

Chapitre II

Approche H_∞

Introduction

Dès lors qu'on travaille sur des modèles, dont la validité est limitée, il faut que l'on soit préoccupé de la robustesse de la loi de commande, c'est à dire être capable de garantir non seulement la stabilité des systèmes mais aussi certaine performance vis à vis l'incertitudes de modèles. Ce dernier point demande de compléter le travail de modélisation par une description précise des incertitudes du modèle, de les inclure dans un formalisme générale permettant des les prendre en compte.

La synthèse d'une loi de commande s'articule généralement autour de deux points, qui sont répétées alternativement jusqu'à ce que le concepteur juge les résultats satisfaisants :

- Calcul de régulateur, dans cette étape peuvent être pris en compte certains objectifs de performance et certain objectifs de robustesse seulement
- Analyse des propriétés des systèmes commandés tant des points de vue des performances que de la robustesse de celui-ci

Dans ce chapitre on essaye de présenter (pour les systèmes LTI) l'approche H_∞ qui s'articule autour de ces deux concepts, en commençant par une description générale sur les spécifications fréquentielles en performances et en robustesses

2. Analyse en robustesse et en performance des systèmes bouclés

Pour assimiler bien l'intérêt principal du critère H_∞ , il faut tout d'abord faire une analyse sur les spécifications fréquentielles de performance et de robustesse.

La mise en œuvre de ce critère nécessite la recherche d'une loi de commande stabilisant avec un certain niveau de performance, et de garantir la satisfaction de ce niveau malgré la présence d'erreur de modèle (notion d'incertitude) [15].

2.1 Spécification fréquentielles de performance :

Pour étudier les spécification fréquentielle de performance on a besoin d'utiliser un schéma fonctionnel plus ou moins général (figure 2.1), où on introduire un signal de perturbation et un signal de bruit de mesure afin d'avoir une vision plus complète des problèmes posés par la structure de commande à contre réaction.

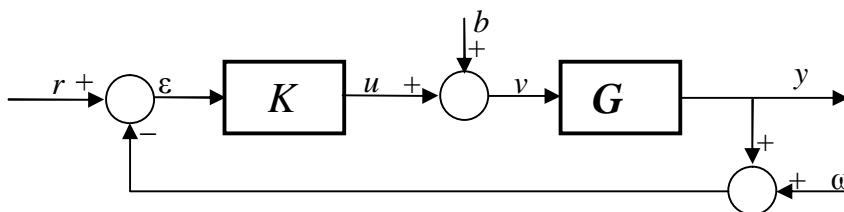


Figure 2.1 : Schéma bloc avec une perturbation et un bruit de mesure

où

- r : est le signal de référence que doit suivre la sortie
- y : est la sortie du système
- u : est la commande issue du correcteur $K(p)$
- v : est le signal de commande entrant réellement dans le système
- b : est le signal des perturbations
- $\varepsilon = r - y$: est le signal d'erreur
- w : est le signal des bruits de mesure

A partir de ce schéma fonctionnel, différents transferts entre les entrées et les signaux de sortie intéressants vont être considérés.

2.1.1 Fonctions de sensibilité

Les relations algébriques élémentaires définies dans le schéma fonctionnel (figure 2.1) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 y(p) &= G(p)v(p) \\
 v(p) &= b(p) + u(p) \\
 u(p) &= K(p)\varepsilon(p) \\
 \varepsilon(p) &= r(p) - w(p) - y(p)
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

cela permet de déterminer les relations en boucle fermée entre la sortie et les entrées :

$$y(p) = \underbrace{(1 + G(p)K(p))^{-1}}_{S(p)} G(p)b(p) + \underbrace{(1 + G(p)K(p))^{-1} G(p)K(p)}_{T(p)} (r(p) - w(p))
 \tag{2.2}$$

alors :

$$S(p) = \frac{1}{1 + G(p)K(p)} \quad \text{et} \quad T(p) = \frac{G(p)K(p)}{1 + G(p)K(p)}
 \tag{2.3}$$

On constate que $S(p) + T(p) = 1$ où $S(p)$ est appelé communément fonction de sensibilité et $T(p)$ fonction de sensibilité complémentaire. Cette fonction de sensibilité est importante car elle est significative de la réponse de la boucle fermée.

Un signal permettant d'analyser la précision du système est celui de l'erreur $\varepsilon(p)$:

$$\varepsilon(p) = S(p)(r(p) - w(p)) - S(p)G(p)b(p)
 \tag{2.4}$$

afin de conserver un certain contrôle sur l'amplitude de la commande délivrée et de la commande reçue, il est également nécessaire de connaître les fonctions de transferts entre les commandes et les entrées:

$$u(p) = K(p)S(p)(r(p) - w(p)) - T(p)b(p)
 \tag{2.5}$$

$$v(p) = K(p)S(p)(r(p) - w(p)) + S(p)b(p)
 \tag{2.6}$$

Le schéma fonctionnel précédent fait donc apparaître quatre fonctions de transfert importantes appelées **fonctions de sensibilité** :

$$S(p) \quad S(p)G(p) \quad T(p) \quad S(p)K(p)$$

où :

- $S(p)$ représente l'influence de la référence et des bruits de mesure sur l'erreur et l'influence de la perturbation sur la commande délivrée.
- $T(p)$ représente l'influence de la référence et des bruits de mesure sur la sortie et l'influence de la perturbation sur la commande délivrée.
- $S(p)G(p)$ représente l'influence de la perturbation sur la sortie et l'erreur.
- $S(p)K(p)$ représente l'influence de la référence et des bruits de mesure sur les commandes.

2.1.2 Objectifs de commande

Compte tenu des relations établies précédemment et de l'analyse qui les suit, la synthèse du correcteur $K(p)$ doit obéir aux différents objectifs suivants :

- Un bon suivi du signal de référence implique une fonction de sensibilité $S(p)$ faible en amplitude.
- Une bonne rejection des perturbations sera obtenue pour $S(p)G(p)$ faible.
- Les bruits de mesure seront atténués si l'amplitude de $T(p)$ est faible sur la plage de fréquence concernée.
- L'effort de commande est faible si l'amplitude de $S(p)K(p)$ et de $T(p)$ est faible.
- La commande délivrée au système est faible si $S(p)$ et $S(p)K(p)$ sont d'amplitude faible.

Ces objectifs de commande sont contradictoires et devront faire l'objet de compromis lors de la synthèse du système de commande.

2.1.3 Rejet de perturbation b

On souhaite généralement que la boucle d'asservissement soit insensible et rejette la perturbation modélisée par le signal $b(p)$. Ceci est impératif en règle générale aux basses fréquences : $\omega < \omega_b$

- Pour que b ait peu d'influence sur y :

$$|G(j\omega)S(j\omega)| \ll 1 \quad (2.7)$$

- Pour que b ait peu d'influence sur v :

$$|S(j\omega)| \ll 1 \quad (2.8)$$

Comme $G(j\omega)$ représente le système à contrôler qu'il ne peut être modifiée qu'à travers le compensateur $K(j\omega)$, on en déduit la règle générale en basses fréquences pour le rejet de perturbations :

$$|S(j\omega)| \ll 1 \text{ pour } \omega < \omega_b$$

Du fait que $T + S = 1$ et $S = (1 + GK)^{-1}$.

On en déduit que :

$$|S(j\omega)| \ll 1, \omega < \omega_b \Rightarrow |T(j\omega)| \approx 1 \text{ et } |K(j\omega)G(j\omega)| \ll 1 \text{ pour } \omega < \omega_b$$

La spécification de rejet de perturbation peut donc s'exprimer en sensibilité, en boucle fermée ou en boucle ouverte.

