

Chapitre I

Modélisation des systèmes LPV

Introduction

L'hypothèse sans aucun doute la plus classique, en théorie de la commande, est celle de la linéarité. Certes, il s'agit d'une contrainte assez forte, dans la mesure où les systèmes physiques sont rarement linéaires. Toutefois, ils le deviennent, presque, dans le cadre d'une étude des petits mouvements. On parlera dans ce cas de stabilité locale. Notons par ailleurs que linéarité ne signifie pas stationnarité et que, finalement la classe des systèmes linéaires à paramètres variables que nous introduisons dans ce chapitre est souvent plus générale qu'on ne le pense.

Nous débuterons ce chapitre par une description générale sur l'analyse en stabilité des systèmes dynamiques; nous allons développer deux grandes approches. La première s'appuie sur la théorie de Lyapunov et la seconde repose sur un concept plus récent de stabilité entrée/sortie

Nous insisterons aussi sur les difficultés soulevées par l'étude des systèmes non stationnaires dans le cas général et soulignerons de ce fait, l'importance du choix d'un modèle.

Nous limiterons ici notre étude à la classe des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV) et la modélisation polytopique qui permette la simplification de la mise en oeuvre des méthodes d'analyse et a fortiori de synthèse.

Enfin nous allons présenter quelques exemples concernant la classe des systèmes linéaires à paramètres variants et leur modélisation polytopique.

1 Stabilité des systèmes dynamique

1.1 Définition

La stabilité des systèmes en boucle fermée est l'un des problèmes les plus importants de la théorie de commande. La boucle de retour est la structure qui permet d'obtenir les objectifs de la commande en terme de stabilité. Elle permet souvent de stabiliser un système instable en boucle ouverte.

Dans la théorie de la stabilité générale, deux approches peuvent être utilisées :

- L'approche de la stabilité entrée/sortie qui traite des relations entre les sorties du système et ses entrées
- L'approche de Lyapunov qui fait référence aux propriétés de la représentation interne du système en terme de variable d'état, et d'effet des perturbations résultantes du changement des conditions initiales

1.2 Stabilité au sens de Lyapunov :

La stabilité au sens de Lyapunov est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire; si l'énergie totale d'un système se dissipe continûment (c'est-à-dire, décroît avec le temps), alors ce système (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état d'équilibre (il devient stable).

Donc, la théorie de Lyapunov traite la stabilité du mouvement. Par mouvement, on entend plus précisément un déplacement le long des trajectoires solutions d'un système d'équations différentielles de la forme [09]:

$$\dot{x}(t) = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq t_0 \quad (1.1)$$

soumis aux conditions initiales :

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.2)$$

$$f(0, t) = 0 \quad \forall t \geq t_0$$

$x \equiv 0$, est une trajectoire d'équilibre. Cette dernière notion est fondamentale dans la théorie de Lyapunov,

1.2.2 Stabilité des trajectoires d'équilibre

De manière très générale, une trajectoire d'équilibre est dite stable, si le système, initialisé dans un voisinage de la trajectoire, converge finalement vers elle.

1.2.3 Stabilité asymptotique uniforme globale

Théorème (1.1) [26] : Le système (1.1) est globalement, uniformément, asymptotiquement stable s'il existe une fonction continûment différentiable, V définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} , telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout t positif :

$$\begin{cases} \alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -\alpha_3(\|x\|) \end{cases} \quad (1.3)$$

où α_1, α_2 et α_3 sont des fonctions définies sur \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{R}_+ , continues, strictement croissantes, non bornées et nulles à l'origine.

Corollaire (1.1):

Si les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites avec des fonctions α_i de la forme :

$$\alpha_i(\|x\|) = \lambda_i \|x\|^c, \quad \lambda_i > 0, \quad c > 0$$

Alors le système est globalement exponentiellement stable.

Interprétation

En vertu des propriétés que lui impose le théorème (1.1) la fonction $V(t, x)$ est définie positive tandis que sa dérivée temporelle le long des trajectoires du système reste négative. On peut voir cette fonction comme une mesure de l'énergie du système à un instant donné. La stabilité s'interprète alors physiquement par la décroissance de l'énergie le long des trajectoires. C'est l'idée centrale des travaux de Lyapunov, c'est pourquoi l'on retient ce type de fonction sous le nom de fonction de Lyapunov.

Une telle fonction, qui prouve la stabilité asymptotique uniforme d'un système est une fonction de Lyapunov.

1.2.4 La méthode directe de la stabilité au sens de Lyapunov

La méthode directe de la stabilité au sens de Lyapunov cherche donc à générer une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative

Théorème (1.2) [32] : (stabilité globale) L'état d'équilibre x_e est globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction continûment dérivable $V(x)$ telles que :

$$V(x_e) = 0 \quad (1.4)$$

$$V(x) > 0, \forall x \neq x_e. \quad (1.5)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \neq x_e. \quad (1.6)$$

Ce théorème est une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix de la fonction de Lyapunov, et ne permet pas de conclure si une telle fonction n'est pas trouvée. Une fonction de Lyapunov candidate est une fonction définie positive dont, on test la décroissance autour de la trajectoire d'équilibre.

