2

Modèle flou de la machine synchrone à aimants permanents (MSAP)

1. Introduction

Les modéles flous TS représentent les systèmes non-linéaires sous forme d'une interpolation entre des modèles linéaires locaux. Chaque modèle local est un système dynamique LTI (Linear Time Invariant) valide autour d'un point de fonctionement. Trois méthodes distinctes peuvent être employées pour l'obtention d'un modèle TS : par identification, par linéarisation autour de différents points de fonctionnement ou par transformation polytopique convexe. Dans ce mémoire, nous utilisons la derniere méthode qui suppose la disponibilité d'un modèle mathématique.

Dans ce chapitre, nous présentons les modèles flous de Takagi-Sugeno, leur définitions et la façon de leur obtention à partir d'un modèle non-linéaire.

Nous y présentons, ensuite, le modèle flou de la machine synchrone à aimants permanents.

2. Modèle flou de type Takagi-Sugeno

2.1 Modèle flou TS

Le modèle flou de Takagi-Sugeno [14], d'un système dynamique peut être décrit par un ensemble de règles floues **Si-Alors**. Sa caractéristique principale est qu'il représente localement les relations entrées-sorties d'un système en exprimant chaque conclusion par un système linéaire.

La i^ème^ règle du modèle flou s'écrit [14] :

$$Si\ \boldsymbol{z_1}\ est\ \boldsymbol{F_i^1}\ et \ldots et\ \boldsymbol{z_p}\ est\ \boldsymbol{F_i^p}\ alors \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A_i x(t)} + \boldsymbol{B_i u(t)} \\ \boldsymbol{y(t)} = \boldsymbol{C_i x(t)} \end{cases} , \boldsymbol{i = 1..r} \quad (2.1)$$

Où : $\boldsymbol{F_i^j}$ est l'ensemble flou et $\boldsymbol{r}$ est le nombre de règles **Si-Alors**, $\boldsymbol{x(t)} \in \boldsymbol{R^n}$ représente le vecteur d'états, $\boldsymbol{u(t)} \in \boldsymbol{R^m}$ est le vecteur de commande, $\boldsymbol{y(t)} \in \boldsymbol{R^q}$ est le vecteur de sortie du système, $\boldsymbol{A_i} \in \boldsymbol{R^{n\times n}}$, est la matrice d'état, $\boldsymbol{B_i} \in \boldsymbol{R^{n\times m}}$, est la matrice d'entrée du système, $\boldsymbol{C_i} \in \boldsymbol{R^{q\times n}}$ est la matrice de sortie et $\boldsymbol{z_i}$ sont les prémisses fonctions des états ou des sorties.

Pour une paire $(\boldsymbol{y(t)}, \boldsymbol{u(t)})$ donnée, l'inférence du système flou peut être faite par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{w_i(z(t))} \\ y(t) = \dfrac{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t)) C_i x(t)}{w_i(z(t))} \end{cases} \quad (2.2)$$

où

$$z(t) = [z_1(t)\ z_2(t)\ \dots\ z_p(t)], w_i(z(t)) = \prod_{i=1}^{r} F_i^j\,(z_j(t))$$

avec : $i = 1, 2, ..r$

$F_i^j(z_j(t))$ est la valeur de la fonction d'appartenance $z_j(t)$ dans l'ensemble flou F_i^j

avec

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{r} w_i(z(t)) > 0 \\ w_i(z(t)) \geq 0 \end{cases}$$

En posant : :

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^{r} w_i(z(t))}$$

Le modèle flou TS s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\} \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

Les $h_i(z(t)) \geq 0$ possèdent la propriété de somme convexe :

$$\forall t \geq 0\,, \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) = 1$$

2.2 Construction d'un modèle flou TS

Pour obtenir un modèle flou TS, trois méthodes distinctes peuvent être utilisées :

- La première, dite par identification, permet à partir des données sur les entrées et les sorties, d'identifier les paramètres du modèle local correspondant aux différents points de fonctionnement [19].

- La seconde, consiste à linéariser le modèle autour d'un ensemble de points de fonctionnement judicieusement choisis. Dans ce cas, il s'agit de modèles locaux affines pour lesquels le modèle flou est obtenu par interpolation des modèles locaux avec des fonctions d'activation conçues de manière judicieuse en fonction des spécifications souhaitées [20].
- La troisième, est adaptée pour les systèmes non-linéaires de complexité modérée. Dans ce cas, le modèle flou TS représente de manière exacte le modèle non-linéaire sur un espace compact des variables d'états. Le modèle flou est obtenu par transformation polytopique convexe. On effectue ainsi un découpage des non linéarités qui permet de définir des modèles locaux en fonction du nombre des non linéarités [21].

Dans les deux dernières approches, on suppose la disponibilité d'un modèle mathématique non-linéaire. On doit noté aussi que pour un système donné, l'obtention d'un modèle flou TS n'est pas unique.

