

1-1) Recherche bibliographie des plaques:

1-2) Introduction:

Un très grand nombre d'éléments finis de plaques en flexion a été développé. Les éléments finis de plaque peuvent se classer en deux type: éléments de type Kirchhoff, éléments de type Reissner/Mindlin, les éléments de plaques de type Kirchhoff sont relativement difficiles à formuler. Le premier élément de plaque triangulaire de type Kirchhoff a un déplacement w et deux rotations aux nœuds [30]. Mais cet élément ne peut pas passer les patch-tests parce que la continuité de la rotation normale n'est pas satisfaite. Nous notons toutefois que d'un point de vue numérique, de nombreux éléments basés sur la théorie de love-Kirchhoff ont été développés avec éventuellement la prise en compte des effets de membrane. Ces éléments de plaque sont généralement basés sur des hypothèses cinématiques et sont limités aux plaques minces. D'autres éléments basés sur les hypothèses de type Mindlin ont été développés permettant ainsi de traiter les plaques épaisses.

1-3) Eléments de type Kirchhoff:

Plusieurs éléments finis de plaques ont été proposés à partir de 1968, permettant d'obtenir des solutions numériques des problèmes de plaques minces en accord avec les hypothèses de Kirchhoff.

Les éléments de plaque de type Kirchhoff discret ont été formulés par Dhatt et Batoz et al. L'énergie de cisaillement transversal est négligée et l'hypothèse de Kirchhoff est introduite de façon discrète [5] (en certain point, sur les cotes d'un élément ou sur l'aire d'un élément). Beaucoup d'autres chercheurs ont également apporté leurs contributions à ce type d'éléments [1]. Un grand nombre d'élément de plaque triangulaire à 9 degrés de liberté (ddl) a été formulé, tels **HCT** (Hsieh Clough-Toucher), **DKT** (Discrete Kirchhoff Triangle).

Il a suscité un intérêt considérable dans le développement de l'élément de plaque depuis leur usage est devenu populaire pour représenter le comportement des éléments de coque. Beaucoup d'éléments de plaque ont été développées. [23] ont présenté un examen de tous les éléments flexion de plaque comme une partie de l'étude sur l'efficacité des éléments de plaque de pliage. [13] ont élaboré le volet plaque triangulaire flexion en divisant le triangle principal à trois subtriangles. [8]. Ils ont développé un élément triangulaire de flexion de plaque en utilisant des fonctions de forme basée sur les coordonnées. L'élément de plaque non conforme ne passe pas le test cutané pour certains modèles de maillage, et l'élément confirmant est coûteux en raison du régime d'intégration afin numériques nécessaires pour déterminer la matrice de rigidité de l'élément.

Batoz et al. (1980) ont développé plusieurs éléments triangulaires efficaces de flexion de plaque pour l'analyse des plaques et coques. Ces éléments ont deux degrés de liberté en rotation et un degré de liberté en translation à chaque nœud pour un total de 9 degrés de liberté. Ils ont développé trois types d'éléments de flexion de plaque: le première élément **DKT** repose sur des hypothèses discrets de Théorie de Kirchhoff, le deuxième élément **HSM** basé sur la Méthode hybride de stress, de surmonter les problèmes dans le développement de modèles de déplacements, et le troisième élément **SRI** fondé sur un schéma d'intégration sélective réduit qui comprend une déformation de cisaillement transversale. [3] ont comparé les résultats obtenus pour ces éléments. Ils ont constaté que les éléments **DKT** et **HSM** sont plus efficaces que

l'élément **ISR**. Ils ont également constaté que l'élément **DKT** donne de meilleurs résultats que l'élément **HSM** parce que l'élément **DKT** nécessite moins de stockage par rapport à l'élément **HSM**.

Les éléments quadrilatère de flexion de plaque sont simplifiés dans l'analyse des structures de la dalle et sont utilisés dans la formulation des éléments de coque pour l'analyse des structures régulières en forme de **coquillage**. Les tentatives antérieures d'élaborer des éléments quadrilatère mince impliqués combinant quatre éléments triangulaire de plaque [7]. Toutefois, leur formulation a été très compliquée.[27]. a développé un élément quadrilatère de quatre nœuds à l'aide des fonctions de forme isoparamétriques. Cet élément donne de très bons résultats pour la flexion de plaque. [36] ont développé l'élément de flexion de plaque, LORA basée sur des paramètres de stress plutôt que de champs de déplacement. Cet élément donne aussi de très bons résultats pour la flexion de plaque.

Batoz et Tahar (1982) Ont mis au point un élément de quatre nœuds quadrilatère basé sur la théorie discrète Kirchhoff. La base de la formulation de cet élément a été la discret Kirchhoff triangulaire (**DKT**) élément développé plus tôt [3]. La plaque quadrilatère flexion élément (**DKQ**) formulée par [7]. et l'élément triangulaire de flexion de plaque (**DKT**) formulé par [3], sont basés sur les hypothèses de Kirchhoff discrète, dans laquelle la déformation de cisaillement transversal est négligée. Ils ont considéré que la déformation de cisaillement transversal est présente dans l'élément développement initial, puis ils ont supprimé le terme cisaillement transversal de contrainte en appliquant des contraintes discrètes Kirchhoff. [7] Ont mené plusieurs tests sur ces éléments.

1-4) Éléments de type Reissner/Mindlin:

Les éléments de plaque basés sur la théorie de Reissner/Mindlin sont présentés par [5], et [2], et [28]. Dans le cas des éléments avec cisaillement transversal (**DST**, **DSQ** et **Q4G**), pour éviter le blocage des éléments en cisaillement transverse (surestimation de la rigidité pour des épaisseurs très faibles), une méthode consiste à construire des champs de cisaillement et de substitution constants sur les bords de l'élément, les éléments de plaque avec du cisaillement transverse utilisent cette méthode de façon à ne pas bloquer en cisaillement transverse. Ce blocage en cisaillement vient du fait que l'énergie élastique de cisaillement est un terme proportionnel à h (h étant l'épaisseur de la plaque), bien plus grand que le terme d'énergie élastique de flexion qui est proportionnel en h^3 . Quand l'épaisseur devient faible devant la longueur caractéristique (le rapport h / L est inférieur à $1/20$), pour certaines fonctions de forme, la minimisation du terme prépondérant en h conduit à une mauvaise représentation des modes de flexion pure, pour lesquels la flèche n'est plus calculée correctement.