L'étude des méthodes qui permettent de construire une fonction de Lyapunov candidate pour un système donné a motivé une littérature très abondante ces dernières décennies dont la revue dépasse le cadre de ce mémoire.

En pratique, afin de réduire la complexité, la fonction de Lyapunov est choisie parmi une famille de fonctions prédéfinies. Il s'agit de famille de fonctions de Lyapunov quadratique notamment les fonctions définies positives.

1.2.5 Fonction Lyapunov quadratique

Le choix le plus classique consiste à utiliser une fonction quadratique du type :

$$V(x) = x^T P x, \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad P = P^T > 0 \quad (1.7)$$

donc trouver une fonction de Lyapunov revient à trouver une matrice définie positive P .

1.3 Stabilité au sens BIBO: (Bounded Input Bounded Output)



Figure 1.1 : modèle entrée/sortie

1.3.1 Condition fondamentale de stabilité :

Un système est stable au sens BIBO si pour n'importe quelle entrée bornée correspond une sortie bornée.

Soit l'entrée $u(t)$ d'un système mono variable, où

$$|u(t)| \leq M < \infty \quad (1.8)$$

pour des conditions initiales nulles, la variable de sortie $y(t)$ est :

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau) u(t-\tau) d\tau \quad (1.9)$$

on calcule

$$|y(t)| = \left| \int_0^\infty h(\tau) u(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_0^\infty |h(\tau)| |u(t-\tau)| d\tau \leq M \int_0^\infty |h(\tau)| d\tau$$

la sortie est bornée, c'est-à-dire $|y(t)| < \infty$

$$\int_0^\infty |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (1.10)$$

la relation (1.10) est valable lorsque la réponse impulsionnelle tend vers zéro

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$$

alors, la stabilité BIBO peut s'énoncer de la manière suivante :

Pour des entrées bornées, les réponses du système sont bornées, de petits changements sur les entrées entraînent de petits changements sur la sortie.

1.3.2 L_q -stabilité [09] :

Définition : L'opérateur H_{x_0} (ou le système associé) est dit L_q -stable si :

$$\begin{cases} \forall u \in L_{q,e}^m, H(u) \in L_{q,e}^m \\ \exists(\gamma, \beta) / \forall u \in L_{q,e}^m, \forall T > 0, \|H(u)_T\|_q \leq \gamma \|u_T\|_q + \beta \end{cases} \quad (1.11)$$

S'il existe une valeur γ vérifiant la condition (1.11), alors il en est de même de toutes les valeurs supérieures. Aussi, nous nous intéresserons à la plus petite de ces valeurs, que nous appellerons gain L_q de l'opérateur H_{x_0} .

β : est un terme résiduel qui devient nul en l'absence de conditions initiales.

On vérifiera simplement que pour les systèmes L_q stables causaux, on a :

$$u \in L_q^m \Rightarrow H(u) \in L_q^p \text{ et } \|H(u)\| \leq \gamma \|u\| + \beta \quad (1.12)$$

En effet, la L_∞ -stabilité est directement reliée à la notion de stabilité entrée bornée/ sortie bornée, tandis que la L_2 -stabilité correspond à la notion de stabilité, énergie d'entrée finie/ énergie de sortie finie.

1.3.3 Théorème du petit gain

Cette approche de la stabilité est complémentaire de la précédente. Plus précisément, son but essentiel est de faciliter l'analyse des interconnexions des systèmes.

Théorème (1.3) [09] : Forme générale

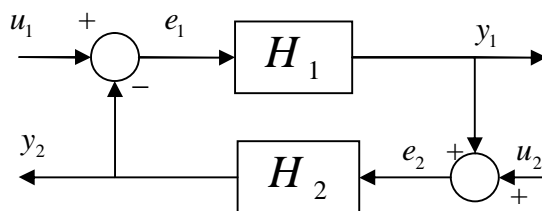


Figure 1.2 : Schéma d'interconnexions simplifié

Etant donnés deux opérateurs H_1 et H_2 de gains respectifs γ_1 et γ_2 . Le système en boucle fermé est stable, si : $\gamma_1\gamma_2 < 1$

Alors, $\forall u_1 \in L_{q,e}^m, \forall u_2 \in L_{q,e}^m, \forall T > 0$,

$$\|(e_1)_T\|_q \leq \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2} \left(\|(u_1)_T\|_q + \gamma_2 \|(u_2)_T\|_q + \beta_2 + \gamma_2\beta_1 \right) \quad (1.13)$$

$$\|(e_2)_T\|_q \leq \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2} \left(\|(u_2)_T\|_q + \gamma_1 \|(u_1)_T\|_q + \beta_1 + \gamma_1\beta_2 \right) \quad (1.14)$$

et donc le système en boucle fermée est L_q -stable, des entrées (u_1, u_2) vers les sorties (y_1, y_2) .

