

**3-1) Formulation de la matrice de rigidité d'un élément:**

On décrit les étapes d'analyse par éléments finis, jusqu'à l'obtention de l'expression de la matrice de rigidité élémentaire  $[K^e]$  sous forme générale [29] ; Il est très utile d'obtenir des résultats sous une forme générale susceptible d'application à n'importe quelle situation.

Pour aboutir donc la formule générale de la matrice de rigidité élémentaire, on suit les étapes suivantes :

**3-1-1) Identifier le problème**

Tout à d'abord on choisit un système de coordonnées et une numérotation des nœuds appropriée pour l'élément, et puisque l'on connaît les degrés de liberté de l'élément fini choisi, on peut déterminer le vecteur de déplacement nodal  $\{\delta_e\}$  et le vecteur de charge nodale  $\{F^e\}$

La matrice de rigidité  $[K^e]$  pour cet élément est alors défini par :

$$\{F^e\} = [K^e] \{\delta_e\} \quad (3-1)$$

**3-1-2) Choisir des fonctions de déplacements convenables:**

On choisit une fonction de déplacement qui définit de façon unique l'état de déplacement de tous les points de l'élément.

Ce modèle peut être représenté de façon commode par une expression polynomiale, et puisque son but est d'exprimer les déplacements  $\{\delta(x, y)\}$  de n'importe quel point en termes de déplacements nodaux  $\{\delta_e\}$ , elle doit contenir un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté de l'élément.

L'état des déplacements en chaque point  $M(x, y)$  de l'élément peut être décrit sous forme matricielle par l'équation :

$$\{\delta(x, y)\} = [P(x, y)] \{\alpha\} \quad (3-2)$$

Avec :  $\{\alpha\}$  est la vecteur colonne des coefficients indéterminés de la fonction  $[P(x, y)]$ .  
 $\{(x, y)\}$  : Peut avoir deux composantes  $U$  et  $V$  (dans le cas d'élasticité plane) en un point quelconque de l'élément fini,  $\{(x, y)\} = \begin{Bmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{Bmatrix}$  ou simplement une composante  $W$ , c'est à dire  $\{W(x, y)\}$  (dans le cas de flexion des plaques minces).

**3-1-3) Relier les déplacements généraux de l'élément à ses déplacements nodaux**

On s'exprime maintenant les coefficients indéterminés  $\{\alpha\}$  en fonction des déplacements nodaux  $\{\delta_e\}$  et en reportant dans l'équation (3-2), on relie les déplacements des points de l'élément aux déplacements nodaux  $\{\delta_e\}$

Puisque  $\{\delta^e(x, y)\}$  représente le déplacement au point  $M(x, y)$ , les déplacements nodaux peuvent être obtenus à partir de celui-ci en introduisant simplement les cordâmes nodales convenables dans l'équation (3-2). Cela donne par exemple pour le nœud «1 »

$$\{\delta_{e1}\} = \{\delta(x_1, y_1)\} [P(x_1, y_1)] \{\alpha\}$$

En procédant de façon similaire pour tous les autres nœuds, on obtiens pour les (n) nœud de l'élément :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1^e\} \\ \{\delta_2^e\} \\ \vdots \\ \{\delta_n^e\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [P(x_1, y_1)] \\ [P(x_2, y_2)] \\ \vdots \\ [P(x_n, y_n)] \end{bmatrix} \cdot \{\alpha\}$$

Puisque la matrice [A] est maintenant connue, le vecteur des coefficients indéterminés  $\{\alpha\}$  peut être obtenu en inversant l'expression précédente, cela donne :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \cdot \{\delta^e\}$$

On remplace  $\{\alpha\}$  par sa valeur dans l'équation (3-2) et on obtient la relation cherchée entre les déplacements  $\{(x, y)\}$  de tous les points de l'élément et les déplacements nodaux  $\delta^e(x, y)$

$$\{\delta(x, y)\} = [P(x, y)][A]^{-1} \cdot \{\delta^e\} \quad (3-3)$$

Dans la plus part des cas, il est très utile d'exprimer la fonction de déplacement en termes des déplacements nodaux, d'où on obtient :

$$\{\delta(x, y)\} = [N(x, y)] \cdot \{\delta^e\}$$

Avec [N] : est fonction de  $(x, y)$  et  $(x, y)_i$ , d'où  $i = 1, 2, \dots, n$  (coordonnées des nœuds de l'élément) d'où on aura :  $\{N(x, y)\} = [P(x, y)][A]^{-1}$

### **3-1-4) Relation entre déplacement et déformation:**

On relie maintenant les déformations  $\varepsilon(x, y)$  aux déplacements nodaux  $\{\delta_e\}$ . Les déformations aux différents points de l'élément peuvent être obtenues à partir de la fonction de déplacement par une différentiation dont la forme exacte dépend du type de problème traité. Par exemple, pour un problème d'élasticité plane, les déformations correspondent aux dérivées premières des déplacements, tandis que pour les problèmes de flexion, les déformations sont associées à la courbure de l'élément et correspondent aux dérivées secondes, En général :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [différentielle de \delta(x, y)]$$

On obtient la forme exacte de cette expression pour chaque classe de problème partir à de la théorie de l'élasticité.

En utilisant l'expression de l'équation (3-4) pour  $\{\varepsilon(x, y)\}$  et en remarquant que  $[A]^{-1}$  et  $\delta^e$  sont indépendants de  $x$  et  $y$ , le vecteur  $\{\varepsilon(x, y)\}$  : est donné par :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \text{différentielle de } [P(x, y)][A]^{-1} \cdot \{\delta^e\}$$

En posant la matrice différentielle de  $P(x, y)$  égale [C], cette équation peut être écrite de la façon suivante :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [C][A]^{-1} \cdot \{\delta^e\}$$

Où, en général,  $[C]$  : contient des termes en  $x, y$ .

C'est la relation cherchée entre les déformations en chaque point de l'élément et les déplacements nodaux, avec :  $[C][A]^{-1} = \{B\}$

D'où les éléments de la matrice  $[B]$  sont égales aux dérivées des éléments de la matrice  $[N(x, y)]$  par rapport a  $x$  et  $y$ , c'est à dire que :  $[B] = [\text{différentielle de } N(x, y)]$  Cette relation devient :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B][\delta^e] \quad (3-4)$$

**3-1-5) Relation entre déformations et contraintes:**

Pour un élément élastique linéaire, les contraintes internes  $\{\sigma(x, y)\}$  sont reliées aux déformations  $\{\varepsilon(x, y)\}$ .

Il est clair que les propriétés élastiques de l'élément devront être considérées. En générale:

$$\{\sigma(x, y)\} = \{D\}\{\varepsilon(x, y)\}$$

Où  $[D]$  est la matrice d'élasticité qui contient les propriétés élastique de l'élément : c'est -à -dire des quantités telles que le module de Young :  $E$  et le coefficient de poison.

Puisque l'on sait à partir de l'équation (3-4) que :

$$\begin{aligned} \{\varepsilon(x, y)\} &= [B][\delta^e] \\ \{\sigma(x, y)\} &= \{D\}[B][\delta^e] \end{aligned} \quad (3-5)$$

**3-1-6) Relier les charges nodales aux déplacements nodaux:**

Il est maintenant possible de formuler la matrice de rigidité  $[K_e]$  de l'élément, en utilisant les équations (3-5), (3-6) des contraintes et des déformations ainsi que le principe des travaux virtuels.

Durant n'importe quel déplacement virtuel imposé à l'élément.

Le travail extérieur total produit par les charges nodales doit être égal au travail interne total des contraintes.

Les déplacements nodaux virtuels imposés ont représenté par le vecteur  $\{\delta_e\}$  où :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \delta_1^e \\ \delta_2^e \\ \vdots \\ \delta_n^e \end{Bmatrix}$$

Ces déplacements nodaux virtuels produisent des déformations virtuelles  $\{\bar{\varepsilon}(x, y)\}$  aux points de l'élément où les contraintes réelles sont les  $\{\sigma(x, y)\}$

$$\{\bar{\varepsilon}(x, y)\} = [B][\delta^e] , \quad \{\sigma(x, y)\} = \{D\}[B][\delta^e]$$

Alors le travail interne (l'énergie de déformation interne) par unité de volume est donné par:

$$W_{\text{int}} = \{\bar{\varepsilon}(x, y)\}^T \{\sigma(x, y)\}$$

Le travail interne total est obtenu en intégrant sur le volume total de l'élément, c'est-à-dire:

$$\int_V W_{\text{int}} = \int_V [B] \{\delta^e\}^T \cdot \{\sigma(x, y)\} dV$$

En substituant les expressions de  $\bar{\varepsilon}$  et  $\sigma$  dans l'équation du travail interne, et on obtient :

$$\int_V W_{\text{int}} = \int_V \{\bar{\varepsilon}(x, y)\}^T [D] [B] [\delta^e] dV = \int_V \left( \{\delta^e\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta^e\} \right) dV$$

Dans cette équation  $\{\delta^e\}$  et  $\{\delta^e\}^T$  sont indépendants de  $x, y$ , et l'expression ci-dessus devient

$$\int_V W_{\text{int}} = \{\delta^e\}^T \left( \int_V \left( \{\delta^e\} [B]^T [D] [B] \{\delta^e\} \right) dV \right)$$

Maintenant le travail virtuel extérieur produit par les forces nodales réelles, durant le déplacement virtuel imposé  $\{\delta_e\}$  à l'élément est donné comme suit :

$$W_{\text{ext}} = \{\delta^e\}^T \{F^e\} = \{\delta^e\}^T [B]^T [K^e] \{\delta^e\}$$

Avec :  $\{F_e\}$  est le vecteur des forces nodales réelles.