Belarbi M.T. et Charif A, en 1998 Nouveau hexaèdre simple [9] « **SBH8** » pour l'étude des plaques minces et épaisses.

Belarbi M.T. et Charif A, en 1999 développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses [10]. Le nouvel élément hexaédrique simple a huit nœuds et trois degrés de liberté par nœud (U , V et W) basé sur le modèle en déformation, cet élément est numériquement plus performant que le modèle de déplacement. Sa précision est

évaluée à travers une série de cas de-tests standards ou non standards relatifs aux problèmes de plaques mince et épaisses.

L. Belouar, M.Guenfoud en 2005. Un nouvel élément fini rectangulaire basé sur l'approche de contrainte pour flexion de plaque, pour l'analyse linéaire de la plaque de flexion avec effet de cisaillement transverse [12]. Le champ des déplacements de l'élément a été développé par l'utilisation de l'approche basée sur Stran et elle est basée aussi sur les fonctions supposées indépendantes pour les différentes composantes de la déformation dans la mesure où elle est autorisée par les équations de compatibilité.

L'élément possède trois degrés essentiels extérieurs de la liberté de chacun des quatre nœuds d'angle et satisfait à la représentation exacte des modes de corps rigide de déplacement. Cet élément se trouve numériquement plus efficace que les déplacements correspondants à base d'élément et sa précision est évaluée à travers une série de cas de tests relatifs à des plaques minces et épaisses.

2-1) Définition d'une plaque:

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (plan x,y) et par une petite épaisseur (notée $h(x,y)$), par rapport aux autres dimensions, à savoir la longueur et la largeur [5]. Suivant l'ordre de grandeur de h par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince ou épaisse aux plaques et aux coques. Cependant, ce qualificatif n'implique pas seulement une caractéristique géométrique, mais définit aussi un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal (*CT*). Cette influence est d'autant plus importante que les structures sont minces car l'épaisseur h varie en sens inverse de l'influence *CT*.

La plaque peut être constituée d'un matériau homogène.

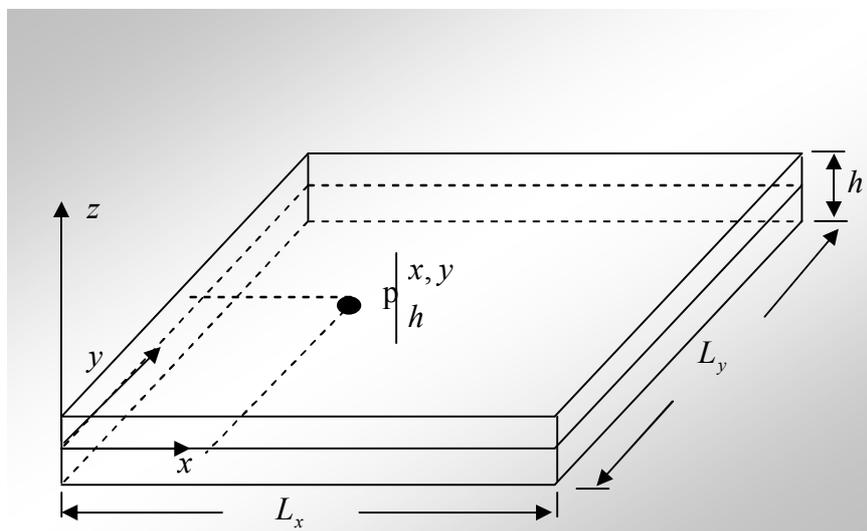


Figure (1-1): Géométrie d'une plaque

Ces plaques sont souvent suivies de l'adjectif mince ou épais suivant la grandeur de l'épaisseur h , nous admettons généralement [33].

* pour les plaques épaisses. $\frac{1}{20} < \frac{h}{L} < \frac{1}{4}$

* Pour les plaques minces. $\frac{h}{L} < \frac{1}{20}$

Hypothèses :

La théorie des plaques repose sur les hypothèses suivantes :

H.1 : Les contraintes normales σ_{zz} sont négligeables par rapport aux autres composantes de contraintes : $\sigma_{zz} = 0$.

H.2 : Les pentes de la surface moyenne après déformation, sont supposées petites par rapport à l'unité (Petite déflexion du plan moyen).

H.3 : Les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation, restent sur cette normale au cours de la déformation ; ceci permet de négliger l'effet de

cisaillement transversal. Dans ce cas, on a : $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$

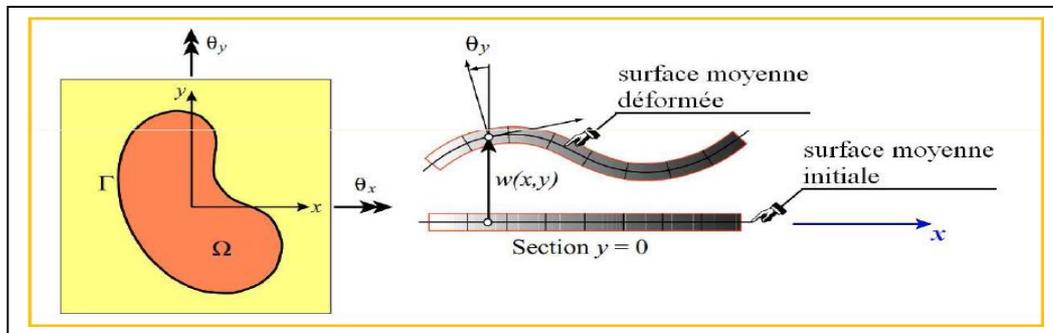


Figure (1-2): Déformation d'une plaque en flexion [05]

2-2) Définitions et notations générales:

Conventions de signe pour déplacements et rotations [41]

Les notations adoptées ci après pour les déplacements sont définies à la Figure (1-3)

