

## Chapitre III

# Les inégalités matricielles linéaires (LMI)

### Introduction

Un grand nombre de problème concernant les systèmes dynamiques peuvent se mettre sous forme de problème d'optimisation convexe d'un type particulier nommé les programme semi définis SDP (Semi-Definit-Programs). L'intérêt principal des SDPs est la possibilité de calculer le minimum global, ces SDP sont aussi connus sous le nom des LMIs (Linear Matrix Inequalities)

L'histoire des LMIs a plus de 100 ans, elle semble avoir débuté en 1890 quand Lyapunov montra que la stabilité du système autonome

$$\dot{x} = Ax$$

Et équivalent à l'existence d'une matrice symétrique définie positive telle que :

$$A^T P + PA < 0$$

Il a même montré qu'il est possible de résoudre analytiquement ce problème.

Dans les années 1940, l'école russe menée par Lur'e et Postnikov énonce des critères de stabilités, en particulier pour des système non linéaire, sous forme de LMI celles-ci étaient résolues analytiquement pour des systèmes de petite taille

Au début des années 1970, on montre que certaine LMIs peuvent être résolues en terme d'équation algébrique de Riccati, on retiendra à ce propos les travaux de Willems.

La dernière pierre de cette évolution repose sur la formulation des problèmes classique d'automatique en tant que problème d'optimisation convexe. Phatnitskii et Skorodinski réduisent le problème de Lur'e sous la forme d'un problème convexe qu'ils résolvent numériquement en utilisant l'algorithme de l'ellipsoïde en 1982. On assiste alors durant les années 1980-1990 au développement des méthodes de résolution des problèmes d'optimisation convexe.

Les travaux actuels se concentrent sur les formulations possibles des problèmes d'automatique en tant que problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI et l'amélioration des méthodes numériques de résolution des LMIs. Ces dernière concernant la

minimisation des temps de calcul qui restent encore importants, et les problèmes de convergence lorsque la taille de problème devient grande.

Dans ce chapitre nous allons voir, comment nous pouvons exprimer le problème standard  $H_\infty$  sous forme d'un problème d'optimisation convexe, et de chercher la loi de commande en utilisant les LMIs.

Avant de nous approfondir dans l'étude des LMIs quelques définitions sont nécessaires.

### 3.1 Problème d'optimisation

L'optimisation est la branche des Mathématiques consacrée à l'étude du minimum/maximum d'une fonction à plusieurs variables sur un certain domaine de définition, de l'étude de leur existence à leur détermination, en général par la mise en œuvre d'un algorithme sur un ordinateur.

**Définition** [12] (*Problème d'optimisation de dimension finie*) Soit

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^m &\rightarrow \mathfrak{R} \\ \zeta &\mapsto f(\zeta) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Alors un problème d'optimisation s'écrit :

$$\min_{\zeta \in C} f(\zeta) \quad (3.2)$$

où

- $C \subset \mathfrak{R}^m$  : est l'ensemble des contraintes.
- $\zeta$  : est le vecteur de variables de décision ou variables d'optimisation.
- La valeur de  $\zeta$  pour laquelle le minimum est atteint est appelée  $\zeta^*$  Notation :

$$\zeta^* = \arg \min_{\zeta \in C} f(\zeta) \quad (3.3)$$

- La fonction  $f$  est l'objectif ou la fonction de coût
- Quand  $C = \mathfrak{R}^m$  on parle de problème d'optimisation sans contrainte sinon de problème d'optimisation sous contraintes

Généralement, la résolution par un algorithme d'un problème d'optimisation est un problème compliqué. Si par exemple la fonction  $f$  figure (3.1) droite admet plusieurs minima, le résultat va dépendre du point initial  $\zeta_0$ .

Par contre si le minimum local = minimum global figure (3.1) gauche, le problème est de faible complexité Indépendamment du point initial, le minimum global sera alors atteint.

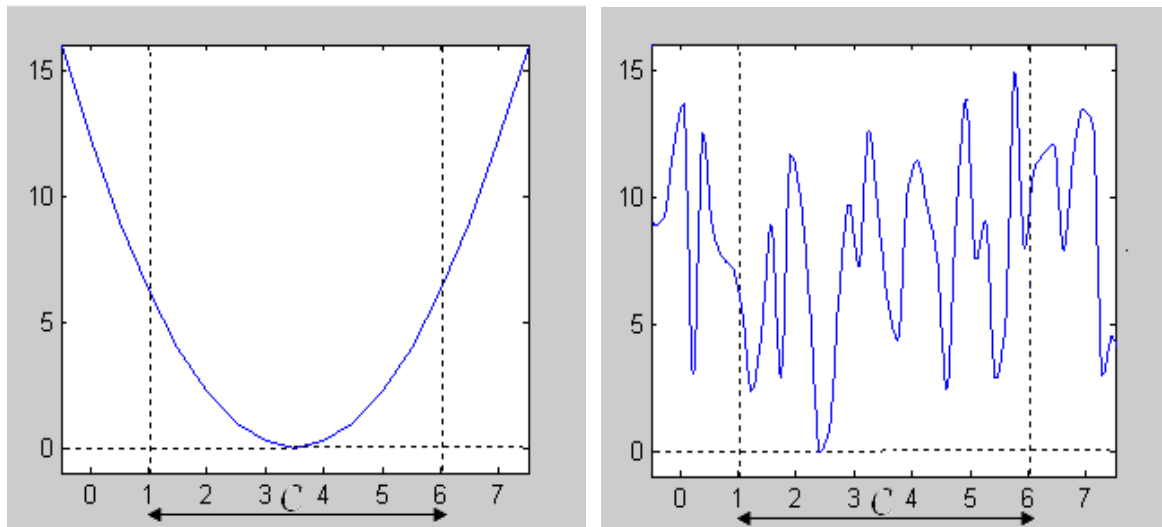


Figure 3.1 : Fonction de plusieurs minima (droite) un seule minimum (gauche)

### 3.1.1 Ensembles convexes

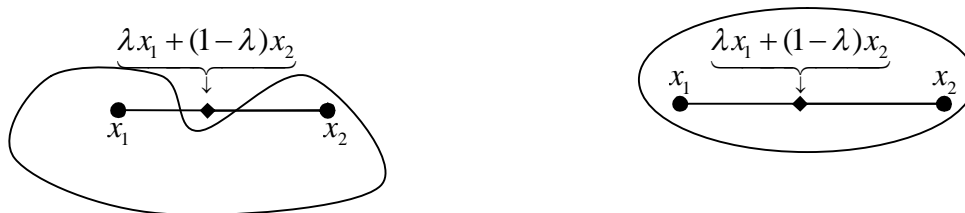


Figure 3.2 : Ensemble non convexe (gauche), convexe (droite)

**Définition [12]:** Ensemble  $C$  est dit convexe si le segment ligne entre deux points dans  $C$  se situent dans  $C$  :

$$\forall \lambda \in [0,1], \quad x_1 \in C \text{ et } x_2 \in C \Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C$$

Ellipsoïde :  $\varepsilon = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid (x - x_c)^T P^{-1}(x - x_c) \leq 1\}$  avec  $P$  matrice définie positive

**Propriétés :** L'intersection de deux ensembles convexes est convexe.

### 3.1.2 Fonctions convexes

**Définition [12]:** (Fonction convexe) Soit une fonction  $f$

$$\begin{aligned} C \subset \mathfrak{R}^m &\rightarrow \mathfrak{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{3.4}$$

La fonction  $f$  est convexe si :

- Le support (ensemble de définition)  $C$  de  $f$  est convexe (voir le paragraphe précédent)
- $\forall x \in C, \forall y \in C, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

Géométriquement cette inégalité signifie que le segment ligne entre  $(x, f(x))$  et  $(y, f(y))$  se situe au dessus du graphe de  $f$  figure (3.3).

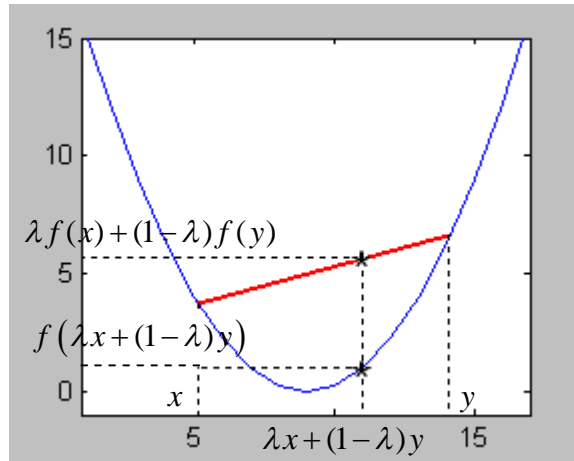


Figure 3.3 : Démonstration géométrique de la convexité

**Propriété :** Si  $f_1(x), f_2(x)$  sont deux fonctions convexes (même domaine de définition) alors :

$$f(x) = \max(f_1(x), f_2(x)) \text{ est convexe.}$$

**Propriété :** Si  $f(x, y)$  est convexe en  $(x, y)$  et  $C$  un domaine convexe alors  $g(x) = \inf_{y \in C} f(x, y)$  est une fonction convexe.

### 3.1.3 Fonctions quasi-convexes

**Définition [12]** (fonction quasi-convexe) Soit une fonction  $f$

$$\begin{aligned} D \subset \mathfrak{R}^m &\rightarrow \mathfrak{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{3.6}$$

La fonction  $f$  est quasi convexe si :

- Le support  $D$  de  $f$  est convexe
- $\forall x \in D, \forall y \in D, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max(f(x), f(y))$

La seconde condition peut se réécrire : les ensembles  $C(\alpha) = \{x \in D \mid f(x) \leq \alpha\}$  sont convexes.

