

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED KHIEDER – BISKRA
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL**

N° d'ordre :

Série :

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de **Magistère** en Génie Civil

Option : mécanique de sol et structures

Par

LAHLOUHI AISSA

THEME

**CONTRIBUTION DE L'APPROCHE EN DEFORMATION
DANS L'ANALYSE DES STRUCTURES
D'ELASTICITE PLANE**

Soutenu le : 03/11/ 2007

Devant le jury :

Président	: BENMBAREK. S	Prof.	Université de Biskra
Rapporteur	: BELOUNAR. L	M.C.	Université de Biskra
Examineurs	: HECINI .M	M.C.	Université de Biskra
	BOUREZANE. M	M.C.	Université de Biskra

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur **L. BELOUNAR**, maître de conférence à l'université de Biskra et directeur de ce mémoire pour son assistance, sa disponibilité et pour m'avoir dirigé et encouragé pendant l'accomplissement de ce travail.

Je lui en profondément reconnaissant.

Je tiens à remerciements les membres de jury:

- ✓ Monsieur S. BENMBAREK, professeur à l'université de Biskra, pour avoir accepté de présider le jury, je lui en suis très reconnaissant.
- ✓ Monsieur M. HECINI, maître de conférence à l'université de Biskra, qui ma fait l'honneur d'examiner ce travail, je lui en suis très reconnaissant.
- ✓ Monsieur M. BOUREZANE, maître de conférence à l'université de Biskra, qui accepter d'examiner ce travail, je lui en suis très reconnaissant.

Dédicace

A ma mère et mon père.

A toutes ma famille

RESUME

La modélisation des structures dont le comportement est membranaire a fait l'objet de nombreuses études et travaux de recherches, surtout en ce qui concerne l'approche en déformation. L'objectif du présent sujet de recherche est l'évaluation des éléments à champ de déformation, ainsi que l'utilisation des éléments incompatibles dans la modélisation des structures et cela pour les problèmes d'élasticité plane.

L'efficacité des éléments membranaires à quatre et trois noeuds avec deux DDL, ainsi que les éléments ayant trois DDL par noeud a été démontrée. Les éléments testés sont l'élément rectangulaire SBRIE* à deux DDL par noeud, et l'élément triangulaire SBTSAB* et l'élément rectangulaire SBQ4 à trois DDL par noeud, ayant un comportement membranaire.

La confrontation des résultats des éléments de SBRIE*, et l'élément classique Q4, ainsi que l'élément SBQ4, avec les résultats analytiques, d'autre part l'exploitation des éléments membranaires compatible et incompatible intégrés dans le logiciel SAP2000, a été élaborée pour la validation numérique des problèmes traités en contrainte plane et en axisymétrie.

D'autres applications spéciales en contrainte plane et en déformation plane ont traité pour l'efficacité de l'élément SBRIE*, ainsi que les éléments incompatibles implantés dans le logiciel SAP2000.

Mots clés : l'approche en déformation, élasticité plane, axisymétrie, membrane, compatible, incompatible.

ABSTRACT

The modeling of the structures whose membrane behavior made the object of many studies and research works, especially with regard to the strain based approach. The objective of this subject of research is the evaluation of elements to strain based approach, and the use of the incompatible elements in the modeling of the structures and that for the problems of plane elasticity.

L ' effectiveness of the membrane elements with four and three nodes with two DOF, and the elements having three DOF per node was shown. The elements tested are rectangular element SBRIE * with two DOF per node, and triangular element SBTSAB * and rectangular element SBQ4 to three DOF per node, having a membrane behavior.

The confrontation of the results of the elements of SBRIE *, and the traditional element Q4, and SBQ4 element, with the analytical results, in addition the exploitation of the membrane elements compatible and incompatible integrated in software SAP2000, at summer worked out for the numerical of validation with problems treated in plan stress and in an axisymmetry.

Other special applications in plane stress and plane strain, treated for the effectiveness of element SBRIE *, and the incompatible elements established in software SAP2000.

Key words: strain based approach, plan elasticity, axisymmetry, membrane, compatible, incompatible.

ملخص

دراسة ومحاكاة الهياكل ذات السلوك الغشائي كانت ومازالت موضوع العديد من الأبحاث خاصة مجال التقريب في التشوه. الهدف من هذا البحث تقييم عناصر مجال التقريب في التشوه والعناصر الغير متلائمة في محاكاة الهياكل و مسائل المرونة في المستوي.

نبرهن فعالية العناصر الغشائية ذات أربعة و ثلاثة عقد مع درجتي حرية أو ثلاثة لكل عقدة. العناصر المختبرة هي العنصر المستطيل *SBRIE ذو درجتي حرية في كل عقدة و العنصر المثلثي *SBTSAB والعنصر المستطيل SBQ4 ذو ثلاث درجات حرية في كل عقدة ، هذه العناصر ذات سلوك غشائي.

مقارنة نتائج عناصر *SBRIE والعنصر Q4 بالإضافة إلي العنصر SBQ4 مع النتائج النظرية، من ناحية أخرى سنستعمل العناصر المتلائمة وغير المتلائمة الموجودة في البرنامج SAP2000 وهذا من أجل القيام بتجارب رقمية للتحقق من المسائل التي تمت معالجتها في حالة الإجهاد المستوي و حالة التناظر المحوري.

بعض التطبيقات الخاصة في الإجهاد المستوي والتشوه المستوي، التي استعملت من أجل فعالية العنصر *SBRE، والعنصر الغير ملائم الموجود في البرنامج SAP2000.

الكلمات المفتاحية : التقريب في التشوه، مرونة مستوية، تناظر محوري، غشاء، المتلائمة، وغير المتلائمة.

NOTATIONS

M.E.F. :	Méthode des éléments finis.
\int :	Intégrale.
$\frac{\delta}{\delta x}$:	Dérivée partielle par rapport à x.
$\{ \}$:	Vecteur colonne.
$\langle \rangle$:	Vecteur ligne.
$[]$:	Matrice
$[]^T$:	Matrice transposé.
$[]^{-1}$:	Matrice inverse.
DDL :	Degré de liberté.
x, y, z :	Coordonnées cartésiennes du repère global.
U, V :	Déplacements suivant les directions x et y respectivement.
θ_z :	Rotation dans le plan.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \text{et } \varepsilon_z$:	Déformations directes suivant x et y et z respectivement.
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$:	Déformation tangentielle.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$:	Contraintes normales suivant les directions x et y et z respectivement.
$\tau_{xy}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$:	Contrainte tangentielle (cisaillements).
r, z, θ :	Coordonnées cylindrique du repère global.
U_r, V_z :	Déplacements suivant les directions r et z respectivement.
$\varepsilon_x, \varepsilon_z, \varepsilon_\theta$:	Déformations directes suivant r et z et θ respectivement.

$\gamma_{rz}, \gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}$:	Déformation tangentielle (<i>déformation circonférentielles</i>).
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$:	Contraintes normales suivant les directions r et θ et z respectivement.
σ_{rz} :	Contrainte tangentielle (<i>circonférentielles</i>).
λ et μ (G) :	Les constantes de Lamé.
ν :	Coefficient de poisson.
E :	Module de young
I :	L'inertie.
V :	Volume d'un corps.
V_e :	Volume élémentaire d'un corps.
W :	L'énergie de déformation.
a_1, a_2 :	Paramètres des mouvements de corps rigide
a_3 :	Paramètre de la rotation dans le plan
a_i :	Paramètres généraux de l'approximation
[B] :	Matrice de déformation.
[Bc, B _I]:	Matrice de déformation pour un élément incompatible.
[B _{IC}] :	Matrice de correction.
[D] :	Matrice d'élasticité.
[x] :	Matrice des fonctions.
[N] :	Matrice des fonctions de forme.
[KV] :	Matrice de rigidité globale.
[Ke] :	Matrice de rigidité élémentaire.
{F} :	Vecteur des forces.
{u} :	Vecteur de déplacement.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	01
CHAPITRE 01	
GENERALITE SUR LA MEF	
1. INTRODUCTION	04
1.1 La méthode des éléments finis.....	04
1.2 L’historique	04
1.2.1 L’évolution de la MEF.....	04
1.2.2 Démarche éléments finis	06
1.3 Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis.....	10
1.3.1 Les Avantages de la MEF	11
1.3.2 Les Inconvénient de la MEF	11
1.4 Définition d’un élément fini	11
1.4.1 Les nœuds géométriques	11
1.4.2 Attributs d'un élément fini	12
1.4.3 Représentation des éléments finis	13
1.4.4 Choix des éléments finis	15
1.5 Notion de convergence	15
1.5.1 Introduction	15
1.6 Concept de la MEF	16
1.7 Les différentes formulations de la M.E.F	16
1.7.1 Formulation en déplacement	17
1.7.2 Formulation ’’équilibre’’ (contraintes ou forces)	18
1.7.3 Formulation hybride	18
1.7.4 Formulation Mixte... ..	18
1.7.5 Formulation en déformation	18
1.8 Choix des fonctions de déplacement et conditions de convergence.....	19
1.9 Éléments incompatibles	20
1.9.1 introduction	20
1.9.2 Éléments avec le verrouillage de cisaillement	21

1.9.3 Additions des modes incompatibles	23
1.9.4 Formation de matrice de rigidité élémentaire	24
1.9.5 Éléments bidimensionnels incompatibles	24
1.10 Modélisation et discrétisation	25
1.10.1 Introduction	25
1.10.2 Modélisation	26
1.10.3 Discrétisation.....	26
1.11 Approche en déformation	27
1.11.1 Avantages du modèle en déformation	27
1.11.2 Etude bibliographique sur les éléments finis en déformation	28
1.11.3 Procédure de développement d'élément fini rectangulaire	29
1.12 CONCLUSION	33

CHAPITRE 02

ELASTICITE PLANE DES ELEMENTS FINIS

2.1 INTRODUCTION.....	34
2.2 Les équations générales d'élasticité	34
2.2.1 Les équations d'équilibre des contraintes	34
2.2.2 Equations de compatibilité	37
2.2.3 Relations déformation-déplacement	37
2.2.4 Relations contrainte-déformation	39
2.2.5 Relations contrainte-déformation pour les cas particuliers d'élasticité plane	41
2.3 CONCLUSION	47

CHAPITRE 03

FORMULATION DES ELEMENTS FINIS MEMBRANAIRES

A CHAMPS DE DEFORMATION

3.1 INTRODUCTION.....	48
3.2 Description de l'élément membranaire	48
3.3 Participation du M ^f Sabir	48
3.4 La rotation dans le plan	49
3.5 Présentation des éléments finis à champ de déformation	52

3.5.1	Elément fini rectangulaire (SBRIE*)	52
3.5.2	Elément fini rectangulaire (SBQ4)	53
3.5.3	Elément triangulaire	56
3.5.3.1	Elément SBTSAB*	56
3.5.4	Formation de la matrice de rigidité	57
3.5.5	Elément axisymétrique	60
3.6	CONCLUSION	62

CHAPITRE 04

PRESENTATION DE L'OUTIL INFORMATIQUE

4.1	INTRODUCTION	63
4.2	Langage FORTRAN90	63
4.2.1	Instructions de test – conditions	64
4.2.2	Construction d'un boucle	65
4.2.3	Matrices dynamiques	66
4.2.4	Constructeur	67
4.2.5	Sections des matrices	67
4.2.6	Manipulations sur les matrices	67
4.2.7	Procédures intrinsèques pour matrices	68
4.3	Présentation du programme	68
4.3.1	Présentation des différentes étapes du programme	70
4.4	Présentation du code: « SAP2000 »	73
4.4.1	Introduction	73
4.4.2	Notions préliminaires	73
4.5	CONCLUSION.....	80

CHAPITRE 05

VALIDATION NUMERIQUE DES ELEMENTS FINIS BASES SUR LE MODELE EN DEFORMATION

5.1	INTRODUCTION.....	81
5.2	VALIDATION NUMERIQUE DANS LES PROBLEMES DE CONTRAINTE PLANE	81
5.2.1	Flexion plane d'une poutre console courte encastrée	82

5.2.2 Test d'une poutre cantilever	85
5.2.3 Test d'une poutre console élançée Mac Neal.....	87
5.2.4 Test d'incompressibilité pour une poutre cantilever	93
5.3 VALIDATION NUMERIQUE DANS LES PROBLEMES AXISYMETRIQUES	94
5.3.1 : Aperçu	94
5.3.2 Simulation numérique	95
5.3.3 Cylindre à paroi épaisse	95
5.3.4 Plaque circulaire uniformément chargée	99
5.3.4.1 l'analyse d'une plaque mince	100
5.3.5 Coque cylindrique soumise à un moment de flexion uniforme	104
5.4 CONCLUSION	106

CHAPITRE 06

APPLICATION DES ELEMENTS FINIS AUX PROBLEMES D'ELASTICITE PLANE

6.1 INTRODUCTION	107
6.2 Galerie souterraine	108
6.2.1 Illustration des résultats	109
6.2.2 l'influence de la modélisation	119
6.2.3 L'influence des paramètres mécaniques	121
6.3 Application sur un refend encastree à la base	125
6.3.1 Exemple d'un refend plein	125
6.3.2 Exemple d'un refend avec ouvertures	128
6.3.3 Refend avec files d'ouvertures : hauteur du linteau variable	132
6.4 La pression interstitielle dans le sol	135
6.5 CONCLUSION	136
CONCLUSION GENERALE	137
Bibliographie	140
ANNEXE	143

INTRODUCTION GENERALE

Dans le calcul des structures et en particulier les milieux continus, les problèmes concernés sont en général, très compliqués à résoudre par les méthodes analytiques usuelles. Ces problèmes peuvent être ceux de l'analyse des contraintes et de la diffusion thermique ou hydraulique.

Un problème d'ingénieur est généralement représenté par un modèle mathématique, des équations aux dérivées partielles sur un domaine géométrique avec des conditions aux limites sur ses frontières. De plus, étant un problème continu, il possède une infinité de degrés de liberté. A l'exception de quelques cas ayant une géométrie très simple, il est très difficile sinon impossible de trouver une solution analytique au problème et d'étudier son comportement en une seule opération. Pour pouvoir trouver une solution, l'ingénieur est donc amené à remplacer le système continu par un système discret équivalent ayant un nombre fini de degrés de liberté. Pour cela, il a le choix entre plusieurs méthodes numériques telle que la MEF : est une procédure numérique approximative pour l'analyse des grandes structures. Elle est devenue très connue avec les avancements des calculateurs numériques puisqu'ils permettent aux ingénieurs de résoudre rapidement et efficacement de grands systèmes d'équations. Cette méthode est un outil très utile pour la solution de plusieurs types de problèmes technologiques tels que l'analyse des structures, transfert de chaleur et l'écoulement des fluides. Elle est spécialement dans la conception des armatures, des bateaux, des moteurs électrique, des moteurs de chaleurs et des vaisseaux spatiaux.

La pratique montre que les ingénieurs préfèrent modéliser leurs structures avec des éléments finis simples, tels que les quadrilatères à 4 noeuds, les triangles à 3 noeuds..., il en résulte, en gardant le modèle en déplacement classique, des interpolations de degré peu élevé et une forte sensibilité aux phénomènes de blocage ou verrouillage de membrane et de cisaillement. De ce point de vue l'utilisation du modèle en déformation naturel joue un rôle essentiel dans la construction d'éléments finis robustes et de bonne qualité.

La modélisation des structures dont le comportement est membranaire a fait l'objet de plusieurs travaux de recherches surtout en ce qui concerne l'approche en déformation.

Notre objectif est d'évaluer l'approche en déformation ainsi la formulation des éléments incompatibles dans la modélisation des structures pour les problèmes d'élasticité plane.

Donc nous avons utilisé et testé l'efficacité des éléments membranaires à quatre noeuds et autres à trois noeuds avec deux DDL, et trois DDL par noeud, notons "les éléments (SBRIE*, SBTSAB*) [SAB 83], [SAB 85] " ayant quatre noeuds et possédant deux et trois DDL par noeud, et "l'élément (SBQ4) [BEL 00]" à quatre noeuds avec trois DDL y compris la rotation comme degré de liberté additionnel. Ces derniers aide énormément la résolution des problèmes généraux d'élasticité plane ayant un comportement membranaire d'une part et la facilité de jonction avec d'autres éléments possédant trois DDL par noeuds, d'autre part.

Ce mémoire est structuré en six chapitres :

Le premier chapitre est consacré à rappeler les généralités de la méthode des éléments finis, ainsi qu'une présentation de quelques aperçus sur les fondements et l'historique de cette méthode. Par ailleurs nous citons d'une part les avantages, les inconvénients et les caractéristiques d'un élément fini, et d'autre part les différentes formulations, en particulier celle basées sur le modèle déformation et les éléments incompatibles, ainsi qu'une recherche bibliographique actualisée sur l'approche en déformation.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les notions de base d'élasticité plane et une brève analyse des équations de base qui définissent les relations entre contraintes et déformations dans les cas bidimensionnels, (*état plan de déformation, état plan de contrainte, et axisymétrie*).

Nous montrons dans le troisième chapitre les approches en formulation des éléments membranaires avec un détail de formulation de quelques éléments soit en coordonnées cartésiennes ou cylindriques (axisymétrique).

Les organigrammes qui montrent la structure et l'enchaînement général du programme utilisé dans le calcul, sont présentés dans le quatrième chapitre avec une présentation du

INTRODUCTION GENERALE

code SAP2000 et leur capacité d'analyse du comportement des structures uni et bidimensionnelles.

Le cinquième chapitre cœur de notre travail vise d'une part l'évaluation et la confrontation des résultats des éléments utilisées ayants deux ou trois DDL par nœud, avec les résultats analytiques, d'autre part l'exploitation des éléments membranaires intégrés dans le logiciel SAP2000, pour faire des tests de validation numériques avec les problèmes traités en contrainte plane et en axisymétrique.

Le sixième chapitre est un complément de notre travail qui permet d'éclaircir l'importance du logiciel SAP2000 'l'élément incompatible', et l'élément SBRIE* [SAB 85], ce chapitre suit une méthodologie basée sur la comparaison des résultats numériques de l'élément SBRIE* avec celle obtenus avec le logiciel SAP2000, par la modélisation de quelques structures bidimensionnelles en contrainte plane et déformation plane, ainsi q'une étude paramétrique sur une galerie souterraine qui vise l'influence des paramètres physiques et mécaniques sur leur comportement.

Finalement, le travail s'achève par des conclusions et des recommandations suivies d'une bibliographie et d'annexes.

Chapitre 1

GENERALITE SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

GENERALITE SUR LA MEF

1. INTRODUCTION :

Une brève vue d'ensemble de la méthode des éléments finis et de ses concepts est présentée l'information d'un milieu utilisée, pour l'application d'élément fini dans la mécanique structurale est discutée.

1.1 La méthode des éléments finis : [ROB 89]

La méthode des éléments finis est une procédure numérique pour analyser les structures et les milieux continue. Habituellement le problème adressé est compliqué à résoudre d'une manière satisfaisante par des méthodes analytiques classiques.

Le problème peut concerner des analyses des contraintes, la conduction de la chaleur, ou n'importe lequel de plusieurs autres secteurs.

Le procédé de la méthode des éléments finis produit beaucoup d'équations algébriques simultanées, qui sont produites et résolues sur un ordinateur numérique.

Les calculs des éléments finis sont exécutés sur l'ordinateur personnel. Cependant, les erreurs ont diminué en traitant plus d'équations. Et les résultats assez précis pour la technologie sont procurables à un coût raisonnable.

La méthode des éléments finis a commencé comme méthode d'analyse des contraintes. Aujourd'hui les éléments finis sont également employés pour analyser des problèmes du transfert thermique, champs de lubrification de flux de fluide, électriques et magnétiques, et beaucoup d'autres.

Les problèmes qui étaient précédemment tout à fait insurmontables sont maintenant résolus par habitude. Les procédures des éléments finies sont employées dans la conception des bâtiments, des moteurs de chaleur de moteurs électriques, des fuselages des bateaux et du vaisseau spatial.

1.2 L'historique :

1.2.1 Évolution de la MEF : [DAT 05]

L'évolution de la MEF est associée étroitement au développement de l'informatique électronique. Nous distinguons trois périodes qui caractérisent les développements significatifs et conjoints des deux technologies.

1.2.1.1 Période 1940-1955 : calculateur avec tube électronique

Le premier calculateur avec tube électronique ENIAC est apparu en 1942 occupant 100 m² et effectuant 300 opérations/seconde. En même temps est apparu l'ordinateur Z3 en Allemagne qui est développé par Konrad Zuse. Le calculateur électronique remplace ainsi l'homme calculateur. Le premier ordinateur commercial UNIVAC (universel automatic computer) est construit en 1951, suivi par les machines IBM 650 et 701. A partir de 1954, l'industrie aéronautique devient un client important pour ces nouveaux calculateurs.

Durant la même période, nous trouvons les développements importants en modélisation numérique. Notons les travaux de Courant, Von Neumann, Richtmeyer, Argyris, Southwall etc. en méthodes numériques associées aux problèmes nucléaires et mécaniques.

L'évolution rapide des calculateurs a créé une nouvelle génération de modélisateurs numériques qui sont très pragmatiques, empiriques et intuitifs. Il devient très difficile de suivre cette évolution pour les numériciens classiques à cause de la grande complexité des problèmes résolus sur l'ordinateur.