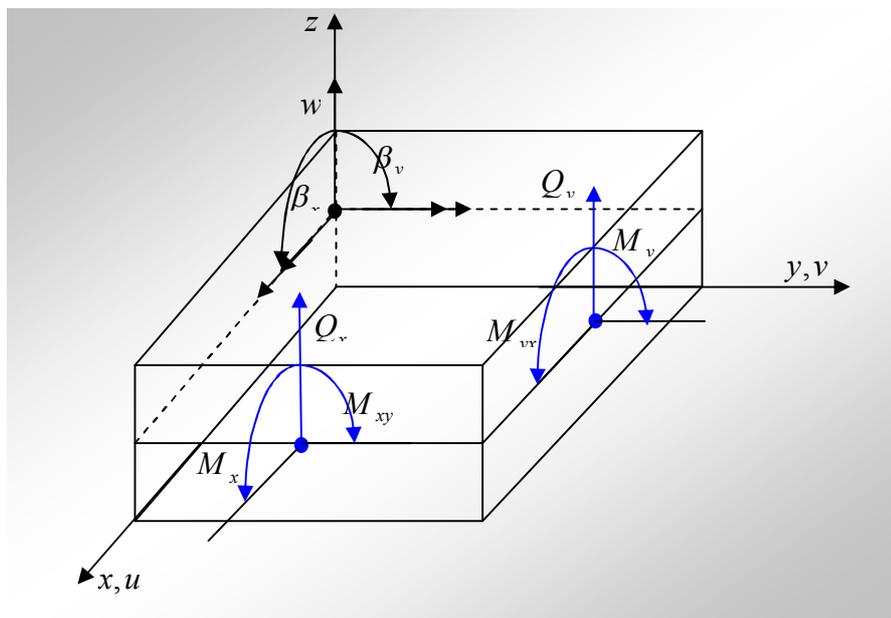


Figure:(1-3): Conventions générales

L'équation d'équilibre des moments est:

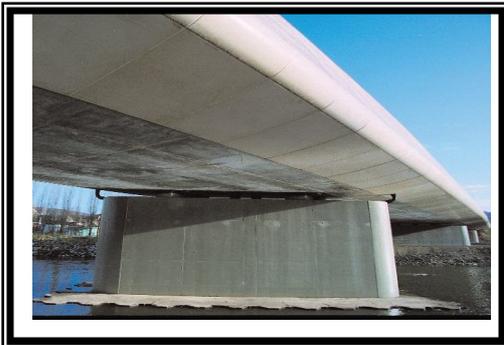
$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p_z(x, y)$$

L'intégration des équations des moments fléchissant donne l'équation de la plaque soumise aux charges distribuées $P_z(x, y)$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2} = \frac{p_z(x, y)}{D}$$

2-3) Domaine d'utilisation:

Le domaine de l'utilisation de plaque est très répandue dans tous les domaines, en particulier dans le domaine du génie civil où, on les utilise dans les constructions simples (habitation) où les ouvrages d'art et elle existe sous formes différentes, y compris les circulaires et rectangulaires et d'autre formes selon la qualité de l'ouvrage, Comme celle-est représenté dans les photos ci-dessous.



Ouvrages d'arts ponts



Ouvrages d'arts ponts (tabliers),



Ouvrages d'arts (plaques circulaire)



Ouvrages d'arts (plaques circulaire)



Ouvrages souterrains



Constructions civiles

2-4) Loi de comportement:

Les composantes du tenseur contraint et le point de l'élément, sont reliés à celles du tenseur de la déformation par la loi de Hooke, de la manière suivante:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}.$$

Avec :

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^T &= (\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xz}) \\ \{\varepsilon\}^T &= (\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{yz} \ \varepsilon_{xz}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(1-5)$$

La contrainte normale à la surface moyenne de l'élément, σ est par hypothèse négligeable, ainsi que la déformation ε compte tenu de cette hypothèse, la relation $\sigma = E \cdot \varepsilon$ Peut être développée sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(1-6)$$

Avec:

β : Facteur de cisaillement transversal $\beta = 5/6$.

2-5) Définition la continuité C^0 et C^1 :

Si la fonction $u(x)$ et seule continue sur les frontières entre les éléments, l'approximation est **de type C^0** (ou classe C^0). Si $u(x)$ et ses dérivées premières sont continues, l'approximation est de type C^1 Si $u(x)$ et ses dérivées jusqu' à l'ordre α sont continues, l'approximation **de type C^1**

2-6) Classification des plaques:

Les éléments de plaques en flexion de type déplacement pouvant être classés en deux catégories [41]:

- a/ les éléments basés sur la théorie de Kirchhoff (cisaillement transversal à négliger).
- b/ les éléments basés sur la théorie de Hencky- Mindlin-Reissner (avec cisaillement transversal).

a/ Les éléments basés sur la théorie de Kirchhoff sont, en principe, les mieux adaptés à la modélisation des plaques minces. Leur formulation ne nécessite que l'approximation d'une seule composante de déplacement $w(x, y)$. Ce n'est qu'une simplicité apparente. En effet, on remarque que les secondes dérivées de déplacement interviennent dans l'expression de l'énergie de la déformation. Ainsi, la condition de compatibilité inter-éléments correspond à la continuité C^1 du déplacement transverse

c-à-d à la continuité de w et de la pente normale $\frac{\partial w}{\partial n}$, cette condition ne peut généralement être satisfaite qu'avec des éléments sophistiqués et d'ordre élevé.

b/ Les éléments basés sur la théorie de Hencky- Mindlin-Reissner sont les mieux adaptés dans les cas de plaque d'épaisseur modérée. Leur formulation est basée sur une approximation des trois variables indépendantes w, β_x et β_y . Cependant, on note que dans l'expression de l'énergie de la déformation n'intervient que les dérivées premières de w, β_x et β_y . La condition de la compatibilité inter-éléments ne nécessite qu'une continuité C^0 .

2-7) Théorie des plaques épaisses :

Cette théorie qui tient en compte l'effet du cisaillement transverse est la mieux adaptée aux cas des plaques d'épaisseur modérée. Ainsi les éléments de Mindlin sont simples à formuler et pour que les fonctions d'interpolation usuelles puissent être utilisées, Ceci constitue un avantage pour cette théorie, qui de plus prend en considération l'effet de cisaillement et par conséquent, les déformations de cisaillement transverse seront automatiquement modelées en présence. Il est à noter que jusqu' à un passé récent, ce type d'élément ne peut être utilisé pour la modélisation de plaques minces à cause de la dégradation de la précision provoquée par des problèmes numériques.