En faisant, l'égalité entre le travail interne et le travail externe, produits pendant les déplacements virtuels  $\{\delta_e\}$  nous obtenons :

$$\{\delta^e\}^T [K^e] \{\delta^e\} = \{\delta^e\}^T \left( \int_V [B]^T [D] [B] dV \{\delta^e\} \right)$$

Puisque l'égalité ci-dessus (principe des déplacements virtuels) est valide pour n'importe quels déplacements virtuels nodaux  $\{\delta_e\}$  et pour n'importe quels déplacements réels nodaux  $\{\delta_e\}$  on obtient la matrice de rigidité de l'élément :

$$\begin{aligned} [K^e] &= \int_V [B]^T [D] [B] dV \\ [F^e] &= [K^e] \{\delta^e\} \end{aligned} \tag{3 - 6}$$

### **3-2) Formulations matricielles- niveaux élémentaires et global :**

#### **3-2-1) La formulation élémentaire:**

Consiste à rechercher pour chaque élément des expressions matricielles des énergies (de déformation et cinétique) et du travail des forces appliquées en fonction des inconnues élémentaire. Ceci nécessite le calcul de matrices caractéristiques de l'élément: matrice de rigidité, de masse, vecteurs de force équivalentes. On a par exemple (figure3-1). Dans le cas de l'analyse statique [41].

#### **3-2-2) La formulation globale:**

Elle consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle de l'énergie potentielle en fonction des déplacements inconnus en tous les nœuds de la structure.

Cette étape nécessite l'assemblage des matrices de rigidité et de masse et les vecteurs de forces et déplacements de la structure à partir des caractéristiques élémentaires (matrices de rigidité, de masse, les vecteurs de forces et les déplacements de chaque élément).

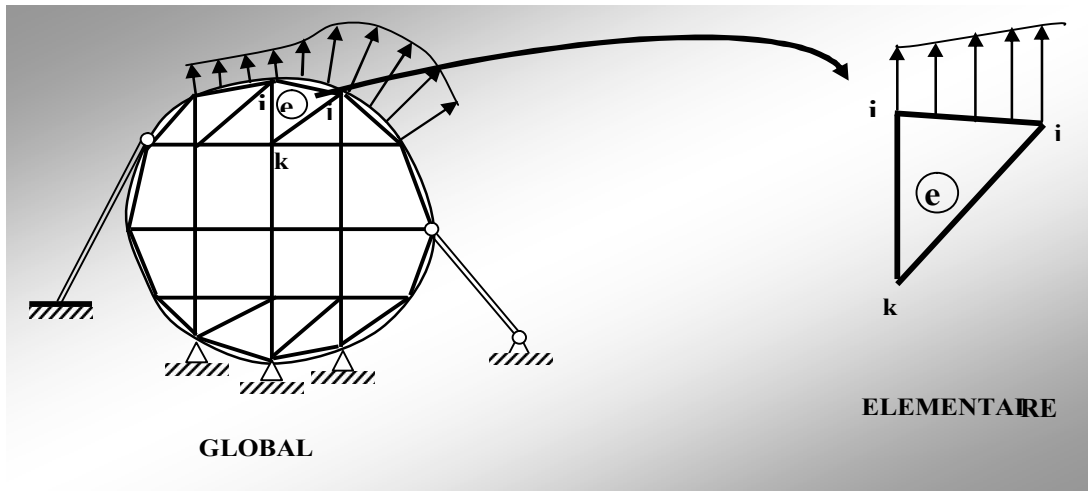


Figure (3-1): formulation global et élémentaire [41]

**3-3) Eléments de référence:**

De manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, introduisons la notion d'élément de référence: un élément de référence  $V^r$  est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel  $V^e$  par une transformation géométrique  $\tau^e$ . Par exemple dans le cas d'un triangle.

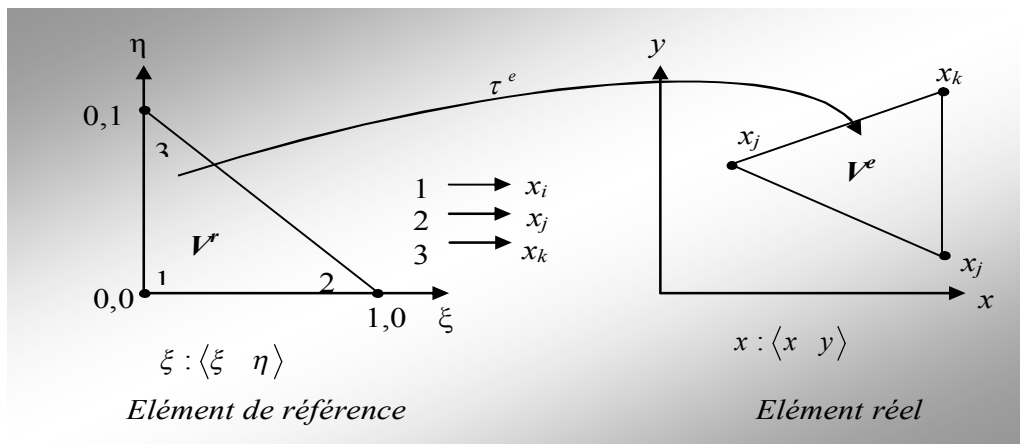


Figure (3-2) : Elément de référence

**3-3-1) Propriétés de  $\tau^e$  :**

- 1-  $\tau$  est bijective: tout point de  $V^r \Leftrightarrow$  un point de  $V^e$
  - 2- nœuds de  $V^r \Leftrightarrow$  nœuds de  $V^e$ .
  - 3- chaque frontière de  $V^r$  se transforme en la frontière correspondante de  $V^e$
- \* élément isoparamétrique:  $N(\xi) = \underline{N}(\xi)$



\* l'épaisseur de la plaque  $h$  est petite comparée à ses autres dimensions.

\* la flèche  $w$  de la plaque quand elle est chargée est petite par rapport à son épaisseur C.à.d (plaque minces).

### 3-4-2) Calcul de la matrice de rigidité d'un élément rectangulaire :

Il existe une relation directe entre la force  $F$  et le déplacement  $A$ , cette relation prend la

$$\{F\} = [K]\{\delta^e\}$$

$[K]$ : représente la matrice de rigidité de la structure.

$\{\delta^e\}$  : Vecteur de déplacements nodaux.

$\{F\}$ : Vecteur chargement extérieur.

Pour la résolution de ce type de problème en utilisant l'élément rectangulaire à quatre nœuds voir (Figure 3.3). La rotation autour de l'axe  $x$  et  $y$  :

**🔧 Etape 1: choisir un système de coordonnées convenables et numéroté les nœuds**

Le système de coordonnées et la numérotation des nœuds pour la flexion des plaques représenté sur la figure: (3-2).

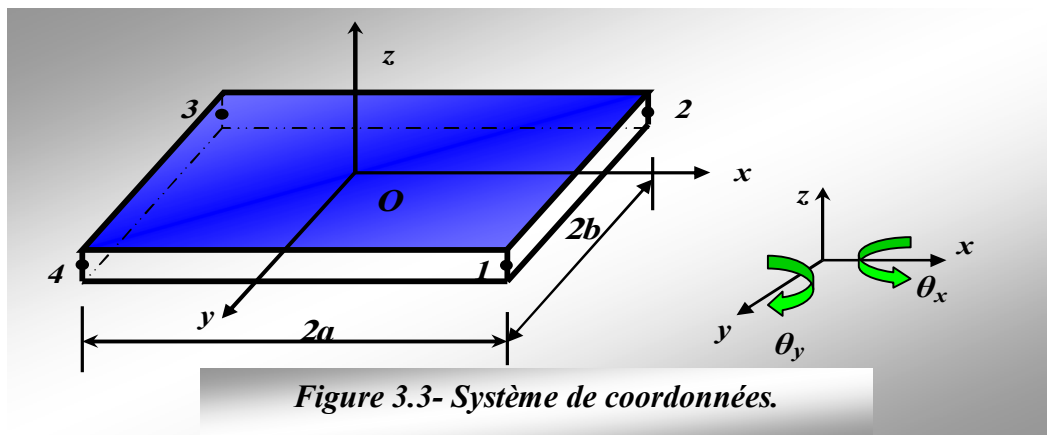


Figure 3.3- Système de coordonnées.

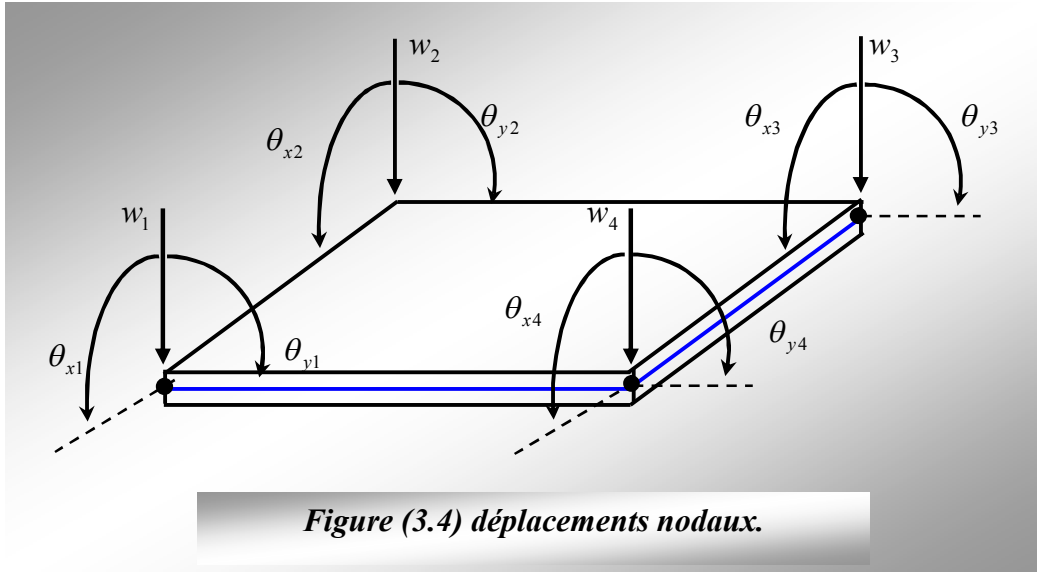
L'axe des  $z$  ayant été pris normal au plan de la plaque. Dans le cas de la flexion des plaques, l'élément à trois degrés de liberté en chaque nœud, c'est-à-dire deux rotations et la flèche transversale. La déformation latérale est représentée par  $w$ , la rotation autour de l'axe des  $x$  par  $\theta_x$  et celle autour de l'axe des  $y$  par  $\theta_y$ .

