

Chapitre IV

Synthèse de lois de commande LPV

Introduction

La détermination de lois de commande pour les systèmes à paramètres variables constitue un problème auquel les ingénieurs automaticiens se trouvent confrontés depuis de nombreuses années. Une approche classique de résolution, fréquemment adoptée dans l'industrie repose sur la théorie de la commande adaptative, qui grâce à une estimation en ligne des paramètres du système, permet la prise en compte des non stationnarités. Cette approche peut s'avérer performante, mais hélas, peu robuste aux erreurs non identifiées de modèle (dynamiques négligées par exemple)

Signalons à ce propos, que d'importants efforts de recherche sont consacrés depuis peu, au développement de nouvelles méthodes fondées sur la complémentarité des théories de la commande adaptative d'une part et de la commande robuste d'autre part [09-29]

L'approche que nous proposons d'adopter dans ce dernier chapitre s'appuie sur une modélisation LPV du système à commander :

$$G(\theta) \begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) \\ y(t) = C(\theta)x(t) + D(\theta)u(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

En ce sens, on peut donc la rapprocher des méthodes classiques. Elle s'en démarque néanmoins par le fait essentiel que la loi de commande est directement recherchée sous la forme d'un correcteur global, bâti sur le même modèle que le système. Autrement dit, les équations du correcteur LPV s'écrivent sous la forme :

$$K(\theta) \begin{cases} \dot{x}_K(t) = A_K(\theta)x_K(t) + B_K(\theta)y(t) \\ u(t) = C_K(\theta)x_K(t) + D_K(\theta)y(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

et la structure de commande en boucle fermée pour être retenue sous la forme suivante

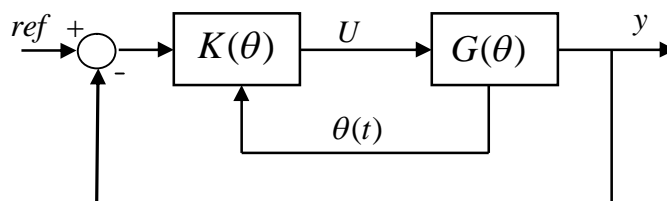


Figure 4.1 : Structure de commande LPV

Autrement dit, les variations paramétriques du système sont directement intégrées au niveau de la loi de commande dont la structure recopie celle du système. Un tel choix, justifié par la mesurabilité des paramètres, permet de garantir la stabilité et les performances sur un domaine d'évolution paramétrique relativement large. On pourra notamment envisager la résolution de certains problèmes pour lesquels les diverses techniques de commande robuste, trop conservatives, n'apportent pas de réponse.

Contrairement aux techniques adaptatives, cette approche, de par la structure adoptée, permet d'éviter le recours, souvent délicat, au processus d'identification en ligne

On essaye à travers ce dernier chapitre d'étudier la synthèse des lois de commande à paramètre variable, en utilisant la modélisation polytopique, que nous avons déjà vue dans le premier chapitre. Enfin, on présente la simulation de quelques exemples décrits sous forme d'un modèle LPV de type polytopique, dont le but est de trouver une loi de commande robuste vérifiant un certain niveau de performance, en se basant sur l'approche H_∞ et l'outil mathématique LMI.

Pour simplifier les expressions, nous remplaçons la notation (2.29) par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{cases}$$

4.1 Correcteurs polytopiques

On s'intéresse dans ce chapitre, à la synthèse de lois de commande pour les systèmes LPV décrits par un polytope (voir chapitre 01). Profitant, comme annoncé de la mesurabilité des paramètres, nous choisirons, pour les correcteurs une structure polytopique, analogue à celle du système.