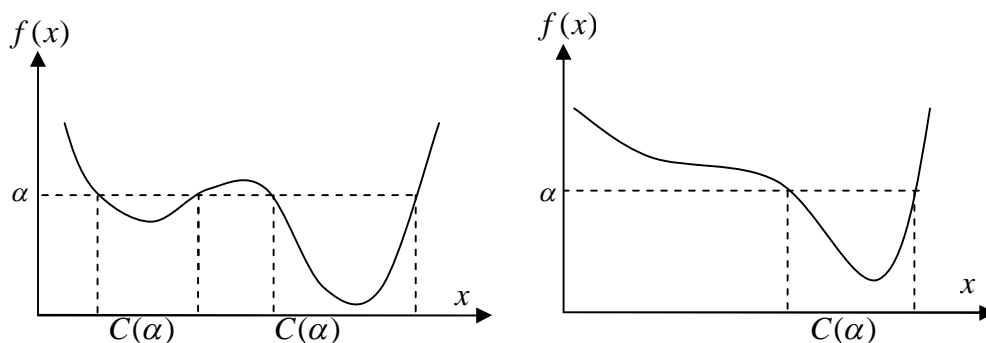


Figure 3.4 : Fonction non quasiconvexe (gauche) quasiconvexe (droite)

## 3.2 Optimisation LMI

### 3.2.1 Problèmes d'optimisation sous contraintes LMI :

Le problème de minimisation d'une fonction  $f$  en fonction des variables de décision  $\zeta \in \mathfrak{R}^m$  soumis aux contraintes d'inégalité matricielle portant sur des fonctions convexes de  $\zeta$  est un problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI c'est-à-dire [36] :

$$\begin{cases} \min f(\zeta) \\ \zeta \in C \\ C = \left\{ \zeta \in \mathfrak{R}^m \mid \forall x \in \mathfrak{R}^n, x^T F(\zeta) x \geq 0, (> 0) \right\} \end{cases} \quad (3.7)$$

avec

$$F(\zeta) = F_0 + \sum_{i=1}^m \zeta_i F_i \geq 0$$

Cette contrainte est appelée *contrainte Inégalité Matricielle affine* ou *contrainte LMI*.

$\zeta \in \mathfrak{R}^m$  : le vecteur des variables de décision.

$F_i$  : sont  $m$  matrices symétriques données de  $\mathfrak{R}^{n \times n}, i = 0, \dots, m$ .

$C$  : est un ensemble convexe.

$F(\zeta) \geq 0 (> 0)$  Signifie respectivement (semi définie positive, définie positive).

**Propriété** : Les LMIs multiple de la forme :

$$C_1 = \left\{ \zeta \in \mathfrak{R}^m \mid F^1(\zeta) > 0 \right\} \text{ et } C_2 = \left\{ \zeta \in \mathfrak{R}^m \mid F^2(\zeta) > 0 \right\} \quad (3.8)$$

Peuvent se ramener à une seule.

$$C_1 \cap C_2 = \left\{ \zeta \in \mathfrak{R}^m \mid \begin{bmatrix} F^1(\zeta) & 0 \\ 0 & F^2(\zeta) \end{bmatrix} > 0 \right\} \quad (3.9)$$

Cette propriété découle du fait que les valeurs propres d'une matrice "diagonale par blocs" sont constituées par les valeurs propres des matrices sur la diagonale.

### 3.2.2 Problème de Faisabilité

Le problème de faisabilité consiste à tester si l'ensemble  $C \neq \emptyset$  ; et si oui déterminer un  $\zeta \in C$  tel que  $F(\zeta) > 0$ .

On peut évoquer ce problème à travers l'exemple élémentaire suivant :

#### Exemple (3.1) :

Soit  $F(\zeta)$  la matrice symétrique de fonctions affines en le scalaire réel  $\zeta$  :

$$F(\zeta) = \begin{bmatrix} 4-\zeta & 2\zeta-2 \\ 2\zeta-2 & 4-\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \zeta \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice  $F(\zeta)$  est donné par  $\lambda^2 - 2(4-\zeta)\lambda - (3\zeta^2 - 12)$ .

Les racines sont  $\lambda_1(F(\zeta)) = (-3\zeta + 6)$  et  $\lambda_2(F(\zeta)) = (\zeta + 2)$ . Par suite, la contrainte LMI

$\{\zeta | F(\zeta) > 0\}$  correspond à définir le domaine :  $\{\zeta | \zeta \in ]-2; 2[ \}$  voir figure (3.5)

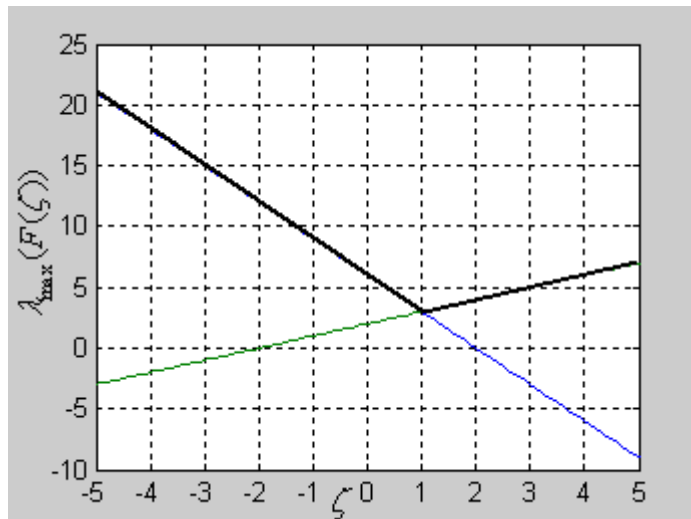


Figure 3.5 : Tracé de  $\lambda_{\max}(F(\zeta))$  en fonction de  $\zeta$

Donc le problème est faisable car l'intervalle  $]-2; 2[$  n'est pas vide.

$$\zeta^* = \arg \min_{\zeta \in ]-2; 2[} f(\zeta) = 1 \quad (3.11)$$

#### 3.2.2.1 Stabilité des systèmes dynamiques en utilisant le problème de faisabilité

**Exemple (3.2) :** Soit le pendule simple suivant [36] :

$$\ddot{\theta}(t) = -\eta \dot{\theta}(t) - \frac{3}{4} \frac{g}{l} \sin(\theta) \quad (3.12)$$

Pour  $\theta(t)$  faible

$$\ddot{\theta}(t) = -\eta \dot{\theta}(t) - \frac{3}{4} \frac{g}{l} \theta \quad (3.13)$$

La représentation d'état d'un système linéaire

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} \frac{g}{l} & -\eta \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} \quad (3.14)$$

$x(t)$  : est le vecteur d'état.

Ici l'état est donné par la position angulaire  $\theta$  et par la vitesse  $\dot{\theta}$ .

Pour une valeur donnée  $x_0$  de l'état  $x(t)$  à l'instant  $t = 0$ , on dit que le système est stable si pour toute condition initial  $x_0$ , on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad \text{soit encore} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$$

Vérifier la stabilité du système pendule revient à assurer que lorsque le pendule est abandonné au temps  $t = 0$  avec position angulaire  $\theta_0$  et une vitesse angulaire  $\dot{\theta}_0$ , il tend à s'immobiliser à la position angulaire  $\theta_0 = 0$  et ceci, pour toute valeur de  $\theta_0$  et pour toute valeur de  $\dot{\theta}_0$ .

D'après la théorie de Lyapunov, on a stabilité pour toute condition initiale s'il existe une fonction  $V(x)$  telle que pour  $x \neq 0$   $V(x) > 0$  et  $\dot{V}(x) < 0$ .

On prend la fonction quadratique de Lyapunov énoncé dans le premier chapitre voir paragraphe (1.2.5)

$$V(x) = x^T P x$$

où  $P$  est une matrice symétrique à déterminer.

$$\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p > 0 \\ A^T P + P A < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & -(A^T P + P A) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.15)$$

La dernière équivalence découle du fait que les valeurs propres d'une matrice "diagonale par blocs" sont constituées par les valeurs propres des matrices sur la diagonale.

Avec

$$P = \sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \zeta_i P_i \quad (3.16)$$

où  $P_i, i \in \left\{ 1, \dots, \frac{n(n+1)}{2} \right\}$  une base de l'espace des matrices symétriques de dimension  $n \times n$ .

En posant  $F_0 = 0$

$$F(\zeta) = \sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \zeta_i F_i \quad \text{avec} \quad F_i = \begin{bmatrix} p_i & 0 \\ 0 & A^T P_i + P_i A \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

on a

$$\text{trouver } V \text{ tel que } \begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{trouver } \zeta \text{ tel que } F(\zeta) > 0$$

### 3.2.3 Problème de minimisation d'une fonction de coût linéaire

$$\begin{cases} \text{Minimiser} & c^T \zeta \\ \text{Pour} & \zeta \in \mathfrak{R}^m \\ \text{Contraint par} & F(\zeta) > 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Où  $c^T$  est un vecteur ligne donné.

#### Exemple (3.3) :

Soit le systèmes linéaires stationnaires suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.19)$$

où  $u(t)$  est l'entrée du système et  $y(t)$  est la sortie.

