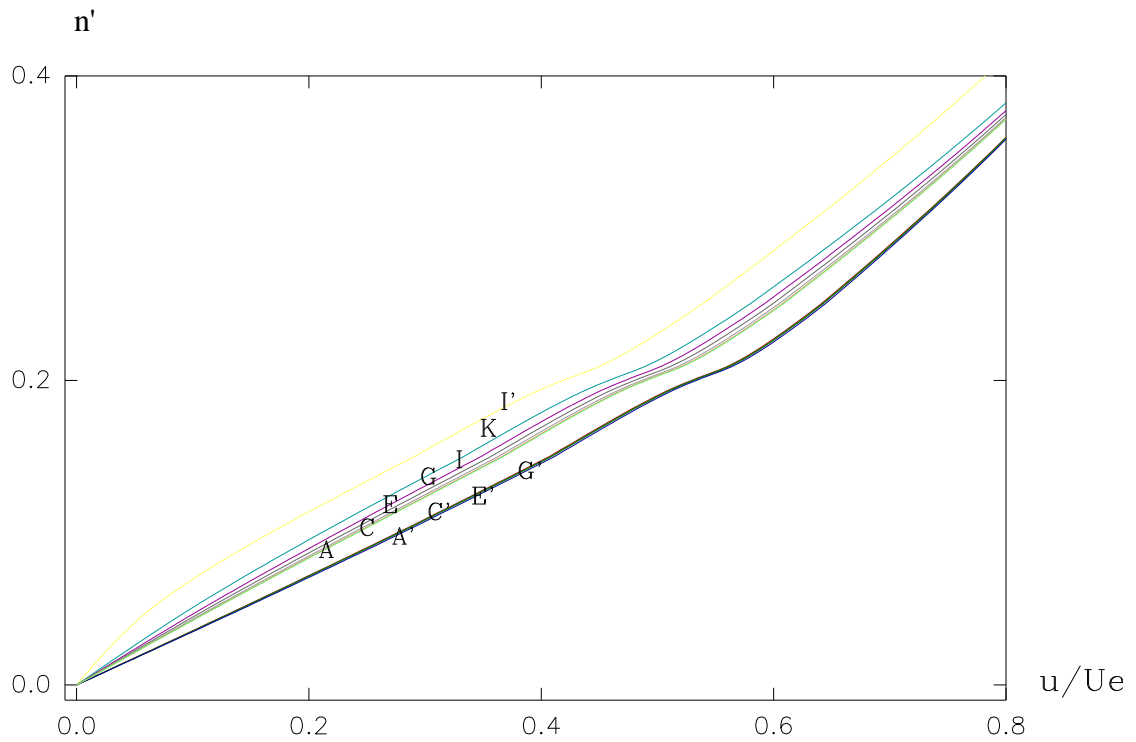


Fig50 : Evolution des vitesses w/U_e sur la ligne équipotentielle $\phi = -600$ et ce du plan de symétrie intrados vers le plan de sym.extrados.