Pour : $\omega < \omega_b$

- Spécifications en boucle fermée

$$|S(j\omega)| \ll 1 \text{ ou } |T(j\omega)| \approx 1 \quad (2.9)$$

- Spécifications en boucle ouverte

$$|K(j\omega)G(j\omega)| \gg 1 \quad (2.10)$$

Si ces spécifications sont vérifiées alors nécessairement :

$$y \approx (r - w)$$

Pour avoir $y \approx r$ il faut choisir la pulsation ω_b inférieure à la pulsation ω_h définissant les bruits en hautes fréquences.

$$\omega_b < \omega_h$$

Pour la commande et la commande délivrée on trouve :

$$u \approx G^{-1}(r - w) - b \text{ et } v \approx G^{-1}(r - w).$$

Cela implique de choisir également la pulsation ω_b inférieure à la pulsation ω_{co} définissant la bande passante de G .

$$\omega_b < \omega_{co}$$

2.1.4 Réduction du bruit de mesure w

Les bruits sont usuellement modélisés comme opérant en hautes fréquences : $\omega > \omega_h$

- Pour que w ait peu d'influence sur y :

$$|T(j\omega)| \ll 1 \quad (2.11)$$

- Pour que w ait peu d'influence sur v :

$$|K(j\omega)S(j\omega)| \ll 1 \quad (2.12)$$

Une analyse identique à la précédente utilisant les relations algébriques sur les fonctions de sensibilité conduit à écrire la spécification en hautes fréquences :

Pour $\omega > \omega_h$

- Spécifications en boucle fermée

$$|S(j\omega)| \approx 1 \text{ ou } |T(j\omega)| \ll 1 \quad (2.13)$$

- Spécifications en boucle ouverte

$$|K(j\omega)G(j\omega)| \ll 1 \quad (2.14)$$

Si ces spécifications sont vérifiées alors nécessairement :

$$y \approx Gb .$$

Cela implique de choisir la pulsation ω_h supérieure à la pulsation ω_{co} .

$$\omega_{co} < \omega_h$$

Pour la commande et la commande délivrée on trouve

$$u \approx K(r - w) \quad \text{et} \quad v \approx b + K(r - w).$$

Cela implique de choisir également la pulsation ω_b inférieure à la pulsation ω_h comme il a été vu précédemment.

2.1.5 Suivi de référence r : précision

Cette spécification est généralement une spécification pour les basses fréquences :

$\omega < \omega_b$ et l'on retrouve exactement les spécifications données pour le rejet de perturbation :

Pour : $\omega < \omega_b$

- Spécifications en boucle fermée

$$|S(j\omega)| \ll 1 \quad \text{ou} \quad |T(j\omega)| \approx 1 \quad (2.15)$$

- Spécifications en boucle ouverte

$$|K(j\omega)G(j\omega)| \gg 1 \quad (2.16)$$

Le suivi de référence pose le problème plus spécifique de la précision du système en régime permanent. On souhaite en effet que le système bouclé réponde sans erreur ou avec une erreur donnée à des entrées types (échelon, rampe...). Il est donc souhaitable que l'erreur s'annule ou prenne une valeur finie en régime permanent pour des entrées de référence types. L'erreur comme fonction du signal de référence s'écrit

$$\varepsilon = S(p)r(p) = \frac{r(p)}{1 + K(p)G(p)} \quad (2.17)$$

En appliquant le théorème de la valeur finale, on obtient,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p)r(p) \quad (2.18)$$

On peut réunir les quatre fonction de sensibilité au sein d'un même critère [15], en utilisant les deux équations (2.4) et (2.5) qui présentent les transferts entre les signaux d'entrées ($r(p) - w(p)$) et $b(p)$ d'une part, l'erreur d'asservissement $\varepsilon(p)$ et la commande délivrée $u(p)$ d'autre part.

On trouve :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(p) \\ u(p) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} (r(p) - w(p)) \\ b(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & SG \\ KS & KSG \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (r(p) - w(p)) \\ b(p) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Un problème intéressant consiste à chercher un nombre $\gamma > 0$ et un correcteur $K(p)$ stabilisant le système bouclé et assurant

$$\|M\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} S & SG \\ KS & KSG \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (2.20)$$

Le problème se présente donc comme la recherche d'un compromis entre l'objectif recherché et les moyens nécessaires

Toutefois cette formulation s'avère en pratique trop rigide car elle ne laisse aucun élément de choix à l'utilisateur. Pour contourner cet obstacle une démarche peut être envisagée ultérieurement.

2.2 Spécification fréquentielles de robustesse :

La section précédente a été consacré pour l'analyse en performance des systèmes bouclés en utilisant un schéma fonctionnel plus général afin d'extraire les quatre fonctions de sensibilité qui sont utilisées pour l'étude des spécifications fréquentielles de performance. Mais la synthèse de la loi de commande K a été déterminée à partir d'un modèle nominal G_{mod} du système à commander. Malheureusement, il est expérimentalement plus probable d'obtenir une modélisation où les paramètres et la structure ne sont qu'approximativement connus. Par essence, une modélisation ne peut pas être certaine. De plus, au cours du temps, ses caractéristiques peuvent évoluer. Cette remarque a motivé l'introduction de la notion de *famille de modèles* [35-34]

Il est important d'insister sur le fait qu'un modèle ne peut pas représenter de façon exacte un système réel. En résumé, l'indétermination est dans la nature même des objets physiques. L'utilisation d'une famille de modèles susceptible de contenir le modèle le plus adéquat constitue l'idée de base de la robustesse.

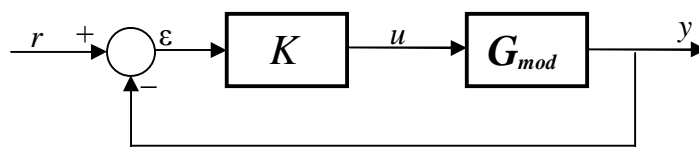


Figure 2.2 : Modèle G_{mod} en boucle fermée avec le correcteur

Alors si on suppose que le système en boucle fermée dans la figure (2.2) soit stable et vérifie un certain nombre de spécifications de performance. La question est de savoir si, lorsque la loi

de commande asservira le système réel $G_{réel}$, le système en boucle fermée de la figure (2.3) sera stable et si les spécifications de performance seront aussi assurées.

L'étude de la robustesse de la loi de commande K consiste à essayer d'obtenir le maximum de garanties pour que cela soit effectivement le cas

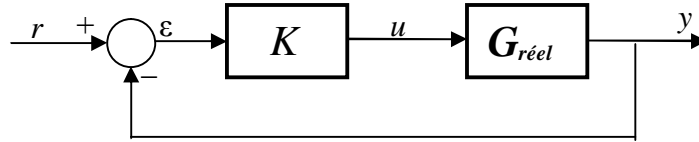


Figure 2.3 : Modèle $G_{réel}$ en boucle fermée avec le correcteur

Dans le cas où la loi de commande assure la propriété de stabilité pour tous les éléments de la famille, on parle de *robustesse en stabilité*.

Dans le cas où la loi de commande assure en plus les spécifications de performance, on parle de *robustesse en performance* [34].

On va se concentrer dans cette section sur le problème de la robustesse en stabilité. Afin de bien comprendre les idées sous-jacentes à l'approche.