Les directions positives de ces rotations sont définies selon la règle du tire-bouchon.

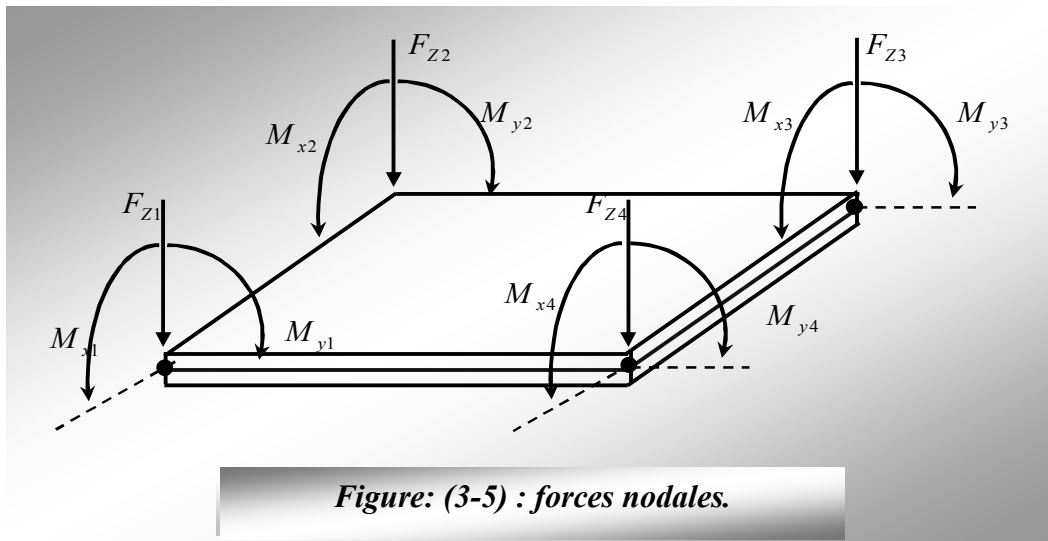
L'élément a alors un total de douze degrés de liberté figure (3.3). Les moments et les forces correspondantes consistent en deux moments  $M_x$  et  $M_y$  et une force de cisaillement  $F_z$  en chaque nœud figure (3.4). Les déplacements au nœud 1 peuvent être écrits de la façon suivante:

$$\{\delta_1\} = \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \end{Bmatrix}$$

Et même pour les forces et les moments correspondant au nœud 1 :



D'autre part pour chaque nœud le système de charge correspondant consiste en deux moments  $M_x$  et  $M_y$  et une force de cisaillement.



De telle sorte que les vecteurs complets des forces et des déplacements pour l'élément s'écrivent:



$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \\ \dots \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_2 \\ \dots \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_3 \\ \dots \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \\ w_4 \end{Bmatrix} \{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ F_{z1} \\ \dots \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ F_{z2} \\ \dots \\ M_{x3} \\ M_{y3} \\ F_{z3} \\ \dots \\ M_{x4} \\ M_{y4} \\ F_{z4} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

Puisque chacun de ces vecteurs contient douze termes, la matrice de rigidité de l'élément est carrée d'ordre 12.

$$[F^e] = [K^e] \{\delta^e\}$$

**🔧 Etape 2 : Choisir la fonction de déplacement  $f(x, y)$  qui définit le déplacement**

**$\delta(x, y)$  en chaque point de l'élément**

Dans le cas de la flexion des plaques où les flèches sont petites; l'état des déplacements en chaque point de l'élément peut être représenté par trois composantes:

$$\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{Bmatrix}$$

Les deux pentes  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont reliées au déplacement latéral  $w$  par les expressions :

$$\theta_x = +\frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{et} \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

Puisque l'élément a douze degrés de liberté, on doit avoir douze coefficients indéterminés dans le polynôme qui représente  $w$ . L'équation suivante donne une fonction convenable.

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (3-8)$$

On remarque que quand  $x$  ou  $y$  est constant, cette expression devient la même que celle prise pour un élément de poutre. La fonction de déplacement donne les expressions suivantes pour les rotations :

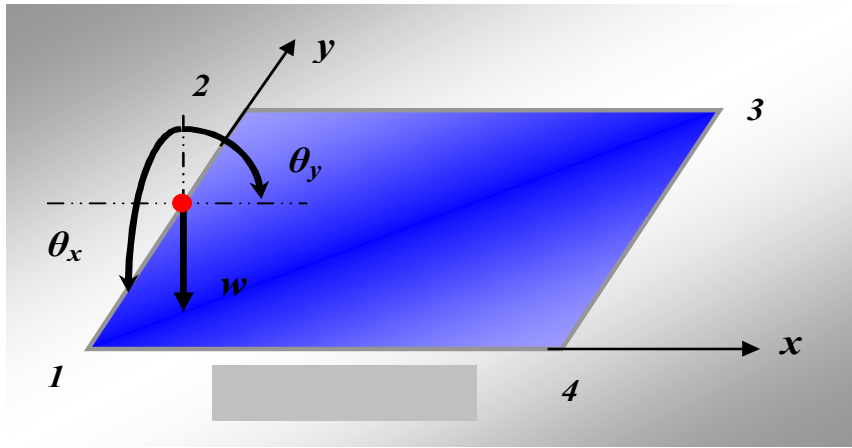
$$\theta_x = + \frac{\partial w}{\partial y} = (\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2)$$

$$\theta_y = - \frac{\partial w}{\partial x} = -(\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3)$$

Il faut maintenant vérifier que cette fonction assure la continuité des flèches et des pentes de la solution. Considérons un bord de l'élément. Par exemple le bord 1-2 où  $x$  est constant et égal à zéro.

Le déplacement latéral et les pentes en chaque point de ce bord figure (3-5) sont donnés à partir de l'équation (3-8) par:

$$\begin{cases} w = \alpha_1 + \alpha_3 y + \alpha_6 y^2 + \alpha_{10} y^3 \\ \theta_x = -(\alpha_3 + 2\alpha_6 y + 3\alpha_{10} y^2) \\ \theta_y = \alpha_2 + \alpha_5 y + \alpha_9 y^2 + \alpha_{12} y^3 \end{cases}$$



**Figure: (3-6) :** Le déplacement latéral et les pentes en chaque point de ce bord

En considérant les conditions aux extrémités de ces bords, c'est-à-dire aux nœuds 1 et 2 quand  $y = 0$  (nœud 1),

$$\begin{cases} w = w_1 = \alpha_1 \\ \theta_x = \theta_{x1} = -\alpha_3 \\ \theta_y = \theta_{y1} = \alpha_2 \end{cases}$$

Et quand  $y = b$  (nœud 2),

$$\begin{cases} w = w_2 = \alpha_1 + \alpha_3 b + \alpha_6 b^2 + \alpha_{10} b^3 \\ \theta_x = \theta_{x2} = -(\alpha_3 + 2\alpha_6 b + 3\alpha_{10} b^2) \\ \theta_y = \theta_{y2} = \alpha_2 + \alpha_5 b + \alpha_9 b^2 + \alpha_{12} b^3 \end{cases}$$

**Discussion:**

Ainsi on dispose seulement de six équations pour obtenir les huit coefficients inconnus ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_{10}, \alpha_{12}$ ) qui ne peuvent donc être déterminés. Cependant un examen

approfondi montre que  $w$  et  $\theta_x$  contiennent les mêmes quatre coefficients ( $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_{10}$ ) tandis que  $\theta_y$  contient les quatre autres coefficients ( $\alpha_2, \alpha_5, \alpha_9, \alpha_{12}$ ).

Puisque quatre des conditions sur la frontière se rapporteraient  $w$  et  $\theta_x$ , on a un nombre suffisant d'équations pour calculer les coefficients reliés à ces quantités et on peut exprimer  $w$  et  $\theta_x$  en fonction des déplacements nodaux. Les deux équations restantes ne suffisent pas pour déterminer les quartes inconnues dans  $\theta_y$ . Bien qu'il soit clair que le déplacement latéral  $w$  et la rotation le long du bord  $\theta_x$  sont complètement définis par les mouvements des extrémités, la rotation normale au bord  $\theta_y$  n'est pas définie de façon unique. Puisque les mouvements des extrémités sont compatibles, cela signifie que la continuité de  $w$  et  $\theta$  est assurée le long des bords où  $x$  est constant mais d'autre part, est discontinu le long de ces bords.