L'énergie du signal de sortie sur l'intervalle  $[0, T]$  est donnée par :

$$\int_0^T y(t)^T y(t) dt \quad (3.20)$$

L'énergie du signal d'entrée :

$$\int_0^T u(t)^T u(t) dt \quad (3.21)$$

Si le signal d'entrée est borné:

$$\int_0^T u(t)^T u(t) dt < +\infty \quad (3.22)$$

Existe-il un réel positif  $\gamma$  tel que

$$\forall T > 0, \frac{\int_0^T y(t)^T y(t) dt}{\int_0^T u(t)^T u(t) dt < +\infty} \leq \gamma^2 \quad (3.23)$$



On démontre que si le système est stable alors un tel  $\gamma$  existe.

On recherche alors le plus petit  $\gamma$  tel que l'inégalité (3.23) soit vérifiée.

On démontre (lemme réel borné avec la fonction candidate de Lyapunov) que (3.23) est vérifiée si et seulement si il existe une matrice symétrique  $P$  telle que [36]:

$$\begin{cases} P > 0 \\ \begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Pour une valeur de  $\gamma$  donnée, l'inégalité matricielle ci-dessus est affine en la variable de décision  $P$  : elle définit donc une contrainte LMI. Rechercher  $P$  revient donc à résoudre un problème de faisabilité. Si on désire rechercher le plus petit  $\gamma$  tel qu'il existe  $P$  vérifiant (3.24) alors  $\gamma$  devient aussi une variable de décision. Cependant, (3.24) dépend de façon affine de  $\gamma^2$  et non de  $\gamma$ . D'où le changement de variable  $\eta = \gamma^2$  : minimiser  $\eta$  est équivalent à minimiser  $\gamma$  car  $\gamma$  est positif. Par suite, le problème se réécrit :

$$\begin{aligned} & \min \quad \eta \\ & \eta \in \mathfrak{R}, P = P^T \in \mathfrak{R}^{n \times n} \\ & \begin{cases} P > 0 \\ \begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \eta I \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.25)$$

où  $P_i, i \in \left\{1, \dots, \frac{n(n+1)}{2}\right\}$  une base de l'espace des matrices symétriques de dimension  $n \times n$  et

$$\zeta_{\frac{n(n+1)}{2}+1} = \eta \text{ en posant } F(\zeta) = \sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}+1} \zeta_i F_i$$

avec

$$\forall i \in \left\{1, \dots, \frac{n(n+1)}{2}\right\}, F_i = \begin{bmatrix} P_i & 0 & 0 \\ 0 & -(A^T P_i + P_i A) & -P_i B \\ 0 & -B^T P_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C^T C & -C^T D \\ 0 & D^T C & dD^T D \end{bmatrix} \text{ et } F_{\frac{n(n+1)}{2}+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$c = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \text{ et } m = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

La recherche du plus petit  $\gamma$  tel qu'il existe  $P$  vérifiant (3.25) s'écrit comme la minimisation d'un coût linéaire sous contraintes LMI (3.18)

La plus petite valeur de  $\gamma$  est alors donnée par la racine carrée du minimum obtenu.

### 3.2.4 Lemme de Schur [12]:

Soit une matrice symétrique partitionnée :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

où  $A$  et  $C$  sont des matrices carrées. Cette matrice est définie positive si et seulement si  $A$  et  $C - B^T A^{-1} B$  sont définies positives.

La démonstration est basée sur la remarque que :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -B^T A^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^{-1} B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C - B^T A^{-1} B \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

#### 3.2.4.1 Intérêt du lemme de Schur :

Soient  $A(\zeta), B(\zeta), C(\zeta)$  et  $D(\zeta)$  quatre matrices fonctions affines en  $\zeta$ .

Alors  $C(\zeta) - B(\zeta)^T A(\zeta)^{-1} B(\zeta)$  n'est pas une fonction affine en  $\zeta$ . Néanmoins, d'après le lemme de Schur :

$$\begin{cases} A(\zeta) > 0 \\ C(\zeta) - B(\zeta)^T A(\zeta)^{-1} B(\zeta) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A(\zeta) & B(\zeta) \\ B(\zeta)^T & C(\zeta) \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} C(\zeta) & B(\zeta)^T \\ B(\zeta) & A(\zeta) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.29)$$

Les deux dernières inégalités sont affines en  $\zeta$ .

**Remarque :** En dépit de leur nom, les contraintes LMI peuvent être équivalentes à des contraintes non linéaires. Ce qui qualifie la difficulté d'un problème d'optimisation est plus le fait qu'il soit non convexe que le fait qu'il soit non linéaire.

#### Exemple (3.4) :

Soit le système linéaire stationnaire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.30)$$

où  $u(t)$  est l'entrée de commande et  $x(t)$  est l'état du système, avec  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ .

L'objectif est de chercher une loi de commande par retour d'état :  $u(t) = Kx(t)$  (c'est à dire la matrice  $K \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ ) tel que le système en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (3.31)$$

soit stable.

Il est stable s'il existe une matrice  $P$  telle que

$$\begin{aligned} P &> 0 \\ (A + BK)^T P + P(A + BK) &< 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

La seconde inégalité est équivalent à

$$(A^T P + PA + K^T B^T P + PBK) < 0 \quad (3.33)$$

On remarque que cette inégalité est non linéaire par rapport aux variables d'optimisation  $P$  et  $K$ . Elle ne définit pas une LMI.

Néanmoins, en opérant le changement de variables :

$$Q = P^{-1} \in \mathfrak{R}^{n \times n} \text{ et } Y = KP^{-1} \in \mathfrak{R}^{p \times n} \quad (3.34)$$

Le équation devient linéaires en  $Q$  et  $Y$ . Alors une écriture du problème sous forme LMI est possible et la loi de commande  $u(t) = Kx(t)$  stabilisant le système (3.30) peut s'effectuer de la façon suivante [36]:

- Trouver  $Q > 0$  et  $Y$  tel que :

$$QA^T + AQ + Y^T B^T + BY < 0 \quad (3.35)$$

- $P = Q^{-1}$  et  $K = YP$

### Application numérique

Soit le système instable suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Avec 
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 17.3 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.177 \end{bmatrix}$$

La résolution de LMI décrit par l'équation (3.35) donne la matrice définie positive  $P$  et le gain de contrôleur  $K$  :

$$P = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.5269 & 0.2539 \\ 0.2539 & 0.1385 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de  $P = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.6523 \\ 0.0130 \end{bmatrix}$

Le gain du contrôleur  $K = [-5512.3 \quad -2770.2]$

Les valeurs propres de  $(A - BK) = \begin{bmatrix} -1.9624 \\ -488.356 \end{bmatrix}$

La matrice fondamentale de système en boucle fermée  $\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$  devient stable

### 3.3 Synthèse d'un correcteur $H_\infty$ par retour d'état

Dans le cas du retour d'état, le système  $P$  admet pour équations d'état [36]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad (3.36)$$

On recherche une loi de commande par retour d'état (c'est-à-dire une matrice  $K \in \mathfrak{R}^{p \times n}$  telle que  $u(t) = Kx(t)$  assure :

1. Le système bouclé est stable ;
2. La norme  $H_\infty$  de la fonction de transfert en boucle fermée entre l'entrée  $w$  et la sortie  $z$  est inférieure à  $\gamma$ .

#### Synthèse directe

Le système en boucle fermée admet pour équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B_u K)x(t) + B_w w(t) \\ z(t) = (C_z + D_{zu} K)x(t) + D_{zw} w(t) \end{cases} \quad (3.37)$$

En appliquant le lemme réel borné, il existe un correcteur par retour d'état s'il existe une matrice  $K$  et une matrice symétrique  $P$  telles que  $P > 0$  et :

$$\begin{bmatrix} (A + B_u K)^T P + P(A + B_u K) + (C_z + D_{zu} K)^T (C_z + D_{zu} K) & PB_w + (C_z + D_{zu} K)D_{zw} \\ B_w^T P + D_{zw}^T (C_z + D_{zu} K) & D_{zw}^T D_{zw} - \gamma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.38)$$

Les variables d'optimisation sont  $P$  et  $K$ . Cette inégalité n'étant pas affine en  $P$  et en  $K$ , elle ne définit pas une LMI. Par une série de transformations, on va montrer que l'on peut obtenir une contrainte LMI équivalente après un changement de variables adéquat.

L'inégalité (3.38) peut se réécrire :

$$\begin{bmatrix} (A^T P + PA + K^T B_u^T P + PB_u K & PB_w \\ B_w^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (C_z + D_{zu} K)^T \\ D_{zw}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (C_z + D_{zu} K) & D_{zw} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.39)$$

**Lemme** (lemme de Schur modifié) Soit une matrice symétrique partitionnée :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$$

où  $A$  et  $C$  sont des matrices carrées, avec  $A$  définie positive. Cette matrice est définie positive si et seulement si  $C - B^T A^{-1} B$  est semi définie positive.