2.2.1 Etude de la robustesse en stabilité :

L'étude de la robustesse en stabilité est principalement basée sur l'utilisation du *critère de Nyquist*. Il permet de ramener l'étude de la stabilité d'un système en boucle fermée à l'étude de certaines caractéristiques de la réponse fréquentielle de la fonction de transfert en boucle ouverte.

2.2.2 Définition de la famille de modèles :

Soit $G_{réel}$ la fonction de transfert décrivant exactement le système à commander et G_{mod} son modèle, qui sera forcément entaché d'incertitudes. Une façon d'évaluer la différence entre le système réel et son modèle est d'exprimer que $G_{réel}$ appartient à une famille de modèles [35] :

$$G_{réel} \subset \{G \mid \exists \Delta, \|\Delta\|_\infty \leq \beta, G = G_{mod} + \Delta\} \quad (2.21)$$

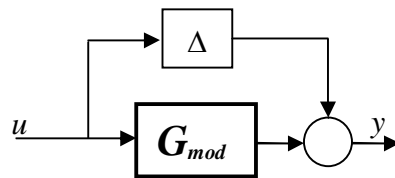
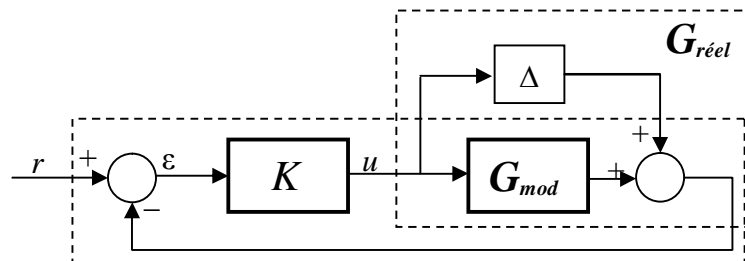


Figure 2.4 : Incertitude additive

La quantité d'incertitude est alors évaluée par un paramètre réel $\beta > 0$. Ce type d'incertitude est appelé *incertitude additive*. La difficulté ici est que seul le paramètre β est connu. Tout ce que l'on sait sur la fonction de transfert $\Delta(j\omega)$, c'est qu'elle est bornée en module par β . Pour garantir que le système réel (que l'on ne connaît pas) en boucle fermée est stable, l'idée est de démontrer que pour tout transfert stable $\Delta(j\omega)$ dont la norme H_∞ est inférieure à β , on a le système bouclé représenté sur la figure (2.5) qui est stable.

Figure 2.5 : Connexion KS avec Δ

2.2.3 Analyse de la stabilité par le critère de Nyquist

Pour évaluer la stabilité de cet ensemble de systèmes en boucle fermée, il faut donc appliquer le critère de Nyquist [35] pour toutes les fonctions de transfert en boucle ouverte $(G_{\text{mod}}(j\omega) + \Delta(j\omega))K(j\omega)$ obtenues par toutes les fonctions de transfert stables $\Delta(j\omega)$ telle que $|\Delta(j\omega)| \leq \beta$. Une condition nécessaire est que pour $\Delta(j\omega) = 0$, la condition du critère de Nyquist soit vérifiée. Pour assurer que, pour toutes les fonctions de transfert $\Delta(j\omega)$, le système bouclé reste stable, il suffit de vérifier que pour toutes les pulsations ω , les points $(G_{\text{mod}}(j\omega) + \Delta(j\omega))K(j\omega)$ ne recouvrent pas le point $(-1, 0)$. Pour une pulsation ω donnée, l'ensemble des points $(G_{\text{mod}}(j\omega) + \Delta(j\omega))K(j\omega)$ correspond à un disque de centre $G_{\text{mod}}(j\omega)K(j\omega)$ et de rayon $\beta|K(j\omega)|$ figure (2.6), quand $\Delta(j\omega)$ décrit l'ensemble des fonctions de transfert stables dont la norme H_∞ est inférieure à β . Il faut donc que ce disque ne recouvre pas le point $(-1, 0)$. Pour cela, il suffit d'assurer que la distance entre le point

$(-1, 0)$ et le point $G_{\text{mod}}(j\omega)K(j\omega)$ est supérieure au rayon du disque, à savoir $\beta|K(j\omega)|$, soit :

$$|1 + G_{\text{mod}}(j\omega)K(j\omega)| > \beta|K(j\omega)| \Leftrightarrow \forall \omega, \left| \frac{K(j\omega)}{1 + G_{\text{mod}}(j\omega)K(j\omega)} \right| < \frac{1}{\beta} \quad (2.22)$$

Soit
$$\|KS\|_\infty < \frac{1}{\beta} \quad (2.23)$$

Il est très intéressant de voir que le système bouclé se réécrit comme la connexion de la fonction de sensibilité KS qu'est déjà vu au paragraphe (2.1.1) avec la fonction de transfert Δ (voir la figure (2.5)). Le système bouclé est stable pour toute fonction de transfert stable Δ telle que $\|\Delta\|_\infty \leq \beta$ si et seulement si $\|KS\|_\infty < \frac{1}{\beta}$. Ceci est un cas particulier du théorème de petit gain que nous allons voir dans le paragraphe qui suit

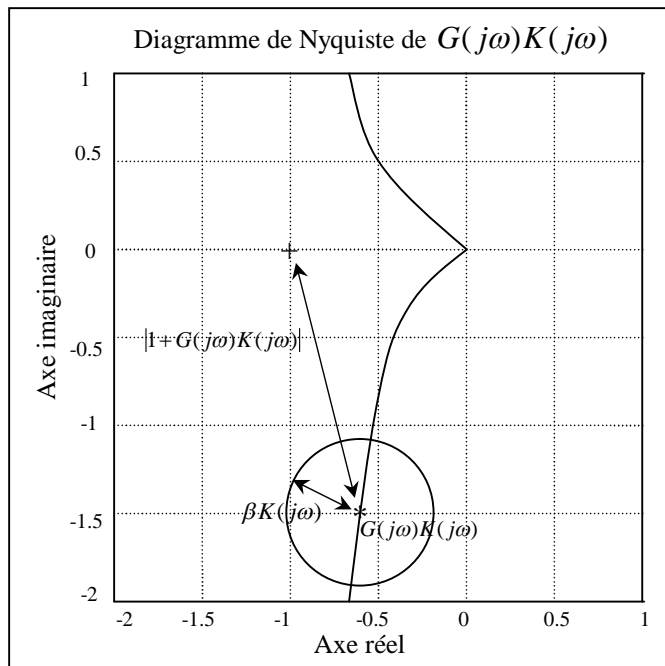


Figure 2.6 : Diagramme de Nyquist $G(j\omega)K(j\omega)$

Théorème du petit gain [34]: comme il est déjà montré dans le premier chapitre, le théorème du petit gain peut s'énoncer de la façon suivante : la famille des systèmes (M, Δ) représentés dans la figure (2.7) est stable pour toutes les (matrices de) fonctions de transfert stables Δ telles que $\|\Delta\|_\infty \leq \beta$ si et seulement si

$$\|M\|_\infty < \frac{1}{\beta}$$

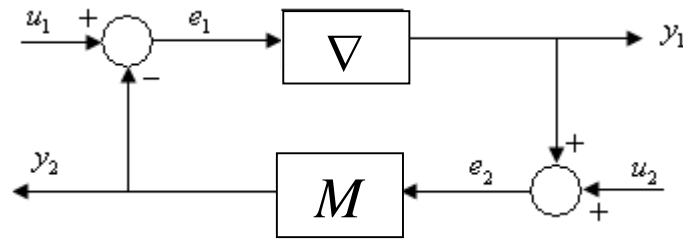


Figure 2.7 : Connexion de M avec Δ

Exemple d'un système mécanique [34] :

On suppose qu'une loi de commande K a été mise au point sur le modèle nominal G_{mod} suivant :

$$G_{\text{mod}}(p) = \frac{100}{p(p^2 + 0.6p + 100)} = \frac{1}{p} \times \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta_0 \frac{p}{\omega_0} + 1} \quad (2.24)$$

avec $\omega_0 = 10\text{rad/s}$ et $\zeta_0 = 0.03$.