Dans le cas fréquent où u_2 est nul, le schéma précédent se simplifie :

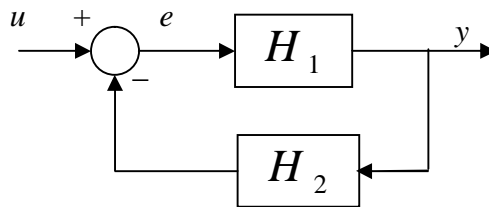


Figure 1.3 : Schéma d'interconnexions simplifié

Et, les mêmes hypothèses sur les opérateurs H_1 et H_2 conduisent alors à l'inégalité :

$$\|y_1\|_q \leq \frac{\gamma_1}{1-\gamma_1\gamma_2} \|u_1\| \quad (1.15)$$

qui prouve la $L_{q,e}$ -stabilité du système rebouclé, dont le gain est borné par :

$$\gamma = \frac{\gamma_1}{1-\gamma_1\gamma_2} \quad (1.16)$$

1.3.4 Liens entre la stabilité au sens de Lyapunov et la stabilité entrée/sortie

Une discussion sur les liens existant entre la stabilité au sens de Lyapunov d'une part et la stabilité entrée/sortie d'autre part, présente un réel intérêt, il s'agit d'établir, par exemple la stabilité (BIBO), d'un système à partir d'une fonction de Lyapunov. On s'assure ainsi que le système en question est stable au sens de Lyapunov, et que son gain L_2 est borné par une certaine valeur γ . Cette dernière propriété permet d'évaluer les performances. Plus précisément, le problème posé est celui de la recherche de conditions suffisantes pour que la stabilité asymptotique uniforme entraîne la stabilité entrée/sortie.

1.4 Système linéaire :

L'hypothèse sans aucun doute la plus classique, en théorie de la commande, est celle de la linéarité. Certes, il s'agit d'une contrainte assez forte, dans la mesure où les systèmes physiques sont rarement linéaires. Toutefois, ils le deviennent, presque, dans le cadre d'une étude des petits mouvements. On parlera dans ce cas de stabilité locale. Notons par ailleurs que linéarité ne signifie pas stationnarité et que, finalement la classe des systèmes linéaires à paramètres variables que nous introduisons dans la section suivante est souvent plus générale qu'on ne le pense.

14.1 Classes des systèmes linéaires

Nous présentons dans cette section un certain nombre de résultats sur l'analyse des systèmes linéaires, en insistant toutefois sur les aspects non stationnaires. Dans la mesure où il s'agit de systèmes linéaires, nous nous intéresserons implicitement à la stabilité des trajectoires d'équilibre à l'origine ($x \equiv 0$). Nous nous appuyerons donc essentiellement sur le théorème de stabilité (1.1).

On distingue généralement trois grandes classes de systèmes linéaires. La première classe, concernant les systèmes linéaires à temps invariant, Il s'agit de la classe des systèmes stationnaires. Elle a fait l'objet de multiples publications aussi bien sur le plan théorique qu'au niveau des applications. La littérature montre que l'intérêt qu'elle suscite est toujours actuel. Nous considérons ensuite la classe des systèmes linéaires à temps variant, pour laquelle il existe également quelques résultats. L'étude de cette classe est particulièrement intéressante pour certaines applications. L'exemple type d'un tel système est celui du lanceur dont la masse varie considérablement et de manière prévisible au cours du vol, puisqu'il suit une trajectoire calculée a priori.

La dernière classe, plus large que la précédente est celle des systèmes linéaires à paramètres variables. Elle fera ici l'objet d'une attention particulière car c'est en grande partie sur elle que reposent les méthodes d'analyse et de synthèse étudiées dans ce mémoire.

1.4.2 Trajectoires et caractérisation de la stabilité

Pour tout système linéaire (stationnaire ou non) on peut donner une expression générale des trajectoires suivies par le vecteur d'état x :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)f(\tau)d\tau \quad (1.17)$$

où $\Phi(t, \tau)$ est appelée matrice de transition d'état, tandis que le vecteur $f(t)$ matérialise les entrées du système à l'instant t . On aura par exemple, dans le cas des systèmes stationnaires $f(t) = Bu(t)$.

L'expression des trajectoires suggère un critère de stabilité simplifiée fondé sur l'utilisation de la matrice Φ .

Théorème (1.4) [09] : La trajectoire d'équilibre $x \equiv 0$ d'un système linéaire est globalement exponentiellement stable si et seulement si :

$$\exists k, \gamma > 0, \forall t \geq t_0 \geq 0, \|\Phi(t, t_0)\| \leq ke^{-\gamma(t-t_0)} \quad (1.18)$$

Ce critère, s'il permet d'éviter le recours à l'utilisation d'une fonction de Lyapunov pour prouver la stabilité d'un système linéaire, n'a cependant qu'une portée limitée puisque la détermination explicite de Φ n'est possible que dans le cadre des systèmes invariants.