L'inégalité (3.39) peut alors se réécrire :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A^T P + PA + K^T B_u^T P + PB_u K & PB_w \\ B_w^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix}}_C - \underbrace{\begin{bmatrix} (C_z + D_{zu} K)^T \\ D_{zw}^T \end{bmatrix}}_{B^T} \underbrace{\begin{bmatrix} (-I) \\ (C_z + D_{zu} K) & D_{zw} \end{bmatrix}}_{\substack{A^{-1} \\ B}} \leq 0 \quad (3.40)$$

Par application du lemme de Schur modifié, on a alors l'inégalité (3.40) qui est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + K^T B_u^T P + PB_u K & PB_w & (C_z + D_{zu} K)^T \\ B_w^T P & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ (C_z + D_{zu} K) & D_{zu} & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.41)$$

L'intérêt de cette transformation est que, dans l'inégalité obtenue, il ne reste plus que  $K^T B_u^T P$  et  $PB_u K$  comme terme bilinéaire. On va utiliser une nouvelle transformation puis un changement de variable de façon à se ramener à une inégalité affine. Pour cela, on va se baser sur la propriété suivante :

**Propriété :**  $\forall T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  inversible  $A \leq 0 \Leftrightarrow T^T A T \leq 0$

En appliquant cette propriété avec :

$$T = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} A^T P + PA + K^T B_u^T P + PB_u K & PB_w & (C_z + D_{zu} K)^T \\ B_w^T P & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ (C_z + D_{zu} K) & D_{zu} & -I \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

On obtient :

$$\begin{bmatrix} P^{-1} A^T + A P^{-1} + P^{-1} K^T B_u^T + B_u K P^{-1} & B_w & P^{-1} (C_z^T + D_{zw}^T K^T) \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z P^{-1} + D_{zu} K P^{-1} & D_{zu} & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.43)$$

En posant  $Q = P^{-1} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  et  $Y = K P^{-1} \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} Q A^T + A Q + P^{-1} K^T B_u^T + B_u K P^{-1} & B_w & Q C_z^T + Y^T D_{zw}^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z Q + D_{zu} Y & D_{zu} & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.44)$$

D'autre part, on a  $P > 0 \Leftrightarrow Q > 0$ .

Les inégalités (3.44) et  $Q > 0$  sont bien affines en les variables  $Q$  et  $Y$ .

Rechercher  $Q$  et  $Y$  tels que  $Q > 0$  et (3.44) est donc un problème de faisabilité LMI.

En conclusion, la recherche d'une loi de commande  $u(t) = Kx(t)$  assurant la stabilité de la boucle fermée et une norme  $H_\infty$  entre  $w$  et  $z$  inférieure à  $\gamma$  s'obtient de la façon suivante :

- Trouver  $Q$  et  $Y$  tels que les inégalités  $Q > 0$  et (3.44) soient satisfaites (problème de faisabilité)

- $P = Q^{-1}$  et  $K = YP$

### 3.4 Existence d'un correcteur $H_\infty$

On peut être intéressé par déterminer s'il existe un correcteur  $H_\infty$  pour un  $\gamma$  donné, sans le calculer explicitement. Pour cela, on dispose du résultat suivant [09-12-36].

**Lemme** (Lemme d'élimination) *Soit  $G = G^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $U \in \mathfrak{R}^{r \times n}$  avec  $\text{Rang}(U) = r < n$  et  $V \in \mathfrak{R}^{s \times n}$  avec  $\text{Rang}(V) = s < n$ . Alors, il existe une matrice  $K \in \mathfrak{R}^{s \times r}$  telle que l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$G + U^T K^T V + V^T K U < 0 \quad (3.45)$$

Si et seulement si :

$$U_\perp^T G U_\perp < 0 \quad \text{et} \quad V_\perp^T G V_\perp < 0 \quad P > 0 \quad (3.46)$$

Avec

$U_\perp$  : Engendre le noyau de l'application linéaire associée à la matrice  $U$  .

$V_\perp$  : Engendre le noyau de l'application linéaire associée à la matrice  $V$  .

Ce résultat est remarquable puisqu'il donne une condition nécessaire et suffisante permettant de tester l'existence d'une matrice  $K$  telle que la matrice  $G + U^T K^T V + V^T K U$  est semi définie négative, sans rechercher  $K$  explicitement.

L'inégalité (3.44) peut se réécrire :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} QA^T + AQ & B_w & QC_z^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z Q & D_{zu} & -I \end{bmatrix}}_G + \underbrace{\begin{bmatrix} B_u \\ 0 \\ D_{zu} \end{bmatrix}}_{U^T} \underbrace{Y}_{K} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}}_V + \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Y^T \begin{bmatrix} B_u^T & 0 & D_{zu}^T \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.47)$$

En appliquant le lemme d'élimination, l'inégalité (3.47) est équivalente à

$$U_\perp^T G U_\perp < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} B_u^T & 0 & D_{zu}^T \end{bmatrix}_\perp^T \begin{bmatrix} QA^T + AQ & B_w & QC_z^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z Q & D_{zu} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_u^T & 0 & D_{zu}^T \end{bmatrix}_\perp \leq 0 \quad (3.48)$$

et à

$$V_\perp^T G V_\perp < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}_\perp^T \begin{bmatrix} QA^T + AQ & B_w & QC_z^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ C_z Q & D_{zu} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}_\perp \leq 0 \quad (3.49)$$

comme

$$[I \ 0 \ 0]_{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

on a :

$$V_{\perp}^T G V_{\perp} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ D_{zw} & -I \end{bmatrix} \leq 0 \Leftrightarrow D_{zw}^T D_{zw} \leq \gamma^2 I \quad (3.51)$$

en résumé, une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un correcteur par retour d'état assurant que :

1. Le système bouclé est stable ;
2. La norme  $H_{\infty}$  de la fonction de transfert en boucle fermée entre l'entrée  $w$  et la sortie  $z$  est inférieure à  $\gamma$  est donnée par :

$$D_{zw}^T D_{zw} \leq \gamma^2 I \quad (\text{valeur singulière maximale de } D_{zw} \text{ inférieure ou égale à } \gamma)$$

2. l'existence d'une matrice  $Q$  telle que  $Q > 0$  et (3.48)

on a donc un problème de faisabilité LMI dans lequel le correcteur n'est pas recherché explicitement.

Cette solution a des liens très forts avec la solution par équations de Riccati par retour d'état.

### 3.4.1 Synthèse $H_{\infty}$ par retour de sortie

Le théorème suivant donne la solution dans le cas où l'état n'est pas mesuré par formulation LMI.

**Théorème (3.1)[03-10]** Soit le système  $P$  d'ordre  $n$  défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) = x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases} \quad (3.52)$$

Etant donné  $\gamma > 0$ , il existe un correcteur  $K$  d'ordre inférieur ou égal à  $n$ , défini par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_K(t) = A_K x_K(t) + B_K y(t) \\ u(t) = C_K x_K(t) + D_K y(t) \end{cases} \quad (3.53)$$

telle que le système bouclé  $P * K$  soit asymptotiquement stable  $\|P * K\|_{\infty} \leq \gamma$  si et seulement s'il existe deux matrices  $S$  et  $R$  telles que :

$$\begin{bmatrix} B_u^T & 0 & D_{zu}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} RA^T + AR & B_w & RC_z^T \\ B_w^T & -\gamma I & D_{zw}^T \\ C_z R & D_{zu} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_u^T & 0 & D_{zu}^T \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.54)$$

$$\begin{bmatrix} C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & SB_w & C_z^T \\ B_w^T S & -\gamma I & D_{zw}^T \\ C_z & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_y & D_{yw} & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.55)$$

et

$$\begin{bmatrix} S & I \\ I & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.56)$$

Tester l'existence d'un correcteur qui assure un "niveau de performance"  $\gamma$  donné est un problème de faisabilité LMI. Tester l'existence d'un correcteur qui assure le plus petit "niveau de performance"  $\gamma$  peut s'écrire comme un problème de minimisation d'un coût linéaire sous contraintes LMI

### 3.5 Calcul de l'asservissement en position d'un moteur

Nous détaillons dans cet exemple [15], la mise en œuvre de l'approche  $H_\infty$  avec pondération (exposée dans le chapitre précédent) sous forme d'un problème d'optimisation sous contrainte LMI, pour réaliser l'asservissement en position d'un moteur à courant continu représenté sur la figure suivante :

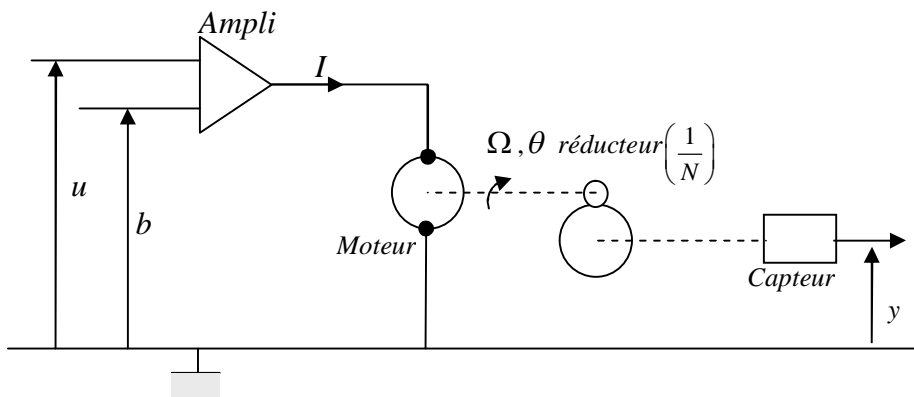


Figure 3.6 : Asservissement en position d'un moteur à courant continu

Le dispositif est un moteur, alimenté par un amplificateur, entraîne un réducteur, l'objectif est d'asservir l'angle en sortie du réducteur ou, de façon équivalente, la tension  $y$  proportionnelle à cet angle est fourni par un capteur. La variable de commande est la tension  $u$  appliquée à l'amplificateur, tandis que  $b$  représente une perturbation constante



(tension d'offset d'un Ampli par exemple).