En réalité, le système est un système mécanique avec un nombre infini de modes souples, par exemple de la forme :

$$G_{\text{réel}}(p) = \frac{1}{p} \prod_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_i}\right)^2 + 2\zeta_i \frac{p}{\omega_i} + 1} = G_{\text{mod}}(p) \prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_i}\right)^2 + 2\zeta_i \frac{p}{\omega_i} + 1} \quad (2.25)$$

avec $\omega_0 \leq \omega_1 \leq \dots \leq \omega_i \leq \dots$. Si on suppose que :

$$\prod_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_i}\right)^2 + 2\zeta_i \frac{p}{\omega_i} + 1} \approx 1 \quad (2.26)$$

C'est que l'on ne connaît pas la valeur des paramètres ω_i et ζ_i allant de 2 à ∞ (par exemple du fait d'une impossibilité pratique).

Pour l'illustration, supposons que le système réel ne contient que deux modes souples et que pour obtenir la fonction de transfert $G_{\text{mod}}(p)$ seul le mode ayant la pulsation propre la plus haute a été négligé, c'est-à-dire que le système réel $G_{\text{réel}}(p)$ s'écrit :

$$G_{\text{réel}}(p) = \frac{1}{p} \times \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta_0 \frac{p}{\omega_0} + 1} \times \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_1}\right)^2 + 2\zeta_1 \frac{p}{\omega_1} + 1} = G_{\text{mod}}(p) \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_1}\right)^2 + 2\zeta_1 \frac{p}{\omega_1} + 1}}_{E(p)} \quad (2.27)$$

avec $\omega_1 = 200\text{rad/s}$ et $\zeta_1 = 0.03$.

On peut alors considérer l'erreur entre $G_{réel}$ et G_{mod} dont le module en dB est représenté en fonction de la pulsation ω sur la figure (2.8).

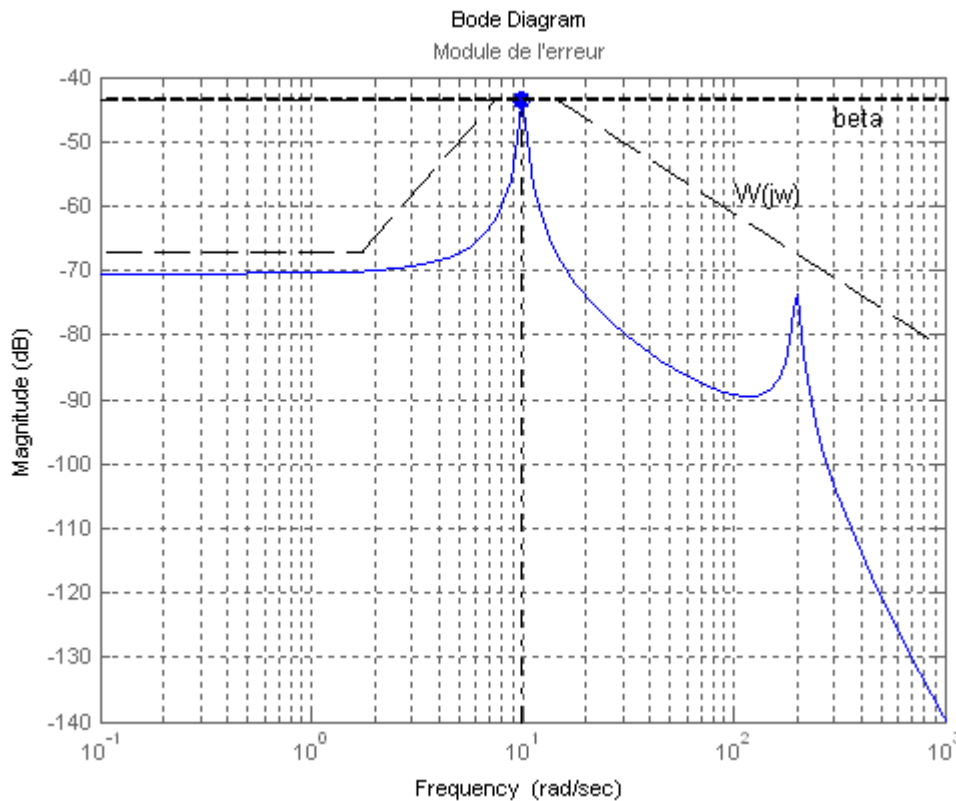


Figure 2.8 : Module de l'erreur $|\Delta(j\omega)| = |G_{réel}(j\omega) - G_{mod}(j\omega)|$

Si le mode correspondant à la pulsation ω_1 a été négligé, c'est parce qu'il n'était pas connu a priori. Il s'agit d'une erreur sur la structure du système (l'ordre du modèle n'est pas l'ordre du système réel). Ce type d'erreur est appelé *incertitude dynamique*.

On suppose qu'une loi de commande K a été mise au point sur G_{mod} . On désire, en appliquant les résultats précédents, s'assurer que la loi de commande stabilise aussi $G_{réel}$.

L'erreur introduite par cette approximation a été modélisée par une erreur absolue $\Delta(j\omega) = G_{réel}(j\omega) - G_{mod}(j\omega)$. Pour déterminer la "taille" β de cette incertitude, la norme H_∞ de $\Delta(p)$ est déterminée, soit graphiquement à partir de la figure (2.8), soit numériquement en utilisant la forme analytique de la norme H_∞ , on obtient $\beta = -43.7dB$.

Examiner la stabilité du système bouclé par rapport à une incertitude additive revient à examiner la fonction de transfert en boucle fermée $M = KS$.

D'après le théorème du petit gain, l'ensemble des systèmes bouclés obtenus quand Δ décrit l'ensemble des transferts stable de norme H_∞ inférieure à β est stable si

$$\|KS\|_\infty < \frac{1}{\beta} = 43.7dB$$

Le tracé du module de $K(j\omega)S(j\omega)$ est représenté sur la figure (2.9). Il est clair que sa valeur maximale n'excède jamais $43.7dB$ (le calcul sous Matlab donne $-7.69 dB$). La condition donnée par le théorème du petit gain est donc vérifiée.