1.4.3 Systèmes linéaires à temps invariant (LTI) :

Un système linéaire à temps invariant (système LTI) d'ordre n , avec m entrées et p sorties, peut être décrit, dans le domaine temporel, par une représentation d'état de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.19)$$

où les matrices A, B, C et D appartiennent respectivement aux espaces $\mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbb{R}^{p \times n}$ et $\mathbb{R}^{p \times m}$

En dérivant la relation (1.17) on vérifie facilement que :

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = A\Phi(t, \tau)$$

d'où il vient :

$$\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)} \quad (1.20)$$

Pour plus de simplicité, supposons la matrice A diagonalisable, et notons V , la matrice des vecteurs propres de A . Exprimons maintenant la matrice de transition du système en fonction de V et des valeurs propres λ_i de A . Il vient :

$$\Phi(t, \tau) = V \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-\tau)} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n(t-\tau)} \end{pmatrix} V^{-1} \quad (1.21)$$

Il est clair, d'après le critère (1.4) que le système LTI (1.19) est exponentiellement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A appartiennent au demi-plan ouvert gauche de \mathbb{C} .

$$\Re(\lambda_i(A)) < 0, i = 1, \dots, n$$

On peut retrouver ce résultat en appliquant le théorème (1.1) Pour cela, il suffit de utiliser la fonction de Lyapunov quadratique (1.7), où la dérivée temporelle de V le long des trajectoires du système s'exprime par :

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + PA)x \quad (1.22)$$

d'où l'on déduit finalement une condition suffisante de stabilité :

$$\exists P > 0 / A^T P + PA < 0 \quad (1.23)$$

qui est également nécessaire puisque :

$$\exists P > 0, Q > 0, / A^T P + PA = -Q \Leftrightarrow \Re(\lambda_i(A)) < 0, \forall i = 1, \dots, n$$

et l'on a :

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt$$

1.4.4 Systèmes linéaires à temps variant (LTV)

Par analogie à ce qui précède, nous retiendrons pour ces systèmes la description suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.24)$$

Les éléments $A(t), B(t), C(t)$ et $D(t)$ de la représentation d'état sont ici des fonctions généralement continues et bornées du temps, dont la dépendance est connue a priori.

Il devient maintenant impossible de déterminer une expression générale de la matrice de transition du système. Tout ce que l'on peut en dire, c'est qu'elle vérifie les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} &= A(t)\Phi(t, \tau) \\ \frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial \tau} &= -\Phi(t, \tau)A(\tau) \end{aligned}$$

Aussi, l'utilisation du critère (1.4) devient-elle particulièrement délicate, dans la mesure où il faut à présent déterminer une borne sur la norme de Φ dont on ne connaît pas de formulation explicite.

De nombreux travaux ont toutefois été entrepris dans ce sens, en s'appuyant sur l'hypothèse fondamentale d'évolution lente du système. Il est en effet naturel de penser que l'on puisse

étendre les résultats relatifs aux systèmes LTI, au cas des systèmes linéaires variant lentement dans le temps.

1.4.5 Systèmes linéaires à paramètres variables (LPV)

Comme le montrent les équations ci-dessous, les systèmes linéaires à paramètres variables, contrairement aux systèmes LTV, ne dépendent pas explicitement du temps [40]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \\ \forall t \geq 0, \theta(t) = [\theta_1(t) \quad \theta_2(t) \quad \cdots \quad \theta_r(t)]^T \in P \subset \mathbb{R}^r \end{cases} \quad (1.25)$$

Les éléments $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ et $D(\cdot)$ de la représentation d'état sont des fonctions matricielles du vecteur de paramètres $\theta(t)$. Elles sont définies de P dans $\mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbb{R}^{p \times n}$ et $\mathbb{R}^{p \times m}$ respectivement.

Un bref résumé de la situation est illustré par le schéma suivant.

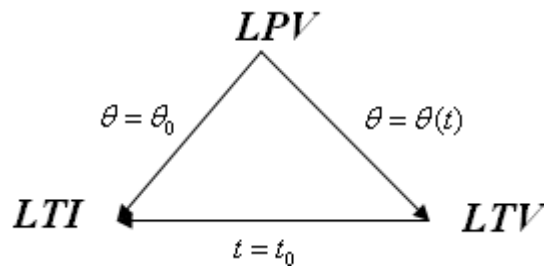


Figure 1.4 : Liens entre systèmes linéaires

où l'on voit qu'un système LTI peut s'interpréter comme un système LPV dont on a figé les paramètres, où comme un système LTV dont on a figé le temps. Par ailleurs, ce dernier peut être vu comme un système LPV dont on aurait prédéfini une trajectoire.

Remarque : Afin de rendre les formules plus lisibles, il nous arrivera fréquemment d'omettre la dépendance temporelle. Ainsi, le système (1.25) devient

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y(t) = C(\theta)x + D(\theta)u \\ \theta \in P \subset \mathbb{R}^r \end{cases} \quad (1.26)$$

Les systèmes LPV interviennent fréquemment dans les applications de nombreux systèmes même non linéaires ou incertains, peuvent en effet être approchés par la description (1.25). Nous pourrions par exemple penser à divers processus mécanique où les paramètres clé sont

par exemple la variation de la masse, de la vitesse, ou l'incertitude des coefficients de frottement, de rigidité.