. Cependant, il existe actuellement deux méthodes qui permettent d'envisager l'utilisation de ces éléments pour des problèmes de plaque minces. L'une de ces méthodes est fondée sur la prise en compte d'hypothèses de Kirchhoff discrètes.

L'autre méthode est basée sur l'intégration réduite. Ainsi, les récentes recherches indiquent que l'élément quadrilatéral « Hétérosis » des plaques de Mindlin avec une interpolation quadratique de Lagrange pour θ_x, θ_y et une interpolation quadratique de Serendip pour w utilisant une intégration sélective de la matrice de rigidité donne d'excellents résultats. Aujourd'hui, la formulation Mindlin est largement utilisée et elle attend un grand avenir, elle converge et donne une précision comparable à celle des meilleures éléments de Kirchhoff tout en présentant une formulation plus simple

2-7-1/ Relations cinématiques :

La théorie de HENCKY-MINDLIN (prise en compte l'effet de cisaillement transverse)

* La théorie de Hencky, présente un modèle de déplacement basé sur trois variables indépendantes : les déplacements transverses $w(x, y)$ et les deux rotations $\beta_x(x, y)$ et $\beta_y(x, y)$. Le champ des déplacements s'exprime alors en fonction de ces trois variables par la relation suivante :

$$\left. \begin{aligned} u &= z\beta_x(x, y) \\ v &= z\beta_y(x, y) \\ w &= w(x, y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1 - 7)$$

L'étant de la déformation peut être défini en fonction des trois variables w, β_x et β_y par les relations cinématiques suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_x &= z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\
 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} &= z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \\
 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} &= \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\
 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} &= \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-8)$$

2-7-2/ Caractéristiques géométriques et mécaniques:

Un Solide est défini par une surface de référence plane (*plan x,y*) et par une épaisseur *h(x, y)* de petite dimension par rapport aux autres [5]

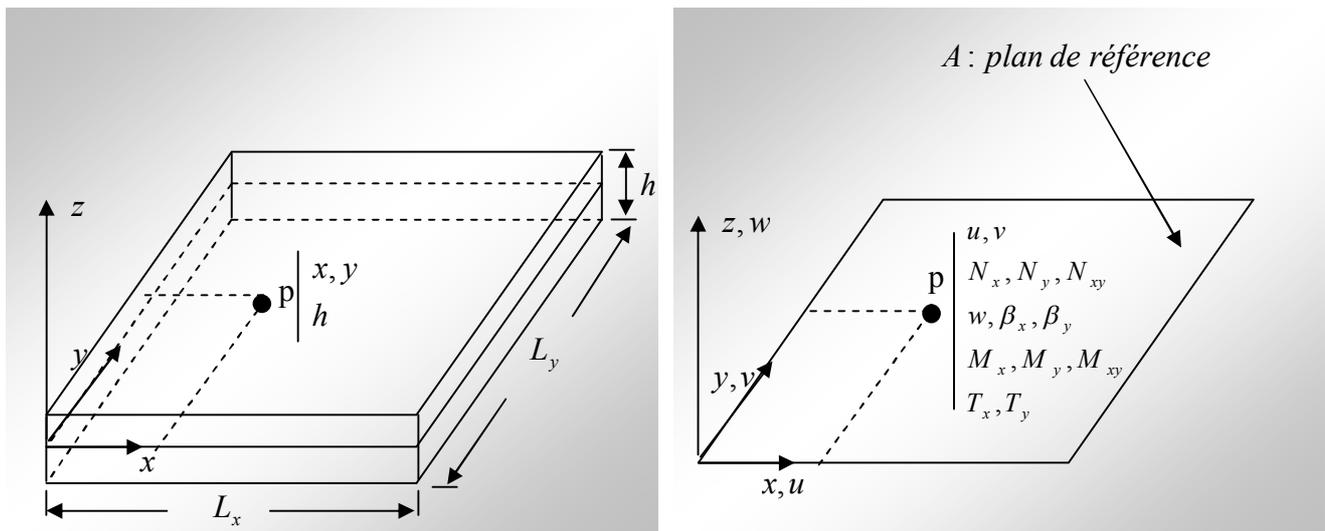


Figure:(1-4) : Géométrie et Idéalisation (variables cinématiques et mécaniques)

• **Cinq variables cinématiques indépendantes**

- u* et *v* les déplacements de la membrane dans le plan $z=0$
- w* le déplacement transversal
- β_x La rotation du plan *x,y* autour de *y*
- β_y La rotation du plan *x,y* autour de *x*

• **Les efforts résultants de membrane**

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \quad \dots\dots\dots (1-9)$$

• **Les moments de flexions**

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad , \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad ,$$

• Les efforts tranchants

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz \quad \text{et} \quad T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz \quad \dots\dots\dots(1-11)$$

2-7-3/ Théorie du premier ordre: Mindlin

La théorie de plaques, que nous considérons sans la suite est basée sur:

- l'hypothèse dite des sections droites (ou plane): les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur une droite dans la configuration déformée.
- l'hypothèse d'une déformation transversale ε_z nulle (pas de variation de l'épaisseur).
- l'hypothèse des contraintes planes: dans les relations de comportement, la contrainte σ_z est négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur de contraintes.
- l'hypothèse d'anisotropie plane pour chaque couche dans le cas d'une plaque composite.
- la prise en compte d'une loi de comportement de CT .