On a seulement considéré ci-dessus le cas du bord 1-2 ou  $x=0$ . Cependant, la conclusion est généralement vraie et la discontinuité de la pente normale peut exister le long de n'importe quel bord. A cause de cela, la fonction choisie n'est pas idéale et elle est appelée une «fonction non conforme». Écrire l'équation (3-8) sous forme matricielle donne l'équation (3-9) qui peut être résumée par l'équation générale suivante:

$$\{\delta(x, y)\} = [P(x, y)]\{\alpha\}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -x & -2y & 0 & -x^2 & -2xy & -3y^2 & -x^3 & -3xy^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 \\ 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \dots (3-9)$$

**🚩 Etape 3: Exprimer l'état des déplacements  $\{\delta(x, y)\}$  dans l'élément en fonction des déplacements nodaux  $\{\delta_e\}$**

En remplaçant les coordonnées nodales dans l'équation  $\{\delta(x, y)\} = [P(x, y)]\{\alpha\}$  et en cherchant  $\{\alpha\}$  solution ; cela nous amène à la formation de la matrice  $[A]$ , c'est-à-dire  $\{\delta_e\} = [A]\{\alpha\}$ . Puisque dans le cas présent l'élément à un total de douze degrés de liberté,  $[A]$  est un carré d'ordre 12 et ses coefficients sont donnés par l'équation (3-10). On doit maintenant inverser cette matrice et la relation cherchée est donnée par l'équation générale suivante:

$$\{\delta(x, y)\} = [P(x, y)][A]^{-1}\{\delta_e\}$$

$$[A] = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2b & 0 & 0 & 0 & -3b^2 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3 \\
 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & -1 & 0 & -a & 0 & 0 & -a^2 & 0 & 0 & -a^3 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3 \\
 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & -1 & 0 & -a & -2b & 0 & -a^2 & -2ab & -3b^2 & -a^3 & -3ab^2 \\
 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2b & b^3 \\
 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3
 \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{noeud 1} \\ x=0 \\ y=0 \\ \hline \text{noeud 2} \\ x=0 \\ y=b \\ \hline \text{noeud 3} \\ x=a \\ y=0 \\ \hline \text{noeud 4} \\ x=a \\ y=b \end{array} \right\} \dots (3-10)$$

**Etape 4: Relier les déformations  $\{\varepsilon(x, y)\}$  en chaque point aux déplacements  $\{\delta(x, y)\}$  et donc aux déplacements nodaux  $\{\delta_e\}$**

Dans le cas d'un problème de flexion des plaques, l'état des déformations en chaque point peut être représenté par trois composantes : la courbure dans la direction des  $x$ , la courbure dans la direction des  $y$  et la torsion. La courbure dans la direction des  $x$  est égale à la variation de la dérivée par rapport à  $x$  et égale à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

On remarque que cette expression correspond à celle donnée pour l'élément de poutre. De même la courbure dans la direction des  $y$  est égale à :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Enfin la torsion est égale à la variation par rapport à  $x$  de la dérivée par rapport à  $y$ , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Les courbures et la torsion seront multipliées par les moments internes en vue d'obtenir le travail interne effectué. Les signes des expressions ci-dessus correspondent à ceux définis pour les moments internes dans l'étape suivante.

Les moments internes  $M_x$  et  $M_y$  agissent chacun sur deux côtes de l'élément ; il en est de même pour les moments de torsion  $M_{xy}$  et  $M_{yx}$ , mais puisque  $M_{xy}$  est égal à  $M_{yx}$ , on peut considérer qu'un des deux, par exemple  $M_{xy}$ , agit sur les quatre côtes, cela en doublant le terme de torsion dans le vecteur des déformations.

L'état des déformations dans l'élément peut ainsi être représenté par:

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3-11)$$

Et en remplaçant  $w$  par sa valeur à partir de l'équation (3-8) on obtient l'équation (3-12)

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (3-12)$$

Peut être écrite :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [C] \{\alpha\} \quad (3-13)$$

De façon à définir la matrice  $C$  pour le cas de la flexion des plaques.

La relation cherchée entre déformations et déplacements nodaux est obtenue par:

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B] \{\delta^e\}$$

avec :  $[B] = [C][A]^{-1}$  (3-14)

A cause de la taille des matrices considérées, la matrice  $[B]$  ne sera pas développée explicitement. En pratique cela peut être fait avec l'ordinateur.

**🔗 Etape 5: Relier les contraintes internes  $\{\sigma(x, y)\}$  aux déformations et aux déplacements nodaux  $\{\delta_e\}$**

Dans la résolution des problèmes de flexion des plaques, les contraintes internes sont réellement les moments de flexion, de torsion, les déformations des courbures et les torsions. Ainsi l'état des contraintes peut être représenté par les trois composantes  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  comme cela est indiqué par l'équation (3-15).

$$\{\sigma(x, y)\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3-15)$$

$M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion internes par unité de longueur et  $M_{xy}$  est le moment de torsion interne par unité de longueur. Les relations entre contraintes et déformation, c'est-à-dire entre moment et courbures, sont données par la théorie de la flexion des plaques.

$$\left. \begin{aligned} M_x &= - \left( D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= - \left( D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= 2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3-16)$$

Ces relations sont écrites en termes généraux pour une plaque orthotrope, c'est-à-dire une plaque ayant des propriétés élastiques différentes dans deux directions perpendiculaires, une tôle ondulée en étant un exemple type.  $D_x$  et  $D_y$  sont les rigidités de flexion dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement,  $D_1$  est une rigidité de couplage ayant un effet du type coefficient de Poisson et  $D_{xy}$  est la rigidité de torsion. D'autre part, une plaque isotrope a les mêmes propriétés élastiques dans toute les directions et dans ce cas particulier on a :

$$D_x = D_y = D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$D_1 = \nu D \quad \text{et} \quad D_{xy} = \frac{(1-\nu)}{2} D$$

Les équations (3-15) et (3-16) peuvent s'écrire alors sous forme matricielle :

$$\{\sigma(x, y)\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3-17)$$

C'est-à-dire:

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \{\varepsilon(x, y)\} \quad (3-18)$$

Définissant ainsi la matrice (**D**). En prenant la valeur de  $\{\varepsilon(x, y)\}$ , on obtient la relation cherchée entre les contraintes de l'élément et ses déplacements nodaux :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D][B] \{\delta^e\} \quad (3-19)$$

**Etape 6:** Remplacer les contraintes internes  $\{\sigma(x, y)\}$  par des forces nodales statiquement équivalentes  $\{F_e\}$ , relier ces forces nodales aux déplacements nodaux  $\{\delta_e\}$  et de là obtenir la matrice de rigidité de l'élément  $\{K_e\}$

En faisant l'égalité entre le travail interne et le travail externe, produits pendant les déplacements virtuels  $\{\delta_e\}$  nous obtenons :

$$\{\delta^e\}^T \cdot [K^e] \cdot \{\delta^e\} = \{\delta^e\}^t \left( \int_V [B]^T \cdot [D] [B] \cdot dV \{\delta^e\} \right)$$

Puisque l'égalité ci-dessus (principe des déplacements virtuels) est valide pour n'importe quels déplacements virtuels nodaux  $\{\delta_e\}$  et pour n'importe quels déplacements réels nodaux  $\{\delta_e\}$  on obtient la matrice de rigidité de l'élément :

$$[K^e] = \int_V [B]^T \cdot [D] [B] \cdot dV \quad (3-20)$$

$$[K^e] = \int_{-b-a}^b \int_a^b [B]^T \cdot [D] [B] dx dy$$

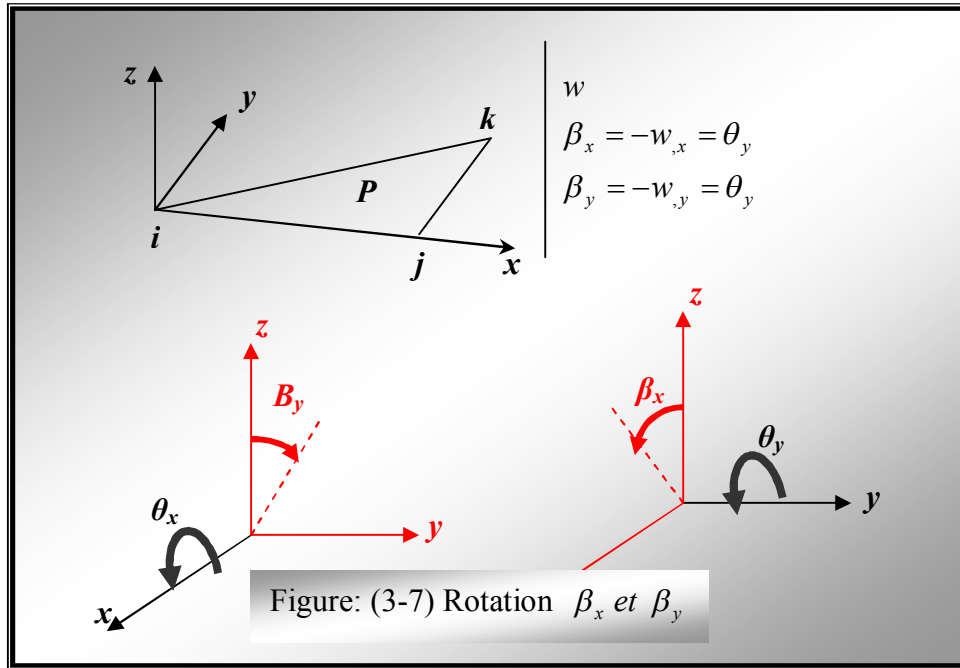
### 3-4-3) formulation de l'élément DKT:

#### 3-4-3-1) Modèle de Kirchhoff:

La théorie de Kirchhoff pour les plaques mince est basée sur l'hypothèse dite de conservation des normales, les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur une normale à cette surface après déformation.

On admet ainsi que la rigidité de cisaillement est très grande par rapport à la rigidité de flexion, cela implique que les déformations de cisaillement transversal sont négligeables par rapport aux autres composants.

Les éléments DKT ont trois nœuds et trois degrés de liberté par nœud.



Le vecteur déplacements nœdaux de l'élément s'écrit:

$$\{d\}^t = \langle w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi} \quad w_j \quad \beta_{xj} \quad \beta_{yj} \quad w_k \quad \beta_{xk} \quad \beta_{yk} \rangle$$

Etudions dans ce qui suit le modèle de Kirchhoff.