Exemple (1.1) :

On considère à titre d'illustration le modèle en temps continu d'un système mécanique de la figure (1.5) fréquemment utilisé dans la littérature et présenté particulièrement dans [41].

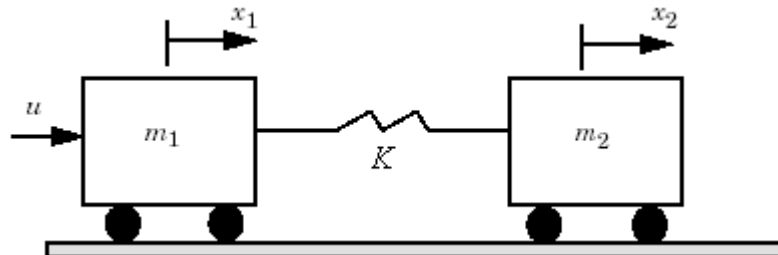


Figure 1.5 : Système mécanique

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K}{m_1} & \frac{K}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{K}{m_2} & -\frac{K}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = x_2 \end{cases}$$

où x_1 et x_2 sont les positions des deux wagons respectivement, x_3 et x_4 présentent leurs vitesses respectives. m_1 et m_2 sont les masses des deux corps. Le paramètre d'incertitude est le coefficient de la raideur du ressort K ; il est assumé pour être incertain dans la gamme $K_{\min} = 0.5 \leq K \leq K_{\max} = 2$: ce modèle incertain peut être de manière équivalente considéré comme un système LPV, dont l'incertitude dans K est interprété comme un paramètre variable.

Nous pourrions aussi, penser à divers processus chimiques où les paramètres clé sont le plus souvent la température et les concentrations des composants.

Dans chacun de ces cas, bien que l'évolution des paramètres puisse souvent être mesurée en temps réel, elle est rarement connue a priori. En effet, les causes de variations de la pression dynamique, de la vitesse ou encore de la température, sont souvent nombreuses et de surcroît imprévisibles. Ainsi, par opposition à un système LTV dont l'évolution temporelle est entièrement décrite par les équations, un système LPV pourra afficher autant de comportements différents qu'il y a de trajectoires paramétriques admissibles.

Compte tenu de la définition qui a été adoptée, nous entendons par trajectoires admissibles, toutes celles dont les points appartiennent à chaque instant au domaine P de l'espace \mathbb{R}^n . Il aurait été plus juste et certainement plus précis, de définir P comme un domaine de l'espace-temps qui décrirait directement un ensemble de trajectoires ayant toutes un sens physique, La caractérisation que nous avons retenue autorise en effet certaines évolutions paramétriques peu souhaitables présentant par exemple des discontinuités de vitesse voir même de position (système mécanique). Néanmoins, sur le plan mathématique, définir un ensemble de points plutôt qu'un ensemble de trajectoires, facilite grandement l'analyse. De plus, sans remettre en cause notre définition de P , nous verrons qu'il est possible d'ajouter certaines contraintes sur l'évolution des paramètres sans que cela ne devienne un obstacle insurmontable au développement des méthodes numériques d'analyse ou de synthèse.

1.5 Systèmes « quasi-LPV » et systèmes non linéaires

Contrairement à ce qu'indique son nom, la classe des systèmes LPV dépasse assez largement le cadre des systèmes classiques. Cette remarque rend d'ailleurs, son étude plus intéressante. Jusqu'à présent, dans notre description des systèmes LPV, nous avons considéré le vecteur de paramètres indépendamment des états du système. Pourtant, à condition de supposer ses trajectoires a priori bornées, il est parfaitement licite d'envisager un système décrit par [31] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(y(t))x(t) + B(y(t))u(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \\ \forall t \geq 0, y(t) \in P_y \subset \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.27)$$

où le vecteur de paramètres coïncide avec celui des sorties mesurées. Ce système appartient à ce que nous appellerons la classe des systèmes « quasi-LPV »

Dans le théorème suivant, nous établissons le lien entre cette classe et les systèmes non linéaires

Théorème (1.5) [09-31] : Soit un système non linéaire de la forme relativement générale suivante (à laquelle on pourra souvent se ramener par dérivation)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + B(y(t))u(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0 \\ \forall t \geq 0, y(t) \in P_y \end{cases} \quad (1.28)$$

si l'on suppose en outre que (au prix d'un éventuel équilibrage) :

$$f(0) = 0$$

et que la non linéarité de f concerne uniquement les états mesurables :

$$f(x) = Lx + g(y)$$

alors le système non linéaire (1.28) admet la formulation « quasi-LPV » (1.27) avec :

$$A(y) = L + \left(\int_0^1 \nabla g(ty) dt \right) C \quad (1.29)$$

Preuve : Il suffit de remarquer que la relation :

$$f(x) = A(y)x$$

est vérifiée à l'origine et que les dérivées temporelles de chacun des deux membres coïncident à chaque instant.

Comme nous l'avons déjà mentionné, le modèle quasi-LPV n'a de sens que si ses trajectoires évoluent dans un domaine borné. Cette contrainte sera vérifiée dès lors que le système sera stable. Toutefois, pour vérifier la stabilité d'un système LPV, il est nécessaire de connaître le domaine d'évolution des paramètres.

