

Modélisation de la machine synchrone à aimants permanents (MSAP)

1. Introduction.....	4
2. Hypotheses simplificatrices.....	4
3. Modélisation de la machine synchrone à aimants permanents	4
4. Conclusion.....	9

1. Introduction

L'étude du comportement d'un moteur électrique est une tâche difficile qui nécessite, avant tout, une bonne connaissance de son modèle dynamique afin de bien prédire, par voie de simulation, son comportement dans les différents modes de fonctionnement envisagés.

La première étape de la synthèse d'une loi de commande est la modélisation du procédé à contrôler (MSAP). Le modèle doit être capable de représenter fidèlement les différentes dynamiques présentes. Cette modélisation est établie en termes d'équations différentielles et est basée essentiellement sur la transformation de Park.

Dans ce chapitre, nous présentons la modélisation du moteur synchrone à aimants permanents, le modèle triphasé et le modèle obtenu à l'aide de la décomposition selon deux axes (transformation de Park).

2. Hypotheses simplificatrices

La machine synchrone à aimants permanents est un système complexe, dont la modélisation obéit aux hypothèses simplificatrices suivantes [18] :

- L'entrefer est d'épaisseur uniforme, et d'encochage négligeable.
- La saturation du circuit magnétique, l'hystérésis et les courants de Foucault sont négligeables.
- Les résistances des enroulements ne varient pas avec la température et l'effet de peau est négligeable.
- On admet que la FMM créée par chacune des phases des deux armatures est à répartition sinusoïdale.

3. Modélisation de la machine synchrone à aimants permanents

La machine (moteur) synchrone à aimants permanents (MSAP) comporte, au stator, un enroulement triphasé représenté par les trois axes (a, b, c) déphasés, l'un par rapport à l'autre, de 120° électrique (figure 1.1) et au rotor des aimants permanents assurant son excitation.

En fonction de la manière dont les aimants sont placés, on peut distinguer deux types de rotors :

- Dans le premier type, les aimants sont montés sur la surface du rotor offrant un entrefer homogène, le moteur est appelé à rotor lisse et les inductances ne dépendent pas de la position du rotor.
- Dans le deuxième, par contre, les aimants sont montés à l'intérieur de la masse rotorique et l'entrefer sera variable à cause de l'effet de la saillance. Dans ce cas, les inductances dépendent fortement de la position du rotor.

Le diamètre du rotor du premier type est moins important que celui du deuxième ce qui réduit considérablement son inertie en lui offrant la priorité dans l'entraînement des charges rapides .

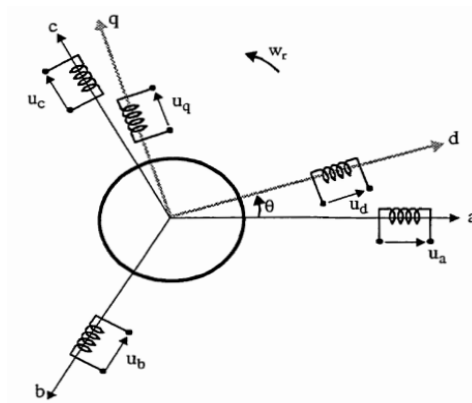


Figure 1.1 Référentiel a, b, c et référentiel d, q

Le modèle mathématique du MSAP est similaire à celui de la machine synchrone classique, le modèle triphasé s'exprime par [10] :

$$[\mathbf{v}_{abc}] = [\mathbf{R}][\mathbf{i}_{abc}] + \frac{d}{dt}[\boldsymbol{\lambda}_{abc}] \quad (1.1)$$

avec

$$[\mathbf{v}_{abc}] = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}, [\mathbf{i}_{abc}] = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}, [\boldsymbol{\lambda}_{abc}] = \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{bmatrix}, [\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

avec v_{abc} , i_{abc} et λ_{abc} , représentant respectivement les tensions de phases statoriques, les courants des phases statoriques et les flux totaux produits par les courants statoriques. R est la résistance d'une phase statorique.