L'approche de l'ingénieur a occupé une place importante dans le développement des nouvelles méthodes numériques. Il n'est plus possible de retarder la mise au point de nouvelles méthodes pour résoudre les problèmes industriels même si on maîtrise encore mal les critères de convergence et la présence des erreurs dans un sens mathématique classique.

1.2.1.2 Période 1955-1965 : les transistors

Le tube électronique est remplacé par les transistors qui sont plus petits, plus fiables et consomment moins d'énergie. Nous trouvons plusieurs ordinateurs sur le marché : UNIVAC (1956), FORTRAN en 1957 sur IBM 710, DEC-PDP (1960), IBM 7030,1410 et 1620. Le système de stockage sur disque est déjà en place.

1.2.1.3 Période 1966-... : VLSI, ULSI, microprocesseurs

La technologie des circuits intégrés à grande densité et la fabrication de microprocesseurs ont introduit une véritable révolution : des ordinateurs de plus en plus petits, une vitesse de calcul de plus en plus rapide. Notons quelques réalisations importantes : IBM système 360 en 1964 de 3^{ème} génération, CDC 7600 en 1968 avec 40

megaflops par Cray, Microprocesseur INTEL 8080 en 1972, CRAY-1 en 1976, APPLE-1 en 1976, VAX 11/780 en 1978, IBM-PC avec architecture ouverte en 1980. Nous connaissons bien la suite des développements informatiques depuis 1980.

Ainsi, très rapidement la MEF est devenue une méthode industrielle en industrie aéronautique, industrie automobile, mécanique, fluide, thermiqueetc.

En 1965, la NASA prend l'initiative de développer un code de calcul aux éléments finis en mécanique des structures utilisant la formulation déplacement.

Zienkiewicz et Cheung publie un premier livre sur la méthode des éléments finis en 1967. [ZIE 67]

Notons également les livres de Robinson, Przemieniecki et Strang et Fix. Nous laissons la suite aux lecteurs.

Aujourd'hui la MEF est une méthode industrielle et l'on trouve plusieurs codes de qualité remarquable. À titre d'exemples, voici quelques codes utilisés pour le calcul de problèmes linéaires ou non linéaires en mécanique, thermique et fluide: ABAQUS, ADINA, ANSYS, CASTEM, SAP2000, CASTOR, CATIA, FIDAP, LSDYNA, MARC, NE/NASTRAN, RADIOS, SAMCEF, REFLUX (hydraulique), TELEMAC (hydraulique),...

1.2.2 Démarche éléments finis : [DAT 05]

Après 50 ans d'évolution, la méthode des éléments finis est utilisée couramment dans tous les milieux industriels. Elle permet aux concepteurs de bien comprendre le comportement des systèmes physiques, d'étudier l'influence des différents paramètres et éventuellement d'optimiser la conception du système. Nous identifions différentes composantes de la démarche des éléments finis pour une meilleure compréhension et utilisation de la méthode par l'ingénieur.

1.2.2.1 Écriture physique

L'objectif de la méthode des éléments finis est de simuler le comportement d'un système physique en utilisant l'ordinateur. La description correcte d'un système physique constitue une première étape essentielle de la modélisation numérique. L'ingénieur doit utiliser tout son savoir-faire pour identifier avec soin et précision les différentes composantes caractérisant le comportement d'un système physique.

Pour bien utiliser un code commercial, il est important de décrire correctement le problème physique à étudier. Pour cela nous présentons les points suivants qui peuvent aider à la préparation du modèle :

a : Choix de phénomènes : Pour chaque type de problème, il faut identifier si le problème est linéaire ou non-linéaire, stationnaire ou non, turbulent ou laminaire etc.

b : Choix de variables de description $u(x,y,z,t)$: Il faut identifier les variables qui caractérisent le comportement du système. A priori il semble que ce choix est trivial. Par exemple pour un problème d'élasticité, on choisit les déplacements et les contraintes, pour les fluides on choisit les vitesses, la pression, les contraintes visqueuses etc. Le choix devient complexe si une structure est mince ou épaisse, il faut choisir si le comportement est de type poutre, plaque, coque ou solide.

Pour un problème couplé en hydro-sédimentologie, peut-on supposer que le changement du fond ne modifie pas l'hydrodynamique ? Pour un problème thermo-élasto-plastique, comment choisir le couplage élastique et thermique ?

c : Choix de la géométrie : Pour certains problèmes, la géométrie est bien définie à priori. Mais pour des problèmes d'écoulement naturel, la géométrie n'est pas bien définie.

Il est possible aussi que la géométrie soit variable à différents instants. En plus, il faut choisir si le comportement est uni-, bi- ou tri- dimensionnel, soit :

$$u(x, y, z, t) = u(x,t), \quad u(x,y,t) \quad \text{ou} \quad u(x,y,z,t). \quad \text{Eqn(1.1)}$$

De plus, il faut choisir si le comportement est stationnaire ou non.

d : Loi de conservation : Le comportement est régi par les lois universelles de conservation : soit la conservation des efforts (équilibre), la conservation de la quantité de mouvement, la conservation de la masse, la conservation du flux thermique, etc.

e : Loi de comportement : Il est important de choisir correctement la loi de comportement : soit la loi contraintes - déformations, la loi contraintes visqueuses - taux de déformations. Pour les grandes déformations, la loi de comportement implique plusieurs approximations. Pour les fluides turbulents, il faut modéliser les contraintes de Reynolds représentant la turbulence par une loi de comportement, c'est un choix assez difficile.

f : Conditions aux limites et conditions initiales : Ici encore, l'ingénieur doit bien comprendre la physique de son problème et faire un choix correct des conditions aux limites et des conditions initiales.

g : Sollicitations volumiques et surfaciques.

1.2.2.2 Écriture mathématique

On associe un modèle mathématique à la description physique qui est retenue par l'ingénieur. Ce modèle est écrit sous forme de relations aux dérivées partielles (RDP, appelées écriture forte) ou sous une forme intégrale en utilisant des fonctions test (appelée écriture faible). L'écriture faible est aussi appelée forme intégrale, écriture de type Galerkin, écriture variationnelle, écriture de type résidus pondérés etc.

La MEF transforme l'écriture faible en écriture algébrique. *L'erreur de modélisation* est associée à la différence entre la solution du modèle mathématique et le comportement du système réel. Remarquons que le modèle mathématique est associé à la description physique retenue après plusieurs simplifications discutées dans le paragraphe précédent. En effet, l'erreur de modélisation représente la différence du comportement entre le modèle retenu et la physique réelle. Dans tous les cas réels, on ne connaît ni le comportement réel, ni la solution du modèle mathématique.

1.2.2.3 Écriture algébrique

Comme on ne peut pas trouver la solution du modèle mathématique, on associe un modèle algébrique à l'écriture faible en utilisant l'approximation par éléments finis, soit :

$$V = \sum_e^n V_e \quad \text{Eqn(1.2)}$$

$$W = \sum_e^n W_e = 0$$

Sur chaque élément, une approximation admissible de type élément finis est :

$$u = \sum_i N_i u_i \quad \text{et} \quad \delta u = \sum_i N_i \delta u_i \quad \text{Eqn(1.3)}$$

u : ensemble des variables cherchées.

$$L'écriture discrétisée W s'écrit : W = \langle \delta U \rangle \{R(u_n)\} = \sum \langle \delta u \rangle \{r\} = 0 \quad \text{Eqn(1.4)}$$

L'erreur de discrétisation est associée à la différence entre la solution du modèle mathématique et la solution u_n du système discret $R=0$.

La construction du système R et la résolution du problème $R=0$ sont obtenues sur ordinateur en utilisant les techniques numériques de résolution directe ou itérative.

1.2.2.4 Écriture informatique

Pour obtenir la solution du problème physique, il faut effectuer une mise en forme informatique de toutes les opérations :

a : la saisie des données : géométrie, propriétés physiques, conditions aux limites, sollicitations, conditions initiales.

b : le maillage : maillage du domaine selon les types d'éléments choisis.

c : l'opération de calcul aux éléments finis : matrices élémentaires, assemblage, schémas d'intégration temporelle, schémas de résolution directe ou itérative et la visualisation des résultats.

Un code commercial aux éléments finis effectue toutes ces opérations d'une manière automatique. Souvent un code de calcul aux éléments finis est couplé avec un système de CAO pour obtenir la description de la géométrie du problème.

L'erreur de convergence (soit erreur numérique) est associée à la différence entre la solution du modèle discret et la solution obtenue par le code. Cette erreur inclut l'erreur de convergence d'un schéma et l'erreur d'arrondi.

Nous pouvons résumer la démarche de la méthode des éléments finis par la figure (1.1)

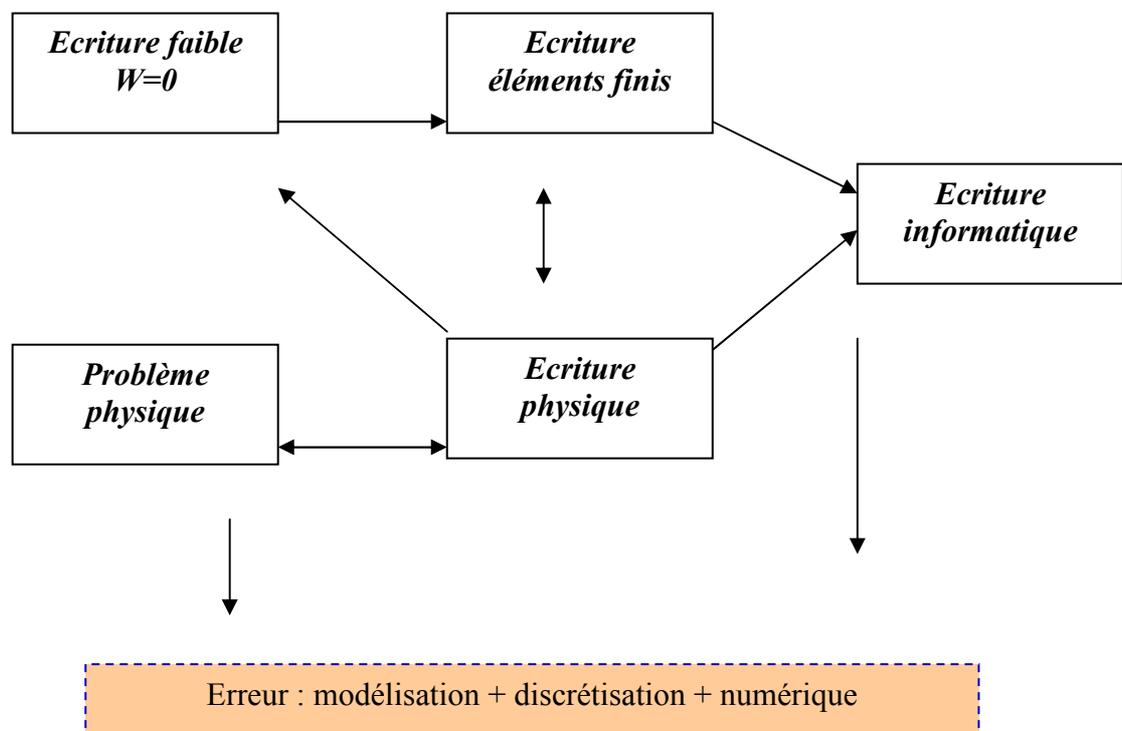


Figure 1.1 : la démarche de la méthode des éléments finis [DAT 05]

Pour obtenir une solution convergente du modèle aux éléments finis, il faut vérifier les conditions suivantes :

a : Consistance : L'approximation par éléments finis doit satisfaire les conditions nécessaires de continuité inter éléments. De plus la précision de l'approximation doit assurer une représentation constante de tous les termes de W . Cette condition est nécessaire mais pas suffisante.

b : Stabilité : Le modèle discrétisé doit être stable conduisant à une solution sans oscillations (absence de modes parasites) et sans blocage. Par exemple, pour une poutre ou une plaque épaisse, il faut éviter le blocage par cisaillement. On utilise une formulation qui réduit le rang de la matrice de cisaillement, soit par une approche mixte, par une projection de type collocation par ligne DKT ou par intégration sélective. Pour des problèmes en fluide incompressible par formulation pénalité, il faut éviter le blocage d'incompressibilité. Le rang du terme d'incompressibilité doit être petit par rapport au rang de la matrice élémentaire.

L'intégration numérique des quantités élémentaires doit assurer un rang correct.

Pour des schémas temporels, nous utilisons la technique spectrale de Neumann pour vérifier la stabilité.

d : Positivité : Il est utile de vérifier que la discrétisation éléments finis respecte la condition de positivité. Cette condition est couramment utilisée en volumes finis pour construire des schémas stables. La condition est basée sur le raisonnement physique, soit pour une discrétisation donnée : *Il faut s'assurer que la valeur u du nœud i est positive si les valeurs de u de tous les nœuds autour du nœud i sont positives*. Il est facile de vérifier si une discrétisation spatiale ou spatio-temporelle respecte la positivité.

Le problème peut être uni-, bi- ou tri dimensionnel. Si un schéma ne vérifie pas la positivité, on peut rencontrer des oscillations parasites. Il est possible qu'un schéma stable ne soit pas positif.

1.3 Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis: [MEZ 06], [TUR 56]

Toutes les méthodes permettant de résoudre des problèmes aux limites de manière approximative (séries, différences finies, ...), la méthode des éléments finis présente de tels avantages qu'elle est la plus utilisée (parfois même exagérément), sauf cas particuliers.

1.3.1 Les Avantages de la MEF :

La puissance de la méthode des éléments finis réside essentiellement dans sa généralité et sa souplesse. Elle peut être applicable à une variété de problèmes mécanique ou bien physiques. La géométrie du domaine peut être quelconque, les forces et les conditions aux limites peuvent être aussi de nature quelconque.

Le maillage peut combiner autant de types d'éléments que l'on souhaite. Et toute cette généralité est contenue dans un programme unique qu'on peut faire tourner sur un ordinateur (sélection du type de problème, de la géométrie, du type d'élément, des chargements et des conditions aux limites).

La méthode des éléments finis réside dans le fait que le modèle qu'elle utilise est très proche de la structure réelle.

1.3.2 Les Inconvénient de la MEF :

La méthode des éléments finis a néanmoins quelques inconvénients. Elle donne un résultat numérique particulier pour un problème spécifique. Elle ne fournit aucune forme de solution susceptible de permettre une étude analytique de l'effet d'un changement de paramètre par exemple.

Un ordinateur, un programme fiable et une utilisation intelligente sont nécessaires;

Les programmes généraux de calcul doivent être fortement documentés.

L'expérience et le bon sens de l'ingénieur sont indispensables à la définition d'un bon modèle.

La plupart des problèmes comportent un grand nombre de données et une foule de résultats qu'on doit dépouiller avec méthode pour une compréhension optimale.

1.4 Définition d'un élément fini :

1.4.1 Les nœuds géométriques :

Nous choisissons un ensemble de n points, sur un domaine V , qui servira à définir la géométrie des éléments. Ces points, appelés *les nœuds géométriques*. Elle coïncide éventuellement avec les nœuds d'interpolations. Puis nous remplaçons le domaine V par un ensemble de domaines V^e de forme relativement simple [YEV 06]. Voir la figure 1.2.

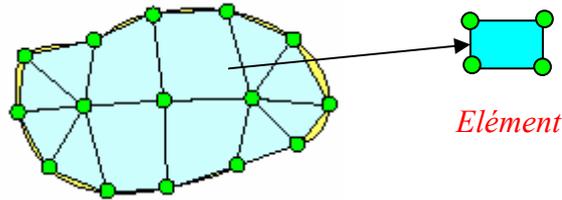


Figure 1.2: domaine V discrétisé par sous domaine V^e

1.4.2 Attributs d'un élément fini :

Un découpage artificiel (par l'imagination) d'un milieu continu en éléments finis permet d'isoler un de ces éléments pour l'étudier et établir les caractéristiques. L'identification d'un élément fini comprend les points suivants :

- ✓ **Géométrie** : un élément fini peut être un segment de droite ou de courbe, triangle ou quadrilatère (plan ou courbe), tétraèdre, prismes ou hexaèdre (brique). Les frontières entre les éléments peuvent être respectivement des points, des segments de droite ou de courbe, des faces planes ou courbes.
- ✓ **Matériau** : le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope, ...etc.).
- ✓ **Nœuds** : les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres. Ils occupent les sommets, les extrémités, les milieux des arêtes et faces...etc.
- ✓ **Degrés de liberté** : la fonction d'approximation (en général le champ de déplacements ou champ de potentiels) est exprimée en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds, valeurs qui deviennent les inconnues nodales. L'union, par leurs degrés de liberté nodaux communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer la solution complète (assemblage) tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.
- ✓ **Forces nodales** : à travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. Elles sont dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température ... etc.)

Ces paramètres d'identification permettent de construire les deux caractéristiques clés d'un élément fini qui sont sa matrice de rigidité et son vecteur force.

1.4.3 Représentation des éléments finis :

Nous distinguons trois familles correspondantes à des différents types d'éléments finis à une, deux, et trois dimensions, chaque élément est identifier par sa forme géométrique, le type de courbe ou de surface qui forme sa frontière, ainsi que le nombre des nœuds géométriques.

a : Les éléments unidimensionnels : barres, poutres rectilignes ou courbes utilisées de façon individuelle ou associées à des plaques pour modéliser les raidisseurs dans un voile.

b : Les éléments bidimensionnels : élasticité plane, plaque en flexion, coques courbes, de forme triangulaire ou quadrangulaire.

c : Les éléments tridimensionnels : éléments de volume ou coques épaisses.

d : Les éléments axisymétriques : qui constituent une classe bien particulière : tores à section triangulaire ou quadrangulaire, coques coniques ou méridienne courbe.

Note : Le tableau 1.1 représente les différentes formes d'éléments finis.

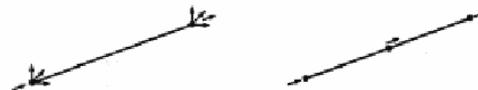
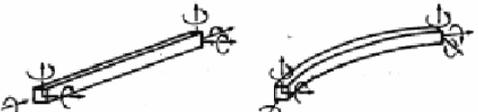
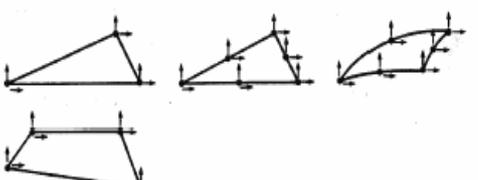
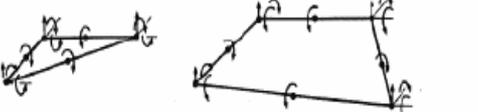
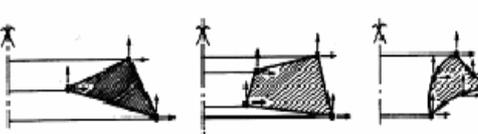
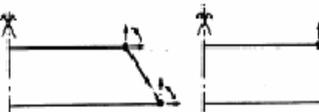
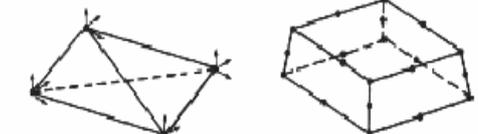
CLASSE	NOM	GÉOMÉTRIE
1 D.	Barre	
	Poutre	
2 D.	Elasticité 2D membranes	
	plaques en flexion	
	Coques	
AXISYM.	Tores axisymétriques	
	Coques axisymétriques	
3 D.	Volume	
	Coque épaisse	

Tableau 1.1 récapitulative des types éléments finis [BAT 90-a]

1.4.4 Choix des éléments finis :

Les éléments d'ordre supérieur sont plus précis mais plus coûteux et on peut toujours atteindre la même précision avec un plus grand nombre d'élément simples et c'est cette tendance qui est devenue privilégiée ces derniers temps.

Les éléments simples (triangle à trois nœuds, quadrilatère à quatre nœuds et hexaèdre à huit nœuds) offrent l'avantage supplémentaire d'être faciles à générer par des mailleurs automatiques et adaptatifs.

Pour l'analyse du comportement membranaire, les éléments finis basés sur la formulation mixte et hybride sont plus précis et sont en général privilégiés dans les logiciels professionnels.

Les éléments d'ordre supérieur ont connu un grand succès dans l'analyse du comportement flexionnel (poutre, plaques et coques). Les éléments basés sur la théorie des poutres et plaques épaisses ont buté pendant longtemps sur le problème de verrouillage de l'énergie de cisaillement (« **Locking Phenomenon** »). L'intégration réduite et sélective a permis de résoudre en partie ce problème.