Cette donnée fondamentale fait normalement partie de la description du système. Il faudra s'assurer, pour toute condition initiale licite, que les trajectoires restent dans P . Dans la pratique, cette démarche est souvent facilitée car on connaît bien a priori les bornes d'évolution des sorties mesurées.

Exemple (1.2) :

On considère le modèle non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = x(t) \cos(x(t)) \quad (1.30)$$

pour traiter la non linéarité de ce modèle comme un système linéaire à paramètre variable, il faut prendre en compte la fonction $\theta(x) = \cos(x)$ qui est évidemment bornée.

Pour $x \in [-x_0, x_0]$, $x_0 \leq \pi$ on obtient: $\theta(x) \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$, $\theta_{\min} = \cos(x_0)$ et $\theta_{\max} = 1$

la trajectoire de variation de $\theta(x)$ dans l'intervalle $x \in [-x_0, x_0]$, $x_0 \leq \pi$ est:

$$\theta(x) = \cos(x) = \frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{1 - \cos(x_0)} \cdot 1 + \frac{1 - \cos(x)}{1 - \cos(x_0)} \cdot \cos(x_0) \quad (1.31)$$

si on choisit $x_0 > \pi$ on obtient

$$\theta(x) = \cos(x) = \frac{\cos(x) + 1}{2} \cdot 1 + \frac{1 - \cos(x)}{2} \cdot (-1) \quad (1.32)$$

Exemple (1.3) :

On considère le modèle non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = \sin(x(t)) - x^3(t) + x(t) \cos(x(t)) \quad (1.33)$$

on peut très facilement aboutir à un modèle LPV en considérant directement la fonction :

$$\theta(x) = \frac{\sin(x(t))}{x(t)} - x^2(t) + \cos(x(t)) \quad (1.34)$$

comme un paramètre variable dans l'intervalle : $\theta(x) \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$, où $\theta_{\min} = -1 - \pi^2$,
 $\theta_{\max} = 2$ pour $x \in [-\pi, \pi]$

Exemple (1.4) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \theta x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 + x_2 \end{cases} \quad (1.35)$$

peut encore s'écrire sous la forme « quasi-LPV »

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & x_2 \\ x_2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Exemple (1.5) :

Considérons le système non linéaire suivant [27]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_1(t)x_2(t) + e(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + x_2^2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases} \quad (1.37)$$

ce système se met sous la forme LPV en posant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + v_1(t) + e(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + v_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ w_1 = x_2(t) \\ w_2 = x_2(t) \end{cases} \quad (1.38)$$

où

$$\begin{cases} v_1(t) = (x_1(t)) w_1(t) \\ v_2(t) = (x_2(t)) w_2(t) \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + v_1(t) + e(t) \\ \dot{x}_2 = -x_2(t) + v_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ w_1 = x_1(t) \\ w_2 = x_2(t) \end{cases} \quad (1.39)$$

où

$$\begin{cases} v_1(t) = (x_2(t))w_1(t) \\ v_2(t) = (x_2(t))w_2(t) \end{cases}$$

la premier cas correspond à la matrice $\theta(t) = \text{diag}\{x_1(t) \quad x_2(t)\}$ le deuxième à la matrice $\theta(t) = \text{diag}\{x_2(t) \quad x_2(t)\}$. Comme on le voit, même pour un système très simple la solution n'est pas unique et le choix de l'un ou de l'autre n'est pas indifférent : la première représentation conduira à un correcteur séquencé par $x_1(t)$ et $x_2(t)$, tandis que dans la deuxième le seul paramètre de séquencement sera $x_2(t)$.

1.6 Stabilité des systèmes LPV

La stabilité des systèmes LPV a été largement étudiée dans la littérature. Dans le dernier chapitre, lors de la synthèse de régulateur LPV, nous allons nous intéresser à la stabilité quadratique des systèmes LPV. La stabilité quadratique est une notion de stabilité robuste dans le sens où la stabilité est garantie pour des trajectoires paramétriques θ variantes arbitrairement vite. Sa définition utilise une seule fonction de Lyapunov quadratique pour tout $\theta \in P$. Pour définir la notion de stabilité quadratique, considérons un système LPV non commandé donné par la représentation d'état suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x \\ x(0) = x_0 \\ \theta \in P \subset \mathbb{R}^r \end{cases} \quad (1.40)$$

dont on veut prouver la stabilité à l'aide d'une fonction de la forme

$$V(x, \theta(t)) = x^T P(\theta(t))x \quad (1.41)$$

pour cela, il nous suffit de traduire la décroissance de V le long des trajectoires du système. Il vient la condition suivante :

$$\theta \in P, \dot{\theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta)A(\theta) < 0 \quad (1.42)$$

qu'il est malheureusement difficile de vérifier dans le cas général. En revanche si l'on suppose la dépendance paramétrique affine :

$$A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \dots + \theta_r A_r$$

Nous verrons qu'il est possible d'obtenir un critère assez peu conservatif et facile à coder. Nous venons ici de souligner un point important dans notre étude des systèmes LPV concernant le choix d'un modèle d'analyse. Nécessaire, ce choix s'avère également capital, car c'est bien en priorité de la qualité du modèle dont dépendra celle de l'analyse et a fortiori celle de la synthèse.