2-7-4/ Définitions des déplacements et des déformations

Champ de déplacement virtuel d'un point q

$$u_q^* = u^* + z\beta^*$$

$$\begin{Bmatrix} u^*(x, y, z) \\ v^*(x, y, z) \\ w^*(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u^*(x, y) \\ v^*(x, y) \\ w^*(x, y) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \beta^*(x, y) \\ \beta^*(x, y) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(1-12)$$

Déformation virtuelle:

Principe de base : séparation des déformations:

$$\{\varepsilon^*\} = \{e^*\} + z\{\chi^*\} \quad \dots\dots\dots(1-13)$$

Avec:

$$\left. \begin{aligned} \{\varepsilon^*\} &= \{\varepsilon_x^* \quad \varepsilon_y^* \quad 2\varepsilon_{xy}^*\} = \{e^*\} + z\{\chi^*\} \\ \{e^*\} &= \{u_{,x}^* \quad v_{,y}^* \quad v_{,y}^* + v_{,x}^*\} \\ \{\chi^*\} &= \{\beta_{x,x}^* \quad \beta_{y,y}^* \quad \beta_{x,y}^* + \beta_{y,x}^*\} \\ \{\gamma^*\} &= \{\beta_x^* + w_{,x}^* \quad \beta_y^* + w_{,y}^*\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(1-14)$$

2-7-5/ Principe des travaux virtuels (formulation faible)

$$W_{int} = \int_V \left(\{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} + \{\gamma^*\}^T \{\tau\} \right) dV \dots\dots\dots(1-15)$$

avec $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy} \rangle$; $\langle \tau \rangle = \langle \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \rangle$

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \dots\dots\dots(1-16)$$

Avec:

$$= \int_V \left(\{e^*\} \{N\} + \{\chi^*\}^T \{M\} + \{\gamma^*\}^T \{T\} \right) dV \dots\dots\dots(1-17)$$

$$W_{ext} = \int_A \left(\{u^*\}^T \{f\} + \{\beta^*\}^T \{m\} \right) dA + \int_S \left(\{u^*\}^T \{f_s\} + \{\beta^*\}^T \{m_s\} \right) dS \dots\dots\dots(1-18)$$

2-7-6/ Equation d'équilibre associée:

$$\left. \begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} + f_x &= 0 \\ T_{x,x} + T_{y,y} + f_z &= 0 \\ M_{x,x} + M_{xy,y} - T_x + m_x &= 0 \\ M_{xy,x} + M_{y,y} - T_y + m_y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1-19)$$

Conditions limites sur les contours S sont :

$$\left. \begin{aligned} N_{xn} = F_x \quad \text{ou} \quad u = \bar{u} \\ N_{yn} = F_y \quad \text{ou} \quad v = \bar{v} \\ T_n = F_z \quad \text{ou} \quad w = \bar{w} \\ M_{xn} = M_x \quad \text{ou} \quad \beta_x = \bar{\beta}_x \\ M_{yn} = M_y \quad \text{ou} \quad \beta_y = \bar{\beta}_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1-20)$$

2-7-7/ Loi de comportement élastique en petite déformation

Matériau isotrope:

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1-21)$$

$$[H_\tau] = \frac{E}{2(1-\nu)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1-22)$$

$$\{\sigma\} = [H] \{\varepsilon\} \quad ; \quad \{\tau\} = [H_\tau] \{\gamma\} \dots\dots\dots(1-23)$$

2-7-8/ Relation efforts résultants – déformation:

$$\left. \begin{aligned} \{N\} &= [H_m] \{e\} + [H_{mf}] \{\chi\} \\ \{M\} &= [H_{mf}] \{e\} + [H_f] \{\chi\} \\ \{T\} &= [H_c] \{\gamma\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1-24)$$

Avec:

$$\left. \begin{aligned} [H_m] &= \int_{-t}^t [H] dz \\ [H_{mf}] &= \int_{-t}^t [H] z dz \\ [H_f] &= \int_{-t}^t [H] z^2 dz \\ [H_c] &= \frac{5}{6} h \frac{5}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1-25)$$

Remarque:

Symétrie matérielle $\Rightarrow [H_{mf}] = 0$: pas de couplage entre effet membrane et de flexion.

2-7-9/ Modèle variationnel en déplacement:

Recherché les variables cinématiques $\{u\}$ et $\{\beta\}$ tels que

$$\forall \{u^*\}, \{\beta^*\} \\ W = W_{int} - W_{ext} = 0$$

Avec:

$$\begin{aligned} W_{int} &= \int_A \{e^*\}^T ([H_m] \{e\} + [H_{mf}] \{\chi\} + \{\chi^*\}^T ([H_{mf}] \{e\} + [H_f] \{\chi\}) + \{\gamma^*\}^T [H_c] \{\gamma\}) dA \\ W_{int} &= \int_A (\{e^*\}^T \{N\} + \{\chi^*\}^T \{M\} + \{\gamma^*\}^T \{T\}) dA \\ W_{ext} &= \int_A (\{u^*\}^T \{f\} + \{\beta^*\}^T \{m\}) dA + \int_S (\{u^*\}^T \{f_s\} + \{\beta^*\}^T \{m_s\}) dS \dots\dots\dots(1-26) \end{aligned}$$

2-8) Théorie des plaques minces :

Cette théorie qui néglige l'effet du cisaillement transverse est appréciée par les ingénieurs vu sa simplicité. Les éléments basés sur cette théorie sont en principe les mieux adaptés à la modélisation des plaques minces. Leur formulation ne nécessite que l'approximation d'une seule composante de déplacement $w(x, y)$. Or ceci n'est qu'une simplicité apparente puisque des dérivées secondes de déplacement interviennent dans l'expression de l'énergie de déformation. Ainsi la condition de la compatibilité inter-éléments correspond à la continuité C^1 du déplacement transverse,

en d'autre terme $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$ et w doivent être continus à travers les interfaces des éléments. Cette condition ne peut généralement être satisfaite qu'avec des éléments sophistiqués et d'ordre élevé.

2-8-1/ Flexion des plaques minces:

Un corps élastique dont l'épaisseur est très petite par rapport aux autres dimensions est appelé plaque mince. Le plan moyen de la plaque est définie comme étant la plane parallèle aux faces de la plaque partageant l'épaisseur en deux [33].

Les axes des coordonnées sont choisis de telle sorte que le plan x, y coïncide avec le plan moyen et l'axe z sera perpendiculaire à ce dernier.

On dit qu'une plaque travaille à la flexion quand les charges dont les quels elle soumise sont parallèles à l'axe z (perpendiculaire au plan moyen)

Si les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur de la plaque on peut faire les suppositions suivantes:

- 1) les plans perpendiculaires au plan moyen avant la déformation restent perpendiculaires à ce plan après la déformation.
- 2) la contrainte normale σ_z est petite par rapport aux autres composantes de contraintes et peut être négligée.
- 3) le plan moyen ne subit pas de déformation après la flexion.