1.5 Notion de convergence :

1.5.1 Introduction :

Pour assurer une convergence vers la solution exacte, il faut que la fonction d'approximation reproduise autant que possible les variations des déplacements et de leurs dérivées éventuelles apparaissant dans l'expression de la fonctionnelle (énergie potentielle totale). Cela se traduit par le respect de certaines règles :

- ✓ Dans une fonction polynomiale par exemple, le nombre de termes doit être égal au nombre de degrés de liberté de l'élément, et, il est avantageux d'utiliser un polynôme complet à partir du triangle de Pascal (problèmes 2D) et la pyramide de Pascal (problèmes 3D).
- ✓ Les fonctions doivent être isotropes dans l'espace (symétriques) par rapport aux différentes ordonnées sans privilégier une direction par rapport aux autres [BAH 03].
- ✓ Les fonctions de forme doivent prendre la valeur unité à l'ordonnée considérée et nulle ailleurs, pour éviter l'influence mutuelle.
- ✓ L'approximation ou l'interpolation choisie doit satisfaire à certaines conditions, appelées *critères de convergence*.

Si les critères de convergence sont remplis, la solution approchée tend vers la solution exacte de deux manières :

- Quand la taille des éléments tend vers zéro ($h \rightarrow 0$). C'est le principe de la *convergence h*.
- Lorsque le degré de l'interpolation tend vers l'infini ($p \rightarrow \infty$). C'est la technique de la *convergence p*.

1.6 Concept de la MEF :

Le concept de base de la MEF consiste à subdiviser un milieu continu (figure 1.2) par une série de subdivisions appelées éléments (sous domaine V_e). Les éléments sont inter relié par des lings nodaux et les coins des éléments sont des nœuds (voir la section 1.4).

On définit maintenant à l'intérieur de chaque élément un champ de déplacements qu'est une approximation du problème.

Cette approximation de la fonction choisie pour l'élément est appelée 'interpolation' et on exprime cette interpolation en fonction des inconnues aux nœuds. Donc ces variables nodales définissent le comportement de l'élément qui pourrait être flexionnel, membrane, ou les deuxetc. et par conséquence l'assemblage définit approximativement le comportement global de la structure.

Donc la méthode consiste à idéalisée la structure d'abord. En suite on va définit pour chaque élément une fonction d'interpolation a fin de calculer les propriétés de l'élément. L'assemblage de tous les éléments nous donne une série d'équations simultanée à résoudre.

La solution de ces équations nous permet d'évaluer les inconnues de la structure (déplacements, contraintes et déformations).

1.7 Les différentes formulations de la M.E.F :

En général, le principe de toute méthode de discrétisation consiste à remplacer un milieu continu (structure, massif) comportant une infinité de modes de déformations ou de tensions par un milieu idéalisé ne possédant qu'un nombre fini de tels modes. C'est la procédure de Rayleigh Ritz , cette démarche est utilisée également dans la méthode des éléments finis, avec un certain nombre de sous domaine appelées 'éléments finis', dont la forme géométrique et la fonction structurale sont simples.

On va alors définir une approximation de la solution (déplacement et /ou contraintes) non pas pour l'ensemble de la structure, mais pour chacun de ses éléments en les réduisant à un petit nombre de modes décrites par des fonctions simples. Ils sont choisis parmi les plus fondamentaux pour la description du comportement de l'élément dans la structure.

La structure entière est donc idéalisée par un nombre fini de modes qui se transmettent entre chaque élément de manière bien précise. Les inconnues du problème sont alors les paramètres qui représentent l'intensité de chaque mode.

Le problème mathématique revient alors à rechercher ces inconnues qui doivent rendre minimale la fonctionnelle d'énergie en tenant compte des conditions aux limites.

En élasticité linéaire, l'énergie de déformation se présente comme une forme quadratique des efforts généralisés et l'opération de recherche du minimum se réduit à la résolution d'un système d'équations algébriques linéaires.

Il existe plusieurs sortes de formulations d'éléments finis en mécanique des structures.

1.7.1 Formulation en déplacement :

C'est une formulation selon laquelle l'approximation est faite sur le champ de déplacements de façon que l'intégrabilité du champ de déformations soit assurée à l'intérieur de l'élément. L'élément est dit 'cinématiquement admissible'. Notons que cette condition est automatiquement réalisée lorsque le champ de déformation est déduit d'un champ de déplacement continu et éventuellement différentiable.

Si la continuité du champ de déplacement est vérifiée aux surfaces de séparation des éléments, le modèle est dit co-déformable ou compatible. En effet, cette continuité peut être vérifiée soit en terme de variables nodales, soit le long des côtés en minimisant la somme des moyennes du déplacement des deux côtés de la surface de séparation.

Cette dernière solution est présentée par Fraeijns de Veubeke [BEL 05-a]. Ils proposent d'ajouter aux degrés de liberté classiques d'autres quantités permettant d'assurer globalement la continuité du champ de déplacement à l'interface.

Il existe un autre groupe d'éléments où l'on satisfait plus que les conditions de compatibilité ; ce modèle est alors dit sur conforme ou sur compatible. En général, dans ces modèles, on assure au moins la continuité au nœud du tenseur complet des déformations, y compris le changement des courbures [BEL 05-a]

Dans la formulation de type déplacement, le principe variationnel utilisé est celui de variation de l'énergie totale par rapport aux déplacements.

1.7.2 Formulation "équilibre" (contraintes ou forces) :

C'est une formulation dans laquelle l'approximation se fait sur le champ de tension de façon que les équations d'équilibre soient satisfaites à l'intérieur de chaque élément. Alors, l'élément est dit 'statiquement admissible' Cette condition est automatiquement réalisée lorsque le champ de tensions est déduit d'un champ de fonctions de tension continu et différentiable.

Si l'équation des tensions de surface est vérifiée à l'interface entre élément, le modèle est dit co-diffusif.

Le principe variationnel utilisé est celui de variation de l'énergie totale par rapport aux contraintes.

1.7.3 Formulation hybride :

Dans cette formulation, le plus souvent, on définit la solution en termes d'approximation, d'une part du champ de contraintes internes en équilibre, d'autre part des déplacements sur la frontière de l'élément.

Le principe variationnel utilisé est une variante de l'énergie potentielle complémentaire.

1.7.4 Formulation mixte :

Dans celle-ci, on définit la solution en termes d'approximation de deux ou plusieurs champs indépendants ; généralement, le champ des déplacements et celui des contraintes, étendues à tout l'élément, en général, cette formulation conserve les paramètres inconnus de tous les champs comme DDL ; sa mise au point peut être longue et coûteuse ; elle peut toutefois être d'excellente qualité. Le principe variationnel utilisé est alors généralement basé sur la fonctionnelle de Reissner.

1.7.5 Formulation en déformation

C'est une formulation dans laquelle l'approximation se fait sur le champ de déformation (dite approche en déformation) de façon telle que les équations de compatibilités soient satisfaites à l'intérieur de l'élément. Le champ de déplacements est déduit du champ de déformations qui est continu et différentiable Ce modèle est sur compatible.

Le principe variationnel utilisé est celui de variation de l'énergie potentielle totale par rapport aux déplacements.

Pour minimiser la contribution de l'énergie de déformation sur l'énergie potentielle, on doit essayer d'avoir des variations des déformations les plus faibles que possibles. Ceci est dû au fait que l'expression de l'énergie de déformation contient les carrés et les produits de déformations et en imposant une variation locale à la distribution régulière initiale, ceci augmente la valeur des carrés lorsqu'ils sont intégrés sur la surface de l'élément.

Les équations déformations déplacements sont couplées de telle manière que certaines déformations sont fonctions de plusieurs déplacements, par conséquent si les déplacements sont indépendants les uns des autres, les déformations ne le seront pas.

Deux critères de convergences sont liés directement aux déformations, donc il sera plus facile de les satisfaire en faisant appel à des fonctions de déformation qu'à des fonctions de déplacement inspirées d'après la pyramide de Pascal (cas général).

Un autre avantage du choix des déformations au lieu des contraintes, est que les fonctions déplacements peuvent être obtenues par une simple intégration des relations déformations déplacements. Ayant obtenu les variables cinématiques (qui sont des déplacements et rotation), on peut déterminer les matrices de rigidité élémentaire. Pour illustrer la méthode avec laquelle les fonctions de déplacement peuvent être obtenues en utilisant cette nouvelle approche.

Les caractéristiques essentielles de cet élément sont discutées en comparaison avec son élément correspondant basé le modèle en déplacement (élément bilinéaire standard).

Vu sa simplicité, le modèle le plus utilisé est celui des déplacements.

1.8 Choix des fonctions de déplacement et conditions de convergence :

Les différents champs de déplacement nécessitent un nombre total de constantes égales au nombre total des degrés de liberté de l'élément. Cependant, il convient de choisir les constantes proportionnellement aux différents champs de déplacement suivant la destination de l'élément et de la nature du problème à analyser.

Le choix des fonctions de forme limite, le nombre de degrés de liberté du système qui est en réalité infini, donc le minimum réel de l'énergie ne pourra jamais être atteint quelle que soit la finesse du maillage. Pour assurer la convergence de la solution vers la solution exacte, certaines conditions doivent être vérifiées, ces conditions sont les suivantes :

- **Critère 1** : représente les mouvements des modes rigides où la fonction de déplacements doit être telle qu'il soit impossible qu'un élément se déforme quand les déplacements de ses nœuds sont causés par un mouvement de corps rigide.
- **Critère 2** : représente l'état de déformation constante (*patch test*) dont la fonction représentative des déplacements doit être telle que, si les déplacements nodaux correspondent à des déformations constantes, on obtiens effectivement ces déformations constantes.
- **Critère 3** : condition de compatibilité où les fonctions de déplacement doivent être choisies de telle sorte que les déformations aux interfaces des éléments soient infinies.

Les critères 1 et 2 se traduisent par le terme élément complet. Le critère 3 traduit par le terme élément compatible. Si les éléments finis satisfassent les conditions de complétude et de compatibilité; de tels éléments sont dites "éléments conformes", pour ce type d'élément la solution converge de façon monotone vers la solution exacte.

Certains éléments ne satisfaisant pas tout les conditions, de tels éléments sont dits "éléments non conformes", parmi ces éléments certains d'entre eux ne convergent pas, mais les autres convergent et pas nécessairement par le bas et de façon monotone. Comme il y a des éléments non-conformes qui présentent un taux de convergence supérieur à d'autres éléments conformes et qui sont très utilisés en pratique.

1.9 Éléments incompatibles :

1.9.1 Introduction :

En premières années de l'élaboration de la méthode d'élément fini, les chercheurs dans les domaines des mathématiques, de la technologie structurale et de la mécanique structurale ont considéré que la compatibilité de déplacement entre les éléments finis était absolument obligatoire.

Par conséquent, quand Wilson a présenté la première fois les déplacements incompatibles dans les éléments finis isoparamétriques rectangulaires à une conférence en 1971 [WIL 02], la méthode a été reçue avec un grand scepticisme par des chercheurs camarade.

Les résultats pour les deux déplacements et les contraintes pour les éléments rectangulaires étaient très près des résultats de l'élément isoparamétrique à neuf-nœud. Les deux crimes théoriques commis étaient compatibilité de déplacement ont été violés et la

méthode n'a pas été vérifiée avec des exemples en utilisant les éléments non-rectangulaires [WIL 02].

Par suite de ces crimes, Irons et Bruce ont présenté la restriction de path test et la condition de compatibilité de déplacement a été éliminée [WIL 02].

En 1976 une méthode a été présentée par Taylor pour corriger le mode incompatible de déplacement, il a proposé d'employer un Jacobien constant pendant l'intégration des modes incompatibles de telle sorte que les éléments d'incompatibilité aient passé au path test [WIL 02]. Cependant, les résultats ont produit par l'élément isoparamétrique non-rectangulaire n'étaient pas impressionnants.

Depuis cette fois l'utilisation des éléments incompatibles d'ordre bas a réduit le besoin d'intégration réduite et d'utilisation des éléments isoparamétriques d'ordre élevé.

1.9.2 Éléments avec le verrouillage de cisaillement :

L'élément isoparamétrique simple à quatre-noeud ne produit pas des résultats précis pour beaucoup d'applications. Pour illustrer cette insuffisance, considérons l'élément rectangulaire, représenté sur la figure (1.3), soumis au chargement de flexion pur.

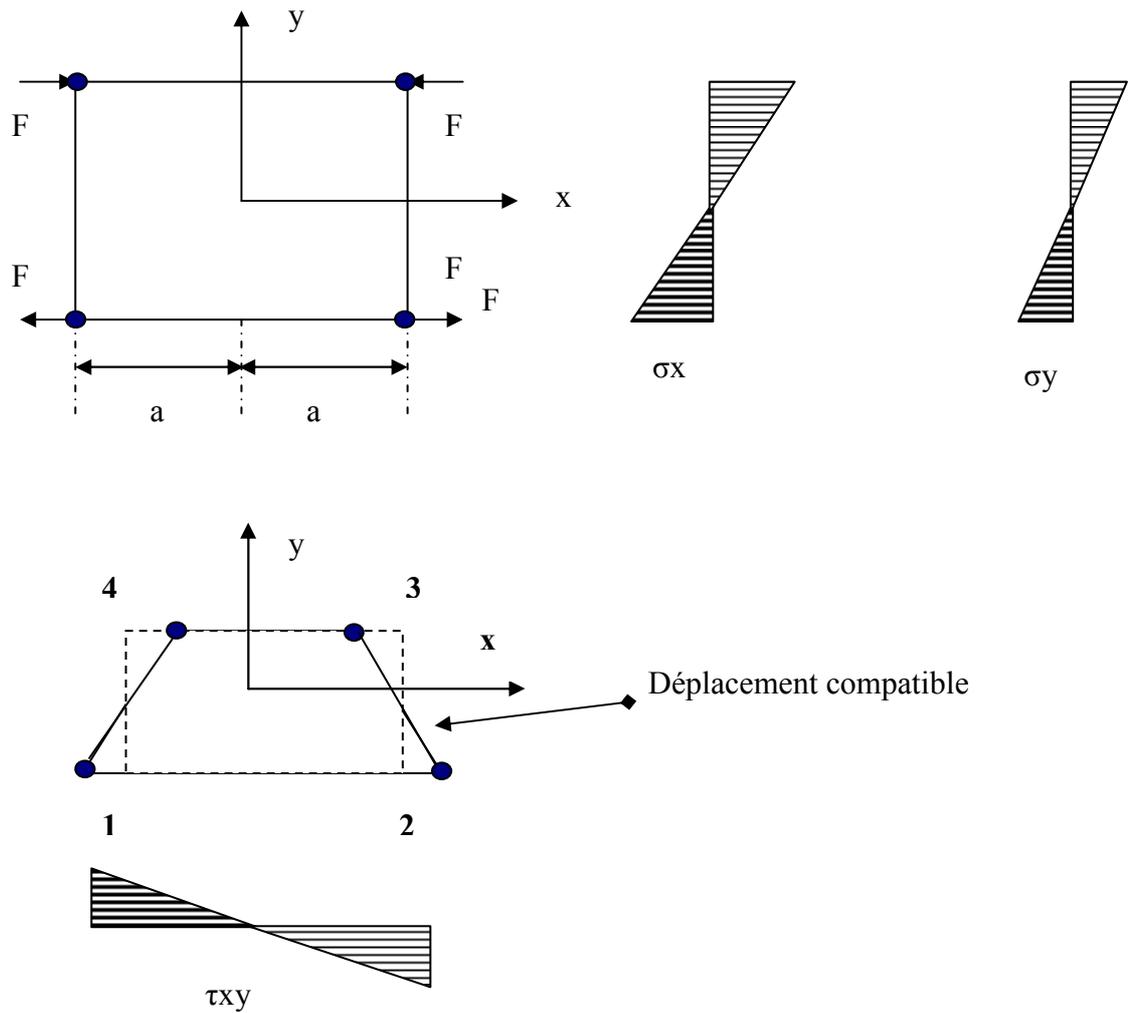


Figure (1.3) erreurs de base de l'équilibre dans l'élément plan de Quatre -Noeuds

Le verrouillage de cisaillement est le terme employé pour décrire le développement des contraintes de cisaillement quand l'élément est soumis à la flexion pure. En plus du problème de contrainte de cisaillement, l'erreur des contraintes verticales est développée en raison de l'effet du coefficient de Poisson. Les déplacements exacts, qui permettent à l'élément de satisfaire l'équilibre interne, comme suite:

$$u_x = \xi \eta \bar{u} \quad \text{Et} \quad u_y = (1 - \xi^2) \frac{a \cdot \bar{u}}{2b} + (1 - \eta^2) v \cdot \frac{b \bar{u}}{2a} \quad \text{Eqn (1.5-a)}$$

Ces déplacements permettent à la déformation de cisaillement d'être zéro à tous les points de l'élément. En outre, l'axe neutre doit se déplacer verticalement, ramenant de ce fait les contraintes verticales à zéro.

$$\varepsilon_x = \eta \frac{\bar{u}}{a}, \quad \varepsilon_y = -\nu \eta \frac{\bar{u}}{a}, \quad \gamma_{xy} = 0. \quad \text{Eqn (1.5-b)}$$

1.9.3 Additions des modes incompatibles : [ROB 89]

La motivation pour l'addition des modes incompatibles de déplacement, de la grandeur α , est décommander les contraintes liées aux erreurs définies dans l'équation (1.5-a). Ou, en termes de ζ - η système de référence naturel, les nouvelles fonctions de forme de déplacement pour l'élément isoparamétrique de quatre-noeud sont :

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{i=1}^4 N_i u_{xi} + \alpha_1 (1 - \xi^2) + \alpha_2 (1 - \eta^2) \\ u_y &= \sum_{i=1}^4 N_i u_{yi} + \alpha_3 (1 - \xi^2) + \alpha_4 (1 - \eta^2) \end{aligned} \quad \text{Eqn (1.6)}$$

Donc, l'équation de déformation-déplacement pour un élément incompatible peut être écrite comme :

$$\varepsilon = [B_C \quad B_I] \begin{Bmatrix} u \\ \alpha \end{Bmatrix} \quad \text{Eqn (1.7)}$$

$$\text{Où } \varepsilon^T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}] \text{ et } \sigma^T = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}]$$

L'énergie de déformation dans l'élément incompatible est donnée comme :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T B_C u dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma^T B_I \alpha dV \quad \text{Eqn (1.8)}$$

Pour passer le patch test, l'énergie de déformation associée aux modes incompatibles doit être zéro pour un état constant des contraintes d'élément. Par conséquent, pour un état constant des contraintes, l'équation suivante doit être satisfaite :

$$\frac{1}{2} \sigma^T \int_V B_I \alpha dV = 0 \text{ ou } \int_V B_I dV = 0 \quad \text{Eqn (1.9)}$$

Ceci peut être satisfait si nous ajoutons *une matrice de correction* constante \mathbf{B}_{IC} au \mathbf{B}_I pour former une nouvelle matrice déformation-déplacement, $\bar{\mathbf{B}}_I = \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_{IC}$, de tel sorte que l'équation suivante soit satisfaite :

$$\int (B_I + B_{IC}) dV = 0 \text{ ou } \int B_I dV + B_{IC} V = 0 \quad \text{Eqn (1.10)}$$

Le volume de l'élément est V , donc la matrice de correction peut être calculé à partir :

$$B_{IC} = -\frac{1}{V} \int B_I dV \quad \text{Eqn (1.11)}$$

C'est une approche générale et peut être employée pour ajouter un nombre des modes incompatibles de déplacement, ou modèles de déformation, à tous les types d'éléments isoparamétriques. La même formule numérique d'intégration devrait être employée pour évaluer l'équation (1.11) comme est employée en calculant la matrice de rigidité élémentaire.

1.9.4 Formation de matrice de rigidité élémentaire : [WIL 02]

Dans la minimisation de l'énergie potentielle des forces se sont associées aux modes incompatibles des déplacements α sont zéro. Par conséquent, les équations d'équilibre d'élément sont données par :

$$\begin{bmatrix} f_C \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{CC} & K_{CI} \\ K_{IC} & K_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{Eqn (1.12)}$$

$$K_{CC} = \int B_C^T D B_C dV \quad \text{Eqn (1.13-a)}$$

$$K_{CI} = \int B_C^T D \bar{B}_I dV \quad \text{Eqn (1.13-b)}$$

$$K_{IC} = \int \bar{B}_I^T D B_C dV \quad \text{Eqn (1.13-c)}$$

$$K_{II} = \int \bar{B}_I^T D \bar{B}_I dV \quad \text{Eqn (1.13-d)}$$

En utilisant *la condensation statique* [WIL 02] on élimine les modes incompatibles de déplacement avant l'assemblage des matrices de rigidité élémentaire. Ou :

$$f_C = K_C u \quad \text{Eqn (1.14)}$$

Par conséquent, la matrice de rigidité d'élément est donnée par :

$$K_C = K_{CC} - K_{CI} K_{II}^{-1} K_{IC} \quad \text{Eqn (1.15)}$$

Symboliquement, l'équation (1.15) est correcte, cependant il devrait préciser cela l'inversion de matrice et la multiplication de matrice ne sont pas employées dans l'algorithme de la condensation statique.

1.9.5 Éléments bidimensionnels incompatibles :

L'addition des fonctions incompatibles de forme, $(1-\eta^2)$ et $(1-\xi^2)$, aux approximations de déplacement u_x et u_y , est très efficace pour les éléments rectangulaires plan.