1.7 Modélisation des systèmes LPV

Les systèmes LPV peuvent être modélisés par deux approches différentes [40] : la première approche est basée sur l'hypothèse de la dépendance affine des différentes matrices de la représentation d'état (1.25) par rapport au vecteur des paramètres $\theta(t)$, ce sont les modèles polytopiques. La seconde approche prend en compte une dépendance rationnelle des paramètres et porte la dénomination de modèle LFT (transformations linéaires fractionnelles) d'un système LPV. Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser à la première approche. C'est une représentation qui permet d'effectuer la synthèse de lois de commande à chaque sommet puis une interpolation des différentes lois de commande obtenues en utilisant le gain programmable afin d'obtenir une loi de commande globale.

1.7.1 Modèle affine et modèle polytopique

1.71.1 Modèle affine : Dans le cas de la dépendance affine, les éléments de la représentation d'état $A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot)$ et $D(\cdot)$ vérifient [09]:

$$\forall \theta \in P, \left\{ \begin{array}{l} A(\theta) = A_0 + \sum_{i=1}^{i=r} \theta_i A_i \\ B(\theta) = B_0 + \sum_{i=1}^{i=r} \theta_i B_i \\ C(\theta) = C_0 + \sum_{i=1}^{i=r} \theta_i C_i \\ D(\theta) = D_0 + \sum_{i=1}^{i=r} \theta_i D_i \end{array} \right. \quad (1.43)$$

On supposera en outre que les composantes θ_i du vecteur de paramètres évoluent indépendamment et que :

$$\forall i = 1, 2, \dots, r, \quad \theta_i \in [\underline{\theta}_i \quad \bar{\theta}_i]$$

Autrement dit, le domaine P est un hypercube de dimension r , dont les sommets correspondent aux valeurs extrémales de θ .

Nous pourrions envisager une définition plus générale du modèle affine, où l'hypercube P serait remplacé par un polyèdre convexe et borné de sommets P_i . Dans ce cas, l'indépendance des paramètres θ_i n'étant plus garantie, il faudra s'attendre à certaines difficultés d'analyse. Par changement de variables, on pourra lever cette difficulté, malheureusement la dépendance par rapport aux nouveaux paramètres devient multi affine.

Pour illustrer ces propos, prenons le cas du plan :

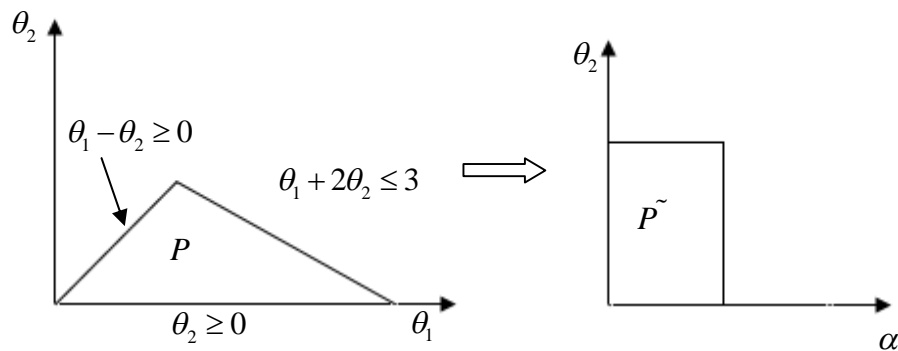


Figure 1.6 : Illustration de changement de variable

et considérons le système dont la matrice d'évolution est décrite par :

$$A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2$$

Les paramètres θ_1 et θ_2 évoluant dans le triangle P sont contraints par les inégalités :

$$\begin{cases} 0 \leq \theta_2 \leq 1 \\ \theta_2 \leq \theta_1 \leq 3 - 2\theta_2 \end{cases}$$

Autrement dit, θ_1 évolue entre deux bornes qui sont des fonctions de θ_2 . Nous traduirons cela par la relation barycentrique :

$$\theta_1 = (1 - \alpha)\theta_2 + \alpha(3 - 2\theta_2), \alpha \in [0 \ 1]$$

faisant ainsi apparaître la nouvelle variable α , indépendante de θ_2 . L'expression correspondante de la matrice A s'écrit :

$$A(\alpha, \theta_2) = A_0 + 3\alpha A_1 + \theta_2 (A_1 + A_2) - 3\alpha A_1 \theta_2, (\alpha, \theta_2) \in P^{\sim}$$

1.7.1.2 Modèle polytopique :

Le modèle polytopique est assez proche du modèle affine. Disons qu'il est aux coordonnées barycentriques, ce que l'autre est aux coordonnées cartésiennes.