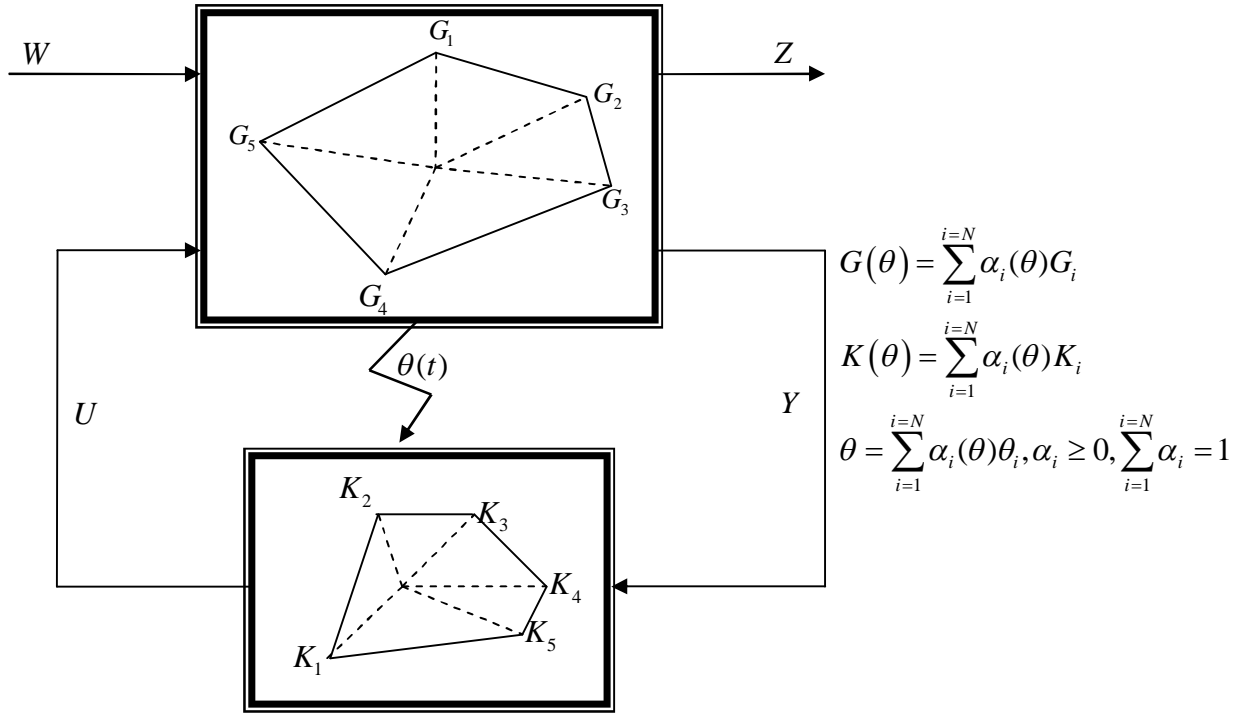


Figure 4.2 : Systèmes polytopiques en boucle fermée

Les sommets G_i et K_i du système $G(\theta)$ et du correcteur K_i , sont respectivement décrits par les matrices suivantes qui correspondent aux éléments de leurs représentations

$$G_i = \begin{pmatrix} A_i & B_{1i} & B_{2i} \\ C_{1i} & D_{11i} & D_{12i} \\ C_{2i} & D_{21i} & D_{22i} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$K_i = \begin{pmatrix} A_{Ki} & B_{Ki} \\ C_{Ki} & D_{Ki} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Les matrices B_2, C_2, D_{12} et D_{21} sont volontairement choisies constantes (indépendantes du paramètre $\theta(t)$) afin que le système LPV en boucle fermée, comme nous allons le voir, admette également un modèle polytopique. Par ailleurs, pour simplifier les expressions, nous supposons qu'il n'y a pas de transmission directe ($D_{22} = 0$). Déterminons à présent, la représentation d'état du système G_i rebouclé par le correcteur K_i . On obtient facilement, compte tenu des hypothèses (les matrices correspondent aux représentations d'état)[09] :

$$S_{cli} = \begin{pmatrix} A_{cli} & B_{cli} \\ C_{cli} & D_{cli} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Avec

$$\begin{cases} A_{cli} = \begin{pmatrix} A_i + B_2 D_{Ki} C_2 & B_2 C_{Ki} \\ B_{Ki} C_2 & A_{Ki} \end{pmatrix} \\ B_{cli} = \begin{pmatrix} B_{1i} + B_2 D_{Ki} D_{21} \\ B_{Ki} D_{21} \end{pmatrix} \\ C_{cli} = (C_{1i} + D_{12} D_{Ki} D_{21} \quad C_K D_{12i}) \\ D_{cli} = D_{11i} + D_{12} D_{Ki} D_{21} \end{cases} \quad (4.4)$$

ce que l'on peut encore écrire sous la forme suivante

$$S_{cli} = \begin{pmatrix} \bar{A}_i & \bar{B}_{1i} \\ \bar{C}_{1i} & \bar{D}_{11i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_{1i} \\ \bar{D}_{12} \end{pmatrix} K_i \begin{pmatrix} \bar{C}_2 & \bar{D}_{21} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\text{où } \begin{cases} \bar{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \bar{B}_{1i} = \begin{pmatrix} B_{1i} \\ 0 \end{pmatrix} & \bar{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ I_{nk} & 0 \end{pmatrix} \\ \bar{C}_{1i} = (C_{1i} \quad 0) & \bar{D}_{12} = (0 \quad D_{12}) \\ \bar{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & I_{nk} \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} & \bar{D}_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_{21} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.6)$$