En notant  $I, \Omega$  et  $\theta$  le courant d'induit, la vitesse de rotation, et la position angulaire du moteur, le système à commander est décrit par les équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} L \frac{dI}{dt} = -RI(t) - K_e \Omega(t) + A(u(t) + b) \\ J \frac{d\Omega}{dt} = K_c I(t) - a\Omega(t) \\ \Omega(t) = L \frac{d\theta}{dt} \\ y(t) = \frac{\beta}{N} \theta(t) \end{array} \right. \quad (3.57)$$

Les valeurs nominales des paramètres sont:

$$\begin{array}{lll} R = 5.8\Omega & L = 5.10^{-3}\text{H} & K_e = 0.024\text{Vs} \\ J = 15.10^{-7}\text{Kgm}^2 & a = 10^{-6}\text{Nms} & K_c = 0.024\text{NmA}^{-1} \\ A = 10 & N = 7 & \beta = 4\text{Vrd}^{-1} \end{array}$$

Les objectifs de l'asservissement sont les suivants :

1. une bande passante de l'ordre de 100 rad/s
2. des marges de stabilité suffisantes, soit :  $\Delta G \approx 15\text{dB}$   $\Delta\varphi \approx 50^\circ$
3. une amplitude de la commande "raisonnable"
4. une erreur statique due à  $b$  inférieure à 1%

Pour effectuer la synthèse de l'asservissement, nous utiliserons un modèle simplifié, obtenu en considérant  $L \approx 0$  dans les équations (3.57). Le processus a alors pour fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{240}{p(1 + 0.015p)} \quad (3.58)$$

La mise en œuvre de l'approche  $H_\infty$  avec pondération consiste à utiliser la forme standard du critère  $H_\infty$  (voir figure (2.11)) où, nous avons trois pondérations à choisir  $W_1, W_2$  et  $W_3$ . On s'aperçoit d'après les équations (2.4 et 2.3) que l'on a 3 pondérations pour 4 transferts en boucle fermée. Nous allons donc procéder de la façon suivante :

On va choisir dans un premier temps  $W_1$  pour pondérer  $S$ .

Dans un deuxième temps on choisira  $W_2$  pour pondérer  $KS$ , et dans un troisième temps,

On choisira  $W_3$  en fonction de  $W_1$  pour pondérer  $GS$ .

Finalement il ne reste que  $T$  qui est fixé puisqu'il vérifie  $S + T = 1$ .

Une fois choisis les filtres (ou les pondérations), il reste à identifier l'équation d'état du système augmenté  $P$  (3.52) et d'utiliser le théorème (3.1) pour faire la synthèse d'une loi de commande vérifiant les objectifs de l'asservissement.

Dans ce qui suit, nous détaillons le choix des filtres et le réglage des performances. Par souci de simplicité, nous nous limitons à des filtres d'ordre inférieur ou égal à 1.

### **Choix de $W_1$ :**

Compte tenu des performances demandées, on choisit  $W_1(p)$  de façon que  $1/|W_1(j\omega)|$ :

- Coupe l'axe  $0dB$  à  $100rd/s$  (soit la bande passante demandée)
- Présente un gain en haute fréquence de 1,7 de façon à limiter la norme  $H_\infty$  de  $S(p)$  à cette valeur, et à garantir ainsi une marge de module de l'ordre de 0.6
- Présente un gain faible, par exemple  $10^{-3}$ , en basse fréquence, ce qui conduit à :

$$W_1(p) = \frac{P + 128}{1.7(p + 0.075)} \quad (3.59)$$

### **Réglage de $W_2$ :**

Dans un premier temps, nous gardons nul le filtre  $W_3$  et nous choisissons un filtre  $W_2(p) = W_2$  constant, dont nous allons ajuster la valeur en surveillant différents résultats, et en gardant la valeur de  $\gamma$  en dessous de 1. Pour chaque valeur successive de  $W_2$ , les conditions du théorème (3.1) sont testées de façon que la valeur finalement choisie pour  $\gamma$  n'excède pas la valeur optimale de plus de 0,1.

Les figures (3.7, 3.8 et 3.9) montre respectivement les fonctions de pondération, les réponses fréquentielles et temporelles obtenues pour 3 valeurs successives de  $W_2$  :

$$\begin{array}{ll} W_2 = 0.01 & \gamma = 0.6199 \\ W_2 = 0.1 & \gamma = 0.7266 \\ W_2 = 0.5 & \gamma = 0.9532 \end{array}$$

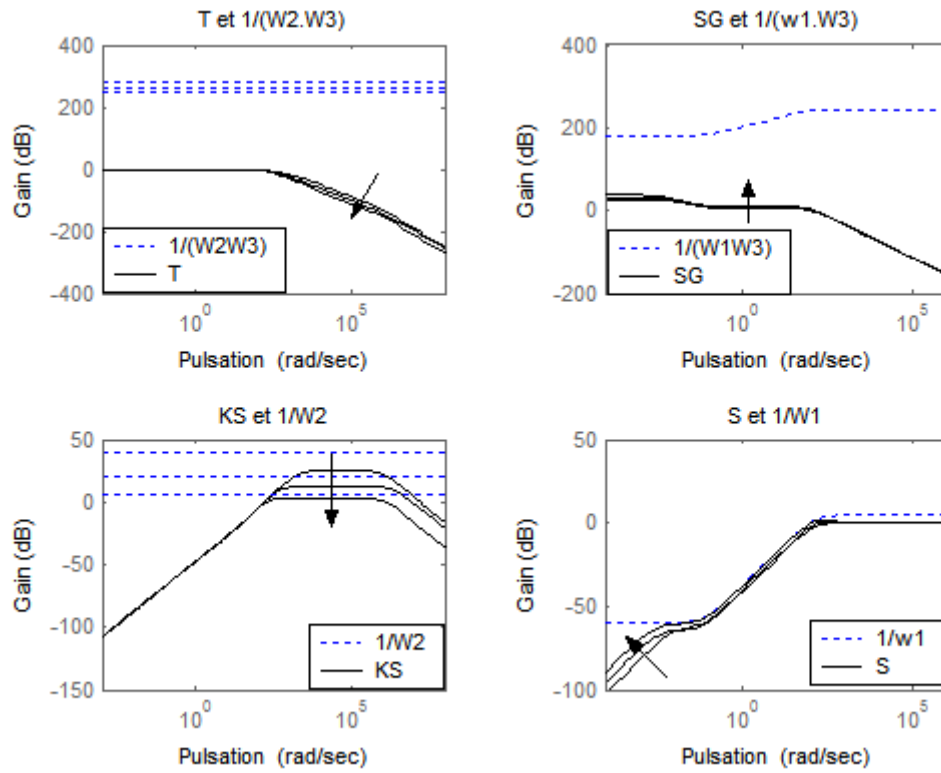


Figure 3.7 : Réglage de  $W_2$  (Fonctions de sensibilité)

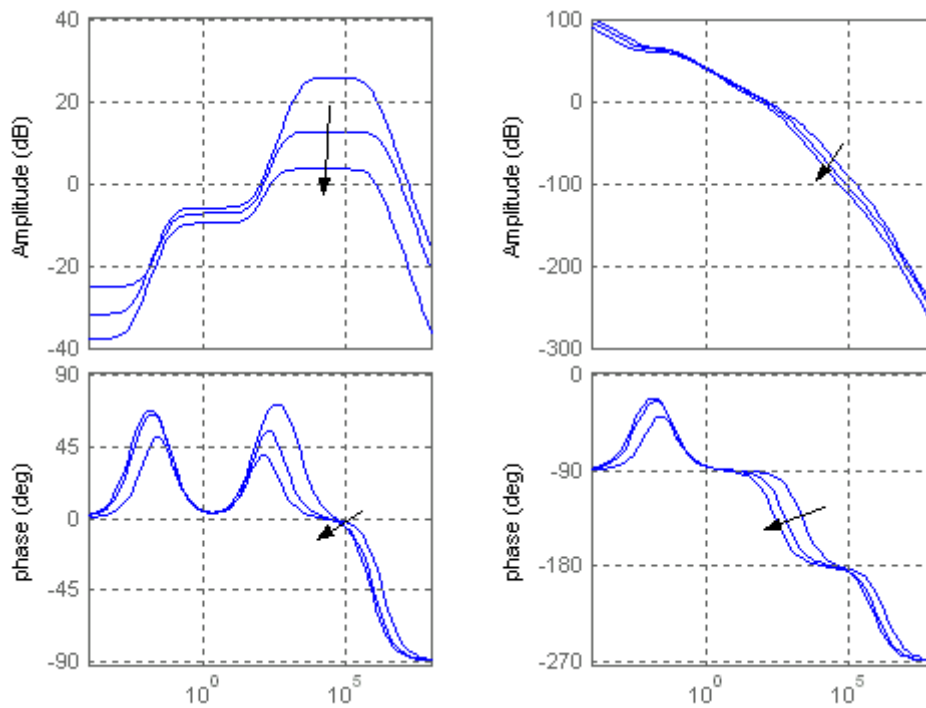
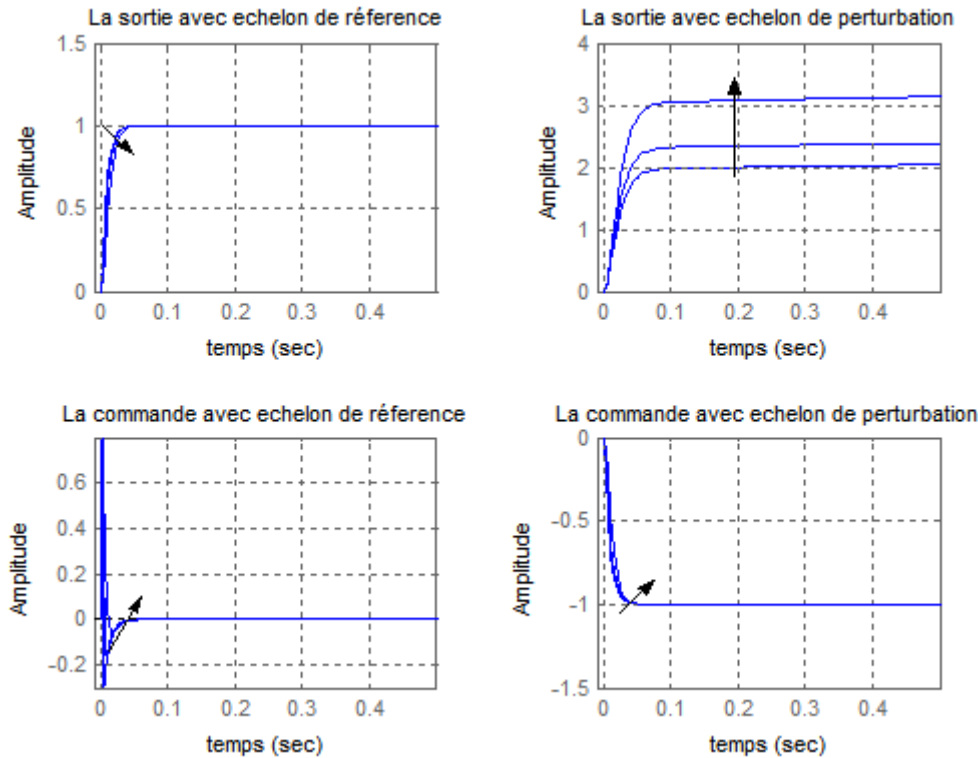