**3-4-3-2) Champ des déplacements et champ des déformations:**

Les composantes du déplacement d'un point quelconque P de l'élément  $u_z$ ,  $v_z$  et  $w_z$

$$\begin{aligned} u_z(x, y, z) &= u(x, y) + z\beta_x(x, y) \\ v_z(x, y, z) &= v(x, y) + z\beta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \tag{3-21}$$

exprimés dans le repère local de l'élément par les relations suivants:

$u, v, w$  : composantes dans le repère local du vecteur déplacement du point  $P_0$  de la surface moyenne de l'élément  $P$  et  $P_0$  sont situés sur la normale à la surface moyenne en  $P_0$

$x, y, z$  : coordonnées du point considéré dans le repère local.

Pour le champ des déformations, les composantes du vecteurs déformation s'écrivent comme suit:



$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = u_{0,x} + z\theta_{y,x} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial x} = v_{0,y} - z\theta_{x,y} \\
 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = u_{0,y} + v_{0,x} + z(\theta_{y,y} - \theta_{x,x}) \\
 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_y + w_{0,x} \\
 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_x + w_{0,y}
 \end{aligned} \tag{3-22}$$

$\varepsilon_{zz}$  Étant nulle, puisque  $w$  ne dépend pas de  $z$ .  $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

En fonction de  $\beta_x$  et  $\beta_y$ , ces composants s'écrivent:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= u_{0,x} + z\beta_{x,x} \\
 \varepsilon_{yy} &= v_{0,y} + z\theta_{y,y} \\
 2\varepsilon_{xy} &= u_{0,y} + v_{0,x} + z(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \\
 2\varepsilon_{xz} &= \beta_x + w_{0,x} \\
 2\varepsilon_{yz} &= -\beta_y + w_{0,y}
 \end{aligned}$$

On décompose la tenseur déformation comme suit:

$$\{\varepsilon_m\} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix}; \{\varepsilon_f\} = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix}; \{\varepsilon_c\} = \begin{Bmatrix} \beta_x + w_{0,x} \\ \beta_y + w_{0,y} \end{Bmatrix} \tag{3-23}$$

Ou:

$\{\varepsilon_m\}$ : Sont les termes de membrane.

$\{\varepsilon_f\}$ : Sont les termes de flexion.

$\{\varepsilon_c\}$ : Sont les termes de cisaillement.

Il peut donc être écrit sous la forme:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_m\} + \{\varepsilon_f\} \\ \{\varepsilon_c\} \end{Bmatrix} \tag{3-24}$$

### **3-4-3-3) Loi de comportement:**

Les composantes du tenseur contraintes en un point de l'élément, sont reliées a celles du tenseur déformations par la loi de Hooke, de la manière suivant:

$$\{\sigma\} = [E]. \{\varepsilon\} \tag{3-25}$$

**Avec:**

$$\begin{aligned}
 \{\sigma\}^t &= (\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xz}) \\
 \{\varepsilon\}^t &= (\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ 2\varepsilon_{xy} \ 2\varepsilon_{yz} \ 2\varepsilon_{xz})
 \end{aligned} \tag{3-26}$$

La contrainte normale à la surface moyenne de l'élément,  $\sigma_{zz}$ , est par hypothèse négligeable, ainsi que la déformation  $\varepsilon_{zz}$ , compte tenu de cette hypothèse, la relation (3-21) peut être développée sous la forme suivant:

$$\{\sigma_{xx}\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3-27)$$

Avec:

$E$ ,  $\nu$ : Module de Young et coefficient de poisson.

$\beta$ : Facteur de cisaillement transversal ( $\beta = 5/6$ ).

**3-4-3-4) Travail virtuel des efforts internes dus à la flexion:**

Le travail virtuel de déformation, ou travail virtuel interne de l'élément est le travail des contrainte sur les déformations virtuelles:

$$\delta w_i = \int_v \{\delta\varepsilon_{ij}\} \{\sigma_{ij}\} dv \quad (3-28)$$

$v$ : volume de l'élément.

Avec:  $\{\sigma\} = [E_f] \{\varepsilon_f\}$

Donc:

Compte tenu de l'équation (3-25),  $\delta w_i$  peut s'exprimer sous forme matricielle:

$$\delta w_i = \int_v \{\delta\varepsilon\}' [E] \{\varepsilon\} dv \quad (3-29)$$

D'après la relation (3-22) nous pouvons écrire:

$$\delta w_i = \int_v z_2 \{\delta\varepsilon_f\} [E_f] \{\varepsilon_f\} dv + \int_v \{\delta\varepsilon_m\} [E_m] \{\varepsilon_m\} dv + \int_v \{\delta\varepsilon_c\} [E_c] \{\varepsilon_c\} dv \quad (3-30)$$

Ou le premier terme du second membre est un terme de flexion, le deuxième est un terme de membrane et le dernier terme est celui de cisaillement

$$[E_f] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [E_f] = \frac{\beta E}{2(1+\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

**3-4-3-5) Construction de la matrice de rigidité élémentaire pour les éléments DKT :**

Pour la construction de la matrice de rigidité élémentaire, nous négligerons l'énergie de déformation due aux termes de cisaillement, celle-ci est souvent négligeable devant celle due aux termes de flexion dans le cas des structures minces. La matrice de rigidité élémentaire sera donc définie à partir des termes de rigidité dus aux efforts de flexion.

**3-4-3-5-1) Terme de flexion:**

Les paramètres nodaux de l'élément flexionnel sont:

- Le déplacement latéral  $w_i$
- La rotation  $\beta_{xi}$  de la normale à la surface moyenne par rapport à l'axe  $y$ .
- La rotation  $\beta_{yi}$  de la normale à la surface moyenne par rapport à l'axe  $x$ .

L'énergie interne de déformation de flexion peut s'écrire de la manière suivante:

$$\delta W_{iF} = \int_V z^2 \langle \delta \varepsilon_F \rangle [H_f] \{ \varepsilon_F \} dV \tag{3-32}$$

D'après les relations (3-23), on remarque que l'équation (3-32) ne contient que les dérivées premières des fonctions  $\beta_x$  et  $\beta_y$ . Il nous suffit donc d'assurer la continuité  $C_0$  de ces fonctions.

Nous introduisons ensuite les hypothèses suivantes, concernant  $w$ ,  $\beta_x$  et  $\beta_y$ .

**🚩 Première Hypothèse:** Concernant les variations du déplacement  $w$

La variation de  $w$  est à l'intérieur de l'élément comme le long  $b$  de ses cotés sont cubiques. On ne s'intéresse dépendant, pour l'élément **DKT**, qu'aux variations de  $w$  le long de ses cotés. Considérons, pour ce faire, le côté  $i, j$  de l'élément, et soit  $s$  l'abscisse curviligne sur ce côté, l'expression de  $w$  le long de  $i, j$  s'écrit:

$$w_s = a + bs + cs^2 + ds^3. \tag{3-33}$$

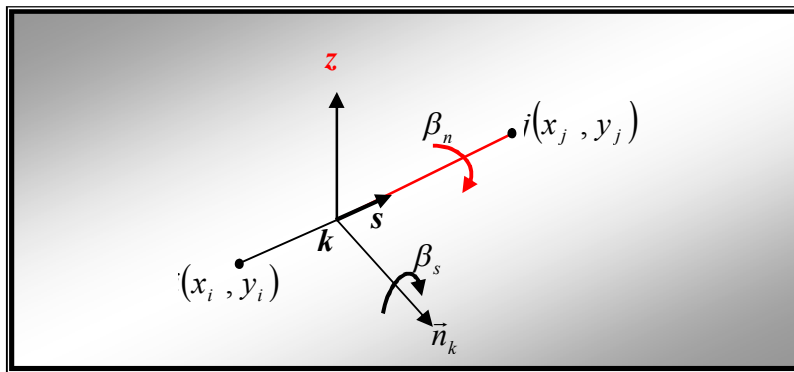


Figure: (3-8) Rotation  $\beta_s$  et  $\beta_n$

Les valeurs de la flèche  $w$  aux nœuds  $i$  et  $j$  sont alors:

$$\begin{aligned} w^i &= w(0) = a \\ w^j &= w(l_{ij}) = a + bl_{ij} + cl_{ij}^2 + dl_{ij}^3 \end{aligned} \tag{3-34}$$

La dérivée de la flèche  $w$  par rapport à l'abscisse curviligne est égale à:

$$w_s = b + 2cs + 3ds^2 \tag{3-35}$$

Les valeurs de cette dérivée aux points  $i$  et  $j$  sont:

$$w_s^i = w_s(0) = b$$

$$w_s^j = w_s(l_{ij}) = b + 2cl_{ij} + 3dl_{ij}^2 \quad (3-36)$$

Au nœud milieu  $k$  la valeur de

$$w_s^k = w_s\left(\frac{l_{ij}}{2}\right) = \frac{3}{2}l_{ij} (w_s^j - w_s^i) - \frac{1}{4}(w_s^i - w_s^j) \quad (3-37)$$

Introduction maintenant l'hypothèse de Kirchhoff, stipulant la nullité des déformations de cisaillement:

$$\{\varepsilon_c\} = \{0\}$$

Cette hypothèse se traduit comme suit:

\* Aux nœuds coins ( $i, j, k$ ):

$$\{\varepsilon_c\} = \begin{Bmatrix} -\theta_x + w_{0,y} \\ \theta_y + w_{0,x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_y + w_{0,y} \\ \beta_x + w_{0,x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ce qui implique

$$\beta_x = -w_{0,x}$$

$$\beta_y = -w_{0,y}$$

\* Aux nœuds milieu  $k$  ( $k = i+1, j+1, k+1$ ):

Portant de la rotation:

$$2\varepsilon_{sz} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} = -\theta_n + w_{,s} = \beta_s + w_{,s}$$

Avec:

$\hat{u}$  : Composante du déplacement suivant  $i, j$

$\varepsilon_{sz}$  : étant nulle (type de Kirchhoff), on obtient


$$\beta_s^k = -w_{,s}^k$$

Dans les relations précédents:

$\vec{n}$  : est le vecteur unitaire appartenant au plan de l'élément et normale au coté contenant le nœud milieu considéré a ne pas confondre avec la normale à l'élément, c'est-à-dire à la surface moyenne.