Par conséquent, pour des quadrilatères de forme arbitraire, le déplacement suivant l'approximation s'est avérée efficace :

$$u_x = \sum_{i=1}^4 N_i u_{xi} + \sum_{i=5}^6 N_i \alpha_{xi} \quad \text{Eqn (1.16-a)}$$

$$u_y = \sum_{i=1}^4 N_i u_{yi} + \sum_{i=5}^6 N_i \alpha_{yi} \quad \text{Eqn (1.16-b)}$$

Les fonctions de forme incompatibles sont :

$$N_5 = (1-\xi^2) \quad \text{Eqn (1.17-a)}$$

$$N_6 = (1-\eta^2) \quad \text{Eqn (1.17-b)}$$

Les quatre modes incompatibles augmentent le temps de calcul requis pour former la matrice de rigidité élémentaire, cependant, l'amélioration de l'exactitude vaut la peine de calculs additionnels.

En raison du problème sérieux s'est associé au blocage de cisaillement, le quadrilatère compatible classique de quatre-noeud et l'élément hexaèdre de huit-noeud si ne pas être employé pour simuler le comportement de vraies structures.

On va démontrer que l'addition des modes de correction incompatibles de déplacement, pour passer le patch test, augmente de manière significative l'exécution des éléments *isoparamétriques quadrilatéraux* et hexaèdres.

Le quadrilatère à neuf-noeud et les éléments à 27-nœuds hexaèdres être précis et peut être amélioré en ajoutant des modes incompatibles de correction. Par exemple, des modes cubiques peuvent être ajoutés à l'élément plan de neuf-noeud dans lequel les résultats exacts peuvent être calculés, pour le chargement de cisaillement, en utilisant seulement un élément pour modéliser une poutre console [WIL 02].

1.10 Modélisation et discrétisation :

1.10.1 Introduction :

Pour s'assurer qu'une analyse numérique simulera au mieux un problème réel donné, il faut effectuer deux opérations essentielles, la *modélisation* dans un premier temps et la

discrétisation dans un deuxième temps (figure 1.4). Ces opérations portent sur deux aspects principaux du problème pratique, modélisation d'abord, discrétisation en suite, et portent les deux aspects principaux du problème pratique,

- Représentation de la géométrie, des charges, des conditions aux limites et du milieu,
- Choix des éléments finis et du maillage.

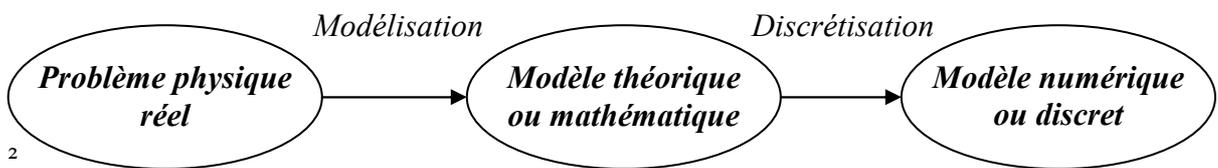


Figure 1.4 : étapes de l'analyse d'un problème aux limites.

1.10.2 Modélisation :

La modélisation consiste à rattacher la structure réelle à un modèle connu de la mécanique des solides, structures et matériaux, capable d'en décrire le fonctionnement avec une précision convenable. C'est à ce stade que s'opèrent deux options fondamentales :

- Choix cohérent du schéma statique et de la théorie décrivant la structure, c'est-à-dire à ramener la structure à une géométrie simple en choisissant des axes (barres, poutres, câbles), des plans (parois, plaques), des surfaces (coques), des volumes (solides), à choisir la théorie la plus appropriée à cette géométrie, à définir les conditions d'appui et les charges, à tenir compte d'éventuelles symétries.
- Choix pertinent des lois constitutives décrivant chaque matériau, c'est-à-dire à choisir les lois décrivant les réponses mécaniques classiques (teneur en eau, discontinuité, perméabilité,...), et à connaître l'état initial des matériaux (contraintes initiales,...).

1.10.3 Discrétisation :

L'opération de discrétisation implique essentiellement deux choix : l'un porte sur le type de grandeur à discrétiser, soit plus explicitement sur le type d'élément fini à utiliser, l'autre sur la finesse de cette discrétisation en liaison avec le maillage.

Le choix d'un maillage adapté à une structure particulière doit être, dans la mesure du possible basé sur les résultats des expériences antérieures. Si cela n'est pas possible, alors il faudra étudier la structure pour différents maillages pour tester le taux de convergence.

De plus, le type d'élément utilisé dans la modélisation a une considérable sur la précision de la solution, il doit être choisi avec précaution.

1.11 Approche en déformation :

Une recherche a été faite à 'Cardiff' sur l'efficacité des éléments fins disponibles pour l'étude des structures courbées, a montré que : pour obtenir une convergence satisfaisante, les éléments dérivant de l'approche déplacement exigent un maillage très grossi que les éléments basée sur l'approche en déformation a été développée [DJO 90], pas seulement pour les éléments courbés mais aussi pour les structures planes.

L'approche est basée sur le calcul des termes exacts qui représentent tous les modes du corps rigide, les autres composantes des fonctions de déplacement sont basées sur la forme des fonctions de déformations indépendantes. Au fur et à mesure qu'on vérifie les équations de compatibilité.

Ce modèle permet de proposer des champs de déformation en fonction de paramètre propre à la structure (Coefficient de Poisson par exemple) tout en vérifiant les équations d'équilibre.

Cette approche mène, généralement, à la représentation des déplacements par un polynôme d'ordre élevé sans avoir besoin de degrés de liberté additionnel (internes et inutiles).

L'opportunité a été saisie pour développer un élément fini d'ordre supérieur qui ne nécessite que les degrés de liberté essentiels. Par ailleurs, un autre élément fini de coque cylindrique a été développé par le même auteur [ASH 72], les résultats obtenus ont montré une convergence rapide aussi bien pour les déplacements que pour les contraintes; d'autre études ont été menées sur des coques cylindriques minces, et les résultats obtenus étaient meilleurs comparé à l'élément de Cantin et Clough [CAN 68] et aussi l'élément simplifié de Sabir et Lock [SAB 72].

1.11.1 Avantages du modèle en déformation :

L'interpolation directe sur les déformations permet d'avoir une meilleure précision sur ces grandeurs, sur les contraintes et sur les déplacements (obtenus par intégration),

contrairement à la formulation classique où les déformations sont obtenues par dérivation du champ adopté pour déplacements.

Les avantages des éléments à modèle en déformation sont :

- Satisfaction plus facile des deux principaux critères de convergence liés directement aux déformations (mode de déformation constante et mode de corps rigide).
- Les équations déformations-déplacements sont couplées de telle manière que certaines déformations sont fonctions de plusieurs déplacements, par conséquent si les déplacements sont indépendants les uns des autres, les déformations ne le seront pas.
- Possibilité d'enrichir le champ de déplacement par des termes d'ordre élevé sans l'introduction de noeuds intermédiaires, ni de degrés de liberté supplémentaires (permettant ainsi de traiter le fameux problème de verrouillage).

1.11.2 Etude bibliographique sur les éléments finis en déformation :

Une approche différente au développement des fonctions de formes pour une variété des éléments courbés a été établie par Sabir et son groupe (1971-1985), ces éléments sont basés sur le modèle en déformation, destinés à l'analyse des structures courbées, les éléments développés possèdent seulement des degrés de liberté géométriques externes.

On cite ici, l'élément fini de coque cylindrique qu'a été développé par Ashwell [ASH 72], l'efficacité de cet élément a été testée en l'utilisant pour l'analyse d'un cylindre pincé court à bords libres. Les résultats obtenus ont montré une convergence rapide aussi bien pour le déplacement que pour les contraintes, d'autres études ont été entreprises sur cette coque cylindrique en analysant des coques minces d'ordre ($r/t=320$) et les résultats obtenus étaient meilleurs que ceux obtenus par l'élément de Cantine et Clough [CAN 68] (24*24) et aussi de l'élément simplifié (20*20) de Sabir et Lock [SAB 72].

Un élément courbe a été également établi par Sabir et Lock [SAB 73] pour l'analyse de la non-linéarité géométrique des arcs circulaires, il est basé sur la condition que la contrainte circonférentielle et la variation des courbures, plutôt que les déplacements, doivent être des fonctions simples et indépendantes des coordonnées. Le travail a été étendu par Sabir [SAB 75] pour le développement d'éléments arcs qui se déforment aussi bien hors plan de courbure qu'à l'intérieur du plan. Pour étudier la performance de l'élément coque à modèle en déformation, on prédit des contraintes très élevées au

voisinage de l'application des charges concentrées, Sabir et Ashwell [SAB 78] ont entrepris des essais sur des coques minces et le chargement appliqué était soit des forces radiales ou des moments concentrés et résultats obtenus correspondaient bien aux solutions théoriques données par Fluage et Fos berge [SED 02].

Sabir (1983) a montré que l'application de cette approche n'est pas limitée aux éléments courbés et peut être utilisé pour développer des éléments finis efficaces pour les problèmes généraux d'élasticité plane.

Contrairement aux éléments conventionnels et d'ordre élevé, les fonctions de forme des éléments à modèle en déformation ne sont pas indépendantes mais liées en conformité avec les exigences de la relation constitutive du déplacement-déformation. le lien entre ces différents déplacements n'est pas limité aux termes qui correspondent aux modes de déformation libre du corps rigide, mais aussi se produit dans les termes concernant les déformations des éléments.

L'approche en déformation a été davantage appliquée par sabir [SAB 83] pour développer une nouvelle classe d'éléments pour les problèmes d'élasticité générale en coordonnées cartésiennes. L'élément en question est rectangulaire, ayant uniquement les degrés de liberté essentiels (au nombre de huit), et satisfaisant aux conditions de modes libres de corps rigide et les équations de compatibilité au sein de l'élément ont été développé en premier lieu. Avec le développement continu de l'approche en déformation, beaucoup d'éléments finis de l'élasticité plane et les éléments de coques ont été conçus par d'autres chercheurs [SAB 85-a],[SAB 85-b], [SAB 86], [BEL 98-a], [BEL 98-b], [BEL 98-c], [BEL 99], [BEL 00].

1.11.3 Procédure de développement d'élément fini rectangulaire :

Exemple l'élément (SBRIE. 2ddl) à 4 nœuds

Pour illustrer la procédure de développement des éléments finis par laquelle les champs du déplacement sont formulés suivant l'approche sur le modèle en déformation, un élément rectangulaire (même pour les triangles) convenable pour les problèmes généraux d'élasticité plane est considéré.

Dans un système des coordonnées cartésiennes x et y , les relation entre les déformations planes $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ et les déplacements u et v , comme il est montré dans la figure (1.5) sont donnée par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}\tag{Eqn (1.18)}$$

Si on met les trois composantes de déformations valent à zéro et en intégrant les Eqn (1.18) on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}u_R &= a_1 - a_3 y \\ v_R &= a_2 + a_3 x\end{aligned}\tag{Eqn (1.19)}$$

Les Eqn (1.19) représentent les champs de déplacement qui interprètent les mouvements d'un corps rigide de l'élément. On peut remarquer, quant aux trois constantes, a_1 et a_2 représentent les mouvements de translation dans les directions x et y respectivement, et a_3 représenté la rotation dans le plan. (Figure 1.6)

Pour l'élément rectangulaire à quatre nœuds aux sommets et deux degrés de liberté par chaque nœud, le dernier champ de déplacement devra contenir huit constantes. On a utilisé trois constantes pour la présentation des mouvements des corps rigide, il ne reste que cinq constantes qui peuvent être répartie entre les déformations de la manière suivante.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_4 + a_5 y \\ \varepsilon_y &= a_6 + a_7 x \\ \gamma_{xy} &= a_8\end{aligned}\tag{Eqn (1.20)}$$

En substituant l'Eqn (1.20) dans l' Eqn (1.18) et après l'intégration nous obtenons :

$$\begin{aligned}u_s &= a_4 x + a_8 \frac{y}{2} + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} \\ v_s &= -a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 y + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2}\end{aligned}\tag{Eqn (1.21)}$$

En fin on prend l' Eqn (1.19) plus l' Eqn (1.21) où la forme final comme suite :

$$\begin{aligned}u_R + u_s &= a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} \\ v_R + v_s &= a_2 + a_3 x - a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 y + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2}\end{aligned}\tag{Eqn (1.22)}$$

Au préalable il faut noté que les déformations sont indépendantes l'une de l'autre, afin qu'aucun couplage inutile entre l'effet de flexion et celui de cisaillement existe [DJO 90]. D'ici un état de flexion pure peut être obtenu (intéressant pour les structures travaillant en flexion).

En plus les expressions des déplacements contiennent des termes du second degré pour tenir en compte les changements de la courbure, l'élément se déforme comme montré dans la figure (1.5.b).

Il est utile de comparer quelque caractéristique de cet élément avec l'élément équivalent basé sur le modèle de déplacement, il s'agit de l'élément rectangulaire bilinéaire Q4 qui dérive son nom de sa capacité de représenter des déplacements linéaires sur les deux cotés du rectangle, ses fonctions de déplacement sont données par :

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \end{aligned} \quad \text{Eqn (1.23)}$$

Puisqu'il n'y a que deux nœuds sur chaque coté de l'élément, seulement les déplacements linéaires peuvent être interpoler si la continuité inter-élément reste conservée.

Donc, sous la charge, l'élément bilinéaire se déforme avec des frontières inter-élément demeurent continues, sans se chevaucher, voyant la figure (1.5.c). Les déformations sont données en différenciant les fonctions des déplacements. D'où :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_2 + a_4y \\ \varepsilon_y &= a_7 + a_8x \\ \gamma_{xy} &= a_3 + a_4x + a_6 + a_8y \end{aligned} \quad \text{Eqn (1.24)}$$

Ces déformations ne sont pas indépendantes, depuis qu'elles sont couplées par les constants a_4 et a_8 . Par conséquent, il est clair que l'élément bilinéaire ne peut pas représenter un état de cisaillement indépendant à moins que a_4 et $a_8 = 0$, ce cas représente les champs

ε_x et ε_y . Comme des constantes, d'ici un état de flexion pur associe avec des déformations directes ε_x et ε_y linéaires et une déformation tangentielle γ_{xy} , nulle ne peut pas être obtenue avec l'élément bilinéaire.

Dans cet élément les déformations proposées satisfont automatiquement les équations de compatibilités de l'élasticité.

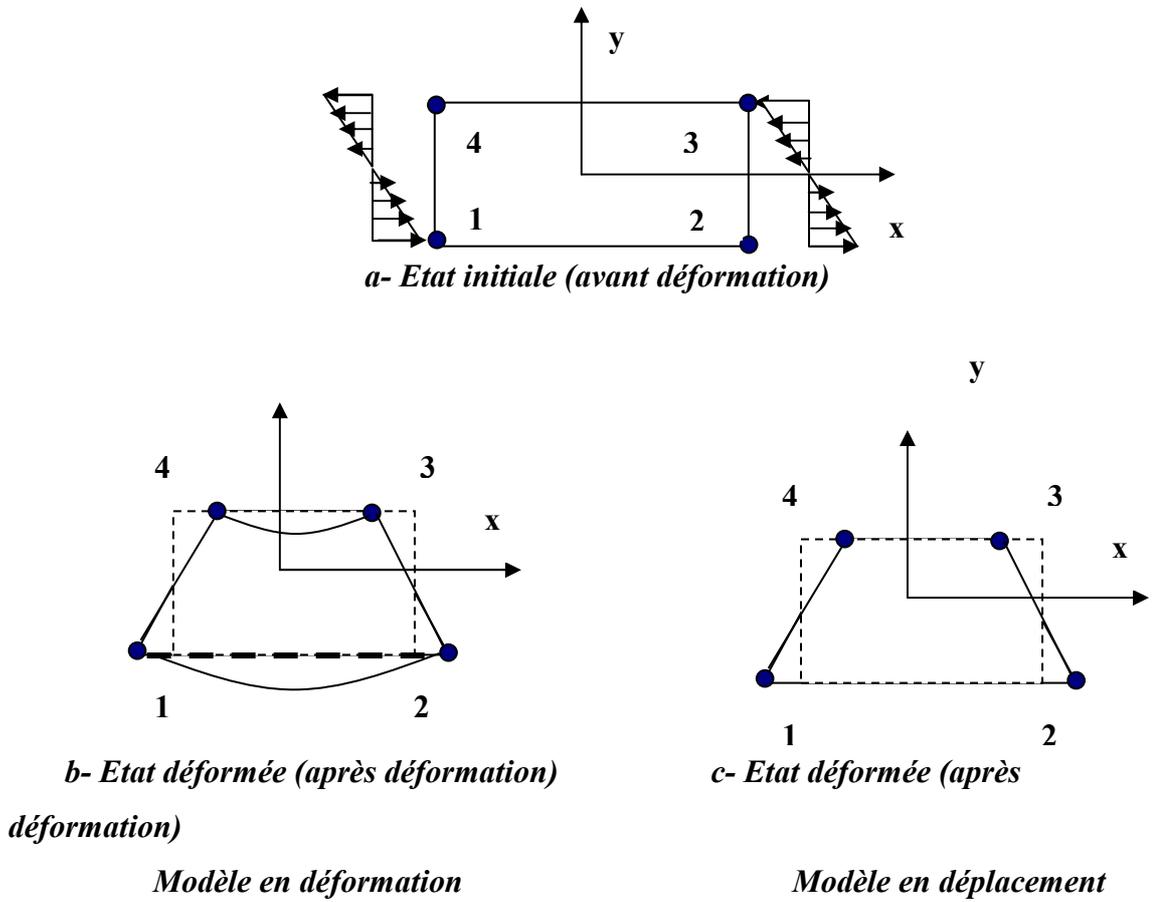


Figure 1.5 : Etat de flexion pure

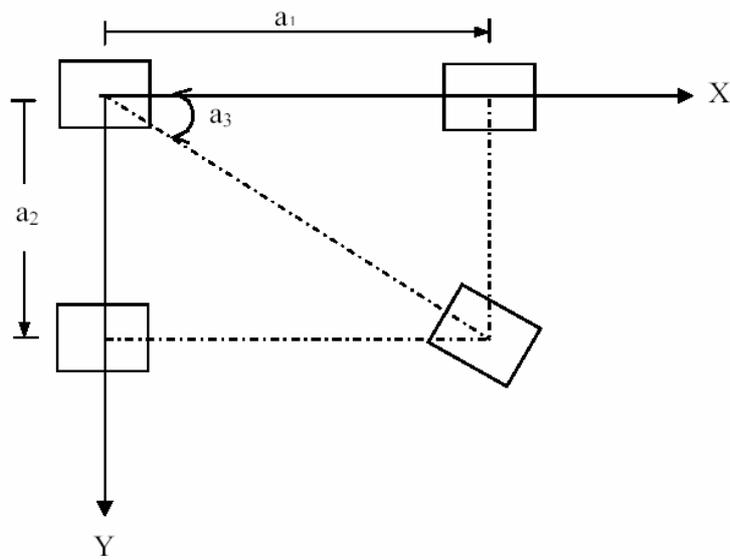


Figure 1.6 : Mouvement d'un corps rigide

1.12 CONCLUSION

Aujourd'hui, la méthode des éléments finis est une technique récente à caractère pluridisciplinaire, car elle met en oeuvre les connaissances de trois disciplines de base, la mécanique des structures, l'analyse numérique et l'informatique appliquée.

Leur idée générale consiste à discrétiser un objet (ou une partie d'un objet) en sous ensembles dont on veut étudier certaines de ses propriétés. Ces sous-ensembles sont appelés éléments, qui sont connectés entre eux par des noeuds. La discrétisation de l'objet se nomme le maillage. Ainsi notre objet est représenté par des fonctions définies sur chaque élément, qui ont l'avantage d'être plus simple que celles que l'on pourrait éventuellement utiliser pour représenter la totalité de l'objet. Pour déterminer ces fonctions on choisit un modèle d'élément fini, dans notre travail c'est le modèle en déformation qui donne la possibilité de pouvoir modéliser les structures planes, avec l'application des éléments membranaires.

Chapitre 2

ELASTICITE PLANES DES ELEMENTS FINIS

ELASTICITE PLANE DES ELEMENTS FINIS

2.1 INTRODUCTION :

La méthode d'élément fini est une méthode générale d'analyse structurale dans laquelle une structure continue est remplacée par un nombre fini 'noeuds' de points.

Tous les matériaux possèdent à un certain degré, la propriété d'être élastique, c'est à dire que si les forces extérieures, provoquant la déformation d'un corps, ne dépassent pas une certaine limite, la déformation disparaîtra au même temps que les forces qui lui donnent naissance.

Pour ces matériaux élastiques, il existe une théorie dite "théorie de l'élasticité" qui permet d'étudier le comportement des solides réels sous l'action de différents systèmes de forces. Nous présentons dans ce chapitre, une brève analyse des équations de base qui définissent les relations entre contraintes et déformations dans le cas bi-dimensionnelle, dans ce cas dérive les cas particuliers de l'élasticité plane (*état plan de déformation, état plan de contrainte, et axisymétrique*).

2.2 Les équations générales d'élasticité :

2.2.1 Les équations d'équilibre des contraintes :

La contrainte est définie comme une force ΔF appliquée sur un secteur ΔA où ΔA approcher à zéro :

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad \text{Eqn(2.1)}$$

La figure 2.1 montre l'expositions d'un élément cubique différentiel avec trois composants des contraintes directs $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ dans la direction x, y et z respectivement et les trois composants des contraintes de cisaillement $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$.