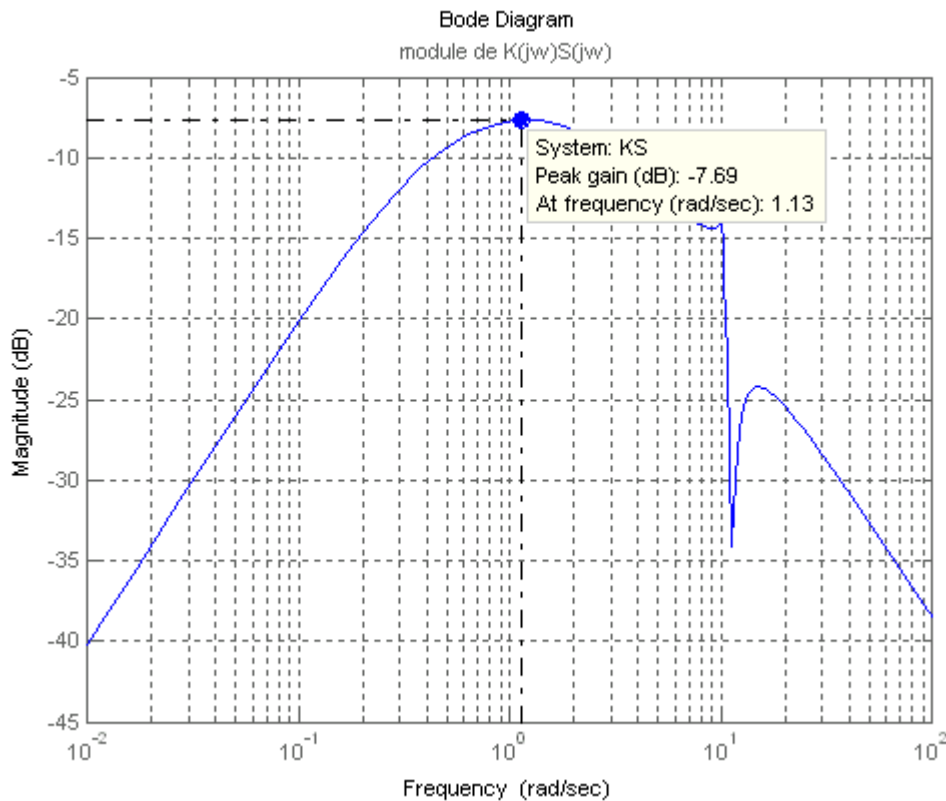


Figure 2.9 : Module de $K(j\omega)S(j\omega)$

2.2.4 Description des incertitudes en utilisant les pondérations fréquentielles

Dans l'exemple précédent nous avons considéré la modélisation de l'incertitude par une incertitude de type additive ($G_{réel}(j\omega) = G_{mod}(j\omega) + \Delta(j\omega)$). On a mesuré la "taille" de l'incertitude par un paramètre $\beta > 0$, indépendant de la pulsation ω ($|\Delta(j\omega)| \leq \beta$). Dans ce cas-là, β est de l'ordre de $-43.7dB$. Comme on peut le voir sur la figure (2.8), c'est une description très grossière. Notamment, en basse pulsation, le module de l'erreur est inférieur à $-70dB$ et donc largement inférieur à $-43.7dB$. Ce mode de représentation de l'incertitude est donc très limité. En effet, il est clair qu'un modèle, qu'il soit obtenu par identification et/ou

modélisation (physique), ne reflète qu'une partie des dynamiques du système modélisé. Dans le cas des systèmes linéaires stationnaires, cela consiste à dire que la fonction de transfert associée n'est représentative du système physique que dans une certaine gamme de pulsations. Par suite, l'incertitude liée à la modélisation $\Delta(j\omega)$ présente une taille dépendant de la pulsation ω .

Cette "taille" peut être définie par une fonction de transfert $W(j\omega)$ stable, appelée *pondération* et telle que $|G_{réel}(j\omega) - G_{mod}(j\omega)| = |\Delta(j\omega)| \leq |W(j\omega)|$.

Un choix possible pour le module de $W(j\omega)$ est représenté sur la figure (2.8). Il est clair qu'il permet une description plus fidèle car dépendant de la pulsation ω .

Théorème du petit gain avec pondération [15] :

Le théorème du petit gain avec pondération peut s'énoncer de la façon suivante : la famille des systèmes (M, Δ) représentés figure (2.7) est stable pour toutes les (matrices de) fonctions de transfert stables Δ telles que $\|\Delta\|_\infty \leq W(j\omega)$ si et seulement si

$$\|M\|_\infty < \frac{1}{W(j\omega)}$$

avec

$W(j\omega)$: est la fonction de pondération

M : peut prendre les différentes fonctions de sensibilité S(p) S(p)G(p) T(p) S(p)K(p)

2.2.5 Choix de la fonction de pondération

Le choix de la fonction de pondération pour les fonctions de sensibilité est appelé *modélage de la boucle fermée* ou *modélage de la fonction de sensibilité*

Modéliser la fonction de sensibilité permet d'avoir une boucle fermée dont le comportement est proche de celui que l'on attend. Modéliser les transferts en boucle fermée à l'aide de gabarits permet de spécifier a priori des objectifs de performance et de robustesse.

Le choix des pondérations se déduit des spécifications issues du cahier des charges.

Les spécifications de performance sont généralement les suivantes :

- gabarit fréquentiel
- gabarit temporel
- amortissement de modes souples
- critères énergétiques (peut être exprimé par une norme H_2)

Les spécifications de robustesse peuvent provenir des problèmes suivants :

- connaissance du modèle sur une plage limitée de fréquence
- erreur d'identification
- erreur de modélisation
- erreur due à la réduction/simplification d'un modèle
- description d'un modèle non linéaire par un modèle linéaire
- description d'un modèle LPV par un modèle LTI

Les spécifications de performance et de robustesse d'un cahier des charges peuvent être souvent prises en compte par les caractéristiques des pondérations fréquentielles suivantes :

- gain en 0
- gain en 1
- comportement asymptotique en 0
- comportement asymptotique en 1
- fréquence de coupure à 0 dB
- gain maximum sur une plage de fréquences
- gain minimum sur une plage de fréquences

Plusieurs types de pondérations peuvent être choisis pour décrire correctement les spécifications du cahier des charges. Elles peuvent se résumer à un gain, un filtre du premier Ordre, du second ordre etc.

2.2.6 Critère H_∞ avec les fonctions de pondération

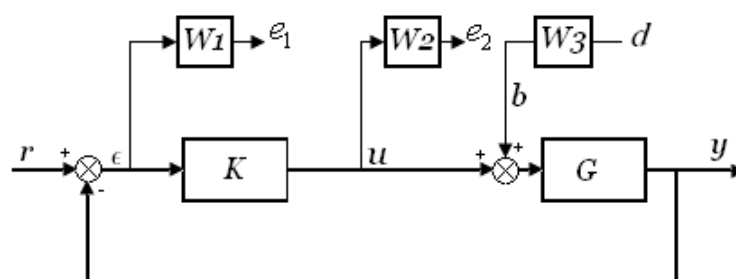


Figure 2.10 : Mise en place de pondération

Pour illustrer la synthèse H_∞ avec l'utilisation des fonction de pondération, le problème trois blocs figure (2.10) sont abondamment décrits dans la littérature. Il est intéressant car il illustre bien un problème de commande classique où on a des contraintes de performance et de robustesse [15-28].

2.2.6.1 Mise en forme standard du critère H_∞ [15]:

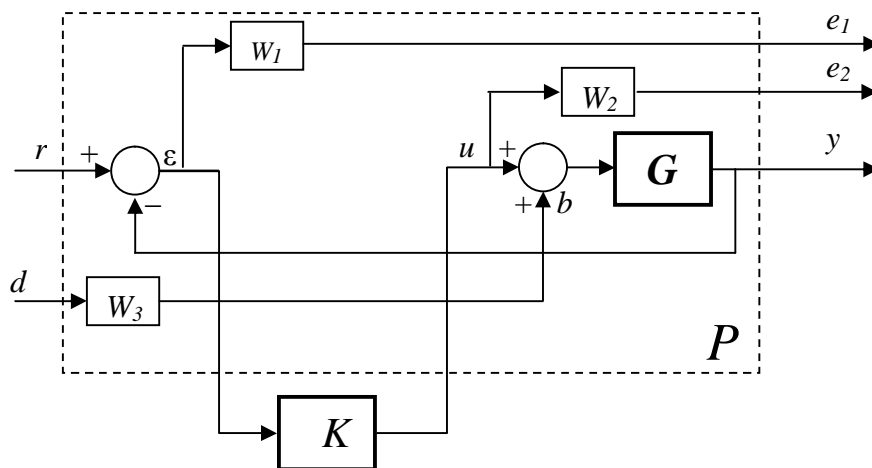


Figure 2.11 : Forme standard du critère H_∞

Une fois choisis les filtres (ou les pondération), il reste à mettre le problème sous forme standard, c'est à dire à identifier les schémas blocs de la figure (2.12). Identifions tout d'abord les différents signaux.