Le système LPV décrit précédemment, pour lequel on adoptera ici la formulation

Compacte :

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in P$$

admet un modèle polytopique si on peut déterminer un ensemble de matrices S_i constituant les sommets d'un polytope, défini par :

$$\text{Co}\{S_1, S_2, \dots, S_N\} \square \left\{ \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i S_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i = 1 \right\} \quad (1.44)$$

et tel que ce dernier coïncide avec l'image par $S(\cdot)$ du domaine P :

$$\{S(\theta), \theta \in P\} \equiv \text{Co}\{S_1, S_2, \dots, S_N\} \quad (1.45)$$

- Prenons le cas où la fonction $S(\cdot)$ est affine et le domaine P est un polytope à N sommets.

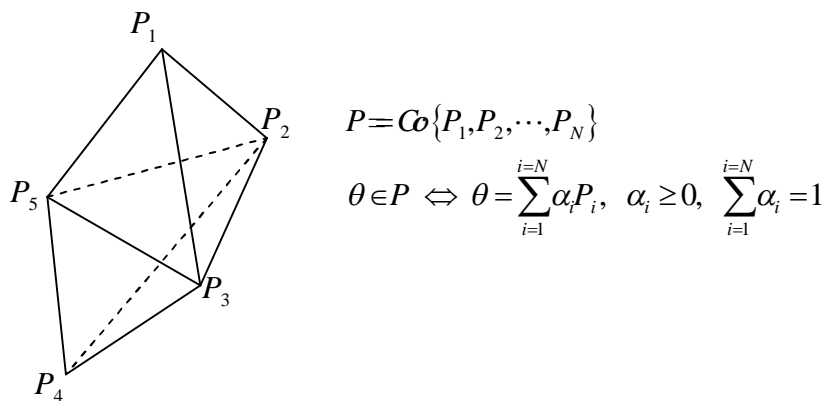


Figure 1.7 : Représentation de P pour $N = 5$

D'après la relation indiquée sur le schéma et en utilisant le fait que $S(\cdot)$ est affine, il vient :

$$S(\theta) = S\left(\sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i P_i\right) = \sum_{i=1}^{i=N} S(\alpha_i P_i) = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i (S P_i) \quad (1.47)$$

Autrement dit, on obtient un modèle polytopique, dont les sommets S_i sont les images par $S(\cdot)$ des sommets de P .

Exemple (1.6)

Traitons l'exemple d'un système dépendant de deux paramètres

$$S(\theta) = S_0 + \theta_1 S_1 + \theta_2 S_2$$

Notons ses sommets : S_1^s , S_2^s , S_3^s et S_4^s .

$$\begin{cases} S_1^s = S_0 + \underline{\theta}_1 S_1 + \underline{\theta}_2 S_2 \\ S_2^s = S_0 + \bar{\theta}_1 S_1 + \underline{\theta}_2 S_2 \\ S_3^s = S_0 + \underline{\theta}_1 S_1 + \bar{\theta}_2 S_2 \\ S_4^s = S_0 + \bar{\theta}_1 S_1 + \bar{\theta}_2 S_2 \end{cases}$$

Construisons maintenant le système polytopique

$$\tilde{S} = \alpha_1 S_1^s + \alpha_2 S_2^s + \alpha_3 S_3^s + \alpha_4 S_4^s$$

Avec :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1}{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1} \frac{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2}{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2} \\ \alpha_2 = \frac{\underline{\theta}_1 - \bar{\theta}_1}{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1} \frac{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2}{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2} \\ \alpha_3 = \frac{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1}{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1} \frac{\underline{\theta}_2 - \bar{\theta}_2}{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2} \\ \alpha_4 = \frac{\underline{\theta}_1 - \bar{\theta}_1}{\bar{\theta}_1 - \underline{\theta}_1} \frac{\underline{\theta}_2 - \bar{\theta}_2}{\bar{\theta}_2 - \underline{\theta}_2} \end{cases}$$

Moyennant quelques calculs, on peut vérifier que ce résultat est encore valable pour un nombre de paramètres plus élevé. On retiendra qu'il y a équivalence entre les représentations affine et polytopique. Un système LPV affine dont les paramètres varient sur des intervalles connus peut être considéré comme un système polytopique

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons concentré sur l'analyse en stabilité des systèmes dynamiques, où nous avons développé deux grandes approches. La première s'appuie sur la théorie de Lyapunov et la seconde repose sur un concept plus récent de stabilité entrée/sortie. Nous avons insisté aussi sur les difficultés soulevées par l'étude des systèmes non stationnaires dans le cas général et soulignerons de ce fait, l'importance du choix d'un modèle. Notre étude est limitée à la classe des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV) et la modélisation polytopique permettant la simplification de la mise en oeuvre des méthodes d'analyse et a fortiori de synthèse

Dans le chapitre qui suit, nous allons voir l'approche H_∞ qui permet de synthétiser des correcteurs robustes en prenant en compte explicitement des incertitudes dynamiques. Cette approche peut être étendue à la désensibilisation de la boucle fermée aux incertitudes paramétriques et aux non linéarités. En d'autres termes, on utilise un seul critère, le critère H_∞ pour assurer la performance et la robustesse.