Figure 3.8 : Réglage de  $W_2$  (Réponse fréquentielle)

Figure 3.9 : Réglage de  $W_2$  (Réponse temporelle)

Les flèches sur les graphiques indiquent le sens croissant de  $W_2$ . On constate que l'augmentation de  $W_2$  :

- Augmente la valeur de  $\gamma$  ce qui est logique : en pondérant plus fortement l'un des signaux à contrôler, la norme  $H_\infty$  du système corrigé a tendance à croître.
- Modifie peu les réponses fréquentielles de  $S(p)$  et  $S(p)G(p)$ , réduit légèrement la bande passante de  $T = K(p)S(p)G(p)$ , et joue principalement sur la réponse fréquentielle de  $K(p)S(p)$
- Réduit le gain du correcteur dans les hautes fréquences, mais garde la pulsation au gain unité de la boucle ouverte aux alentours de 100 rad/s, ce qui conduit pour la réponse à la référence à un temps du 1er maximum de l'ordre de 30 ms
- Donne dans tous les cas une réponse à la consigne très satisfaisante, mais que par contre la réponse à la perturbation fait apparaître une erreur statique considérable.
- On retient donc pour la suite la valeur  $W_2 = 0.5$ . Le point principal à améliorer étant la réponse à la perturbation, nous allons régler à présent  $W_3$ .

**Réglage de  $W_3$**

Nous choisissons un filtre  $W_3(p) = W_3$  constant, dont nous allons là aussi ajuster la valeur par essais successifs.

Les figures (3.10, 3.11 et 3.12) montre respectivement les fonctions de pondération, les réponses fréquentielles et temporelles obtenues pour 3 valeurs successives de  $W_3$  :

$W_3 = 0.01$	$\gamma = 0.9656$
$W_3 = 0.1$	$\gamma = 1.0576$
$W_3 = 0.5$	$\gamma = 1.1037$

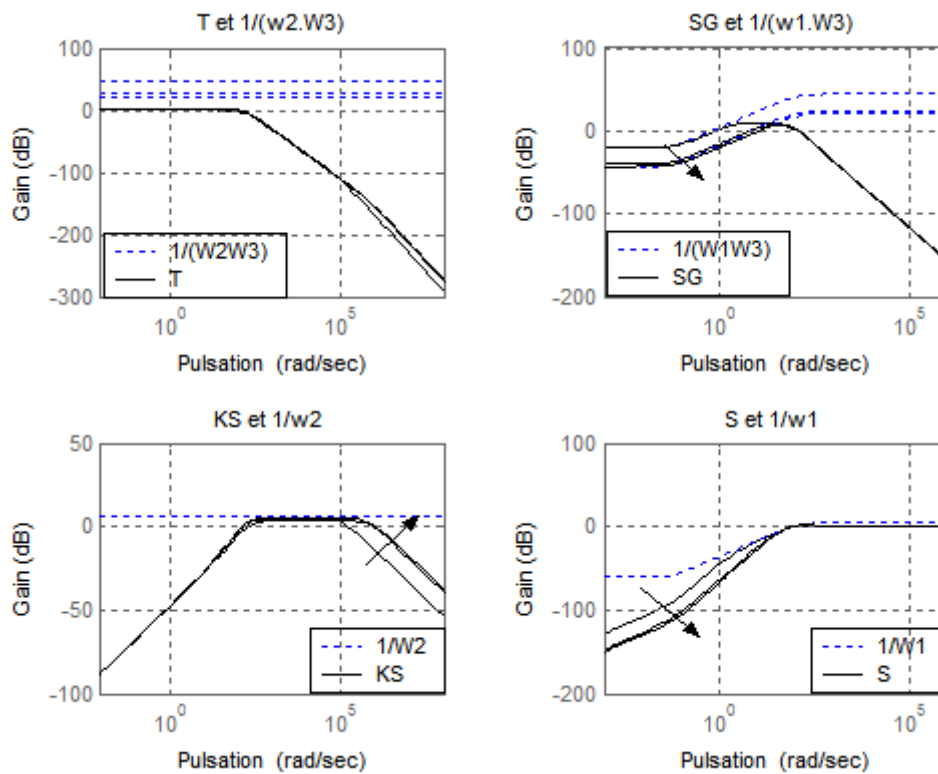


Figure 3.10 : Réglage de  $W_3$  (Fonctions de sensibilité)

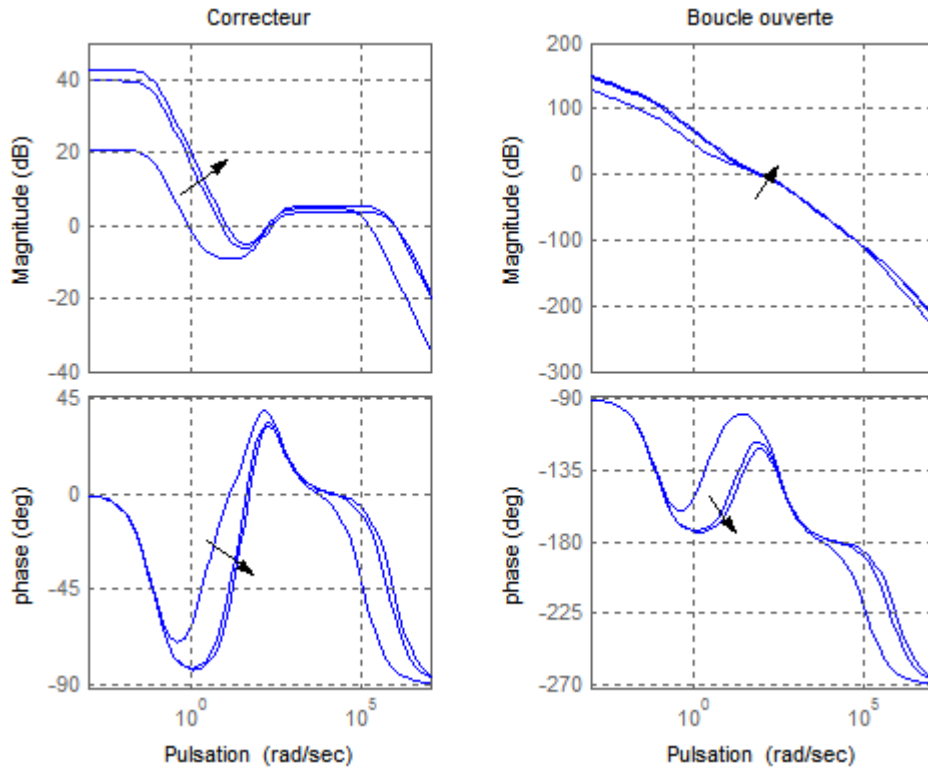


Figure 3.11 : Réglage de  $W_3$  (Réponse fréquentielle)