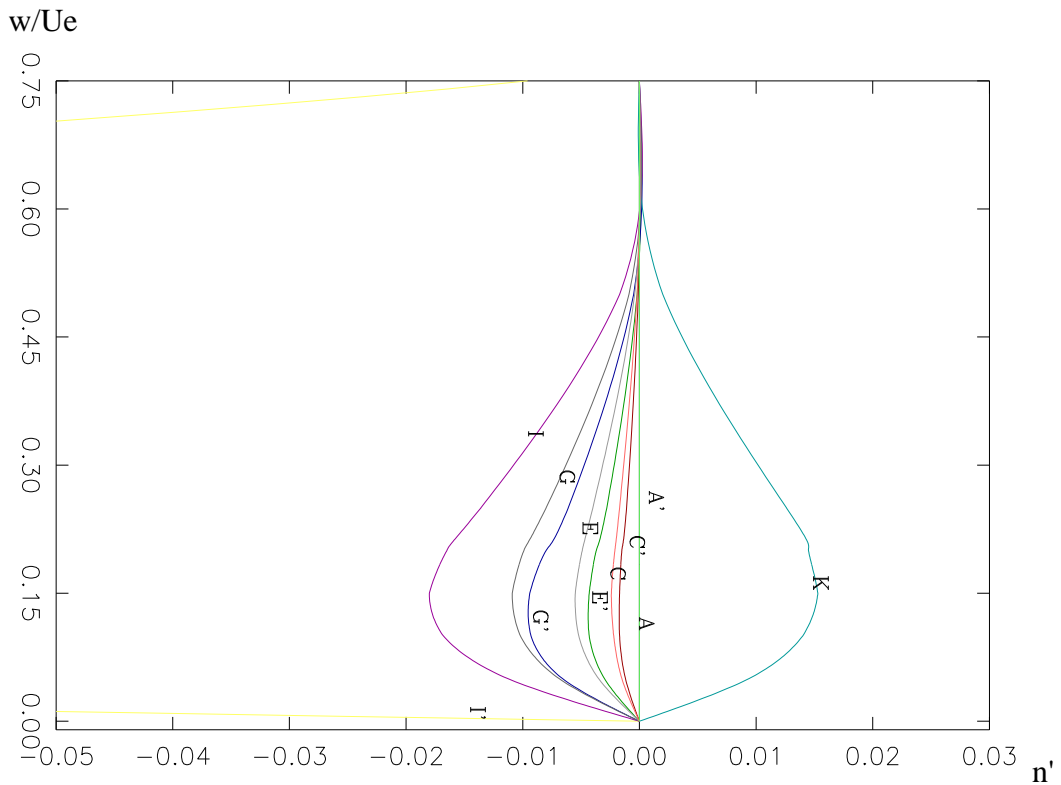


Fig51: Evolution des vitesses w/U_e sur la ligne équipotentielle $\phi = -600$ et ce du plan de symétrie intrados vers le plan de sym.extrados.

III-9) ANALYSE DES RESULTATS :

Beaucoup de significations ont été mise en évidence à partir de l'écoulement extérieur de vitesse U_e jusqu'à la ligne de décollement tridimensionnel qui achève le calcul des paramètres de la couche limite.

Notons tout d'abord que nous nous intéressons à l'écoulement entièrement laminaire; le régime turbulent n'est atteint qu'à partir d'un nombre de Reynolds de l'ordre de (3.10^6) d'après les différents travaux expérimentaux effectués [30], [31],[32],[33], les testes réalisés avec une vitesse de 30 m/s c'est à dire à $Re = 1,6 \cdot 10^6$ donne naissance à un écoulement laminaire suivi d'un décollement dans toutes les sections de l'ellipsoïde soit à faible incidence ($i=10^\circ$) ou à forte incidence ($i=30^\circ$), la transition vers le régime turbulent se produit avec une vitesse de (45 m/s) ce qui correspond à un Reynolds de $7,2.10^6$. Nous avons présenté par les figures (38 à 41) et(42 à 45) le profil des vitesses longitudinales et transversales respectivement sur l'extrados puis sur l'intrados de l'ellipsoïde. Ces profils sont d'une façon générale attendus, la vitesse longitudinale diminue le long de la ligne de courant et varie très faiblement d'une ligne à une autre; la vitesse transversale présente une allure parabolique en s'annulant à la paroi et à la frontière de la couche limite; une allure semblable a été présentée en [28] ou il a été utilisé le même système de coordonnées.

Nous avons présenté les profils de vitesses respectivement sur une ligne proche du plan de symétrie puis sur une ligne moyenne et ensuite sur une ligne proche de la zone aplatie, ce qui nous a permis de mettre en évidence un certain accroissement des deux composantes dans le sens circonférentiel, du plan de symétrie vers la partie aplatie du corps.

Enfin nous avons présenté sur un même graphique le profil des vitesses $\frac{u}{U_e}$ et $\frac{w}{U_e}$ pour plusieurs lignes de courant dans l'ordre (A',C',E',G',I',K,I,G,E,C,A) Fig (46 à 51) du plan de symétrie intrados vers le plan de symétrie extrados, pour montrer l'évolution dans ce sens de la vitesse, et cela pour trois endroits différents: le front du corps, le milieu et vers la fin du corps. Ceci nous a permis de constater un certain

renversement dans le sens de variation de la vitesse longitudinale $\frac{u}{U_e}$ sur l'extrados à la fin du corps, cela à cause du renversement de l'écoulement juste avant son décollement. Ceci a été exposé à la section $\phi=-600$, dans le sens (A,C,E,G,I,K) pour les lignes situées sur l'extrados .

La comparaison au niveau des trois sections a montré que la vitesse varie très peu d'une ligne à une autre dans les deux sections ($\phi= 540$ et $\phi= 0$) par contre elle diffère légèrement à $\phi = -600$.

L'interprétation des graphiques de $\frac{w}{U_e}$ est compliquée à cause de son changement de sens souligné surtout à la fin du corps, comme il est présent aussi sur la zone d'aplatissement mais d'une intensité moins forte, nous constatons aussi un certain agrandissement dans le sens méridional, elle s'accroît d'avantage en se déplaçant le long du corps à partir du nez vers le milieu et encore beaucoup plus à la fin du corps.