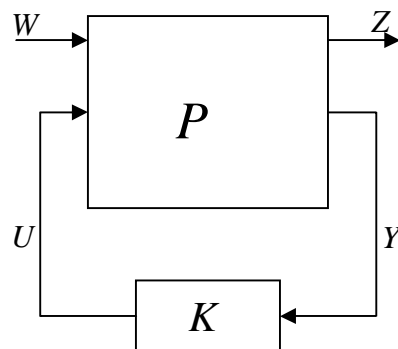


Figure 2.12 : Problème sous forme standard

Soit le système P décrit sur le schéma bloc représenté figure (2.12) où

Le vecteur des sorties commandées $Z = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ est de dimension p_z ;

Le vecteur des entrées de critère $W = \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix}$ est de dimension m_w ;

Le vecteur des sorties mesuré Y est de dimension p_y ;

Le vecteur des entrées de commande U est de dimension m_u .

Le système P admet pour équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases} \quad (2.29)$$

Cette représentation est utilisée pour résoudre le problème H_∞ ; elle est obtenue en considérant une représentation d'état pour chaque fonction de transfert $G(p), w_1(p), w_2(p)$ et $w_3(p)$

$$G(p): (\text{entrée } (u-b), \text{ sortie } y): \begin{cases} \dot{x} = Ax + B(u-b) \\ y = Cx \end{cases}$$

$$w_1(p): (\text{entrée } (r-y), \text{ sortie } e_1): \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1(r-y) \\ e_1 = C_1 x_1 + D_1(r-y) \end{cases}$$

$$w_2(p): (\text{entrée } u, \text{ sortie } e_2): \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ e_2 = C_2 x_2 + D_2 u \end{cases}$$

$$w_3(p): (\text{entrée } d, \text{ sortie } b): \begin{cases} \dot{x}_3 = A_3 x_3 + B_3 d \\ b = C_3 x_3 + D_3 d \end{cases}$$

Soit finalement

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -BC_3 \\ -B_1 C & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -BD_3 \\ B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ B_2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1 C & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_1 \end{bmatrix} u \\ \varepsilon = [-C \ 0 \ 0 \ 0] \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + [I \ 0] \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix} + [0] u \end{cases} \quad (2.30)$$

La forme LFT du système $P(p)$

$$P(p) = \begin{bmatrix} P_{zw}(p) & P_{zu}(p) \\ P_{yw}(p) & P_{yu}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_z \\ C_y \end{bmatrix} (pI - A)^{-1} [B_w \ B_u] \quad (2.31)$$

$$\begin{bmatrix} z(p) \\ y(p) \end{bmatrix} = P(p) \begin{bmatrix} w(p) \\ u(p) \end{bmatrix} \text{ avec } u(p) = K(p)y(p) \quad (2.32)$$

Soit

$$z(p) = \underbrace{(P_{zw}(p) + P_{zu}(p))K(p)(I - P_{yu}(p)K(p))^{-1}P_{yw}(p)}_{\text{noté } P*K} w(p) \quad (2.33)$$

2.3 Problème H_∞ standard [15-14]

1. Etant donné $\gamma > 0$, existe-il une loi de commande K telle que
 - le système bouclé $P * K$ soit asymptotiquement stable (tous les pôles du système en boucle fermée sont à partie réelle strictement négative)
 - $\|P * K\|_\infty \leq \gamma$
2. Si oui, construire une loi de commande K assurant pour le système en boucle fermée les deux propriétés précédentes.

2.3.1 Synthèse d'un correcteur H_∞ par retour de sortie

La solution est basée sur l'algorithme de Glover-Doyle qui est basée essentiellement sur la résolution des équations de Riccati [14,28,34].

Le problème H_∞ admet une solution si les quatre hypothèses suivantes sont vérifiées.

1. La paire (A, B_u) est stabilisable et la paire (C_y, A) est détectable : cela garantit l'existence d'une loi de commande K qui stabilise le système en boucle fermée.
2. $\text{rang}(D_{zu}) = m_u$ et $\text{rang}(D_{yu}) = p_y$: ce sont des conditions suffisantes pour assurer que la loi de commande $K(p)$ est propre. De façon implicite, cela veut dire aussi qu'il y a plus de sorties commandées z que d'entrées de commande u ($p_z \geq m_u$) et qu'il y a plus d'entrées de critère w que de mesures y ($m_w \geq p_y$)
3. $\text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_u \\ C_z & D_{zu} \end{bmatrix} = n + m_u$ garantit que le transfert P_{zu} n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.
4. $\text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_w \\ C_z & D_{yw} \end{bmatrix} = n + p$ garantit que le transfert p_{yw} n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.

Ces 4 hypothèses doivent être impérativement vérifiées.

Pour obtenir des expressions plus simples, on introduit les conditions supplémentaires

$$\text{suivantes : } D_{zw} = 0, \quad D_{zu}^T [C_z \quad D_{zu}] = [0 \quad I_{m_u}], \quad D_{yu} = 0, \quad \begin{bmatrix} B_w \\ D_{yw} \end{bmatrix} D_{yw}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{p_y} \end{bmatrix}$$

Alors il existe une loi de commande $K(p)$ solution du **problème H_∞ standard** si et seulement si

1. La matrice Hamiltonienne $\begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_w B_w^T - B_u B_u^T \\ -C_z^T C_z & -A^T \end{bmatrix}$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe

imaginaire et il existe une matrice symétrique $X_\infty \geq 0$ telle que :

$$X_\infty A + A^T + X_\infty (\gamma^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T) X_\infty + C_z^T C_z = 0 \quad (2.34)$$

2. La matrice Hamiltonienne $\begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_z^T C_z - C_y^T C_y \\ -B_w B_w^T & -A \end{bmatrix}$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe

imaginaire et il existe une matrice symétrique $Y_\infty \geq 0$ telle que :

$$Y_\infty A^T + A Y_\infty + Y_\infty (\gamma^{-2} C_z^T C_z - C_y^T C_y) Y_\infty + B_w B_w^T = 0 \quad (2.35)$$

3. $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$ où $\rho(\cdot)$ correspond au module de la plus grande valeur propre (rayon spectral).