La contrainte de cisaillement τ_{xy} indique que la contrainte agit dans le plan xy et dans la direction de y.

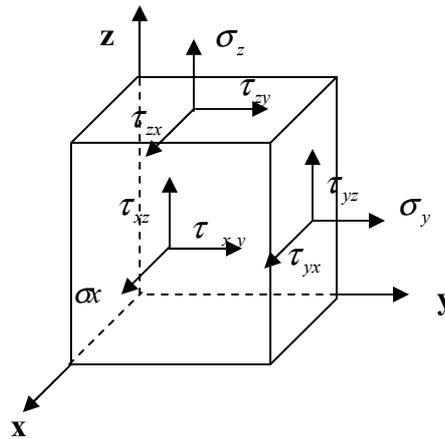


Figure 2.1 Composantes du tenseur des contraintes

La figure 2.2 montre l'état plan de contraintes. Tous les composants des contraintes n'agissant pas dans le plan x,y disparaissent, par conséquent,

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

Eqn (2.2)

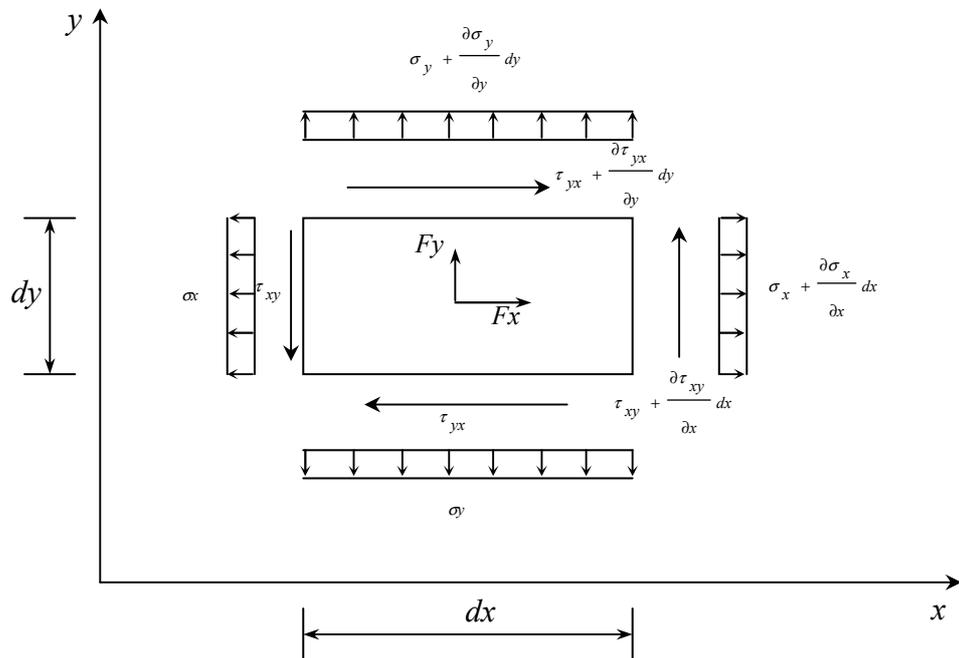


Figure 2.2 Les composants bi- dimensionnels des contraintes agissant sur un plan différentiel.

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \sigma_x dy + F_x dx dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{yx} dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x = 0 \tag{Eqn (2.3)}$$

Pour l'équilibre vertical on aura :

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0 \tag{Eqn(2.4)}$$

En 3D, on considère un cube élémentaire dx, dy, dz (figure 2.3)

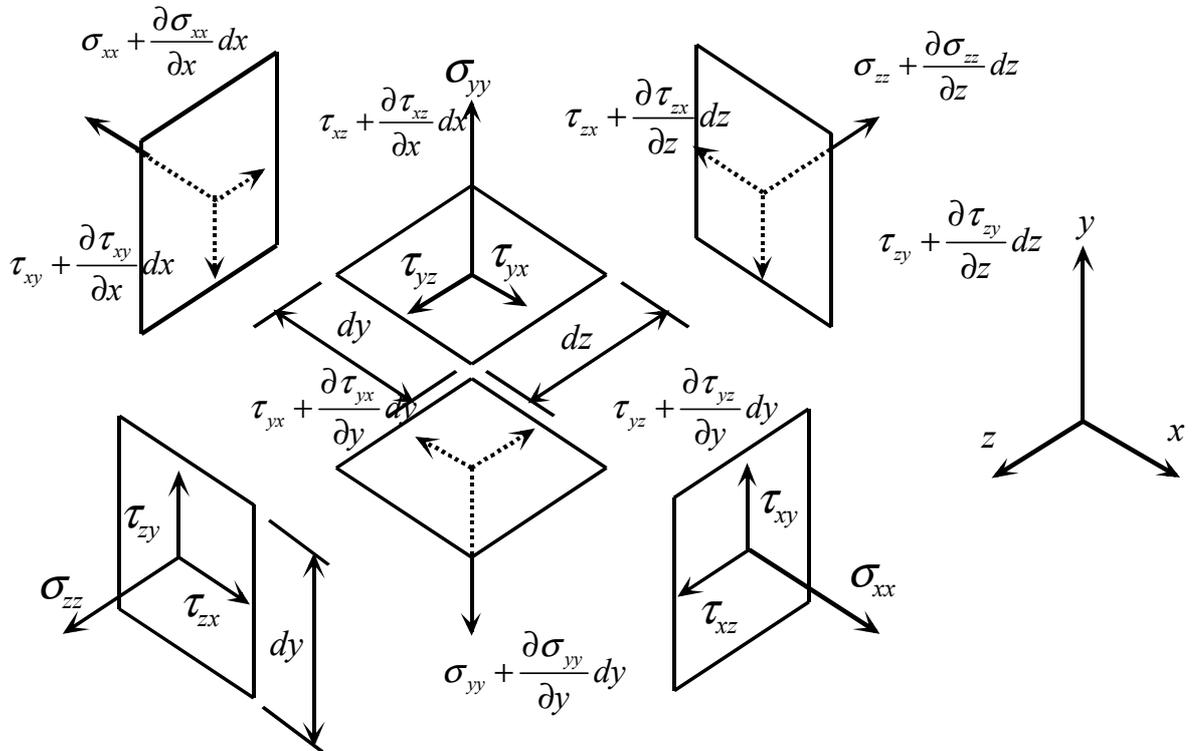


Figure 2.3 : Composantes des contraintes agissant sur un élément différentiel volumique

Les équations d'équilibre sont :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\tag{Eqn (2.5)}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

X, Y, Z : forces par unité de volume.

2.2.2 Equations de compatibilité :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad \text{Eqn (2.6)}$$

Cette équation générale permet d'exprimer six équations de compatibilité en élasticité tridimensionnelle.

• Elasticité bidimensionnelle

Dans ce cas particulier, les équations de compatibilité se réduisent à une équation, soit :

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{Eqn (2.7)}$$

Sont les conditions d'intégrabilité des déformations qui assurent l'unicité des déplacements Obligatoires pour une approche équilibre

➤ Immédiate pour une approche cinématique.

2.2.3 Relations déformation-déplacement

Avant d'étudier le cas général (tridimensionnel), on fait l'étude d'abord en deux dimensions pour en tirer les relations nécessaires dans l'espace.

Comme définition l'on peut dire que :

La déformation est définie comme quantité d'élongation d'une fibre $\Delta\delta$, divisée par son original longueur ΔL , en tant qu' ΔL approches un zéro,

$$\varepsilon = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta L} \quad \text{Eqn (2.8)}$$

Correspondent aux composants des contraintes représentés sur figure (2.1), là les composants des déformations: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}(=\gamma_{yx}), \gamma_{yz}(=\gamma_{zy}), \gamma_{xz}(=\gamma_{zx})$.

Figure 2.4 représente l'état bidimensionnel de déformations. Il y a deux types de déformations : déformations longitudinales et déformations de distorsions (transversales). Les déformations longitudinales sont définies dans l'équation (2.8). Les déformations de cisaillement sont définies comme le changement de la valeur d'un angle à l'origine droit dans l'état indéformée.

Dans la figure (2.4), u et v , sont définies les déplacements dans les directions x et y respectivement.

Considérons, deux éléments de ligne AB et AC de la configuration initiale, après déformation, ils prennent les positions $A'B'$ et $A'C'$, c'est la configuration déformée.

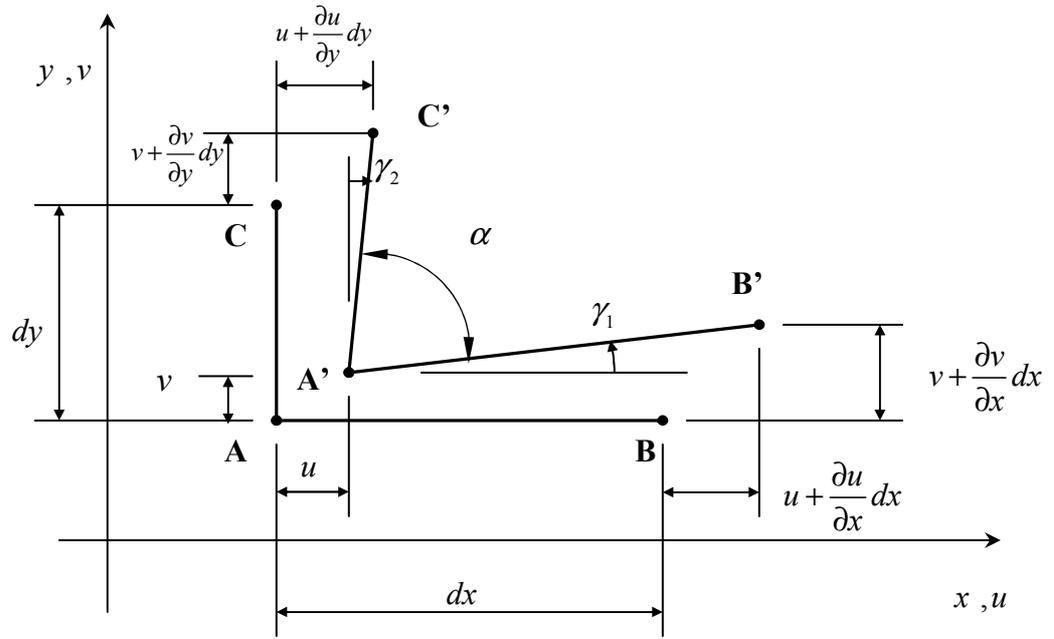


Figure 2.4 Déformations du milieu continu

$\gamma_{xy} = \gamma_1 - \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ C'est la variation de l'angle droit en A, appelée aussi le glissement.

Variation relative dans la longueur AB :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{Eqn(2.9-a)}$$

Variation relative dans la longueur :

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{Eqn (2.9-b)}$$

Pour les autres plans (y,z) et (x,z) , on obtient :

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{Eqn (2.9-c)}$$

Appelée déformation directe ou déformation axiale.

On note que :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \text{Eqn(2.9-d)}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad \text{Eqn(2.9-e)}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \text{Eqn(2.9-f)}$$

2.2.4 Relations contrainte-déformation :

Selon la loi de HOOK, la contrainte uniaxial σ_x et la déformation ε_x sont reliés par le module d'élasticité ou le module YOUNG 'E', avec :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad \text{Eqn(2.10)}$$

Bien que E est constant normal, ce peut être une fonction de déformation pour les matériaux non linéaire élastiques. Ce peut être une fonction également une fonction de temps pour les matériaux viscoélastiques.

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{Eqn (2.11)}$$

Où ν est le *coefficient de Poisson*. Pour les métaux communs tels que l'acier et l'aluminium, la valeur de ν est approximativement 0.3. Pour le béton, elle est approximativement 0.16.

La contrainte de cisaillement τ_{xy} et le déformation de cisaillement γ_{xy} est relie par le module de cisaillement G par l'équation (2.12).

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad \text{Eqn (2.12a)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{Eqn (2.12b)}$$

- ***L'écriture générale des relations sous la forme tensorielle***

Pour un matériau élastique linéaire la relation la plus générale possible entre ε et σ peut s'écrire :

$$\{\varepsilon\} = [D] \{\sigma\} \quad \text{Eqn (2.13)}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ & & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ & & & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ & Sym & & & D_{55} & D_{56} \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad \text{Eqn (2.14)}$$

Au total on a 21 constantes qui représentant les propriétés du matériau. Si le matériau est orthotrope, c'est-à-dire, que les propriétés principales coïncident avec x, y, z on peut alors écrire la relation (2.14) de façon suivante :

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} \end{bmatrix} \quad \text{Eqn (2.15)}$$

Chaque effet de *coefficient de poisson* " ν_{ij} " représente la déformation dans la direction (j) due à une contrainte dans la direction (i). A cause des conditions de symétrie on alors :

$$\begin{aligned} \nu_{yx} E_x &= \nu_{xy} E_y \\ \nu_{zx} E_x &= \nu_{xz} E_z \\ \nu_{zy} E_y &= \nu_{yz} E_z \end{aligned} \quad \text{Eqn (2.16)}$$

Alors après la réduction la matrice $[D]$ représente seulement 9 propriétés à déterminer.

Si le matériau est considéré isotrope, la matrice $[D]$ est réduite à l'évaluation de deux constantes seulement E et ν . la relation (2.17) devient :

$$\{\varepsilon\} = [D]\{\sigma\} \tag{Eqn (2.17)}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \tag{Eqn (2.18)}$$

Où :

Si on effectue l'inverse de $[D]$ on a à partir de (2.18) :

$$\{\sigma\} = [D]^{-1}\{\varepsilon\}$$

$$\{\sigma\} = [\bar{E}]\{\varepsilon\} \tag{Eqn (2.19)}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{Eqn (2.20)}$$

La matrice $[\bar{E}]$ est souvent connue sous le nom de matrice de « rigidité du matériau », par contre $[D]$ est souvent connue sous le nom de matrice de « flexibilité du matériau ».

2.2.5 Relations contrainte-déformation pour

les cas particuliers d'élasticité plane :

Contraintes plane : Pour le cas de contrainte plane tout soumet à une contrainte connexe à l'axe z disparaît ou bien tous les cas où on a une membrane, une plaque mince

chargée dans son plan, un mur, etc.....Les conditions suivantes peuvent simplifier le problème.

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{Eqn (2.21)}$$

Où z représente la direction perpendiculaire au plan x - y en question. Dans ces conditions, on a :

$$\sigma_z = 0 \quad \text{Eqn (2.22)}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad \text{Eqn (2.23-a)}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad \text{Eqn (2.23-b)}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad \text{Eqn (2.23-c)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \text{Eqn (2.23-d)}$$

Alors on peut montré facilement que les contraintes planes sont les suivantes ;

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad \text{Eqn(2.24-a)}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \quad \text{Eqn (2.24-b)}$$

$$\tau_{xy} = G(\gamma_{xy}) \quad \text{Eqn (2.24-c)}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{Eqn (2.24-d)}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad \text{Eqn (2.24-e)}$$

Déformations plane : Pour le cas des déformations plane lorsqu'on a un corps dont l'une des directions est très important que les deux autres, un tel problème est défini par :

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad \text{Eqn (2.25)}$$

Les équations précédentes (2.20) et (2.25), des relations de contrainte-déformation peuvent être exprimée comme suite:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] \quad \text{Eqn (2.26-a)}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y] \quad \text{Eqn (2.26-b)}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad \text{Eqn (2.26-c)}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \text{Eqn (2.26-d)}$$

En résolvant les équations (2.26) pour les déformations donner les relations contraintes-déformations comme suite :

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] \quad \text{Eqn (2.27-a)}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x] \quad \text{Eqn (2.27-b)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \text{Eqn (2.27-c)}$$

Problème axisymétrique : Le solide axisymétrique ou de révolution soumis à la charge axisymétrique est un cas spécial d'un solide général (c.-à-d., un système bidimensionnel de déformations plane). Tous les éléments finis de déformations plane se sont développés dans chapitre suivant peuvent être prolongés pour devenir des éléments finis axisymétrique solides, simplement en remplaçant l'intégration le long de l'épaisseur pour être celui le long de la circonférence.

Puisqu'il n'y a aucun degré de liberté additionnel impliqué dans une telle prolongation pour le cas de charges axisymétrique, chaque version des éléments axisymétriques solides est aussi pratique que sa version plane de déformation.

Formulation : Le solide considéré est de révolution. Il en va de même du chargement et des conditions aux limites. Soit z l'axe de révolution. Un point du solide est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . La solution est axisymétrique.

Chaque point du solide se déplace dans son plan méridien (r, z) . De plus le champ de déplacement est indépendant de la coordonnée θ .

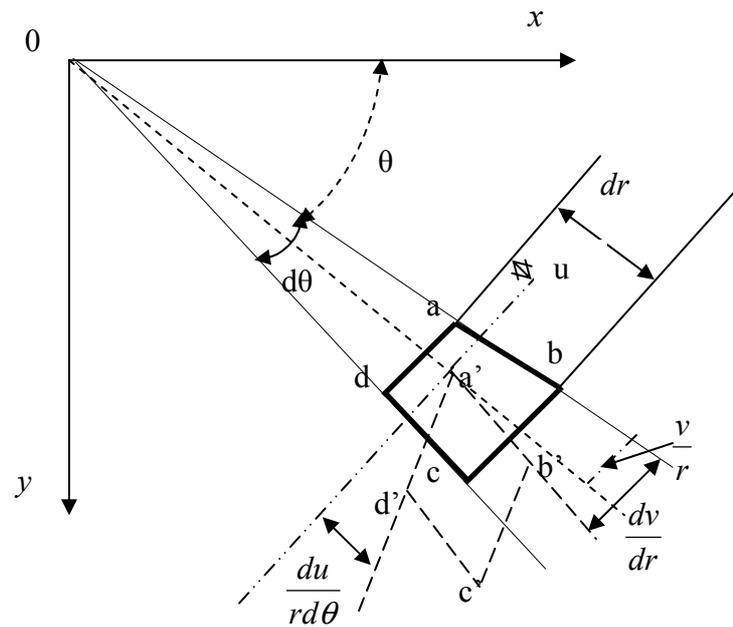


Figure 2.5 Détermination des relations déplacements déformations en Coordonnées polaires

Relation déplacement déformation: Le schéma 2.5 montre un élément différentiel $abcd$ avec, surface $rd\theta$ et sa forme déformée. Si u est le déplacement radial du côté ad , le déplacement radial du côté bc est $u + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)dr$. Alors l'élongation d'unité d'élément $abcd$ dans la direction radiale est

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \tag{Eqn (2.28-a)}$$

La déformation tangentielle ne dépend pas que du déplacement tangential v , mais également du déplacement radial u . Supposant que les points a et d déplacent seulement radialement, la nouvelle longueur de l'arc ad est $(r+u) \theta$ de d .

La différence dans le déplacement tangential des côtés ab et cd est $\frac{\partial v}{rd\theta}$, et la déformation tangentielle due au déplacement v est $\frac{\partial v}{rd\theta}$.

Toutes les déformations tangentielles sont alors

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{rd\theta} \quad \text{Eqn (2.28-b)}$$

La déformation de cisaillement est le changement de l'angle dab . Le côté $le da$ tourne par un angle de $\frac{\partial u}{rd\theta}$ avec la position de $d'a'$. Bien que le côté ab tourne par un angle de $\frac{\partial v}{dr}$ avec la position de $a'b'$, la partie de l'angle $\frac{v}{r}$ est causée par la rotation de l'élément $abcd$ comme corps rigide autour de l'axe par 0.

Ainsi la déformation de cisaillement est

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{rd\theta} + \frac{\partial v}{dr} - \frac{v}{r} \quad \text{Eqn (2.28-c)}$$

Les déformations liées à le plan (\mathbf{r}, \mathbf{z}) sont identiques que ceux obtenues dedans (2.9) pour des coordonnées rectangulaires (cartésiennes).

Pour les cas spéciaux des déformations d'axisymétrique les déplacements sont:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \text{Eqn (2.29-a)}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r} \quad \text{Eqn (2.29-b)}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{Eqn (2.29-c)}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad \text{Eqn (2.29-d)}$$

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0 \quad \text{Eqn (2.29-e)}$$

Où la déformation tangentielle s'appelle souvent *déformation circonférentielles* et la déformation de cisaillement dans le plan rz l'axe de la révolution.

Relation contraintes déformation: les relations de contraintes- déformations peuvent être obtenus par Eqn (2.30) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} - \alpha(T-T_0) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{Eqn (2.30)}$$

2.3 CONCLUSION

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse des problèmes statiques et dynamiques nécessitant la connaissance des équations de base de la théorie de l'élasticité linéaire, où ces équations facilitent la formulation des éléments et la conception du programme.