Etant donné que la dernière approche représente le modèle non-linéaire d'une façon exacte, nous l'expliciterons à travers un exemple illustrant la construction d'un modèle TS. Pour obtenir à partir d'une non linéarité les fonctions d'appartenance associées d'un modèle flou, on utilise le lemme suivant [21] :

Lemme 1

Si $\forall \boldsymbol{x} \in [-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}], \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^+$, $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ une fonction bornée sur $[-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$ alors il existe deux fonctions $\boldsymbol{w_1}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{w_2}(\boldsymbol{x})$ ainsi que deux réels $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ tels que :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{w_1}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{w_2}(\boldsymbol{x}) \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{w_1}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{w_2}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{w_1}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{w_2}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{0}$$

Preuve :

Considérons la fonction $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x})$ bornée tel que $\boldsymbol{f_{min}} \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f_{max}}$, on peut alors toujours écrire :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{w_1}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{w_2}(\boldsymbol{x})$$

avec

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{f_{max}}, \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{f_{min}}, \boldsymbol{w_1} = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f_{min}}}{\boldsymbol{f_{max}} - \boldsymbol{f_{min}}},\ \boldsymbol{w_2} = \frac{\boldsymbol{f_{max}} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{f_{max}} - \boldsymbol{f_{min}}}$$

Remarque

Un même modèle non-linéaire peut avoir plusieurs modèles flous TS qui le représentent, il est alors nécessaire de réaliser la transformation avec soin pour essayer d'obtenir le modèle flou ayant un nombre réduit de règles.

Exemple

On considère le système non-linéaire suivant [22] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_1(t){x_2}^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + (3 + x_2(t)){x_1}^3(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

On suppose que les états $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont bornés, tels que :

$$x_1(t) \in [-1, 1] \text{ et } x_2(t) \in [-1, 1].$$

On peut réécrire le système (2.5) comme suit :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & x_1(t){x_2}^2(t) \\ (3 + x_2(t)){x_1}^2(t) & -1 \end{bmatrix} x(t) \quad (2.6)$$

avec $x = [x_1(t)\ x_2(t)]^T$, $x_1(t){x_2}^2(t)$, $(3 + x_2(t)){x_1}^2(t)$ sont les termes non-linéaires, on définit :

$$z_1(t) \equiv x_1(t){x_2}^2(t) \text{ , } z_2(t) \equiv (3 + x_2(t)){x_1}^2(t)$$

alors on obtient :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & z_1 \\ z_2 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

puis on doit calculer les valeurs minimales et maximales de $z_1$et z_2 pour :

$$x_1(t) \in [-1, 1] \text{ et } x_2(t) \in [-1, 1]$$

$$max_{x_1(t),x_2(t)} z_1 = 1, min_{x_1(t),x_2(t)} z_1 = -1$$

$$max_{x_1(t),x_2(t)} z_2 = 4 \ min_{x_1(t),x_2(t)} z_2 = 0$$

Les valeurs minimales et maximales de $z_1(t)$ et $z_2(t)$, peuvent être représentées par :

$$z_1(t) = x_1(t){x_2}^2(t) = M_1\big(z_1(t)\big).1 + M_2\big(z_1(t)\big)(-1)$$

$$z_2(t) = (3 + x_2(t)){x_1}^2(t) = N_1\big(z_2(t)\big).4 + N_2\big(z_2(t)\big).0$$

où

$$M_1(z_1(t)) + M_2(z_1(t)) = 1$$

$$N_1(z_2(t)) + N_2(z_2(t)) = 1$$

Par conséquent, les fonctions d'appartenance peuvent être définies comme suit :

$$M_1(z_1(t)) = \frac{z_1(t) + 1}{2}, \ M_2(z_1(t)) = \frac{1 - z_1(t)}{2}$$

$$N_1(z_2(t)) = \frac{z_2(t)}{4}, N_2(z_2(t)) = \frac{4 - z_2(t)}{4}$$

On appelle respectivement ces fonctions d'appartenance, : positive, négative, grande et petite. Le système non-linéaire (2.5) peut être représenté par le modèle flou suivant :

règle 1 : Si $z_1(t)$ $est\ positif\ et$ $z_2(t)$ $est\ grand\ Alors$ $\dot{x}(t) = A_1x(t)$

règle 2 : Si $z_1(t)$ $est\ positif\ et$ $z_2(t)$ $est\ petit\ Alors$ $\dot{x}(t) = A_2x(t)$

règle 3 : Si $z_1(t)$ $est\ négatif\ et$ $z_2(t)$ $est\ grand\ Alors$ $\dot{x}(t) = A_3x(t)$

règle 4 : **Si** $z_1(t)$ $est\ négatif\ et$ $z_2(t)$ $est\ petit\ Alors$ $\dot{x}(t) = A_4x(t)$

où

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

on a :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{4} h_i(z(t))A_ix(t) \quad (2.7)$$

où

$$h_1(z(t)) = M_1(z_1(t)) \times N_1(z_2(t))$$

$$h_2(z(t)) = M_1(z_1(t)) \times N_2(z_2(t))$$

$$h_3(z(t)) = M_2(z_1(t)) \times N_1(z_2(t))$$

$$h_4(z(t)) = M_2(z_1(t)) \times N_2(z_2(t))$$

Ce modèle flou représente exactement le système non-linéaire dans la région $[-1,1] \times [-1,1]$.