Considérons une section de la plaque parallèle au plan xz

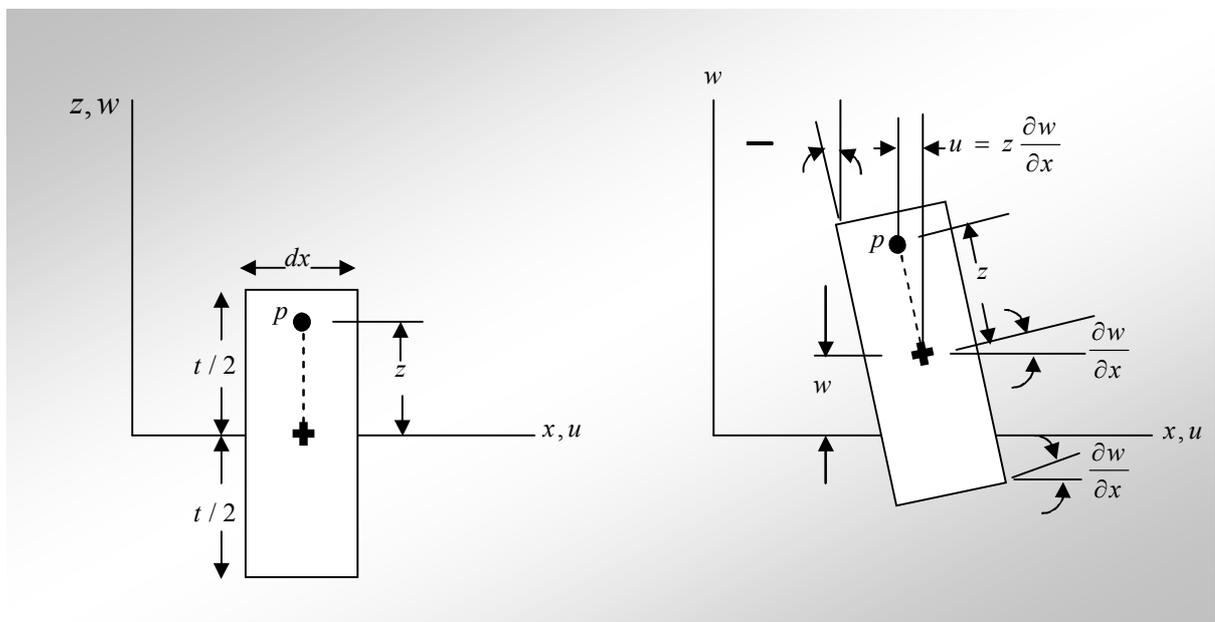


Figure:(1-5) : Flexion de la surface neutre de la plaque.

Dans la théorie de Kirchhoff, on néglige l'effet de cisaillement transverse, Il vient donc d'après [41] :

$$\left. \begin{aligned} \beta_x &= -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y &= -\frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1-27)$$

Dans ce cas, le champ de déplacement est défini uniquement par une variable : le déplacement transverse w .

$$\left. \begin{aligned} u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w &= w(x, y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1-28)$$

D'après (1-8) et (1-27) les relations cinématiques s'écrivent alors sous la forme suivante:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xz} = \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1-29)$$

Les hypothèses de base, en particulier les hypothèses cinématiques des théories des plaques en flexion sont récapitulées dans le synoptique de la **Figure:(1-6)**

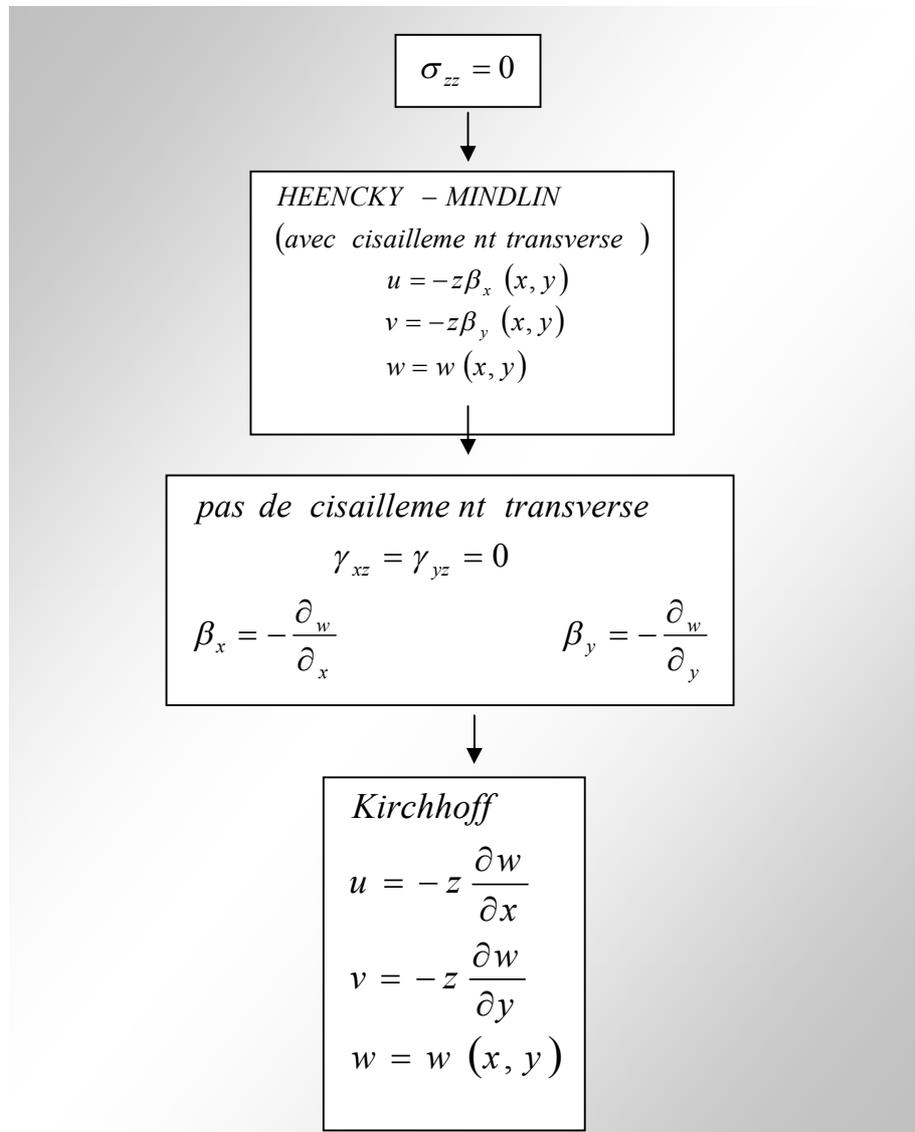


Figure:(1-6) : Hypothèses de base des théories de plaques en flexion [41]