Notons qu'en posant :

$$\bar{G}_i = \begin{pmatrix} \bar{A}_i & \bar{B}_{1i} & \bar{B}_{2i} \\ \bar{C}_{1i} & \bar{D}_{11i} & \bar{D}_{12i} \\ \bar{C}_{2i} & \bar{D}_{21i} & \bar{D}_{22i} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

on obtient finalement S_{cli} sous la forme suivant

$$S_{cli} = F_l(\bar{G}_i, K_i) \quad (4.8)$$

L'expression (4.5) est intéressante car elle met clairement en évidence la linéarité de la boucle fermée par rapport aux données du correcteur. Plus précisément, si on s'intéresse à une expression de la boucle fermée en un point quelconque du domaine d'évolution paramétrique, il vient :

$$S_{cli}(\theta) = F_l \left(\sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i(\theta) \bar{G}_i, \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i(\theta) K_i \right) = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i(\theta) F_l(\bar{G}_i, K_i) \quad (4.9)$$

On en conclut, que le système en boucle fermée (voir figure (4.3)) est bien décrit par un modèle polytopique de N sommets S_{cli} .

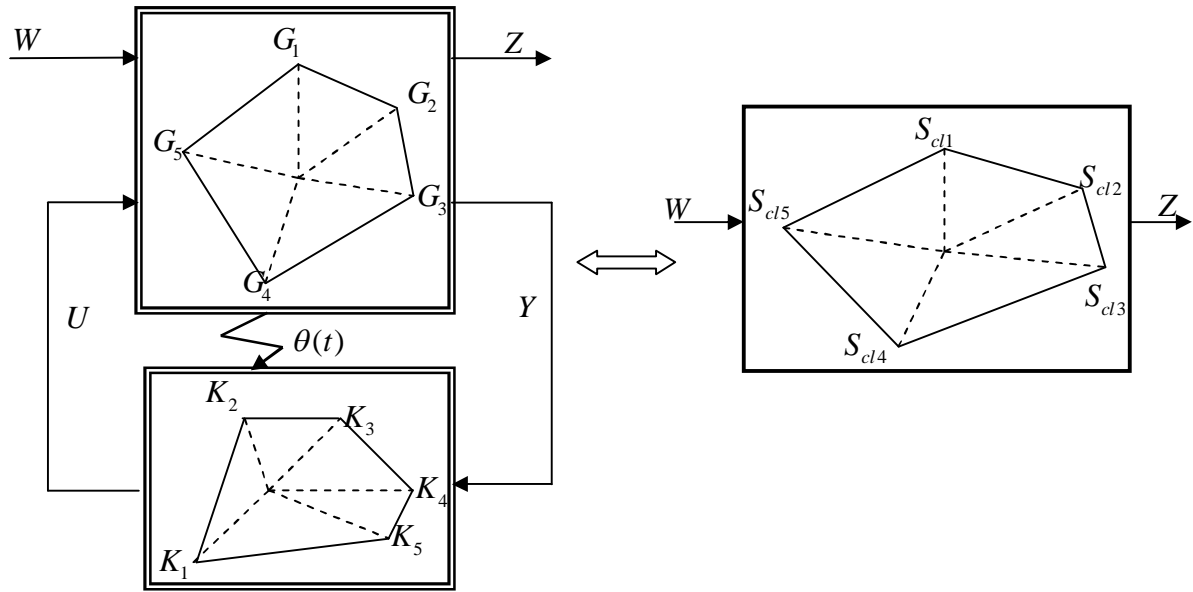


Figure 4.3 : La boucle fermée est encore un polytope

4.2 Critère de type H_∞

Nous considérons en premier lieu, la caractérisation d'un correcteur polytopique tel que le système en boucle fermée S_{cli} que nous venons de décrire, vérifie les contraintes de performance quadratique H_∞ décrites au chapitre 3 par le théorème (3.2).