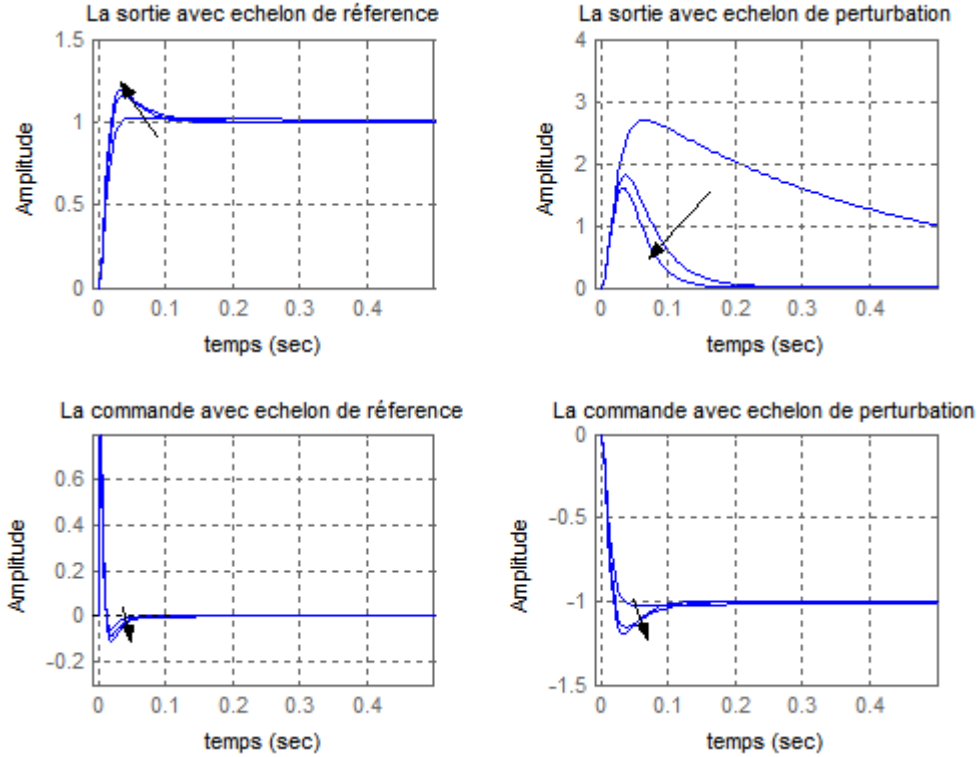


Figure 3.12 : Réglage de  $W_3$  (Réponse temporelle)

On constate que l'augmentation de  $W_3$  :

- Augmente le gain du correcteur dans les basses fréquences, ce qui a pour effet de faire chuter le gain de  $S(p)G(p)$ , tandis que le gain de  $S(p)$  chute plus fortement
- Modifie peu les réponses fréquentielles de  $K(p)S(p)$  et  $T(p) = K(p)S(p)G(p)$ , ne change pas la pulsation au gain unité de la boucle ouverte
- Introduit progressivement un dépassement de plus en plus important sur la réponse à la référence
- Améliore à la fois le temps de réponse à la perturbation et l'erreur statique correspondante, et ce dans des proportions significatives.

La valeur finalement retenue est :

$$W_3 = 0.15 \quad (3.60)$$

Elle permet d'obtenir un gain statique inférieur à 0,01 pour  $S(p)G(p)$ , donc une erreur statique due à  $b$  inférieure à 1% comme demandé. La valeur correspondante de  $\gamma$  est légèrement supérieure à 1.

#### **Atténuation supplémentaire des hautes fréquences par $W_2(p)$**

Pour terminer la synthèse, nous allons chercher à atténuer le gain du correcteur dans les hautes fréquences. Il n'est pas souhaitable en effet, même si les différents points du cahier des charges sont remplis, que le gain du correcteur soit encore important jusqu'à des pulsations de l'ordre de 100 fois la bande passante : on peut craindre par exemple une sensibilité excessive aux bruits de mesure (non pris en compte dans les simulations temporelles).

Nous prenons donc à présent un filtre  $W_2(p)$  du premier ordre, correspondant au même gain statique, mais avec un gain en hautes fréquences nettement supérieur à 1, et nous abaissons progressivement ses pulsations de coupure, tout en limitant l'augmentation de  $\gamma$ .

Les figures (3.13, 3.14 et 3.15) permettent de comparer le réglage précédent avec celui obtenu pour

$$W_2(p) = 25 \frac{p + 1000}{p + 50000} \quad (3.61)$$

- Les réponses fréquentielles de  $S(p)$  et  $S(p)G(p)$  sont identiques, celle de  $T(p)$  est peu modifiée
- Par contre celles de  $K(p)S(p)$ , du correcteur et de la boucle ouverte sont fortement atténuées dans les hautes fréquences, sans modification de la pulsation de la boucle ouverte au gain unité.

- Les réponses temporelles sont peu affectées.

Les pondérations retenues sont donc celles définies par (3.61) à (4.59). Elles correspondent à  $\gamma = 1.1669$ , ce qui relève un peu les gabarits initialement définis, sans que l'allure générale des différents transferts ne soit affectée.

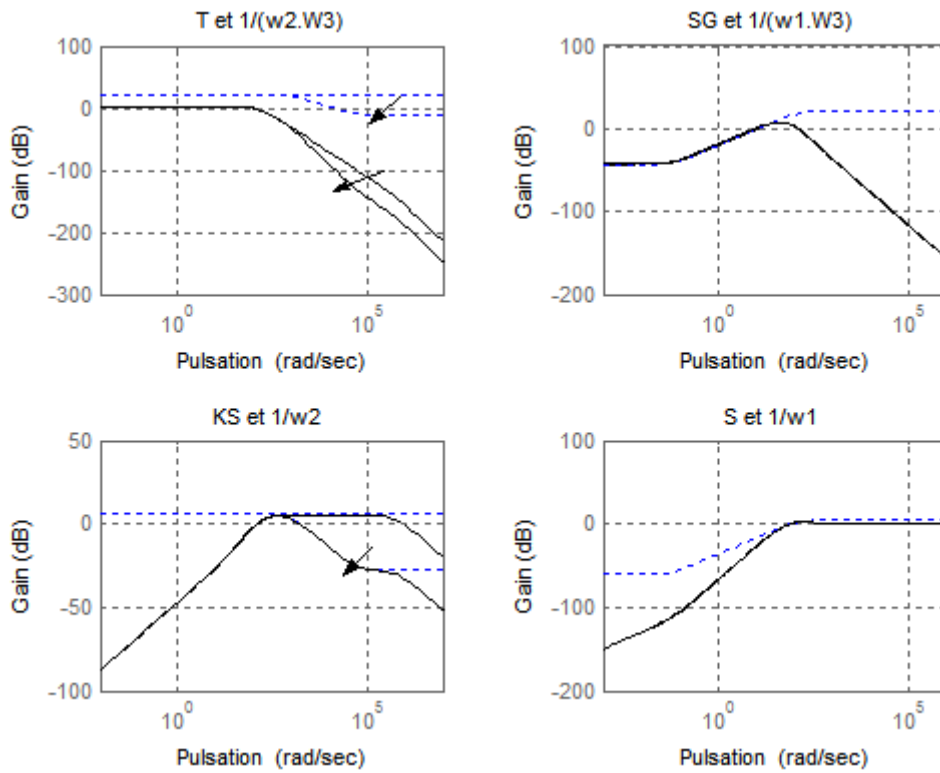


Figure 3.13 : Réglage final de  $W_2$  (Fonctions de sensibilité)

Les marges de stabilité obtenues sont :

$$\Delta G=13.167\text{dB} \quad \Delta\varphi=55.7169^\circ$$

L'équation d'état de correcteur est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{x}_K(t) = 10^5 \begin{pmatrix} -0.0019 & 0.0014 & -0.0069 & 0.0683 \\ 0.0090 & -0.0008 & 0.0028 & -0.6171 \\ -0.0450 & 0.0028 & -0.0096 & 3.1487 \\ 0.0973 & -0.0040 & -0.0046 & -6.3707 \end{pmatrix} x_K(t) + \begin{pmatrix} 0.5820 \\ 7.6944 \\ 1.4319 \\ -81.6282 \end{pmatrix} y(t) \\ u_k(t) = \begin{pmatrix} 2.3068 & 9.1847 & -46.8240 & -313.5922 \end{pmatrix} x_K(t) \end{cases} \quad (3.62)$$

valeurs propres de correcteur = (-636987.0296 -934.7924 -371.5965 -0.0749)

Les trois inégalités du théorème (3.1) sont vérifiées et les deux matrices  $R$  et  $S$  sont positives



$$S = \begin{pmatrix} 0.36809012 & -27.98224212 & -0.05002188 & -0.08319336 \\ -27.98224212 & 178.23287165 & -0.16561139 & 0.16533524 \\ -0.05002188 & -0.16561139 & 7021914.84 & -0.00069908 \\ -0.08319336 & 0.16533524 & -0.00069908 & 3387256.63 \end{pmatrix}$$

valeurs propres de  $S = (26.2172 \quad 183.3836 \quad 3387256.6317 \quad 7021914.8488)$

$$R=10^4 \begin{pmatrix} 0.9889 & -0.0301 & -0.0834 & -1.1089 \\ -0.0301 & 0.0013 & 0.0046 & 0.0304 \\ -0.0834 & 0.0046 & 0.0167 & 0.0780 \\ -1.1089 & 0.0304 & 0.0780 & 1.2708 \end{pmatrix}$$

valeurs propres de  $R = (0.0072 \quad 4.8706 \quad 230.1216 \quad 22542.4205)$

Poles de  $S =$

$$\left[ -636987.0305, -985.6971, -145.5586+40.3534i, -145.5586-40.3534i, \right. \\ \left. -48.1576+9.4137i, -48.1576-9.4137i \right]$$

Poles de  $T =$

$$\left[ -636987.0301+0.0142i, -636987.0301-0.0142i, -985.6971, -934.7924, \right. \\ \left. -371.5965, -145.5586+40.3534i, -145.5586-40.3534i, -66.6666, \right. \\ \left. -48.1576+9.4137i, -48.1576-9.4137i, -0.0749 \right]$$