2-8-2/ Hypothèse:

Théorie basée sur l’hypothèse dite de “conservation des normales”: pas de déformation transverse

D’ou

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz}^* = \gamma_{yz}^* = 0 \quad \text{soit } \beta_x = -w_{,x}, \beta_y = -w_{,y} \dots\dots\dots(1-30)$$

2-8-3/ Déformations réelles et virtuelles de flexion

$$\{\varepsilon\} = z \{\chi\} \quad , \quad \{\varepsilon^*\} = z \{\chi^*\} \dots\dots\dots(1-31)$$

Avec:

$$\{\chi\} = \{-w_{,xx} \quad -w_{,yy} \quad -2w_{,xy}\} \quad ; \quad \{\chi^*\} = \{-w^*_{,xx} \quad -w^*_{,yy} \quad -2w^*_{,xy}\}$$

2-8-4/ Principe des travaux virtuels:

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \quad , \quad \forall w^* \dots\dots\dots(1-32)$$

Avec:

$$W_{int} = \int_A \{\chi^*\}^T \{M\} dA = \int_A (-w^*_{,xx} M_x - w^*_{,yy} M_y - 2w^*_{,xy} M_{xy}) dA$$

$$W_{ext} = \int_A (w^* f_z - w^*_{,x} m_x - w^*_{,y} m_y) dA + \int_{Sf} (w^* F_z - w^*_{,x} M_x - w^*_{,y} M_y) dS$$

2-8-5/ Equation d'équilibre associée:

Sur A

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + f_z + m_{x,x} + m_{y,y} = 0 \dots\dots\dots(1-33)$$

$$T_x = M_{x,x} + M_{xy,y} + m_x \quad , \quad T_y = M_{xy,x} + M_{y,y} + m_y$$

Exemples de conditions limites

Encastrement : $\bar{w} = 0 \quad \bar{w}_{,n} = 0$

Appui simple : $\bar{w} = 0 \quad \mathcal{M}_n = M_n$

2-8-6/ Modèle en déplacement :

Soit $[H_{mf}] = 0$ (pas de couplage entre membrane et flexion)

Par définition

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \quad , \quad \forall w^*$$

Un raisonnement identique [5] `a la théorie des plaques épaisses conduit à

$$W_{int} = \int_A \{\chi\}^T \{H_f\} \{\chi\} dA \dots\dots\dots(1-34)$$

$$W_{ext} = \int_A (w f_z - w_{,x} m_x - w_{,y} m_y) dA + \int_{Sf} (w \bar{V}_n - w_{,n} M_n) dS \dots\dots\dots(1-35)$$

$$w = \bar{w} \quad ; \quad w_{,n} = \bar{w}_{,n} \quad \text{sur } S_u$$

2-8-7/ Modèle mixte en w, {M}

Soit $[H_{mf}] = 0$ (pas de couplage entre membrane et flexion)

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \quad , \quad \forall w^*$$

$$W_{int} = \int_A \{\chi\} \{M\} - \frac{1}{2} \{M\}^T [H_f]^{-1} \{M\} dA$$

$$W_{ext} = \int_A (w f_z - w_{,x} m_x - w_{,y} m_y) dA + \int_{Sf} (w \bar{V}_n - w_{,n} M_n) dS$$

$$w = \bar{w} \quad ; \quad w_{,n} = \bar{w}_{,n} \quad \text{sur } S_u$$

2-8-8/ cinématique:

Le champ de déplacement [5] d'un point q situé à une distance z de la surface moyenne est:

$$\begin{cases} u_q(x, y, z) = u_p(x, y) + z \beta_x(x, y) \\ v_q(x, y, z) = v_p(x, y) + z \beta_y(x, y) \\ w_q(x, y, z) = w_p(x, y) \end{cases}$$