Les flux totaux λ_{abc} sont exprimés par :

$$[\lambda_{abc}] = [L][i_{abc}] + [\phi_{abc}] \quad (1.3)$$

où

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{ss} & M_s & M_s \\ M_s & L_{ss} & M_s \\ M_s & M_s & L_{ss} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

avec L_{ss} et M_s représentant l'inductance propre et l'inductance mutuelle entre les enroulements statoriques, la self-inductance est la somme de deux inductances ($L_{ss} = L_{sl} + \frac{3}{2} L_m$), l'inductance de fuite L_{ls} et l'inductance de magnétisation L_m . Les flux ϕ_j , $j = a, b, c$ sont les flux rotoriques, vus par les enroulements du stator. Ils représentent les amplitudes des tensions induites dans les phases statoriques à vide.

La substitution de (1.3) dans (1.1) donne :

$$[v_{abc}] = [R][i_{abc}] + [L] \frac{d}{dt} [i_{abc}] + [\phi_{abc}] \quad (1.5)$$

Le couple électromagnétique est exprimé par :

$$T_{em} = \frac{1}{\omega} ([e_{abc}]^T [i_{abc}]) \quad (1.6)$$

où $e_{abc} = \frac{d}{dt} [\phi_{abc}]$ représentent les FÉMs produites dans les phases statorique, ω définit la vitesse de rotation du rotor en (rad/sec).

On remarque que le système (1.5) engendre des équations fortement non-linéaires et couplées. Pour simplifier ce problème, la majorité des travaux dans la littérature préfèrent d'utiliser la dite transformation de Park qui, par une transformation appliquée aux variables réelles (tensions, courants et flux), permet d'obtenir des variables fictives appelées les composantes d-q ou les équations de Park.

Du point de vue physique, cette transformation est interprétée comme étant une substitution des enroulement immobiles ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$) par des enroulements (\mathbf{d}, \mathbf{q}) tournant avec le rotor. Cette transformation rend les équations dynamiques des moteurs à courant alternatif plus simples ce qui facilite leur étude et leur analyse.

La transformation de Park est définie comme suit :

$$[\mathbf{X}_{dqo}] = [\mathbf{K}_\theta][\mathbf{X}_{abc}] \quad (1.7)$$

où \mathbf{X} peut-être un courant, une tension ou un flux et θ représente la position du rotor. Les termes $\mathbf{X}_d, \mathbf{X}_q$ représentent les composantes longitudinale et transversale des variables statoriques (tensions, courants, flux et inductances). La matrice de transformation \mathbf{K}_θ est donnée par :

$$[\mathbf{K}_\theta] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

dont la matrice inverse a pour forme :

$$[\mathbf{K}_\theta]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Le moteur est supposé avec une connexion étoile qui forme un système équilibré $\mathbf{i}_a + \mathbf{i}_b + \mathbf{i}_c = \mathbf{0}$.

En appliquant la transformation (1.7) au système (1.1), on aura :

$$[\mathbf{u}_{dq}] = [\mathbf{K}_\theta][\mathbf{R}][\mathbf{i}_{abc}] + [\mathbf{K}_\theta] \frac{d}{dt} [\lambda_{abc}] \quad (1.10)$$

Ensuite, en se basant sur (1.9) et (1.5) on obtient :

$$[\mathbf{u}_{dq}] = [\mathbf{K}_\theta][\mathbf{R}][\mathbf{K}_\theta]^{-1}[\mathbf{i}_{dq}] + [\mathbf{K}_\theta][\mathbf{K}_\theta]^{-1} \frac{d}{dt} [\phi_{dq}] + \dots + [\mathbf{K}_\theta] \left(\frac{d}{dt} [\mathbf{K}_\theta]^{-1} \right) [\phi_{dq}] \quad (1.11)$$