3. Application à la machine synchrone à aimants permanents

Le système d'équation qui représente la dynamique de la machine synchrone à aimants permanents est :

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{3p}{2J}\phi_v i_q - \dfrac{B}{J}\omega - \dfrac{1}{J}T_L \\ \dfrac{di_q}{dt} = -\dfrac{R}{L}i_q - p\omega i_d - \dfrac{p\phi_v}{L}\omega + \dfrac{1}{L}u_q \\ \dfrac{di_d}{dt} = pi_q\omega - \dfrac{R}{L}i_d + \dfrac{1}{L_d}u_d \end{cases}$$

Ce système peut être ecrit sous la forme :

$$\dot{x} = A(\omega)x + Bu$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{B}{J} & \dfrac{3p\phi_v}{2J} & 0 \\ -\dfrac{p\phi_v}{L} & -\dfrac{R}{L} & -p\omega \\ 0 & p\omega & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{L} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{i_q} \\ \boldsymbol{i_q} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{u_q} \quad \boldsymbol{u_d}]$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_q} \\ \boldsymbol{u_d} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{J}\boldsymbol{T_L} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

La matrice de commande $\boldsymbol{B}$ est constante alors que la matrice d'états $\boldsymbol{A}$ est fonction de la vitesse agulaire $\boldsymbol{\omega}$.

Si on suppose que la vitesse angulaire est bornée telle que :

$$\boldsymbol{\omega} \in [\boldsymbol{d}, \boldsymbol{D}]$$

alors on peut écrire : $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{F_{11}D} + \boldsymbol{F_{12}d}$

avec

$$\boldsymbol{F_{11}} = \frac{\boldsymbol{\omega - d}}{\boldsymbol{D - d}} \; et \; \boldsymbol{F_{12}} = \frac{\boldsymbol{D - \omega}}{\boldsymbol{D - d}}$$

et la matrice $\boldsymbol{A(\omega)}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{F_{11}A_1} + \boldsymbol{F_{12}A_2}$$

avec

$$\boldsymbol{A_1} = \begin{bmatrix} \frac{B}{J} & \frac{3p\phi_v}{2J} & 0 \\ -\frac{p\phi_v}{L} & -\frac{R}{L} & -pD \\ 0 & pD & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \boldsymbol{A_2} = \begin{bmatrix} \frac{B}{J} & \frac{3p\phi_v}{2J} & 0 \\ -\frac{p\phi_v}{L} & -\frac{R}{L} & -pd \\ 0 & pd & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

La machine synchrone à aimants permanents peut être décrite par le modèle flou à deux règles suivant :

règle 1 : Si $\boldsymbol{z_1(t)}$ *est* $\boldsymbol{F_{11}}$ *alors*

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A_1 x(t)} + \boldsymbol{B_1 u(t)} + \Delta_1$$

règle 2 : Si $\boldsymbol{z_1(t)}$ *est* $\boldsymbol{F_{12}}$ *alors*

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A_2 x(t)} + \boldsymbol{B_2 u(t)} + \Delta_2$$

avec $\boldsymbol{z_1(t)} = \boldsymbol{\omega(t)}$ est la varible prémisse, $\boldsymbol{F_{11}}$ et $\boldsymbol{F_{12}}$ sont les fonctions d'appartenances.

$$\boldsymbol{h_1} = \boldsymbol{F_{11}}, \boldsymbol{h_2} = \boldsymbol{F_{12}}$$

où

$$\boldsymbol{F_{11}} = \frac{\omega - d}{D - d}, \boldsymbol{F_{12}} = \frac{D - \omega}{D - d}$$

$$\boldsymbol{A_1} = \begin{bmatrix} \frac{B}{J} & \frac{3p\phi_v}{2J} & 0 \\ -\frac{p\phi_v}{L} & -\frac{R}{L} & -pD \\ 0 & pD & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \boldsymbol{A_2} = \begin{bmatrix} \frac{B}{J} & \frac{3p\phi_v}{2J} & 0 \\ -\frac{p\phi_v}{L} & -\frac{R}{L} & -pd \\ 0 & pd & -\frac{R}{L} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B_1} = \boldsymbol{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \Delta_1 = \Delta_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{J}T_L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle flou de type Takagi-Sugeno et nous avons mis en évidence la technique d'obtention d'un modèle flou à partir d'un modèle mathématique non-linéaire. Ensuite, nous avons présenté le modèle flou de la machine synchrone à aimants permanents à partir de son système d'équations non-linéaire obtenu antérieurement.