De plus, l'ensemble des correcteurs $K(p)$ répondant au problème est donné par $K(p) = F(K_a(p), \Phi(p))$ où $\Phi(p)$ est n'importe quelle fonction de transfert stable, de norme H_∞ inférieure à γ et

$$K_a(p) = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_u \\ \hline F_\infty & 0 & I_{m_u} \\ -C_y & I_{p_y} & 0 \end{array} \right] \quad (2.36)$$

$$\begin{cases} \hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2} B_w B_w^T X_\infty + B_u F_\infty + Z_\infty L_\infty C_y \\ F_\infty = -B_u^T X_\infty \\ L_\infty = -Y_\infty C_y^T \\ Z_\infty = (I - \gamma^{-2} X_\infty Y_\infty)^{-1} \end{cases} \quad (2.37)$$

Un correcteur particulier est le correcteur central, obtenu en prenant $\Phi(p) = 0$, ce qui donne :

$$K_0(p) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array} \right] \quad (2.38)$$

Exemple [28] :

On considère un système de sortie y et de commande u dont le modèle nominal est :

$$Y(p) = G(p)U(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}U(p) \quad (2.39)$$

On souhaite concevoir un asservissement conformément au schéma bloc de la figure (2.2) où le correcteur $K(p)$ doit assurer les objectifs suivants :

1. La sortie y doit être asservie sur une référence r constante, avec une erreur statique inférieure à 0.01
2. La bande passante de l'asservissement doit comprendre toutes les pulsations entre 0 et 1 rd/s au moins
3. La marge de module doit être au moins égale à 0.7
4. Le gain de la fonction de transfert entre r et u doit être inférieur à 10 à toutes les pulsations, et décroître suivant une pente -20 dB/décade au-delà de 10 rd/s
5. Le gain de la fonction de transfert entre r et y doit être inférieur à 0.5 au-delà de 10rd/s

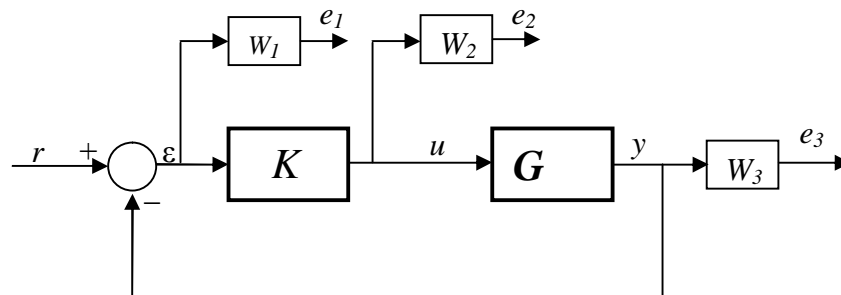


Figure 2.13 : Schéma utilisé pour la synthèse

Les points 1, 2 et 3 peuvent être traduits par des contraintes sur la fonction de sensibilité $S = (1 + GK)^{-1}$ dont le gain doit être :

- inférieur à 0,01 en statique,
- inférieur à 1 en deçà de 1 rd/s
- inférieur à 1/0,7 au-delà

Le quatrième point concerne explicitement le transfert $KS = K(1 + GK)^{-1}$

Enfin le cinquième point concerne le transfert $T = KGS = KG(1 + GK)^{-1}$

Ceci nous amène à construire le schéma bloc de la figure (2.13), où les filtres $W_i(p)$ sont choisis conformément à ces spécifications (nous allons détailler le choix des filtres dans l'exemple (3.5) calcul de l'asservissement en position d'un moteur à courant continu)

$$\begin{cases} W_1(p) = \left(\frac{1}{0.7} \frac{p+0.01}{p+1/0.7} \right)^{-1} = \frac{0.7p+1}{p+0.01} \\ W_2(p) = \left(10 \frac{1}{0.7} \frac{p/1000}{1+p/10} \right)^{-1} = 10 \frac{p+10}{p+1000} \\ W_3(p) = \left(0.5 \frac{p+10}{p} \right)^{-1} = \frac{2p}{p+10} \end{cases} \quad (2.40)$$

Notons que le dénominateur $W_2(p)$ ne résulte pas du cahier des charges, mais introduit pour rendre ce filtre propre.

Le schéma de la figure (2.13) se met sous la forme standard de la figure (2.12) en choisissant $W = r$, $Y = \varepsilon$ et $Z = (e_1 \ e_2 \ e_3)^T$. Nous allons donc rechercher un correcteur K solution de problème suivant :

$$\left\| \begin{array}{c} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 W_2 T \end{array} \right\|_\infty < \gamma \quad (2.41)$$

Ce qui implique :

$$\begin{cases} |W_1 S| < \gamma \Leftrightarrow |S| < \gamma/W_1 \\ |W_2 K S| < \gamma \Leftrightarrow |K S| < \gamma/|W_2| \\ |W_3 W_2 T| < \gamma \Leftrightarrow |T| < \gamma/|W_3 W_2| \end{cases} \quad (2.42)$$

Les objectifs seront atteints si la valeur de γ est inférieure à 1 (ou à la rigueur proche de 1).

En appliquant la méthode de résolution (LMI) qui sera exposée dans le troisième chapitre, on obtient un correcteur correspondant à la valeur $\gamma = 1,0199$ dont les pôles sont les suivants :

$$K = [-26280.5646, -10.3701, -7.8773 + 3.3517i, -7.8773 - 3.3517i, -0.0099]$$

La figure (2.14) montre le diagramme de Bode de chaque une de ces fonctions, comparé à celui de l'inverse des filtres : elle permet de vérifier que les inégalités sont satisfaites, et donc les objectifs de synthèse sont atteints.