Alors d'après ce chapitre on peut résumer toutes les relations d'élasticité dans la figure suivante :

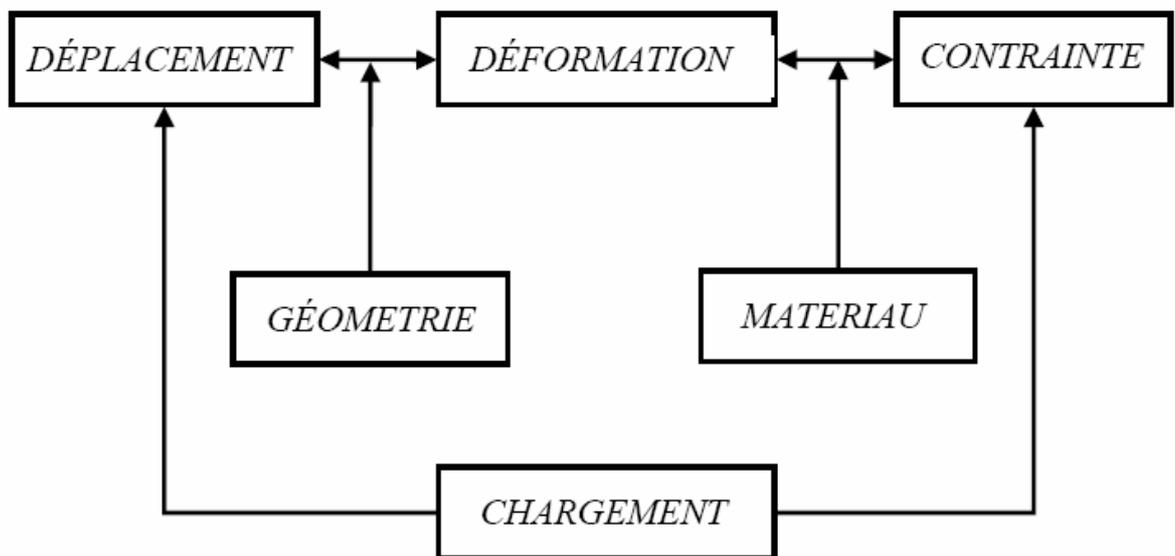


Figure 2.6 : Relations entre déplacement, déformation et contrainte

Donc pour trouver la solution d'un problème d'élasticité uni-bi-tridimensionnelle où le matériau est supposé continu, homogène et isotrope, il suffit de connaître le champ de déplacement $u(x,y,z)$ (trois fonctions inconnues), le champ de tenseur des petites déformations $\varepsilon(x,y,z)$ (six fonctions inconnues) et le champ du tenseur des contraintes $\sigma(x,y,z)$ (six fonctions inconnues).

La détermination de ces quinze inconnues implique l'établissement de quinze équations, qui sont :

- ✓ Trois relations d'équilibre ;
- ✓ Six relations déformation-déplacement (relations de compatibilité) ;
- ✓ Six relations contrainte-déformation (relations rhéologiques).

Chapitre 3

FORMULATION DES ELEMENTS FINIS A CHAMP DE DEFORMATION

FORMULATION DES ELEMENTS FINIS MEMBRANAIRES A CHAMPS DE DEFORMATION

3.1 INTRODUCTION :

Jusqu'à maintenant on continue toujours à proposer des nouveaux modèles, les auteurs se voient, ainsi l'obligation d'assumer une lourde tâche qui est de choisir lesquels des formulations satisfont un certain nombre d'exigences, souvent réclamées par l'ingénieur, et procéder par la suite à une sélection finale qui reconnaissant le n'est pas facile.

Suivant les recherches bibliographiques nous constatons l'ampleur de la MEF grâce à l'invention de la nouvelle approche 'déformation' qui a obéi à une croissance rapide comme alternative aux autres modèles.

Dans ce chapitre on va présenter quelques éléments membranaires rectangulaires et un élément triangulaire, ces éléments basés sur la formulation en déformation, ont des différents DDL par nœud.

3.2 Description de l'élément membranaire :

Les éléments membranaires sont parmi les éléments les plus simples à se développer.

Ces éléments sont employés pour analyser des structures soumises aux forces dans le plan. Supposant que la structure est dans le plan $x-y$, les déplacements d'un point quelconque de la structure sont u , la translation suivant la direction x et v , la translation suivant la direction y . Les efforts internes sont des contraintes normales σ_x et σ_y et la contrainte de cisaillement τ_{xy} .

Les éléments de membrane sont employés pour modéliser le comportement du mur de cisaillement, de la construction, et de l'action de membrane dans les coques.

3.3 Participation du M^r Sabir :

En premier lieu, Sabir a développé son élément rectangulaire avec une variation linéaire des champs de déformations indépendantes ϵ_x et ϵ_y , et un champ ϵ_{xy} constant, ce qui lui permet aux autres éléments d'avoir lieu.

Ces éléments ont des degrés de liberté dans chacun des quatre nœuds des coins, en outre l'occasion a été prise pour montrer que l'approche du modèle en déformation peut

être utilisé pour développer un élément rectangulaire simple ayant la rotation dans le plan (Drilling rotation) comme un degré de liberté nodal, la performance de cet élément est testée en l'appliquant à l'analyse des problèmes traités dans quelques publications – [SAB 85] – et une comparaison avec les résultats existants est donnée, sa combinaison avec d'autre élément rectangulaire basé sur le modèle déformation est utilisé pour obtenir des solutions aux problèmes pratique, le problème de concentration de contrainte dans les plaques trouées est analysé, de plus, ces éléments sont utilisés avec des éléments poutre courbée de renforcement convenable afin d'obtenir un solution aux plaques avec les trous renforcés.

3.4 La rotation dans le plan :(drilling rotation)

Dans la plus part des éléments finis de coque, utilisés par les ingénieurs (triangles à trois nœuds ou quadrilatères à 4 nœuds) et formulés en utilisant l'approche par facettes planes ou celle par facettes courbes, la partie membrane est le plus souvent développée sur la base de modèles classiques (déplacements ou mixtes, déformation).

Pourtant, certains cas-tests standards de coques, reconnus par la communauté scientifique comme étant de véritables outils de validation [AYA 05], font apparaître une certaine faiblesse à reproduire des résultats numériques corrects et acceptables, surtout quand il s'agit des comportements complexes où les états de membrane et de flexion sont dominants. Parmi les raisons de cette constatation d'échec, on évoque une mauvaise approximation de la membrane en termes d'éléments finis, ce qui est d'ailleurs vrai. Pour améliorer le comportement de membrane, en particulier pour les coques, les auteurs proposés, un concept de rotation autour de la normale, parmi ses auteurs on a cité :

Macleod (1966) a développé un élément dont les fonctions de formes ont été choisies par un essai d'erreur sur la base du critère de compatibilité à la limite, il a utilisé une forme simplifiée du degré de liberté rotationnel et a affirmé que le moment correspondant n'est pas complètement docile à une explication physique, les éléments de Macleod (1969) ne sont pas symétriques, Arrangement spécial de ses éléments est exigé, et leur performance est dépendante sur l'aspect de proportion, de plus, la compatibilité avec les élément de poutre peut être sur quelques nœuds seulement. [SAB 85],

Beaucoup d'autres auteurs ont penché la recherche au développement des éléments triangulaires et quadrilatères qui ont la rotation dans le plan comme un degré de liberté, particulièrement dans les travaux réalisés par Dunger et Sept (1964), Tinawi et Olsen

(1972) et Bearden (1979), ils ont développé un élément triangulaire avec des déplacements cubiques interpolés pour la rotation dans le plan.

Dans le premier travail (1964), La matrice de rigidité est obtenue en supposant des distributions de contrainte linéaires, avec l'utilisation du modèle hybride, quant aux deux autres travaux (1972) et (1979), la matrice de rigidité est basée sur des champs du déplacement compatible en tenant compte le principe d'énergie potentielle minimale.

Durant les années 70, les développeurs d'éléments finis paraissaient, numériquement incapable de formuler un élément membranaire efficace avec, en plus des déplacements de translations comme degrés de liberté (DDL), un rotation autour de la normale au plan moyen. [SED 02]

En 1981, Mohr a ranimé le problème de l'inclusion du degré de liberté rotationnel et a affirmé qu'il y a eu peu de tentatives et elles n'étaient pas particulièrement prospères, il a développé deux éléments, un élément rectangulaire pour éprouver la difficulté dans une présentation de la contrainte de cisaillement et a donné des résultats d'une manière marginale mieux que l'élément rectangulaire standard (bilinéaire) et un élément triangulaire développé par l'usage de la méthode (nested interpolation). [SAB 85]

En 1984, Allman a présenté un élément triangulaire où les déplacements le long des côtés sont pris linéaires, les normaux côtés sont supposés du second ordre. L'élément est compatible en supposant la rotation du coin dans le plan est en rapport avec le déplacement normal (quadratique).

Les éléments d'Allman sont plus riches que ceux de Mohr, mais les rotations nodales dans ses éléments ne sont pas des vraies rotations, il est donc impossible de les associer avec les poutres.

Rezak AYAD proposé un élément fini basé sur une approximation à 5 paramètres des contraintes planes contravariantes, définie en satisfaisant l'équilibre bidimensionnel dans le repère covariant naturel (ξ, η) . La matrice de rigidité mixte finale est obtenue en éliminant par condensation statique les 5 paramètres de contraintes «Concept de Rotation de Fibre Plane » [AYA 95].

D'autres concepts de rotation autour de la normale ont également été introduits pour le même objectif :

L'amélioration de la précision en membrane des éléments finis. Il s'agit du concept « Vertex rotations ». [AYA 95]

Contrairement à la définition de la rotation dans le plan du sommet w (vertex rotation), le degré de liberté additionnel (drilling rotation) est donné comme suite :

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \text{Eqn (3.1)}$$

Cette dernière peut être interprétée physiquement comme une vraie rotation de la bissectrice de l'angle θ_z entre les côtés adjacents de l'élément fini.

La figure (3.1) ci-dessous montre la bissectrice d'angle et les dérivés partiels associés aux déplacements d'élément.

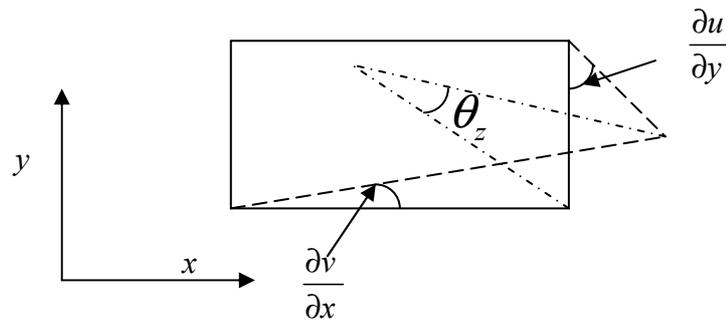


Figure (3.1) : représentation de la bissectrice d'angle et les dérivés partiels associés aux déplacements d'élément.

3.5 Présentation des éléments finis à champ de déformation :

3.5.1 Élément fini rectangulaire (SBRIE*) 2DDL par nœud :

La procédure de développement des éléments finis par laquelle les champs du déplacement sont formulés suivant l'approche sur le modèle en déformation, est illustrée dans la section (1.10.3)

Dans un système des coordonnées cartésiennes x et y , les relation entre les déformations planes $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ et les déplacements u et v , comme il est montré dans la figure (2.4) sont donnée par Eqn (2.9):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad \text{Eqn (2.9)}$$

Si on met les trois composantes de déformations valent à zéro et en intégrant les Eqn (2.9) on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}u_R &= a_1 - a_3 y \\ v_R &= a_2 + a_3 x\end{aligned}\quad \text{Eqn (3.2)}$$

Les Eqn (3.2) représentent les champs de déplacement qui interprètent les mouvements d'un corps rigide de l'élément (voir sec 1.10.3).

Pour l'élément rectangulaire à quatre nœuds aux sommets et deux degrés de liberté par nœud, le dernier champ de déplacement devra contenir huit constantes. On a utilisé trois constantes pour la présentation des mouvements des corps rigide, il ne reste que cinq constantes qui peuvent être répartie entre les déformations (voir sec 1.10.3).

L'Eqn (3.3) représente le champ de déformation de l'élément SBRIE*

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_4 + a_5 y \\ \varepsilon_y &= a_6 + a_7 x \\ \gamma_{xy} &= a_8\end{aligned}\quad \text{Eqn (3.3)}$$

En fin on prend la forme finale du champ de déplacement comme suit :

$$\begin{aligned}u_R + u_s &= a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} \\ v_R + v_s &= a_2 + a_3 x - a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 y + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2}\end{aligned}\quad \text{Eqn (3.4)}$$

Note:

Au préalable il faut noter que les déformations sont indépendantes l'une de l'autre, afin qu'aucun couplage inutile entre l'effet de flexion et celui de cisaillement existe [DJO 90]. D'ici un état de flexion pure peut être obtenu (intéressant pour les structures travaillant en flexion).

3.5.2 Élément fini rectangulaire (SBQ4) de BELARBI :

On a choisi un élément fini quadrilatère SBQ4 pour les structures membranaires avec un degré de liberté additionnel (rotation), comme elle est définie dans la sec (3.4), Eqn (3.1). Suivant une brève description à partir de la relation d'élasticité plane Eqn(2.9) , cette dernière doit au minimum représenter le mouvement d'un corps rigide, donc on peut écrire:

$$\begin{aligned} u_R &= a_1 - a_3 y \\ v_R &= a_2 + a_3 x \\ \theta_z &= a_3 \end{aligned} \quad \text{Eqn(3.8)}$$

On remarque que l'Eqn (3.8) sont d'écrite par trois composantes : a_1, a_2 représente les composantes de translation et a_3 , est la rotation dans le plan. L'ensemble de ces composantes représente le mouvement d'un corps rigide.

Maintenant, considérons les fonctions de formes nécessaires suivant le modèle de déplacement pour élément quadrilatère à quatre nœuds, chaque nœud à trois degrés de libertés deux translations et une rotation dans le plan, alors les fonctions de formes devraient contenir douze constantes indépendantes. En à utiliser trois ceux-ci dans la représentation de mouvement du corps rigide, et il reste neuf constantes pour la représentation du déformation de l'élément, ces constantes seront distribués sur les trois composantes de déformations, $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$. Comme une première tentative, nous supposons que les trois de déformations satisfont:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= a_4 + a_5 x + a_6 y \\ \epsilon_y &= a_7 + a_8 x + a_9 y \\ \epsilon_{xy} &= a_{10} + a_{11} x + a_{12} y \end{aligned} \quad \text{Eqn(3.9)}$$

Nous observons que les termes d'Eqn (3.9) sont différenciés, ils satisfont l'équation de compatibilité générale Eqn (2,7) pour déformation,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad \text{Eqn(2.7)}$$

Malheureusement cette approche mène à une matrice de transformation singulière, pour la deuxième tentative du BELARBI [BEL 00] a suggéré des interpolations pour les déformations.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_4 + a_6 y + a_{10} y^2 + 2a_{11} xy^3 \\ \varepsilon_y &= a_7 + a_8 x - a_{10} x^2 - 2a_{11} yx^3 \\ \gamma_{xy} &= 2a_5 + 2a_6 x + 2a_8 y + 2a_9 y + 2a_{12} x \end{aligned} \quad \text{Eqn (3.10)}$$

Dans les équations (3.10), les coefficients a_4 , a_7 et a_5 sont les termes qui correspondent aux états de la déformation constante. Ceux-ci assurent la convergence chaque fois le maillage des éléments finis est raffiné. Les termes qui contiennent le constantes a_6 , a_8 , a_9 et a_{12} permettent de tenir compte un comportement de déformation linéaire, les termes d'ordre plus haut sont ajoutés dans une sorte de satisfaire les équations de compatibilité (3.9). Les expressions de déplacements pour u et v sont obtenues en intégrant les équations (3.10), en ajoutant les équations des déplacements du corps rigide (3.8). Le résultat est:

$$\begin{aligned} u &= a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 y + a_6 xy + a_8 \frac{y^2}{2} + a_9 y^2 + a_{10} xy^2 + a_{11} x^2 y^3 \\ v &= a_2 + a_3 x + a_5 x + a_6 \frac{x^2}{2} + a_7 y + a_8 xy - a_{10} x^2 y - a_{11} y^2 x^3 + a_{12} x^2 \end{aligned} \quad \text{Eqn(3.11)}$$

Sous une forme matricielle, l'équation (3.11) s'écrit :

$$\{u\} = [x] \{a\} \quad \text{Eqn(3.12)}$$

Où les déplacements $\{u\} = \langle u, v \rangle^T$

$\{a\}$ est le vecteur des paramètres généraux de l'approximation $\langle a_1, a_2, \dots, a_{12} \rangle$.

$[x]$ est la matrice des fonctions, tel que :

$$[x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & y & xy & 0 & \frac{y^2}{2} & y^2 & xy^2 & x^2 y^3 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & x & \frac{x}{2} & y & xy & 0 & -x^2 y & -y^2 x^3 & x^2 \end{bmatrix} \quad \text{Eqn(3.13)}$$

La formule du degré de la liberté θ , est obtenue en substituant les équations (3.11) dans l'équation (3.1).

$$\theta_z = a_3 - a_9 y - 2a_{10} xy - 3a_{11} x^2 y^2 + a_{12} x \quad \text{Eqn(3.14)}$$

$$u_i = (x_i, y_i), v_i = v(x_i, y_i) \text{ et } \theta_i = \theta(x_i, y_i) \text{ avec } i = 1, 2, 3, 4,$$

En substituant les valeurs de u, v et θ à chaque noeud dans les équations (3.11) et (3.14), on obtient:

$$\{q\}_{(12 \times 1)} = [A]_{(12,12)} \{a\}_{(12 \times 1)}$$

Où $\{q\} = \langle u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2, u_3, v_3, \theta_3, u_4, v_4, \theta_4 \rangle^T$ est le vecteur du paramètre nodal, et

$$[A] = [[A_1]^T, [A_2]^T, [A_3]^T, [A_4]^T]^T \quad \text{Eqn (3.15-a)}$$

[A] est une matrice (12x12) définie par sous matrices $[A_i]$ avec les expressions données

$$\text{par: } [x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_i & x_i & y_i & x_i y_i & 0 & \frac{y_i^2}{2} & y_i^2 & x_i y_i^2 & x_i^2 y_i^3 & 0 \\ 0 & 1 & x_i & 0 & x_i & \frac{x_i^2}{2} & y_i & x_i y_i & 0 & -x_i^2 y_i & -y_i^2 x_i^3 & x_i^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_i & -2x_i y_i & -3x_i^2 y_i^2 & x_i \end{bmatrix}$$

$$\text{Eqn (3.15-b)}$$

Contrairement à l'approximation naïve de l'approche déplacement, la matrice résultante [A] n'est pas singulière, et son inverse $[A]^{-1}$ peut être calculé donc,

$$\{a\} = [A]^{-1} \{q\} \quad \text{Eqn(3.16)}$$

En substituant l'équation (3.16) dans l'équation (3.12), il sera:

$$\{u\} = [x] \{a\} = [x] [A]^{-1} \{q\} = [N] \{q\} \quad \text{Eqn (3.17-a)}$$

$$\text{Ou: } [N] = [x] [A]^{-1}$$

[N] est la matrice des fonctions de forme.

On remarque que toutes les formulations des éléments finis de ce genre peuvent être dérivé par la méthode régulière du développement des formulations des éléments finis, si l'inverse de la matrice des paramètres [A] existe.

Suivant la relation déformation/déplacement -équation (2.9)- on aura besoin de dériver les champs de déplacements pour obtenir la matrice [Q], alors :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & y^2 & 2xy^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & -x^2 & -2x^3y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2x & 0 & 2y & 2y & 0 & 0 & 2x \end{bmatrix} \quad \text{Eqn (3.17-b)}$$

3.5.3 ELEMENT TRIANGULAIRE :

La formulation des éléments finis à champs de déformation maintenant est applicable pour obtenir des fonctions de forme aux éléments triangulaires ont trois degré de liberté à chaque nœud, ces fonctions sont appelées les fonctions de déformations voir la sec (3.5.3.1). Dans un premier cas, on propose, un élément basé uniquement sur le modèle déformation.

3.5.3.1 Elément SBTSAB*

Les étapes définies précédemment restent applicables à la formulation des fonctions de déformation, sauf que cette fois, tous les éléments triangulaires cités au-dessous, possèdent neuf constantes indépendantes. Trois entre elles (a_1 , a_2 et a_3) sont déjà utilisées pour représenter les mouvements du corps rigide.

L'équation de compatibilité est donnée dans Eqn (2.7) :

Soit pour SBTSAB* :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_4 + a_5y \\ \varepsilon_y &= a_6 + a_7x \\ \gamma_{xy} &= a_8 + a_9(x + y) \end{aligned} \quad \text{Eqn (3.18)}$$

Le champ de déplacement final pour SBTSAB* sera obtenu par combinaison de Eqn (3.8) et l'intégrale de Eqn (3.18), donc :

$$\begin{aligned} u &= a_1 - a_3y + a_4x + a_5xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} + a_9 \frac{y^2}{2} \\ v &= a_2 + a_3x - a_5 \frac{x^2}{2} + a_6y + a_7xy + a_8 \frac{x}{2} + a_9 \frac{x^2}{2} \\ \theta_z &= a_3 - a_5x + a_7y + a_9 \frac{(x - y)}{2} \end{aligned} \quad \text{Eqn(3.19)}$$

Nous remarquons que, les fonctions de déplacement finales contiennent des termes quadratiques permettant ainsi le changement de courbure.