$\vec{n}$  ici est la normale géodésique du coté  $i, j$ .

$\theta_n^k$  ou  $\beta_s^k$  Et la rotation de la normale à la surface moyenne de l'élément au nœud milieu  $k$  a l'origine de  $\vec{n}$ .

 **Deuxième Hypothèse** : Concernant les rotations  $\beta_x$  et  $\beta_y$ .

Les variations des rotations  $\beta_x$  et  $\beta_y$  sont quadratiques à l'intérieur de l'élément, comme le long de ses cotés. Par conséquent, et pour effectuer une interpolation quadratique sur l'élément, il faut ajouter trois nœuds intermédiaires aux milieux des trois cotés de l'élément.

Les nœuds sommets de l'élément sont notés  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), et les nœuds milieux seront notés  $k$  ( $k = 4, 5, 6$ ).

Les approximations quadratiques, de classe  $C_0$  de  $\beta_x$  et  $\beta_y$  seront déduites des approximations linéaires de ces mêmes rotations, par l'introduction de corrections, à travers une interpolation quadratique de  $\Delta\beta_\alpha$ ,  $\alpha = x; y$

$$\beta_x = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) \beta_x^i + \sum_{k=4}^6 P_{xk}(\xi, \eta) \cdot \Delta \beta_x^k$$

$$\beta_y = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) \beta_y^i + \sum_{k=4}^6 P_{yk}(\xi, \eta) \cdot \Delta \beta_y^k \quad (3-38)$$

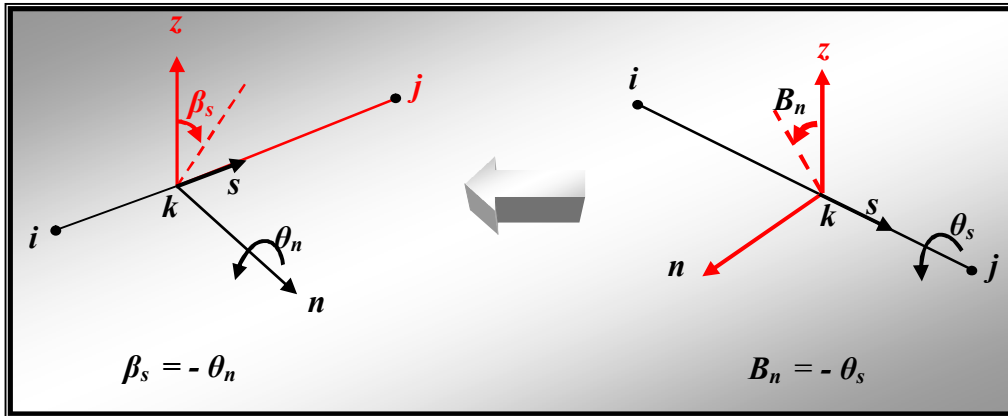
$N_i(\xi, \eta)$  : Fonction d'interpolation linéaire du nœud  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

$P_{\alpha k}(\xi, \eta)$ ;  $\alpha = x, y$  : Fonction d'interpolation quadratique du nœud  $k$  ( $k = 4, 5, 6$ ).

**Troisième Hypothèse:** Concernant les variations de  $\beta_s$  et  $\beta_n$ .

- la variations  $\beta_s$  (dans le plan  $sz$  ou  $s$  et la coordonnée le long des cotés) est quadratique en  $s$ .

- la variations  $\beta_n$  (dans le plan  $nz$  ou  $n$  et la direction normale aux cotés) est linéaire en  $s$ .  
 $\vec{n}$  est dirigé vers l'extérieur de l'élément est situé dans le plan de l'élément.



Concernant  $\beta_s$ , on constant que:

$$\beta_{sk} = \frac{1}{2}(\beta_{si} + \beta_{sj}) + \alpha_k$$

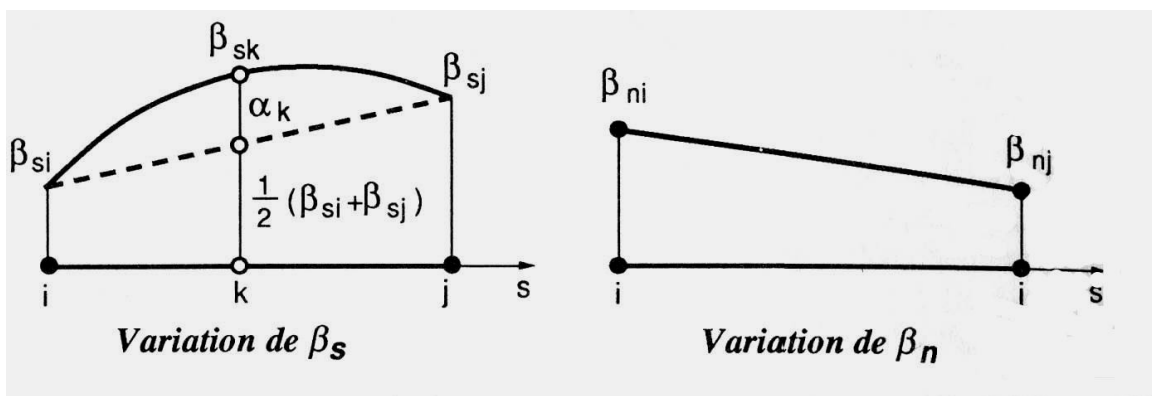


Figure (3-9): variation de  $\beta_s$  et  $\beta_n$

**Quatrième Hypothèse:** Concernant le cisaillement transverse.

C'est l'hypothèse de Kirchhoff, elle traduit la nullité des déformations de cisaillement transversal  $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$  et  $\gamma_{zx}$ . Ainsi:

\* aux nœuds coins (1, 2, 3):

$$\{\epsilon_c\} = \begin{Bmatrix} \beta_x + w_{0,x} \\ \beta_y + w_{0,y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-39)$$

Ce qui implique:  $\beta_\alpha = -w_{0,\alpha} \quad ; \quad \alpha = x, y$  (3-40)

Aux nœuds milieu 4, 5, 6 pour l'élément triangulaire.

$$\beta_s^k + w_{,s}^k = 0 \quad (3-41)$$

Ce qui implique:

$$\beta_s^k = -w_{,s}^k \quad (3-42)$$

Et d'après (3-37):

$$\beta_s^k = -w_{,s}^k = \frac{3}{2l_{ij}}(w^i - w^j) + \frac{1}{4}(w_{,s}^i - w_{,s}^j) \quad (3-43)$$

$\beta_s^k$ , qui est égale à  $(-\theta_n^k)$  : est la rotation de la normale à la surface moyenne de l'élément au nœud  $k$  autour de la normale au coté  $k$ , (ou l'indice inférieur  $n$  de  $\theta$  est le vecteur unitaire apportant au plan de l'élément et normale au coté contenant le nœud milieu considéré).

Les hypothèses précédentes vont nous permettre d'exprimer les rotations  $\beta_x$  et  $\beta_y$  en fonction des paramètres nodaux  $w^i$ ,  $\beta_x^i$ ,  $\beta_y^i$ ;  $i=1, 2, 3$ . Pour ce faire, nous aurons besoin des relations suivantes, reliant les rotations  $\beta_x$  et  $\beta_y$  aux rotations  $\beta_s$  et  $\beta_n$

$$\begin{Bmatrix} \beta_s \\ \beta_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad (3-44)$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_s \\ \beta_n \end{Bmatrix} \quad (3-45)$$

Où  $C$  et  $S$  sont les cosinus et le sinus de l'angle  $\gamma_{ij}$  compris entre l'axe  $x$  du repère local et la normale  $\bar{n}_k$  au coté  $i,j$

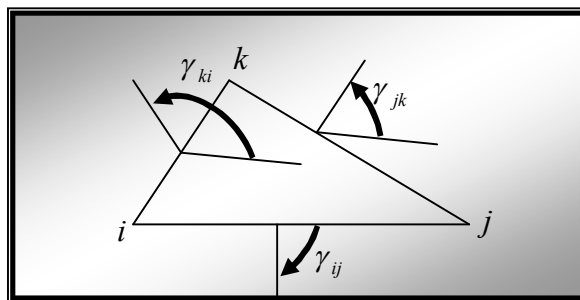


Figure (3-10): L'angle  $\gamma_{ij}$

Dans l'expression (3-38) nous avons introduit les variables intermédiaires de correction  $\Delta\beta_x^k$  et  $\Delta\beta_y^k$  ( $k = 4, 5, 6$ ). A l'aide des relations issues des hypothèses 1, 2, et 4, nous allons exprimer ces variables en fonction des paramètres nodaux  $w^i, \beta_x^i, \beta_y^i$ , (déplacements et rotations des nœuds sommets).