déplacement du point $p(x, y)$ de la surface Champ de déplacement d'un point q

u_p, v_p, w_p moyenne

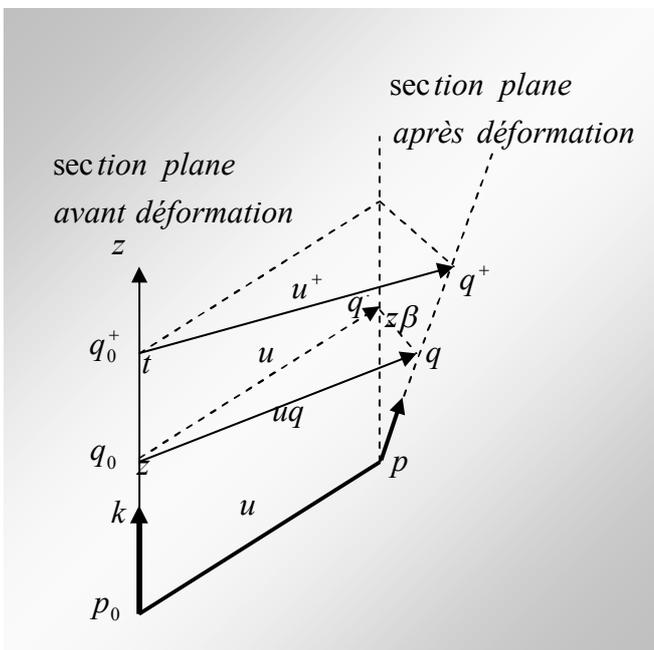


Figure:(1-7) Champ de déplacement d'un point q

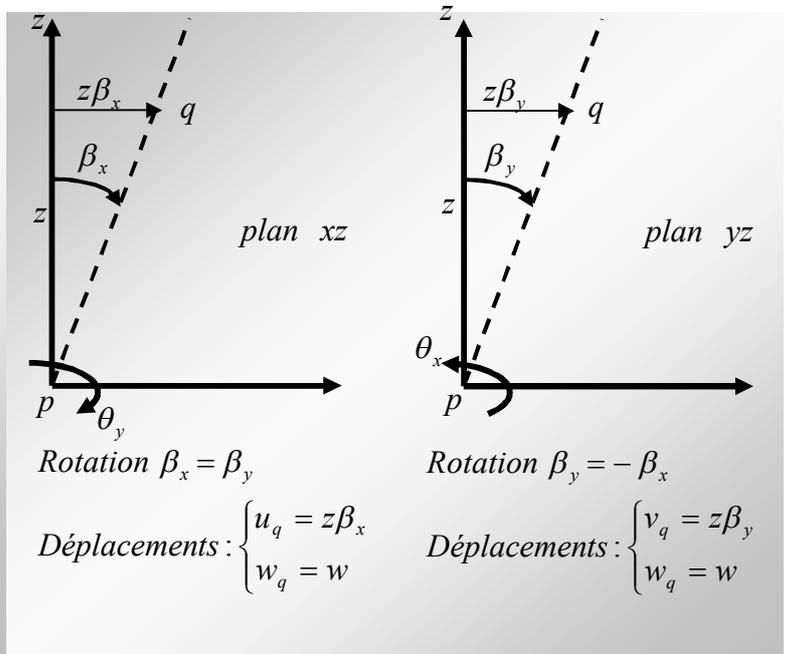


Figure:(1-8): Rotations β_x et β_y [5]

2-9) Contraintes efforts résultants dans la plaque:

Il est assez courant d'envisager dans le plan moyen de la plaque, les efforts plutôt que les contraintes; cela conduit à distinguer [33].

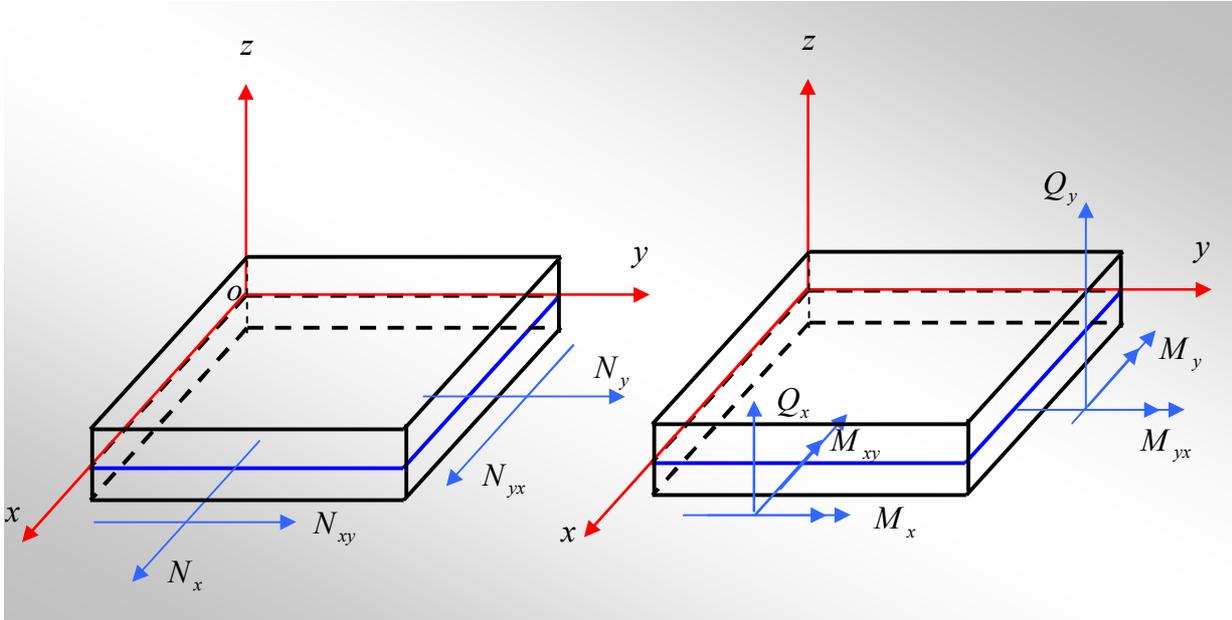


Figure: (1-9) : Efforts : Orientation et définition[33]

1-9-1/ Efforts tranchants :

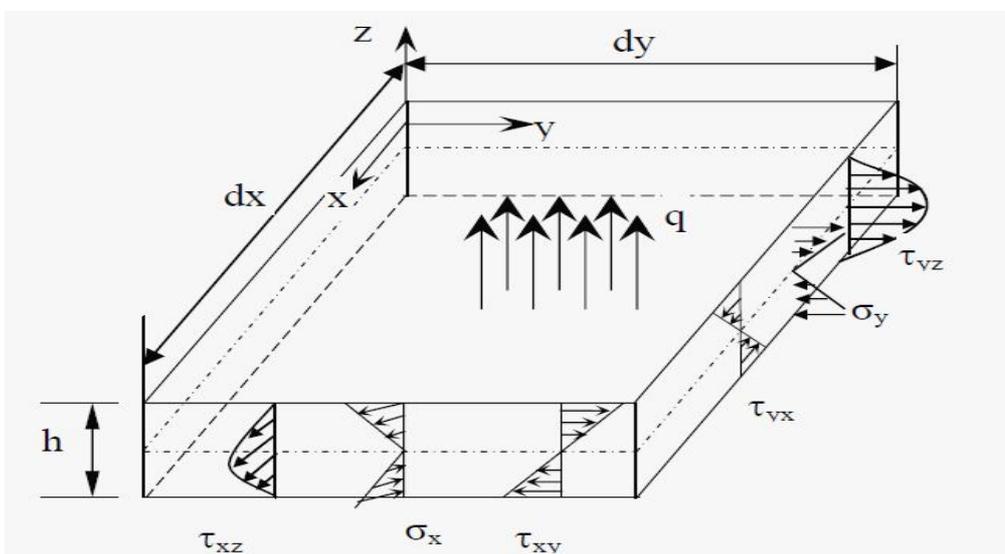


Figure (1-10) : Contraintes agissant sur un élément différentiel de plaque homogène [33]