Alors, la matrice de déformation [Q] s'écrit en substituant les équations (3.19) dans Eqn (2.9)

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (x + y) \end{bmatrix}$$

La matrice de transformation définie par les sous matrices [A_i] est donnée par :

$$[A_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_i & x_i & x_i y_i & 0 & -\frac{y_i^2}{2} & \frac{y_i}{2} & \frac{y_i^2}{2} \\ 0 & 1 & x_i & 0 & -\frac{x_i^2}{2} & y_i & x_i y_i & \frac{x_i}{2} & \frac{x_i^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x_i & 0 & y_i & 0 & \frac{(x - y)}{2} \end{bmatrix}$$

3.5.4 Formation de la matrice de rigidité:

Pour construire une matrice de rigidité d'un élément fini, il est nécessaire de passer les étapes suivantes :

1. Choisir un système de coordonnées convenables et puis la numérotation des nœuds.

On peut écrire le vecteur de déplacement en un point comme suite :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \tag{Eqn(3.20)}$$

Et pour le vecteur des forces,

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \tag{Eqn(3.21)}$$

Donc pour l'élément complet on obtient :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x_1, y_1) \\ v(x_1, y_1) \\ u(x_2, y_2) \\ v(x_2, y_2) \\ u(x_3, y_3) \\ v(x_3, y_3) \\ u(x_4, y_4) \\ v(x_4, y_4) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{Bmatrix}$$

La matrice de rigidité est carrée et ont un ordre correspond a le nombre des degrés de libertés par élément.

$$\{F^e\} = [K^e] \{u^e\} \tag{Eqn(3.22)}$$

2. choisir la fonction de déplacement (le champ), dans notre cas on a choisir le Q4.

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_8 \end{Bmatrix} \tag{Eqn(3.23)}$$

Cette multiplication ce forme de $\{u\} = [x] \{a\}$ Eqn(3.24)

3. construction de la matrice [A] :

La matrice $[x_i]$ est une sous matrice qui leur assemblage donne la matrice [A].

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \{a\} = [A] \{a\} \tag{Eqn(3.25)}$$

Alors on à construire la matrice A, ce qui peut se réduire à :

$$\{u^e\} = [A] \{a\} \text{ Donc, } \{a\} = [A]^{-1} \{u^e\}$$

L'écriture générale de l'Eqn (3.32) est comme suite :

$$\{u\} = [x] [A]^{-1} \{u^e\} \tag{Eqn(3.26)}$$

4. relier les déformations $\varepsilon(x, y)$ de chaque point aux déplacements $\{u_i\}$.

L'équation (2.9) de l'élasticité plane montre la relation déformation-déplacement

$$\varepsilon(x, y) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dy} \\ \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \end{Bmatrix}$$

D'après la relation déformation-déplacement on exprime les fonctions de déformation.

$$\varepsilon_x = a_2 + a_4 y$$

$$\varepsilon_y = a_7 + a_8 x$$

$$\gamma_{xy} = a_3 + a_4 x + a_6 + a_8 y$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_8 \end{Bmatrix}$$

Et sont écriture générale est,

$$\varepsilon(x, y) = [Q] \{a\} \tag{Eqn(3.27)}$$

$$\text{Alors } \varepsilon(x, y) = [Q][A]^{-1} \{u^e\} \tag{Eqn(3.28)}$$

5. relier les contraintes aux déformations et aux déplacements dans chaque point.

D'après la lois de HOOK $\sigma = D \varepsilon$, avec D, la matrice d'élasticité.

$$\sigma(x, y) = [D][Q][A]^{-1} \{u^e\} \tag{Eqn (3.29)}$$

6. relier les forces nodales équivalentes par les déplacements nodaux pour obtenir la matrice de rigidité $[K^e]$.

D'après la théorie des travaux virtuels on trouve,

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} \tag{Eqn (3.30)}$$

$$\{F^e\} = \left[\int_V [A^{-1}]^T [Q]^T [D][Q][A]^{-1} dV \right] \{u^e\} \quad \text{Eqn (3.31)}$$

$$[K^e] = [A^{-1}]^T \left[\int_V [Q]^T [D][Q] dV \right] [A]^{-1} \quad \text{Eqn (3.32)}$$

$$\text{Alors, } [K_0] = \int_V [Q]^T [D][Q] dV \quad \text{Eqn (3.33)}$$

7. établir la matrice de rigidité [H] qui relie entre les contraintes et les déplacements.

D'après l'Eqn (3.29) on peut déduire la matrice [H]

$$\sigma(x, y) = [D][Q][A]^{-1} \{u^e\}$$

$$[H] = [D][Q][A]^{-1} \quad \text{Eqn (3.34)}$$

$$\sigma(x_i, y_i) = [H_i] \{u^e\}, (i = 1, n)$$

: n le nombre des nœuds par élément.

Pour obtenir les contraintes en un point défini on remplace Eqn (3.29) par les coordonnées de l'élément.

3.5.5 Élément axisymétrique :

Dans les problèmes d'axisymétrie on a le besoin de formuler les éléments en coordonnées (r, θ, z) , alors il est nécessaire de transformer les coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires.

- **Exemple SBRIE***

$$u_R + u_s = a_1 - a_3 z + a_4 r + a_5 r z - a_7 \frac{z^2}{2} + a_8 \frac{z}{2}$$

$$v_R + v_s = a_2 + a_3 r - a_5 \frac{r^2}{2} + a_6 z + a_7 r z + a_8 \frac{r}{2}$$

Eqn (3.35)

Et la formulation de la matrice de rigidité se de la même manière que la précédente sauf les relations d'élasticité plane entre les déplacements déformations, et déformations contraintes voyant la sec (2.2.4), Eqn (2.29).

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \gamma_{r\theta} &= \gamma_{\theta z} = 0\end{aligned}\quad \text{Eqn (2.29)}$$

La relation contrainte déformation voir l'Eqn (2.30) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad \text{Eqn (2.30)}$$

3.6 CONCLUSION

Suivant un modèle différent, basé sur la formulation de champs de déformation avec une sélection minutieuse des termes qui vérifient la représentation théorique adéquate du comportement des éléments travaillant en membrane, cinq types d'éléments sont présentés dans ce chapitre, dont la plus part, les champs de déformation sont indépendants. La procédure classique de la méthode des éléments finis a été appliquée.

Les éléments présentés avec deux degrés de liberté SBRIE*, Q4 formulés en axisymétrique pour la représentation de solide de révolution dans quelques tests et applications se font dans notre travail pour la validité et la crédibilité des éléments en axisymétrie.

Chapitre 4

PRESENTATION DE L'OUTIL INFORMATIQUE

PRESENTATION DE L'OUTIL INFORMATIQUE

4.1 INTRODUCTION

La résolution d'un problème par la M.E.F, nécessite la manipulation des matrices et vecteurs de grandes tailles (matrice des raideurs, matrice de rotation, vecteurs forces, etc.) ainsi que différentes techniques numériques (Assemblage, résolution...).

Ceci rend l'utilisation de l'ordinateur essentielle pour l'application de la méthode. De point de vue pratique, l'utilisation de la méthode se fait à travers l'utilisation d'un programme qui offre à l'utilisateur un certain nombre de possibilités à travers : une bibliothèque d'éléments, un ensemble de lois de comportement de matériaux et de liaisons, un ensemble d'algorithmes de résolution, etc. Donc, dans ce chapitre on présente le programme à utiliser qui permet la modélisation des éléments structuraux en élasticité plane.

Dans notre travail présenté, nous avons utilisé un programme en fortran et le code SAP2000, V9.03.

4.2 Langage FORTRAN90:

Le **FORTRAN** est de loin, le langage le plus utilisé dans la programmation relative aux calculs de l'ingénieur. La dernière version appelée **FORTRAN 90** possède de nombreux avantages par rapport aux précédentes versions (Fortran 77) dont les principaux sont cités ci-après.

- ✓ Les programmes en Fortran 90 sont écrits en format libre.
- ✓ On peut mélanger les caractères majuscules et minuscules sans restriction.
- ✓ Plusieurs rapports (instructions) peuvent être placés dans une même ligne séparés par « ; »
- ✓ Les longues lignes peuvent être prolongés par le symbole « & » à la fin de la ligne.
- ✓ Les commentaires placés après le symbole « ! » sont ignorés,
- ✓ L'instruction « **IMPLICIT NONE** » exige la déclaration de toutes les variables et constantes ;

- ✓ Les déclarations sont signalées par double deux points « :: » ;
- ✓ On ne trouve pas d'étiquettes dans le programme Fortran 90.

4.2.1 Instructions de test – conditions

Il y a deux importantes structures pour les instructions de test dans le Fortran 90, la première correspond à la structure classique IF...THEN...ELSE qui est présente dans la plupart des langages évolués, elle prend la forme :

```

NAME_OF_CLAUSE: IF (logical expression) THEN

                                First block of statement

                                ELSE,

                                second block of statement

                                END IF NAME_OF_CLAUSE

```

Le nom de clause est optionnel et peut être ignoré, la deuxième structure se présente sous la forme suivante:

```

SELECT_CASE_NAME: SELECT CASE (VARIABLE or EXPRESSION)

                                CASE (SELECTOR)

                                first block of statements

                                CASE (SELECTOR)

                                second block of statements

                                .
                                .
                                .
                                CASE DEFAULT

                                default block of statements

                                END SELECT_CASE_NAME

```

Exemple: subroutine sample, calcul des coordonnées des points d'intégration de Gauss
select case (nip)

case (1)

s (1,1) = ... ; wt(1) = ...

case (2)

s (2,1) = ... ; wt(2) = ...

.

.

.

case default

print *, " wrong number of integrating points "

end select

Note: cette structure remplace le «**GO TO**» étiqueté du Fortran 77.

4.2.2 Construction d'un boucle:

Il y a deux manières de construire des boucles dans le Fortran 90, dans la première, le bloc est répété un nombre fixe de fois, par exemple:

```
FIXED_ITERATIONS: DO I = 1, N
```

```
    block of statements
```

```
END DO FIXED_ITERATIONS
```

Dans la seconde manière, la boucle peut être quittée ou continuée selon le résultat d'une certaine condition, par exemple:

```
EXIT_TYPE: DO
```

```
    block of statements
```

```
    IF (conditional statement) EXIT
```

```
    block of statements
```

```
END DO EXIT_TYPE
```

Ou bien

```
CYCLE_TYPE: DO
```

```
    block of statements
```

```
    IF (conditional statement) CYCLE
```

```
    block of statements
```

```
END DO CYCLE_TYPE
```

4.2.3 Matrices dynamiques:

Le Fortran 90 a remédié, peut être, à la plus grande insuffisance des précédents langages Fortran qui concerne le calcul des matrices dont la taille est très grande, ce calcul se produit fréquemment dans l'analyse par éléments finis. C'est que le Fortran 90 permet d'avoir des déclarations dynamiques des matrices, c'est-à-dire que les tailles des matrices peuvent ne pas être spécifiées au moment de la compilation du programme, elles peuvent être allouées après la lecture de certaines données dans le programme ou le résultat d'un calcul intermédiaire. Une simple illustration est dans l'exemple suivant :

```
PROGRAM DYNAMIC
  ! just to illustrate dynamic array allocation
  IMPLICIT NONE

  ! declare variable space for two-dimensional array A
  REAL , ALLOCATABLE :: A(:, :)

  ! now read in the bounds for A

  READ *, M, N

  ! allocate actual space for A

  ALLOCATE (A (M, N))
```

```
READ *, A

PRINT *, 2. * SQRT (A) + 3.

DEALLOCATE (A) ! A no longer needed

END PROGRAM DYNAMIC
```

Dans ce simple programme, on peut trouver d'autres facilités qu'offre le Fortran 90 comme les opérations sur les matrices, de sorte qu'on peut lire des lignes entières dans la matrice ou la racine carrée de tous ces éléments par une simple opération.

Une disposition nommée « broadcasting » permet d'avoir des opérations sur les lignes des matrices par des scalaires comme 2. et 3. Dans l'exemple précédent, donc ce qui va être imprimé c'est la racine carrée de tous les éléments de la matrice qui ont été multipliés par 2 et ajoutés à 3.

4.2.4 Constructeur:

Le Fortran 90 permet la construction d'une matrice (1-D) ou vecteurs de la manière suivante :

$$V = (/ 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 /)$$

Ce qui est équivalent à :

$$V(1) = 1.0; V(2) = 2.0; V(3) = 3.0; V(4) = 4.0$$

4.2.5 Sections des matrices:

Des parties de matrices peuvent être référencées par une gamme de nombre entier pour un ou plusieurs éléments, si cette gamme n'est pas spécifiée, l'implication concerne alors la totalité des éléments de cette dimension, par exemple si A et B sont des matrices 2-D

$$A(:, 1:3) \text{ et } B(11:13, :)$$

Implique tous les termes des trois premières colonnes de A et tous les termes des lignes onze à treize de B respectivement.

4.2.6 Manipulations sur les matrices:

Le Fortran 90 permet de faire des opérations sur les matrices sans avoir besoin des sous-routines qui ont été essentielles en Fortran 77, par exemple, si A, B et C sont des matrices et s un scalaire, les opérations suivantes sont valables.

$$A = B + C$$

$$A = B - C$$

$$A = s * B$$

$$A = B / s$$

$$A = 0.$$

4.2.7 Procédures intrinsèques pour matrices:

Pour apporter un complément au calcul matriciel, le Fortran 90 fournit quelques procédures intrinsèques (fonctions) qui sont d'une grande utilité dans les programmes de la méthode des éléments finis, par exemple

FUNCTION MATMUL (A, B)	! produit de deux matrices
FUNCTION TRANSPOSE (A)	! transposée de A
FUNCTION DOT_PRODUCT (V1, V2)	! produit scalaire de v1 et v2.

4.3 Présentation du programme :

Le programme a été élaboré d'une manière structurée, il est constitué de plusieurs sous-programmes où le passage des paramètres ne s'effectue pas lors de l'appel du sous-programme, ce qui facilite la programmation et la rend très souple car on ne sera pas contraint à chercher les paramètres qui doivent passer d'une routine à l'autre.

Comme tout programme d'éléments finis, ce programme est constitué par les étapes illustrées sur la figure (4.1)

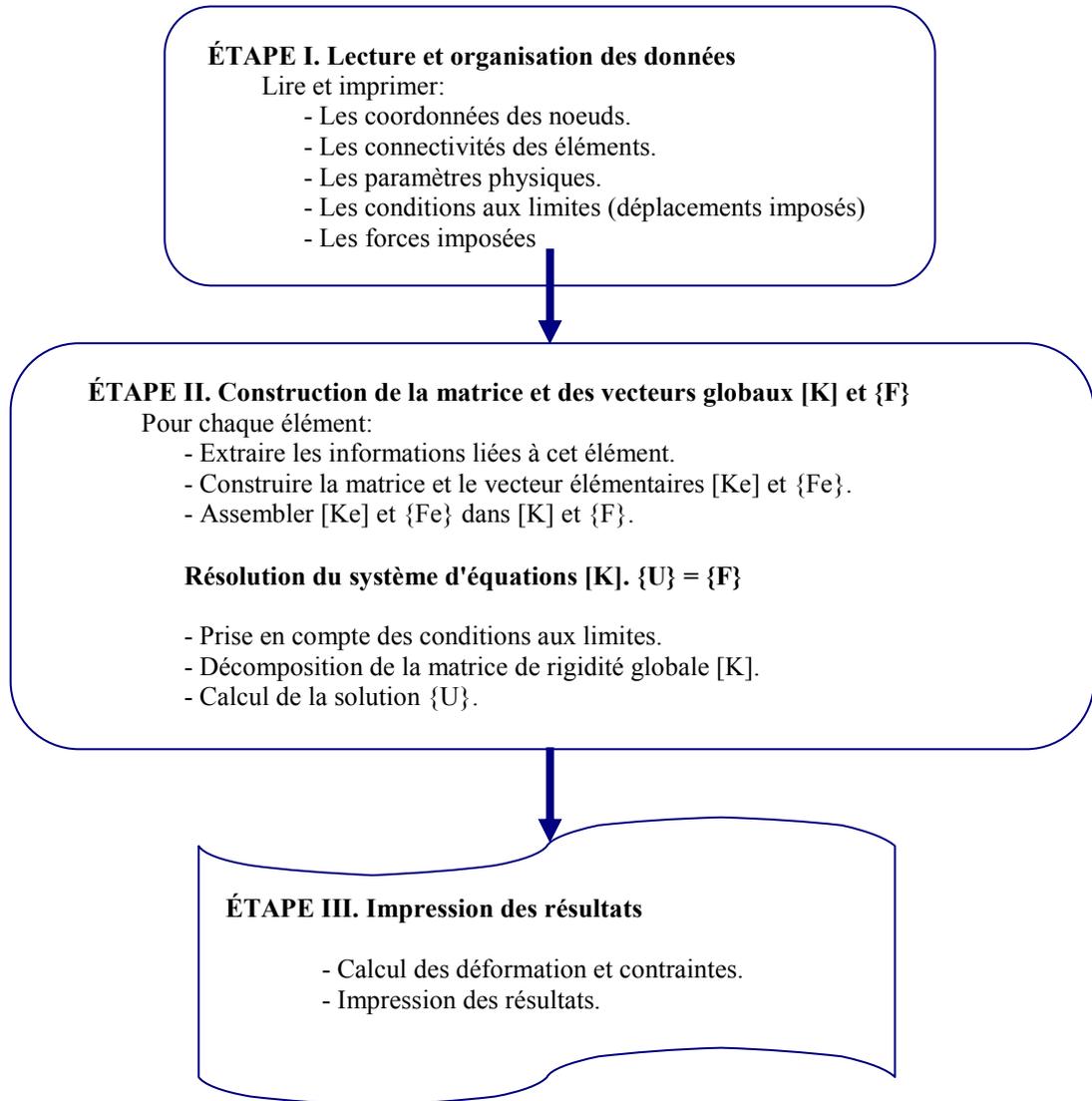


Figure (4.1) : Les étapes nécessaires du programme

4.3.1 Présentation des différentes étapes du programme:

a) **Étape 1: Lecture et organisation des données**

b) **Étape 2: Construction de la matrice et du vecteur globaux $[k]$ et $\{f\}$ et résolution du système des équations $[K] \{U\} = \{F\}$**

Cette étape est la plus importante du programme, car on y effectue toutes les opérations nécessaires pour aboutir à la solution finale du problème.