Pour ce faire, nous déterminerons d'abord la valeur de la rotation  $\beta_s$  au nœud milieu  $k$  du côté  $i, j$ . considérons les notations suivantes:

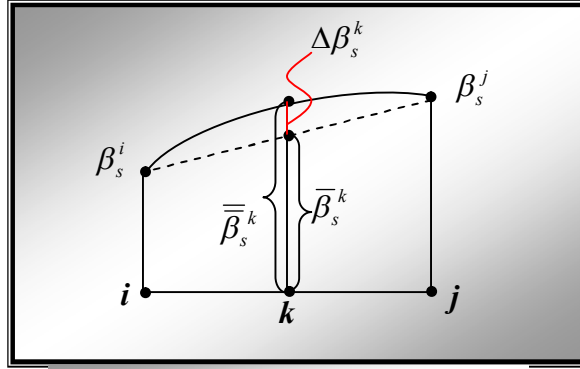


Figure (3-11): La valeur  $\beta_s$

$\bar{\beta}_s$  : la rotation en un point du côté  $i, j$ , d'abscisse curviligne  $s$ , obtenue par interpolation linéaire à partir des deux rotations des noeuds coins  $\beta_s^i$  et  $\beta_s^j$ .

$\beta_s$  : la valeur de la rotation en ce même point, obtenue par interpolation quadratique. Alors, l'expression donnant la valeur de la rotation en un point du côté  $i, j$  s'écrit

$$\beta_s = \bar{\beta}_s + \Delta\beta_s$$

Au noeud milieu  $k$  du côté  $i, j$ , nous avons ainsi:

$$\bar{\beta}_s^k = \bar{\beta}_s^k + \Delta\beta_s^k$$

Tenant compte de (3-37) et (3-42) nous déduisons l'expression de  $\Delta\beta_s^k$ :

$$\Delta\beta_s^k = \beta_s^k - \bar{\beta}_s^k = \frac{3}{2l_{ij}}(w^i - w^j) - \frac{3}{4}(\beta_s^i - \beta_s^j)$$

Qui s'écrit en fonction des paramètres nodaux, tenant compte de (3-44).

$$\Delta\beta_s^k = \frac{3}{2l_{ij}}(w^i - w^j) - \frac{3}{4}(C_k\beta_{xi} + S_k\beta_{yi} + C_k\beta_{xj} + S_k\beta_{yj}) \tag{3-46}$$

\* Pur  $\bar{\beta}_s$  elle est obtenue par interpolation linière.

$$\bar{\beta}_s = \sum_1^3 N_i(\xi, \eta)\beta_s^i, \text{ avec} \tag{3-47}$$

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \lambda = 1 - \xi - \eta \\ N_2(\xi, \eta) &= \xi \\ N_3(\xi, \eta) &= \eta \end{aligned} \tag{3-48}$$

\* pour  $\Delta\beta_s$ , elle est obtenue par interpolation quadratique

$$\Delta\beta_s = \sum_{n=4}^6 P_k(\xi, \eta) \Delta\beta_s^k$$

$$P_4(\xi, \eta) = 4\xi\lambda = 4\xi(1 - \xi - \eta).$$

$$P_5(\xi, \eta) = 4\xi\eta. \quad (3-49)$$

$$P_6(\xi, \eta) = 4\eta\lambda = 4\eta(1 - \xi - \eta).$$

Nous obtenus finalement

$$\beta_s^k = \sum_{n=1}^3 N_i(\xi, \eta) \bar{\beta}_s^i + \sum_{n=4}^6 P_k(\xi, \eta) \Delta\beta_s^k \quad (3-50)$$

Les expressions de  $\Delta\beta_x$  et  $\Delta\beta_y$  en fonction de  $\Delta\beta_s$  sont déterminées d'après les relations (3-45) tout en précisant la nullité du terme  $\Delta\beta_n$ , car l'interpolation de  $\beta_n$  est toujours linéaire ainsi:

$$\Delta\beta_x = C_k \cdot \Delta\beta_s$$

$$\Delta\beta_y = S_k \cdot \Delta\beta_s \quad (3-51)$$

En substituant dans les expressions (3-38) nous obtenons les expressions suivantes:

$$\beta_x = \sum_1^3 N_i(\xi, \eta) \beta_x^i + \sum_4^6 C_k P_x^k(\xi, \eta) \Delta\beta_s^k$$

$$\beta_y = \sum_1^3 N_i(\xi, \eta) \beta_y^i + \sum_4^6 S_k P_y^k(\xi, \eta) \Delta\beta_s^k \quad (3-52)$$

D'où l'on tire:

$$P_x^k(\xi, \eta) = C_k P_x^k(\xi, \eta)$$

$$P_y^k(\xi, \eta) = S_k P_y^k(\xi, \eta) \quad (3-53)$$

Nous allons maintenant exprimer  $\beta_x$  et  $\beta_y$  en fonction des paramètres nodaux, et ce sous la forme:

$$\beta_\alpha = \langle N_\alpha \rangle \cdot \{d_f\} \quad ; \quad \alpha = x, y \quad (3-54)$$

Où  $\{d_f\}$  est le vecteur des paramètres nodaux.

$$\{d_f\}^t = (\langle d_{f1} \rangle \quad \langle d_{f2} \rangle \quad \langle d_{f3} \rangle)$$

Avec:

$$\langle d_{fi} \rangle = \langle w^i \quad \beta_x^i \quad \beta_y^i \rangle \quad ; i = 1, 2, 3$$

$$\{N_\alpha\}^t = (\langle N_\alpha^1 \rangle \quad \langle N_\alpha^2 \rangle \quad \langle N_\alpha^3 \rangle) \quad \alpha = x, y$$

$$\langle N_\alpha^i \rangle = \langle N_{\alpha 1}^i \quad N_{\alpha 2}^i \quad N_{\alpha 3}^i \rangle \quad i = 1, 2, 3$$

Nous obtenons ainsi:



$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \langle N_x \rangle \\ \langle N_y \rangle \end{Bmatrix} \{d_f\}$$

Expression qui s'écrit sous forme développée comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{x1}^1 & N_{x2}^1 & N_{x3}^1 & N_{x1}^2 & N_{x2}^2 & N_{x3}^2 & N_{x1}^3 & N_{x2}^3 & N_{x3}^3 \\ N_{y1}^1 & N_{y2}^1 & N_{y3}^1 & N_{y1}^2 & N_{y2}^2 & N_{y3}^2 & N_{y1}^3 & N_{y2}^3 & N_{y3}^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w^1 \\ \beta_x^1 \\ \beta_y^1 \\ w^2 \\ \beta_x^2 \\ \beta_y^2 \\ w^3 \\ \beta_x^3 \\ \beta_y^3 \end{Bmatrix} \quad (3-55)$$

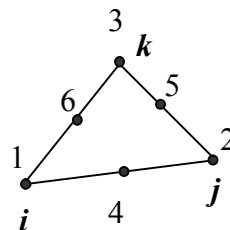
Les expressions de  $N_x^i$  et  $N_y^i$  sont obtenues, d'après les relations (3-52) et (3-46)

$$\begin{aligned} N_{x1}^i(\xi, \eta) &= \frac{3}{2l_k} P_k C_k(\xi, \eta) - \frac{3}{2l_r} P_r C_r(\xi, \eta) \\ N_{x2}^i &= N_i(\xi, \eta) - \frac{3}{4} P_k C_k^2(\xi, \eta) - \frac{3}{4} P_r C_r^2(\xi, \eta) \\ N_{x3}^i &= -\frac{3}{4} P_k C_k S_k(\xi, \eta) - \frac{3}{4} P_r C_r S_r(\xi, \eta) \\ N_{y1}^i(\xi, \eta) &= \frac{3}{2l_m} P_k C_k(\xi, \eta) - \frac{3}{2l_r} P_r C_r(\xi, \eta) \\ N_{y2}^i &= -\frac{3}{4} P_k C_k S_k(\xi, \eta) - \frac{3}{4} P_r C_r S_r(\xi, \eta) \\ N_{y3}^i &= N_i(\xi, \eta) - \frac{3}{4} P_k S_k^2(\xi, \eta) - \frac{3}{4} P_r S_r^2(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3-56)$$

Où  $N_i(\xi, \eta)$  et la fonction d'interpolation linéaire du nœud  $i$  ( $i= 1,2,3$ ), et les indice  $k$  et  $r$  de la fonction d'interpolation quadratique  $P$  des nœuds 4,5,6 sont relatifs aux deux cotés ayant le sommet  $i$  comme point commun. Dans le tableau (3-1) ci-dessous sont définis les indice  $k$  et  $r$  pour chaque nœud de l'élément.

Nœuds sommet $j$	Coté $k$ ( $i-j$ )	Coté $r$ ( $i-j$ )
1	4 (1-2)	6 (3-1)
2	5 (2-3)	4 (1-2)
3	6 (3-1)	5 (2-3)

Tableau (3-1) : Valeurs des indices  $k$  et  $r$  de chaque coté



$\langle N_x \rangle$  et  $\langle N_y \rangle$  sont donc deux vecteurs à neuf composantes, qui dépendent de la géométrie de l'élément (cosinus directeurs et longueurs des cotés).