Du moment que $[\mathbf{R}]$ est diagonale, alors :

$$[\mathbf{K}_\theta][\mathbf{R}][\mathbf{K}_\theta]^{-1} = [\mathbf{R}]$$

En utilisant :

$$[\mathbf{K}_\theta] \frac{d}{dt} [\mathbf{K}_\theta]^{-1} = \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

et à l'aide de (1.11), on peut déduire les équations de Park sous une forme vectorielle comme suit :

$$[\mathbf{u}_{dq}] = [\mathbf{R}][\mathbf{i}_{dq}] + \frac{d}{dt} [\boldsymbol{\lambda}_{dq}] + p\omega [\boldsymbol{\lambda}'_{dq}] \quad (1.13)$$

où

$$[\mathbf{u}_{dq}] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_d \\ \mathbf{u}_q \end{bmatrix}, [\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}, [\mathbf{i}_{dq}] = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_d \\ \mathbf{i}_q \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{\lambda}_{dq}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_d \\ \boldsymbol{\lambda}_q \end{bmatrix}, [\boldsymbol{\lambda}'_{dq}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_q \\ -\boldsymbol{\lambda}_d \end{bmatrix}$$

La transformation appliquée à (1.3) donne :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_d \\ \boldsymbol{\lambda}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_d \\ \mathbf{i}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_v \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Où : $\boldsymbol{\theta}_v$ et p désignent respectivement le flux créé par les aimants au rotor et le nombre de paires de pôles. L'équation électromécanique est exprimée par :

$$\mathbf{T}_{em} - \mathbf{T}_L = \mathbf{J} \frac{d\omega}{dt} + \mathbf{B}\omega \quad (1.15)$$

Avec : \mathbf{B} , \mathbf{J} et \mathbf{T}_L définissent le coefficient d'amortissement, le moment d'inertie du rotor et le couple de charge. Le couple électromagnétique (\mathbf{T}_{em}) est produit par l'interaction entre les pôles formés par les aimants au rotor et les pôles engendrés par les **FMMs** dans l'entrefer générées par les courants statoriques. Il est exprimé par :

$$\mathbf{T}_{em} = \frac{3p}{2} (\boldsymbol{\theta}_v \mathbf{i}_q + (\mathbf{L}_d - \mathbf{L}_q) \mathbf{i}_d \mathbf{i}_q) \quad (1.16)$$

En développant le système d'équations (1.13), on peut déduire la forme finale des équations du MSAP dans le référentiel d-q :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{3p}{2J}(\phi_v i_q + (L_d - L_q)i_d i_q) - \frac{1}{J}T_L - \frac{B}{J}\omega \\ \frac{di_q}{dt} = -\frac{R}{L_q}i_q + \frac{L_d}{L_q}p\omega i_d + \frac{\phi_v}{L_q}p\omega + \frac{1}{L_q}u_q \\ \frac{di_d}{dt} = -\frac{R}{L_d}i_d + \frac{L_q}{L_d}p\omega i_q + \frac{1}{L_d}u_d \end{array} \right. \quad (1.7)$$

Ce système d'équations est plus simple que celui donné en (1.1) sauf qu'il est toujours non-linéaire. À noter que si le moteur est à entrefer constant (sans pièces polaires $L_d=L_q$), le modèle sera encore plus simple comme l'indique le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega}{dt} = \frac{3p}{2J}\phi_v i_q - \frac{1}{J}T_L - \frac{B}{J}\omega \\ \frac{di_q}{dt} = -\frac{R}{L}i_q + p\omega i_d + \frac{\phi_v}{L}p\omega + \frac{1}{L}u_q \\ \frac{di_d}{dt} = -\frac{R}{L}i_d + p\omega i_q + \frac{1}{L}u_d \end{array} \right. \quad (1.18)$$

4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle dynamique du moteur synchrone à aimants permanents. Le modèle triphasé est de nos jours rarement utilisé à cause de sa complexité et du fort couplage de ses équations. On y montre qu'à l'aide de la transformation de Park, le modèle devient plus simple et les non-linéarités sont réduites au nombre de trois. Les équations obtenues par la transformation de Park engendrent des phénomènes identiques aux phénomènes liés à la machine à courant continu, ce qui confirme l'analogie entre les deux modèles.