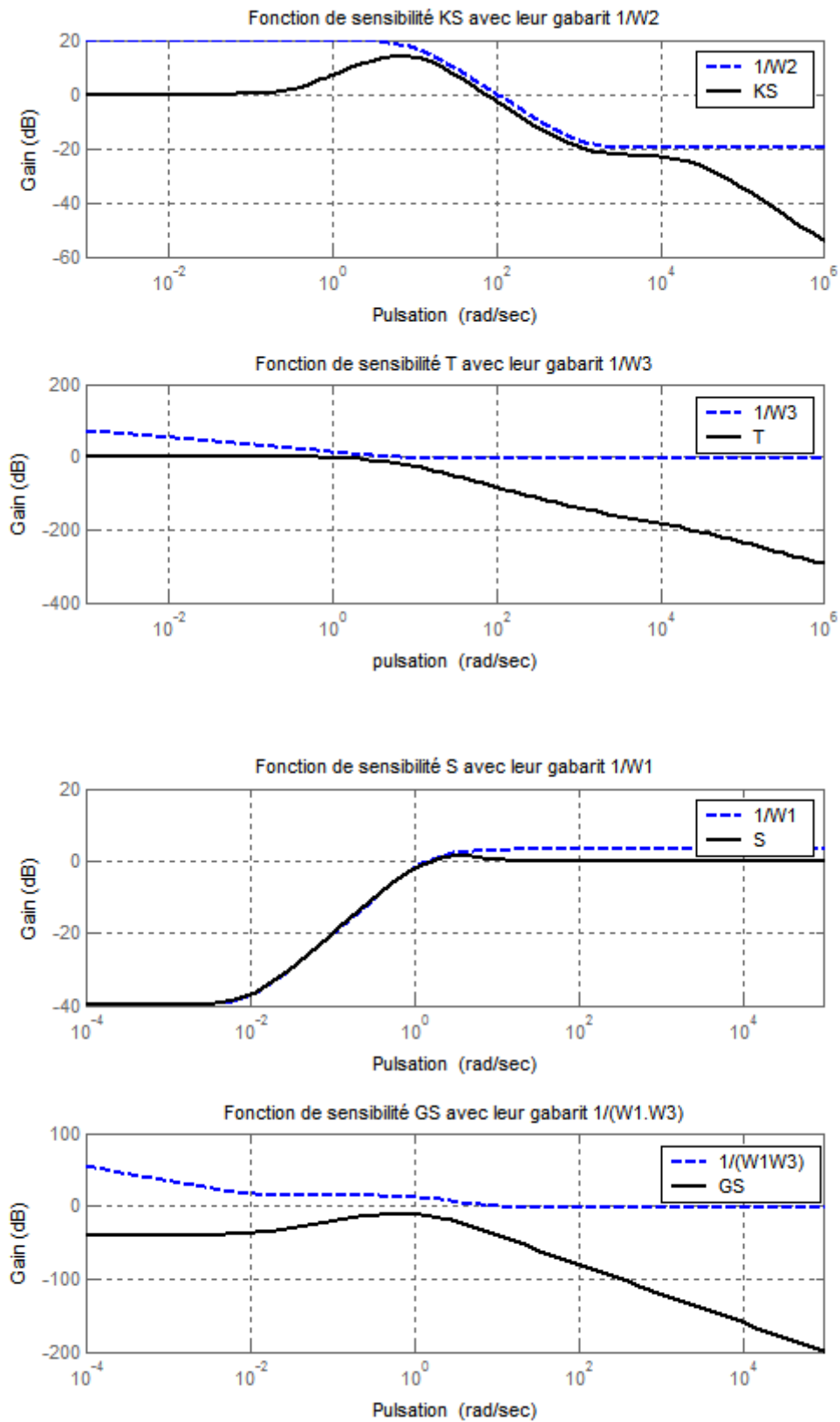


Figure 2.14 : Diagramme de Bode des différents transferts (traits pleins) et leurs gabarits (pointillés)

En terme de robustesse, la dernière des inégalité (2.42) introduit une limite sur la bande passante du transfert entre la référence et la grandeur régulée : celle-ci assure que le système bouclé peut tolérer des dynamique hautes fréquences non prises en compte dans le modèle (2.39) sans risque pour la stabilité. Pour illustrer ce point, supposons par exemple que le modèle **nominal** (2.39) ne tienne pas compte d'un terme supplémentaire du premier ordre au dénominateur, de sorte que le modèle réel figure (2.3) serait :

$$G_{réel}(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)(1+\tau p)} \quad (2.43)$$

En remarquant que :

$$G_{réel}(p) = G(p) \left(1 - \frac{\tau p}{1+\tau p} \right) \quad (2.44)$$

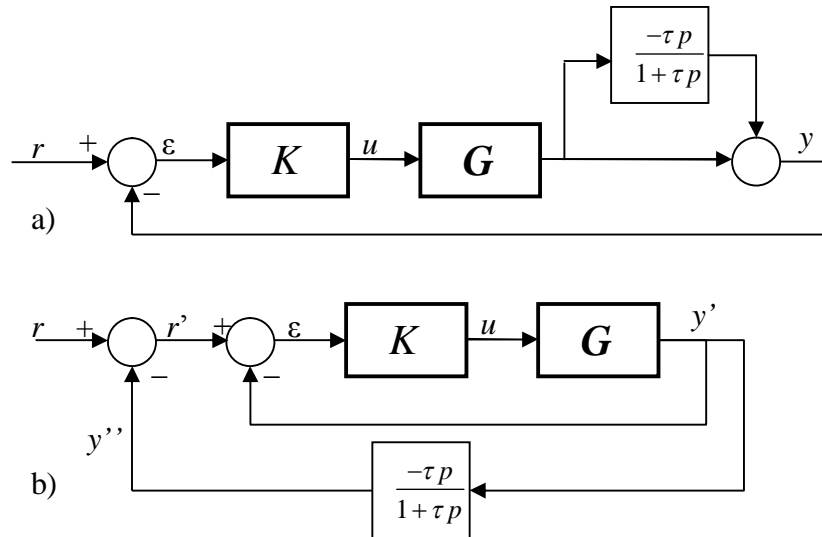


Figure 2.15 : Etude de la robustesse aux dynamiques négligées

Le système bouclé se met sous la forme de la figure (2.15 a) qui est équivalent à celle de la figure (2.15 b). Sur cette dernière figure, le transfert de r' vers y' vérifie la troisième des inégalités (2.42)

$$\left| T_{y',r'} \right| = \left| \frac{KG}{1+KG} \right| < \frac{\gamma}{|W_3|} \quad (2.45)$$

On en déduit que le système bouclé de la figure est stable pour toute valeur de τ telle que

$$\forall \omega \left| T_{y',r'}(j\omega) \frac{\tau j\omega}{1+\tau j\omega} \right| < 1 \Leftrightarrow \forall \omega \left| \frac{\tau j\omega}{1+\tau j\omega} \right| < \frac{|W_3(j\omega)|}{\gamma} \quad (2.46)$$

La figure (2.15 b) correspond à un système dont la boucle ouverte (en y'') est stable, avec un gain toujours inférieur à 1 : d'après le critère de Nyquist, la boucle fermée est donc stable elle aussi.

La figure (2.16) permet de comparer les diagrammes de Bode des deux fonctions qui apparaissent dans la deuxième des inégalités (2.46). On voit que la stabilité est assurée pour toute valeur de τ inférieure à 0.2

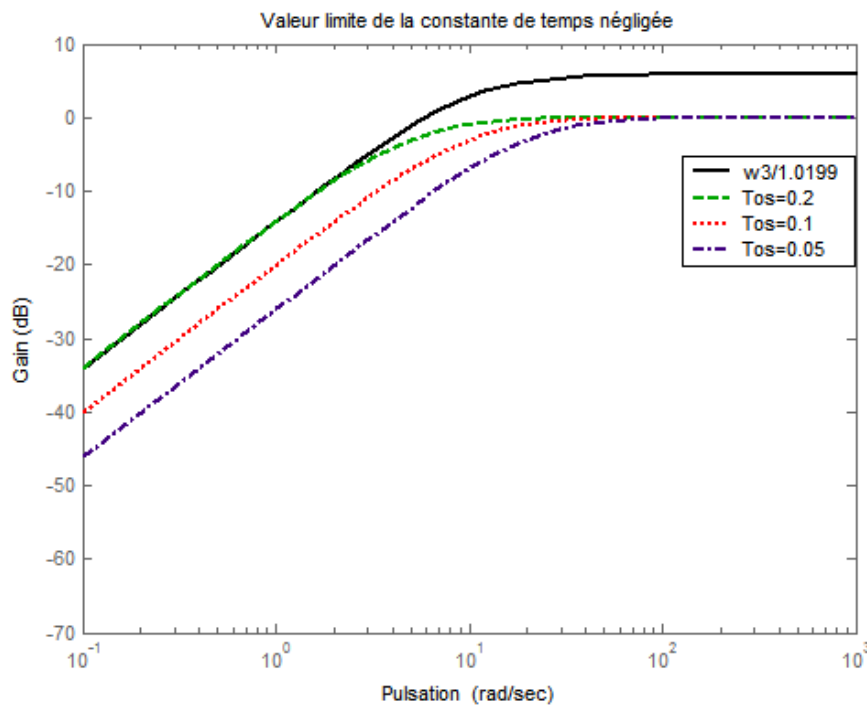


Figure 2.16 : Détermination d'une valeur limite de la constante de temps négligée

Conclusion

ce qui est extrêmement intéressant c'est de constater que l'on utilise exactement le même formalisme pour assurer la performance et la robustesse via le théorème du petit gain : la contrainte sur la norme H_∞ . C'est tout l'intérêt d'utiliser la synthèse H_∞ standard car en pondérant chaque transfert on voit apparaître explicitement la performance et la robustesse réunis au sein d'un même critère. C'est là que le compromis performance/robustesse prend toute sa signification car il est résumé par un seul critère H_∞ .

Dans le troisième chapitre, nous allons développer la formalisation du critère H_∞ sous forme d'un problème d'optimisation convexe (sous contrainte LMI) pour le cas des systèmes LTI puis une extension aux système LPV