D'après l'inégalité (3.62), un tel correcteur existe si et seulement si on peut déterminer une matrice P définie positive, et un ensemble de matrices quelconques $K_i \in \mathbb{R}^{(n_k+m_2) \times (n_k+p_2)}$ telles que :

$$\Psi_i(P, K_i) = \begin{pmatrix} A_{cli}^T P + P A_{cli} & P B_{cli} & C_{cli}^T \\ B_{cli}^T P & -\gamma I & D_{cli}^T \\ C_{cli} & D_{cli} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.10)$$

On remarquera que ces N inégalités sont bilinéaires par rapport aux variables P et K_i . Sous cette forme, le problème d'optimisation associé n'est donc pas convexe. Alors, pour restaurer la convexité, il faut utiliser le lemme d'élimination, (paragraphe 3.4)

En posant

$$V_\perp = \begin{bmatrix} \bar{B}_2^T & 0 & \bar{D}_{12}^T \end{bmatrix} \text{ et } U_\perp = \begin{bmatrix} \bar{C}_2 & \bar{D}_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

les inégalités (4.10) deviennent d'après (4.5)

$$\Psi_i(P, 0) + U^T K_i^T V + V^T K_i U < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.12)$$

Introduisons maintenant les noyaux respectifs des matrices V et U respectivement notés V_{\perp} et U_{\perp} . D'après le lemme d'élimination, les inégalités (4.12) sont équivalentes à :

$$V_{\perp}^T \Psi_i(P, 0) V_{\perp} < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.13)$$

$$U_{\perp}^T \Psi_i(P, 0) U_{\perp} < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.14)$$

On obtient, après un calcul rapide :

$$V_{\perp}^T \begin{pmatrix} P^{-1} \bar{A}_i^T + \bar{A}_i P^{-1} & \bar{B}_{li} & P^{-1} \bar{C}_{li}^T \\ \bar{B}_{li}^T & -\gamma I & D_{1li}^T \\ \bar{C}_{li} P^{-1} & D_{1li} & -\gamma I \end{pmatrix} V_{\perp} < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.15)$$

$$U_{\perp}^T \begin{pmatrix} \bar{A}_i^T P + P \bar{A}_i & P \bar{B}_{li} & \bar{C}_{li}^T \\ \bar{B}_{li}^T P & -\gamma I & D_{1li}^T \\ \bar{C}_{li} & D_{1li} & -\gamma I \end{pmatrix} U_{\perp} < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.16)$$

où les noyaux V_{\perp} et U_{\perp} sont de la forme :

$$V_{\perp} = \begin{pmatrix} N_{R_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ N_{R_2} & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{\perp} = \begin{pmatrix} N_{S_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ N_{S_2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

avec

$$N_R = \begin{pmatrix} N_{R_1} \\ N_{R_2} \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} B_2^T & D_{12}^T \end{pmatrix}$$

$$N_S = \begin{pmatrix} N_{S_1} \\ N_{S_2} \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} C_2 & D_{21} \end{pmatrix}$$

De par la position des blocs de zéros sur chacun des noyaux, on pourra obtenir une simplification particulièrement intéressante des inégalités (4.15) et (4.16). En effet, si l'on introduit pour P et P^{-1} les partitions suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} S & L \\ L^T & F \end{pmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} R & M \\ M^T & E \end{pmatrix} > 0 \quad (4.17)$$

on obtient, après calculs et suppression des lignes et colonnes en regard des zéros de V_{\perp} et U_{\perp} deux nouvelles séries d'inégalités où seules subsistent les matrices R et S

$$N_R^T \begin{pmatrix} R A_i^T + A_i R & B_{li} & R C_{li}^T \\ B_{li}^T & -\gamma I & D_{1li}^T \\ C_{li} R & D_{1li} & -\gamma I \end{pmatrix} N_R < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.18)$$

$$N_S^T \begin{pmatrix} A_i^T S + SA_i & SB_{1i} & C_{1i}^T \\ B_{1i}^T S & -\gamma I & D_{11i}^T \\ C_{1i} & D_{11i} & -\gamma I \end{pmatrix} N_S < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.19)$$

Remarquons pour conclure que le choix des matrices R et S pour être en accord avec les relations (4.17) devra simplement être effectué de manière à satisfaire les contraintes convexes suivantes [16]

$$R > 0, S > 0 \quad \lambda(RS) \geq 1 \quad (4.20)$$

Par ailleurs, les inégalités matricielles (4.18) et (4.19) étant linéaires par rapport aux nouvelles variables R et S , il en résulte une caractérisation entièrement convexe des correcteurs recherchés. Nous résumons cela par un théorème [03-10]

Théorème (4.1) : Correcteurs polytopiques de type H_∞

Etant donné un système de la forme (4.1) il existe un correcteur polytopique (4.2) tel que la performance quadratique H_∞ du système LPV en boucle fermée, reste bornée par γ si et seulement s'il existe un couple R et S de matrices symétriques vérifiant (4.18), (4.19) et (4.20).