L'étape suivante sera la détermination du vecteur déformation (au sens généralisé), en fonction des paramètres nodaux. Ce vecteur s'écrit:

$$\{\varepsilon_f\} = \{\mathcal{X}\} = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \langle N_x \rangle_{,x} \\ \langle N_y \rangle_{,y} \\ \langle N_x \rangle_{,y} + \langle N_y \rangle_{,x} \end{Bmatrix} \cdot \{d_f\} = [B_f] \cdot \{d_f\} \quad (3-57)$$

La dimension de  $[B_f]$  est 3x9 et celle de  $\{d_f\}$  9x1. Pour la détermination de  $[B_f]$  nous procédons comme suit:

Etant donné que les  $N_\alpha^i$  ;  $(\alpha = x, y)$  sont des fonctions en  $\xi$  et  $\eta$ , le calcul de leur dérivées par rapport à  $x$  et  $y$  nécessite l'introduction de la jacobienne de transformation géométrique  $J$ . ainsi .

$$\begin{Bmatrix} \beta_{\alpha,\xi} \\ \beta_{\alpha,\eta} \end{Bmatrix} = [J] \cdot \begin{Bmatrix} \beta_{\alpha,x} \\ \beta_{\alpha,y} \end{Bmatrix} \quad (3-58)$$

Avec, en tenant compte des relations d'interpolation géométrique (3-48), et en adoptant la notation  $\alpha_{ij} = \alpha_i - \alpha_j$  ;  $(\alpha = x, y)$

$$[J] = \begin{pmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{pmatrix} \quad (3-59)$$

La multiplication des deux membres de la relation par  $[J^{-1}]$  donne:

$$\begin{Bmatrix} \beta_{\alpha,\xi} \\ \beta_{\alpha,\eta} \end{Bmatrix} = [J] \cdot \begin{Bmatrix} \beta_{\alpha,x} \\ \beta_{\alpha,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \beta_{\alpha,\xi} \\ \beta_{\alpha,\eta} \end{Bmatrix} \quad (3-60)$$

Ou  $\det J$  est le déterminant de la matrice jacobienne, qui est égal au double de l'aire de l'élément triangulaire.

**detJ= 2A**

Finalement, le vecteur déformations s'écrit:

$$\{\varepsilon_f\} = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} \langle N_{,\xi}^x \rangle - J_{12} \langle N_{,\eta}^x \rangle & 0 \\ 0 & -J_{21} \langle N_{,\xi}^y \rangle + J_{11} \langle N_{,\eta}^y \rangle \\ -J_{21} \langle N_{,\xi}^x \rangle + J_{11} \langle N_{,\eta}^x \rangle & + J_{22} \langle N_{,\xi}^y \rangle - J_{12} \langle N_{,\eta}^y \rangle \end{bmatrix} \cdot \{d_f\} \quad (3-61)$$

L'expression de la matrice de rigidité due aux efforts de flexion s'écrit comme suit:

$$[k_f]_{DKT} = \int_v [B_f]^t \cdot [H_f] \cdot [B_f] \cdot z^2 dv \quad (3-62)$$

### 3-5) Distorsion des éléments :

Une distorsion excessive des maillages implique une déformation des éléments par rapport aux formes de référence. Cette déformation peut entraîner des problèmes d'ordre numérique pour l'élément (pré séparément) mais aussi pour le système assemblé.

Il n'y pas une distorsion lorsque la matrice jacobienne est diagonale et elle est indépendante des coordonnées paramétriques de l'élément [26].

Les dimensions et les angles des maillages doivent donc respecter des ratios dictés par l'expérience et ne pas dépasser certaines limites. Par exemple, les angles intérieurs d'un élément triangulaire doivent être compris entre 15 et 165. Ces chiffres sont des ordres de grandeur qui ne sont pas applicables à tous les éléments. En effet, il existe des éléments plus sensibles que d'autres à la distorsion.

Pour les éléments de type Lagrange d'ordre supérieur. Les positions des nœuds intermédiaires contribuent à la distorsion d'un élément (figure 4-1). Dans le cas des éléments quadratiques, le nœud intermédiaire sur un côté ne doit pas être trop proche d'un nœud sommet: cette distance doit rester supérieure au quart de la longueur du côté ou (de préférence) être sensiblement égale à la moitié de la longueur du côté.

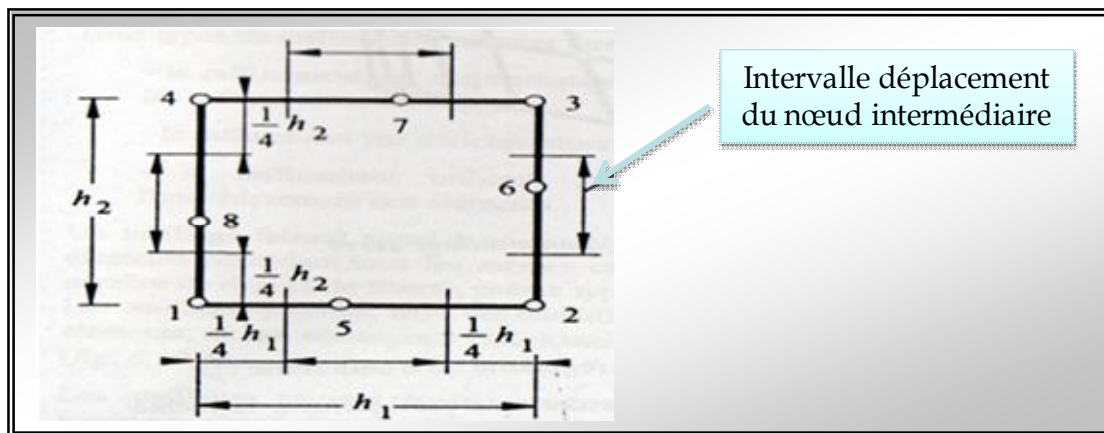
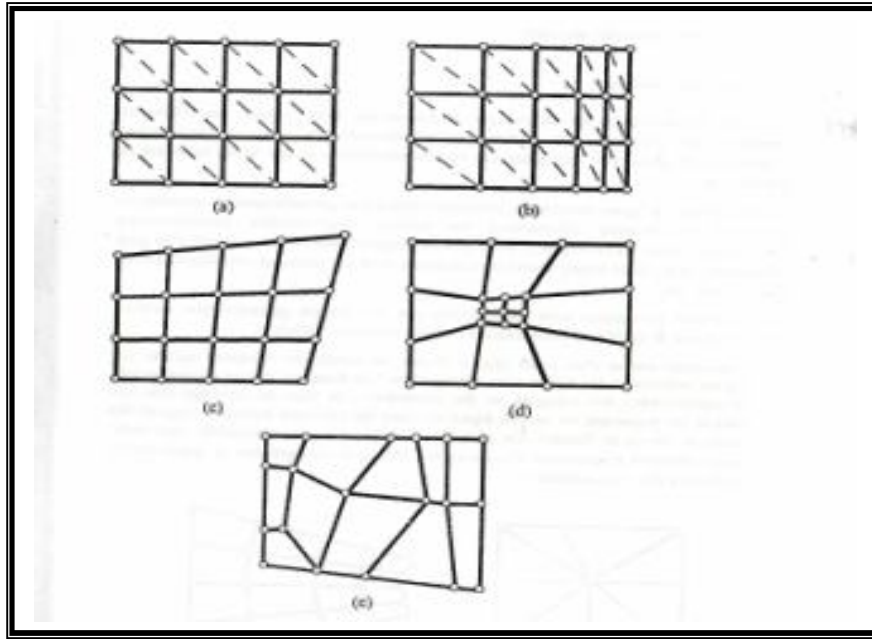


Figure (3-12): limites conseillées des positions des nœuds intermédiaires pour des éléments quadratiques (Lagrange) [26]

**3-5-1) Régularité des maillages :**

Les maillages peuvent être qualifiés par des termes de régularité ou d'uniformité:

\* un maillage est uniforme lorsque les angles des éléments de référence sont conservés (figure 3-13) ce type de maillage est généralement "bon" si le nombre d'éléments suffisant.



**Figure (3-13) :** Différents type de régularité des maillages[26]

\* un maillage est non *uniforme* lorsque la taille et la forme des éléments varient continument (homothétie) et lorsque les angles des éléments de référence sont conservés (**Figure 3-10. a**); ce type de maillage est également "bon" si les éléments ne sont pas trop distordus.

\* un maillage est non *uniforme* lorsque la taille et la forme des éléments varient continument (homothétie) et lorsque les angles des éléments de référence sont conservés (**Figure 3-10. b**); ce type de maillage est également "bon" si les éléments ne sont pas trop distordus

\* un maillage est régulier lorsque les éléments ont des tailles semblables mais lorsque les angles des éléments de référence ne sont pas spécialement conservés (**Figure 3-10. c**)  
Ce type de maillage est "assez bon" si les angles des éléments ne sont pas trop différent des angles de référence.

\* un maillage est irrégulier lorsque la taille moyenne des éléments voisins peut varier (soit continûment, soit brutalement mais localement) et lorsque les angles des éléments de référence ne sont pas conservés (**Figure 3-10. d**); ce type de maillage n'est pas à conseiller sauf si le rapport de surface entre les éléments adjacents reste inférieur à 2 (cas des éléments plans).

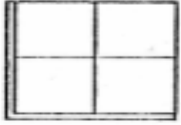

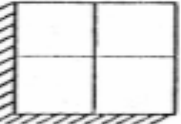



\*un maillage est dit chaotique lorsque la taille et la forme des éléments sont distribuées aléatoirement (**Figure 3-10. e**); ce type de maillage doit être évité.

**3-5-2) Influence de la distorsion géométriques :**

Il est intéressant d'étudier le comportement d'un élément réel présentant une distorsion géométrique importante par rapport à l'élément de référence (il y a  $\xi$  et  $\eta$  ) lorsque la matrice jacobienne **[J]** n'est pas indépendante de plusieurs tests ou techniques peuvent être utilisés pour évaluer la distorsion **[5]**.

On peut, par exemple, comparé les résultats obtenus avec un maillage régulier et un maillage irrégulier.

On considère qu'une plaque carrée encastrée soumise à une charge concentrée. En maillant le quart de la plaque en raison de la symétrie, on compare la flèche au centre pour deux maillages différents, un maillage régulier (élément **ACM**), et un maillage distordu (élément **ACM-D**).

Maillage		Influence du maillage sur $w_c$
Régulier	Irrégulier	
		Piaque en appui simple Charge uniforme: 1.05 %
		Piaque encastrée Charge concentrée: 0.17 %
		Piaque en appui simple Charge concentrée: -0.5 % Charge uniforme: 0.45 %

**Fig. (3-14):** Influence de la distorsion sur  $W$  au centre **[5]**