Poles de  $KS =$

$$\left[ -636987.0496, -636987.0106, -985.6971, -934.7924, -371.5965, \right. \\ \left. -145.5586+40.3534i, -145.5586-40.3534i, -48.1576+9.4137i, \right. \\ \left. -48.1576-9.4137i, -0.0749 \right]$$

Poles de  $SG =$

$$\left[ 0, -636987.0305, -985.6971, -145.5586+40.3534i, -145.5586-40.3534i, \right. \\ \left. -66.6666, -48.1576+9.4137i, -48.1576-9.4137i \right]$$

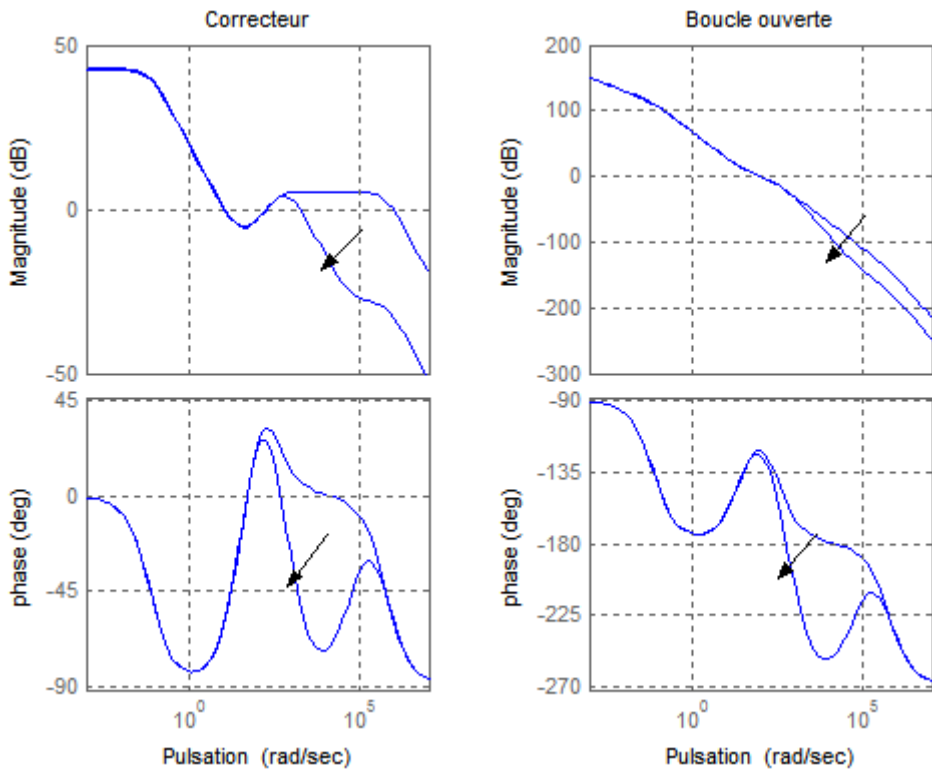


Figure 3.14 : Réglage final de  $W_2$  (Réponse fréquentielle)

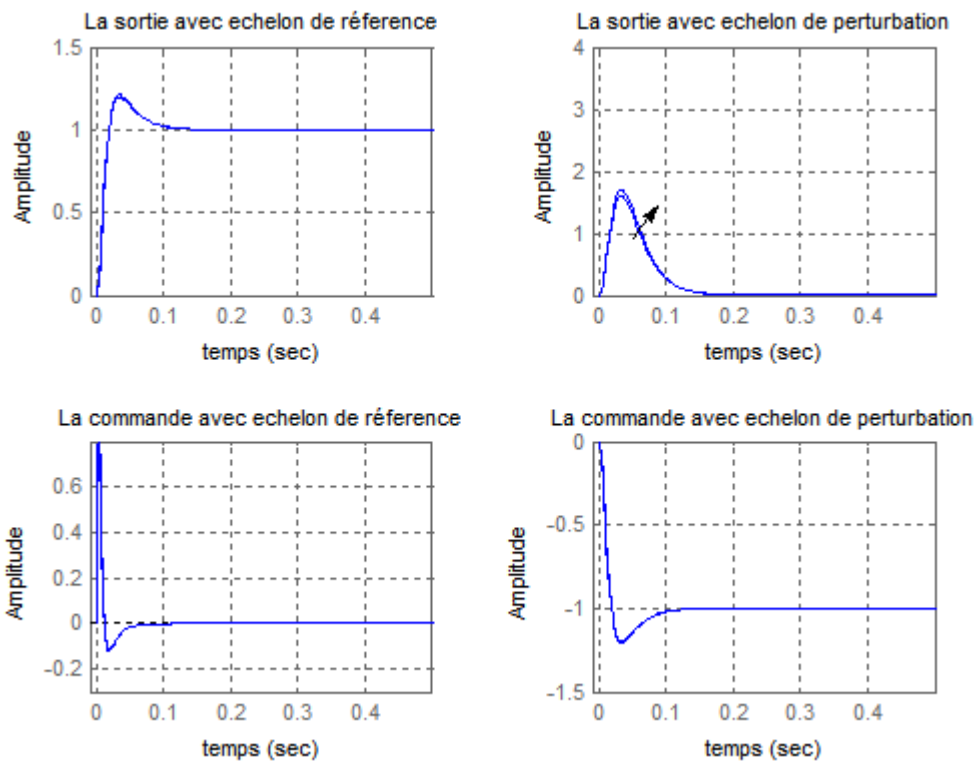


Figure 3.15 : Réglage final de  $W_2$  (Réponse temporelle)

### 3.6 Extension aux systèmes LPV

Dans le cadre des systèmes linéaires invariants, on relie couramment la notion de performances à l'existence d'une borne sur la norme  $H_\infty$  d'une fonction de transfert. En revanche. Dès lors que l'on s'intéresse à la classe des systèmes LTV ou LPV, on ne peut plus parler de fonction de transfert, ni par conséquent de norme  $H_\infty$  [09]

#### 3.6.1 Extension de la norme $H_\infty$

On parlera plus précisément de norme  $L_2$ -induite (voir Annexe) et on dira que la norme  $L_2$ -induite d'un système LPV :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y(t) = C(\theta)x + D(\theta)u \end{cases} \quad (3.63)$$

est bornée par  $\gamma$  si, pour toute trajectoire paramétrique du domaine  $P$  :

$$\forall u \in L_2, \forall T \geq 0, \int_0^T y(t)^T y(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^T u(t)^T u(t) dt \quad (3.64)$$

Cette définition coïncide parfaitement avec la norme  $H_\infty$  classique dans le cas des systèmes linéaires. Remarquons ici simplement l'absence d'interprétation dans le domaine fréquentiel. Si  $S$  est un système LPV, on notera  $\gamma_{H_\infty}(S)$  la plus petite valeur de  $\gamma$  telle que la relation (3.64) soit encore vérifiée

$$\gamma_{H_\infty}(S) = \sup_{u \in L_2, \theta(t) \in P} \frac{\int_0^T y(t)^T y(t) dt}{\int_0^T u(t)^T u(t) dt} \quad (3.65)$$

#### 3.6.2 Performance quadratique de type $H_\infty$ pour les systèmes LPV

**Théorème (3.2)[09] :**

Le système LPV (1.26) noté  $S$  est quadratiquement stable sur  $P$  et vérifié, pour un réel positif  $\gamma$  la contrainte de performance :

$$\gamma_{H_\infty}(S) < \gamma \quad (3.66)$$

s'il existe une matrice strictement positive  $P$  telle que :

$$\forall \theta \in P, \begin{pmatrix} A(\theta)^T P + PA(\theta) & PB(\theta) & C(\theta)^T \\ B(\theta)^T P & -\gamma I & D(\theta)^T \\ C(\theta) & D(\theta) & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.67)$$

Le système LPV (1.26) satisfait aux conditions du théorème (3.2) de performance quadratique  $H_\infty$  si et seulement si :

$$\exists P > 0 / \forall i = 1, \dots, N, \begin{pmatrix} A_i^T P + P A_i & P B_i & C_i^T \\ B_i^T P & -\gamma I & D_i^T \\ C_i & D_i & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.68)$$

## Conclusion

Les principaux résultats présentés dans ce mémoire sont exprimés à l'aide d'inégalités matricielles linéaires, que nous notons LMI. Ce formalisme est particulièrement attrayant puisqu'il conduit à des problèmes d'optimisation convexe pour lesquels, bien qu'il s'agisse de problèmes non différentiables, il existe aujourd'hui des outils de résolution efficaces [18].

Nous avons concentré dans ce chapitre sur la formulation possible de critère  $H_\infty$  en tant que problème d'optimisation convexe sous contrainte LMI. Tester l'existence d'un correcteur qui assure un "niveau de performance"  $\gamma$  donné est un problème de faisabilité LMI. Tester l'existence d'un correcteur qui assure le plus petit "niveau de performance"  $\gamma$  peut s'écrire comme un problème de minimisation d'un coût linéaire sous contraintes LMI

D'après l'exemple du calcul de l'asservissement en position d'un moteur à courant continu en utilisant le formalisme LMI, on peut conclure que les LMIs donnent des résultats efficace en ce qui concerne les systèmes LTI. Alors que, ce dernier ne présente qu'un cas particulier du système LPV. Pour cette raison, nous allons consacrer le dernier chapitre à l'extension aux systèmes LPV, dont le but est de faire la synthèse d'une loi de commande à paramètre variable en utilisant la modélisation polytopique.