La mise en oeuvre sur le logiciel Matlab est immédiate. A la condition portant sur le rayon spectral de la matrice RS on substituera l'inégalité matricielle équivalente.

$$\begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} \geq 0 \quad (4.21)$$

Qui, par l'algorithme d'optimisation sera considérée comme une inégalité stricte. Cette même LMI garantira ainsi la positivité stricte des matrices R et S qui constituent sa diagonale.

4.2 1. Utilisation du changement de variables

On commencera par transformer l'inégalité (4.22) du lemme borné réel, que l'on exprime ici par rapport à $P^{-1} = Y$

$$\tilde{\Psi}_i(Y, K_i) = \begin{pmatrix} YA_{cli}^T + A_{cli}Y & B_{cli} & YC_{cli}^T \\ B_{cli}^T & -\gamma I & D_{cli}^T \\ C_{cli}Y & D_{cli} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.22)$$

Une telle expression est obtenue de manière tout à fait classique en multipliant à gauche les premières lignes de $\Psi_i(P, K_i)$ par $Y^T (= Y)$ et à droite les premières colonnes par Y .

Nous partitionnerons les matrices Y et Y^{-1} , en quatre blocs :

$$Y = \begin{pmatrix} R & M \\ M^T & E \end{pmatrix} \text{ et } Y^{-1} = \begin{pmatrix} S & L \\ L^T & F \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Nous supposons en outre les matrices M et L carrées appartenant donc à $\square^{n \times n}$ et inversibles [17-18].

Il s'en suit que le correcteur obtenu sera du même ordre que le système, ce qui facilitera après optimisation, le retour aux variables initiales.

On obtient donc, compte tenu de la remarque qui a été faite sur l'inversibilité de la matrice L

$$Y = \begin{pmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & S \\ 0 & L^T \end{pmatrix}^{-1} = Y_1 Y_2^{-1}$$

avec

$$I - RS = ML^T$$

et on remarquera facilement d'après la section 4.2, que :

$$Y > 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} > 0 \quad (2.24)$$

Finalement, en posant :

$$\begin{cases} \bar{A}_{K_i} = S(A_i + B_2 D_{K_i} C_2)R + LB_{K_i} C_2 R + SB_2 C_{K_i} M^T + LA_{K_i} M^T \\ \bar{B}_{K_i} = SB_2 D_{K_i} + LB_{K_i} \\ \bar{C}_{K_i} = D_{K_i} C_2 R + C_{K_i} M^T \end{cases} \quad (4.25)$$

et

$$T = \text{diag}(Y_2, I, I)$$

il vient

$$T^T \tilde{\Psi}_i(Y, K_i) T = \begin{pmatrix} A_i R + RA_i^T + B_2 \bar{C}_{K_i} + \bar{C}_{K_i}^T B_2^T & H & H & H \\ \bar{A}_{K_i} + (B_2 D_{K_i} C_2)^T & SA + \bar{B}_{K_i} + A^T S + \bar{B}_{K_i}^T & H & H \\ B_{1i}^T + (B_2 D_{K_i} D_{21})^T & B_{1i}^T S + D_{21}^T \bar{B}_{K_i}^T & -\gamma I & H \\ C_{1i} R + D_{12} \bar{C}_{K_i} & C_{1i} + D_{12} D_{K_i} D_{21} & D_{11i} + D_{12} D_{K_i} D_{21} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.26)$$

Cette dernière expression est linéaire par rapport aux variables $R, S, \bar{A}_{K_i}, \bar{B}_{K_i}, \bar{C}_{K_i}$ et D_{K_i} . D'après (4.24) il en va de même de la contrainte de positivité sur Y . On obtient donc là encore, une caractérisation convexe du correcteur, entièrement formulée par inégalités matricielles linéaires. Après optimisation, les variables A_{K_i}, B_{K_i} et C_{K_i} seront obtenues par résolution du système (4.25).