✓ **Évaluation de la matrice de rigidité élémentaire:**

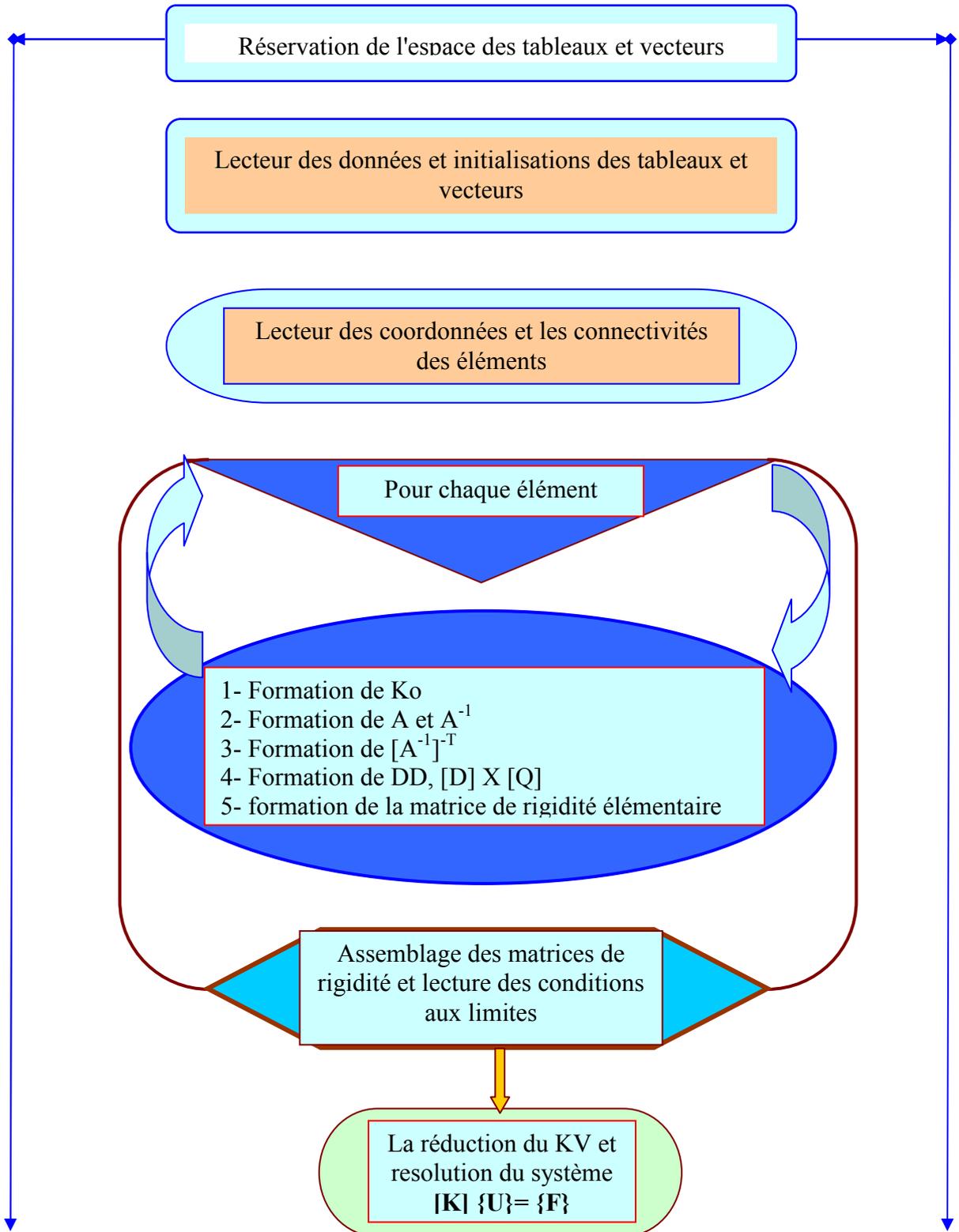
✓ **Lecture des vecteurs élémentaires des forces:**

✓ **Calcul des déplacements aux nœuds:**

$$[K] \{U\} = \{F\}$$

✓ **Calcul des contraintes et déformations pour chaque élément (SIGMA, EPS)**

ORGANIGRAMME DETAILLE DU PROGRAMME



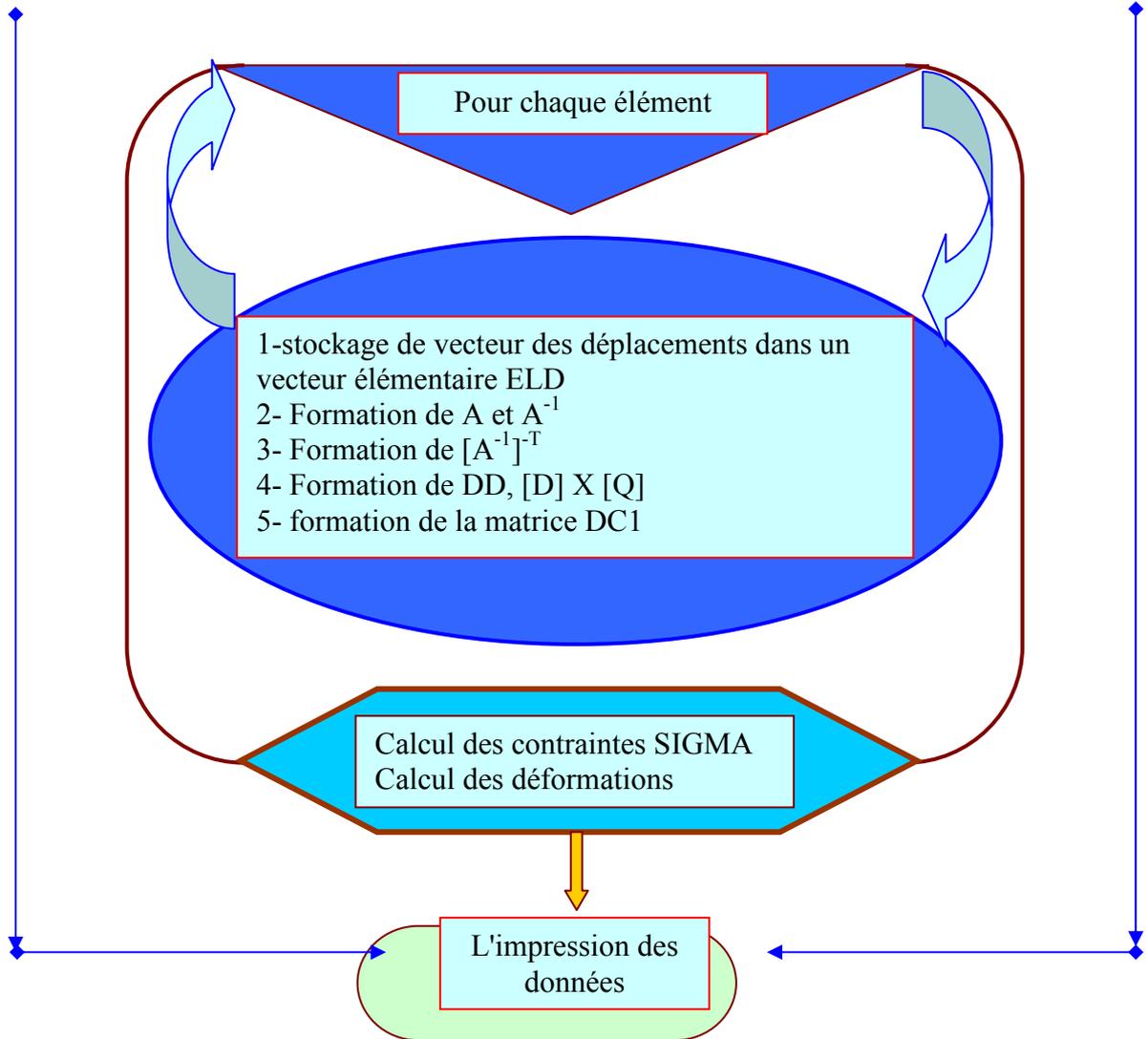


Figure (4.2) : Organigramme détaillé du programme

4.4 Présentation du code: « SAP2000 »

4.4.1 Introduction:

« SAP2000 » représente le dégagement le plus sophistiqué et le plus facile à utiliser de la série des programmes « SAP ». Il est lancé en 1996, le « SAP2000 » représente la première version de SAP à intégrer complètement au sein de Microsoft Windows.

« SAP2000 » est une formule complète est simple utilisé dans l'analyse des structures par la méthode des élément finis.

« SAP2000 » est un programme structural basé sur la méthode des éléments finis autonome pour l'analyse et la conception des structures civiles et industrielles. Il offre une interface utilisateur intuitive, puissante avec beaucoup d'outils pour faciliter la construction rapide et précise des modèles, avec les techniques analytiques sophistiquées requises pour faire les projets les plus complexes.

La richesse de « SAP2000 » réside dans la variété de ses commandes pour générer les modèles analysés, et leurs comportements, ainsi la visualisation graphique des résultats.

« SAP2000 » est un logiciel dont les capacités sont nombreuses, le générateur Graphique permet de satisfaire la plupart des exigences de base de l'ingénierie par des outils graphiques adéquats en vue de la mise en forme d'une modélisation.

4.4.2 Notions préliminaires :

➤ Description générale :

Le logiciel « SAP2000 » est constitué d'un ensemble de modules qui permettent :

- la création d'un fichier de données avec un éditeur de texte ou sous forme graphique.
- le lancement du calcul pour l'analyse et le dimensionnement.
- la visualisation graphique et numérique des résultats car après le lancement du logiciel, l'utilisateur entrera directement dans le menu principal qui regroupe les options suivantes :

Module « RUN ANALYS » : lancement du calcul.

- Module « DRAW et ASSING » : pour faire entrer la structure.
- Module « FILE DISPLAY INPUT/OUTPUT TEXT FILES... » : permet l'accès au fichier de données.

➤ Modélisation :

Le logiciel « SAP2000 » utilise une librairie de cinq familles d'éléments finis de base à savoir :

- Eléments barres ou poutres (Frame/Cable):

Utilisée pour modéliser les structures en portiques ou en treillis planes ou spéciales ainsi que en plus de son poids propre, l'élément barre peut être sollicité par un chargement concentré uniformément ou linéairement repart.

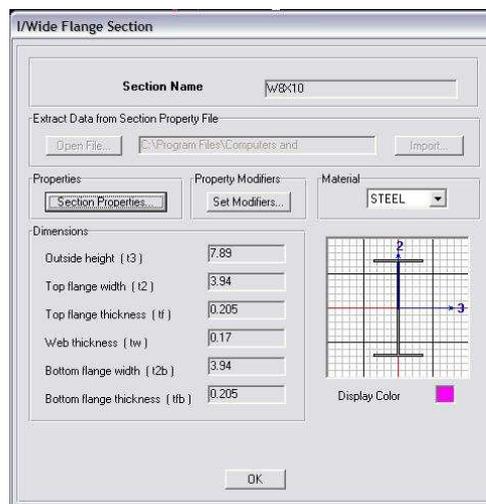


Figure (4.3) : propriétés d'élément poutre.

- Elément de coque (Shell) :

Désigné pour la modélisation des structures spatiales pouvant travailler dans le sens flexionnelle (plaque) ou dans le sens membranaire (membrane).

L'élément peut avoir trois ou quatre nœuds et peut être sollicité par un chargement concentré réparti sous forme de pression ou de température en plus de son poids propre.

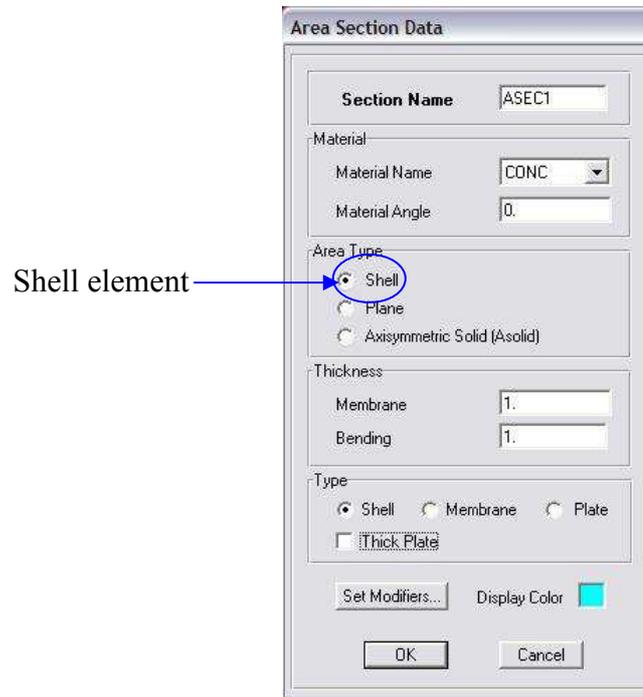


Figure (4.4) : propriétés d'élément coque.

- Elément plane:

Désigné pour la modélisation des structures bi-dimensionnelles, ces éléments quadrilatères à quatre nœuds et triangulaires à trois nœuds, peuvent être analysés dans les domaines de contrainte plane ou de déformation plane, et en outre ont deux formulations, la première formulation isoparamétrique standard sans modes incompatibles et la seconde avec les modes incompatibles.

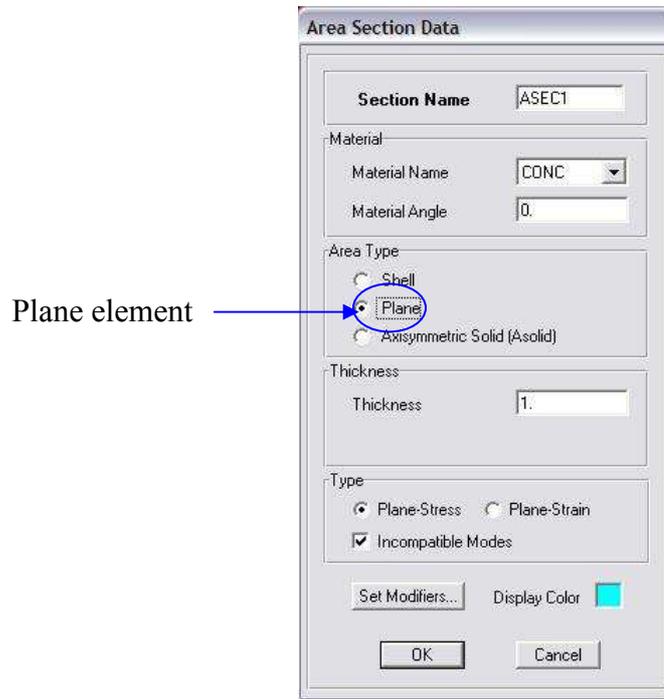


Figure (4.5-a) : propriétés d'élément plane.

- Incompatible element plane:

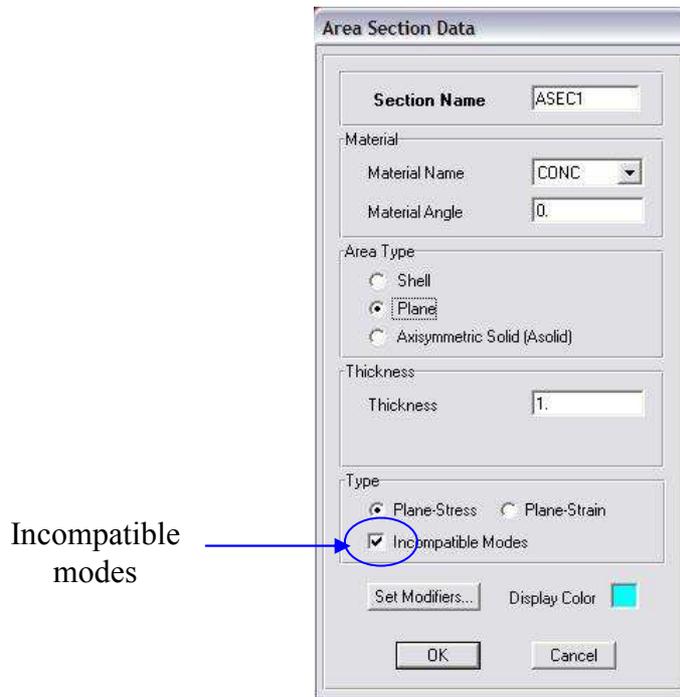


Figure (4.5-b) : propriétés d'élément plane incompatible.

Remarque :

Pour utiliser l'élément plan compatible intégré dans le code SAP2000, il faut désactiver l'option incompatible modes présenté dans la figure (4.5-b).

- Elément de solide axisymétrique (A-solid):

Basé sur une formulation isoparamétrique, cet élément sert pour la modélisation des structures spatiales travaillants soit en contrainte plane ou en déformation plane ou pour les structures axisymétrique. Le chargement sous formes gravitationnelles de pression ou de températures peut être appliqué ainsi que le chargement radial.

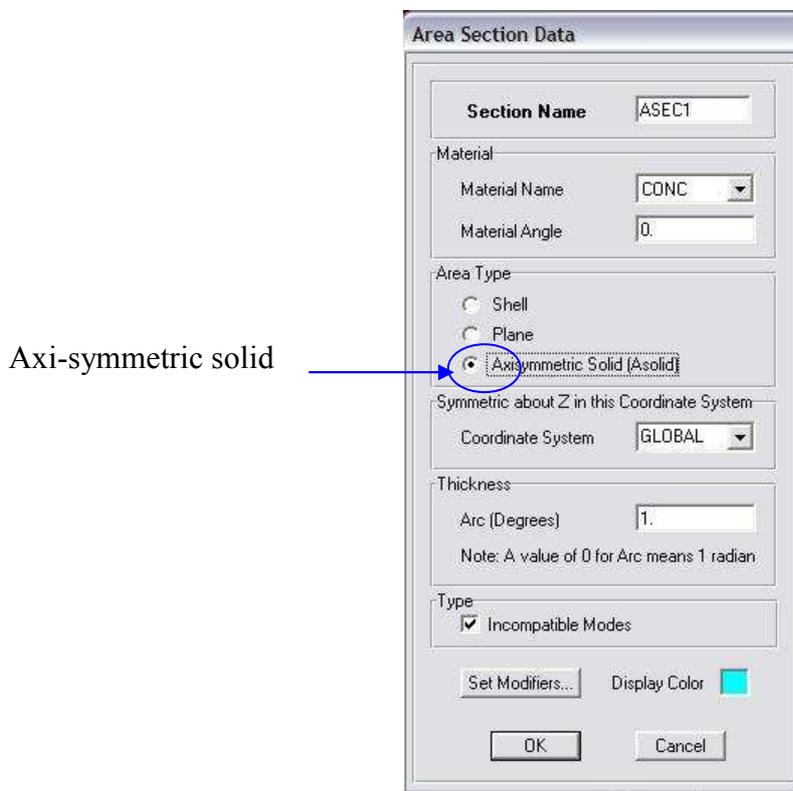


Figure (4.6) : propriétés d'élément axisymétrique.

- Elément de solide (Solid):

Cet élément brique à huit nœuds peut être prise comme modèle de calcul pour les structures spatiales en volume sous chargement de pression ou température.

Cet élément prend deux types des éléments 'compatible et incompatible'

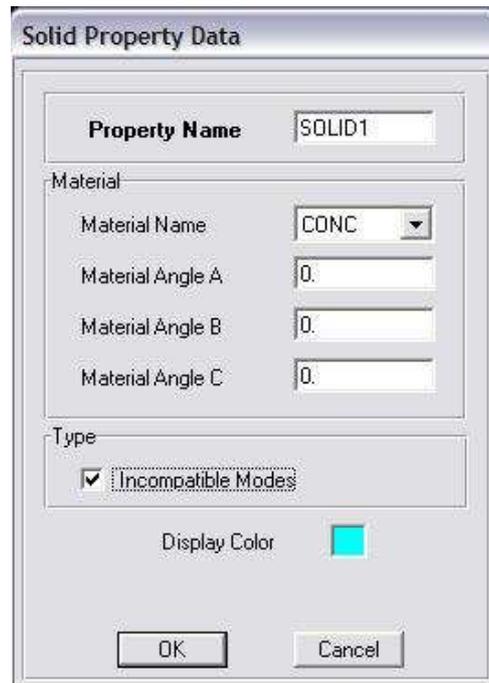


Figure (4.7) : propriétés d'élément solide.

✓ Analyse :

➤ Analyse statique linéaire : $\{K\} \cdot \{U\} = \{F\}$

$\{K\}$: Matrice de rigidité globale de la structure.

$\{U\}$: Vecteur de déplacement.

$\{F\}$: Vecteur de forces (chargement).

➤ Analyse statique non linéaire :

Elle est généralement adoptée aux structures sujettes à de grands déplacements qui induisent des charges secondaires.

➤ Analyse P-DELTA :

Les charges secondaires ou linéaires sont générées par les déformations associées aux efforts normaux dans les barres.

➤ Analyse dynamique :

Disponible dans le programme et couvre les problèmes de vibration libre, l'analyse spectrale et l'analyse temporelle.

L'équation d'équilibre dynamique de la structure soumise à une excitation sismique s'écrit sous la forme suivante :

$$[K]. \{U\} + [C]. \{\dot{U}\} + [M]. \{\ddot{u}\} = [M]. \{\ddot{u}_s\}$$

Où : [C] : matrice d'amortissement.

$\{\ddot{u}_s\}$: accélération du sol.

- Le système d'équation dynamique forcé résolu par superposition modale afin d'obtenir la réponse totale de la structure.
- Les résultats de l'analyse spectrale peuvent être combinés avec ceux de l'analyse statique pour le dimensionnement de la structure.

4.5 CONCLUSION

La programmation efficace de la méthode des éléments finis requiert une bonne expérience tant dans le domaine des éléments finis que dans le domaine de l'informatique.

En effet:

- Les programmes ou bien les codes sont compliqués car ils doivent exécuter des opérations très diverses (organisation des données, résolution de systèmes,...).
- Les quantités des données manipulées par un programme d'éléments finis peuvent être très importantes et il faut souvent avoir recours à des techniques informatiques peu répandues en calcul scientifique classique;
- Il est préférable que le programme puisse s'appliquer à de nombreux types des problèmes.

Enfin, l'importance est que l'ingénieur doit effectuer une évaluation détaillée des résultats d'ordinateur afin de juger le degré de précision et par conséquent la fiabilité de son modèle.

Chapitre 5

VALIDATION NUMERIQUE DES ELEMENTS FINIS BASES SUR LE MODELE EN DEFORMATION

VALIDATION NUMERIQUE DES ELEMENTS FINIS BASES SUR LE MODELE EN DEFORMATION

5.1 INTRODUCTION :

Le but de ce chapitre est de montrer l'intérêt du modèle en déformation pour les structures en élasticité plane, et l'évaluation de la précision obtenue par les éléments présentés dans ce travail à travers des tests comparés avec d'autre programme ou avec une solution analytique, qui sont limités à des applications simples mais suffisantes pour montrer les principales performances des éléments membranaires.

Les tests les plus instructifs pour les structures en élasticité plane sont:

1. Flexion plane d'une poutre console courte encastrée.
2. Une poutre console droite élancée.
3. Une poutre courte cantilever.
4. Application des éléments membranaires dans les problèmes axisymétriques.

5.2 VALIDATION NUMERIQUE DANS LES PROBLEMES DE CONTRAINTE PLANE

5.2.1 Flexion plane d'une poutre console courte encastrée :

La poutre console soumise à une charge de cisaillement, est un test commun pour les éléments membranaires, la figure (5.1) montre les caractéristiques mécaniques et géométriques du problème, les déplacements sont calculés à l'extrémité de la borne libre de la poutre.

Le test se fait pour les éléments membranaires à des degrés de libertés différents, et de plusieurs types, rectangulaire et triangulaire.

La solution analytique : est définie dans [SAB 85] comme suit:

$$V = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{(4+5\nu)}{2EH} PL = 0.3558 \quad \text{Eqn (5.1)}$$

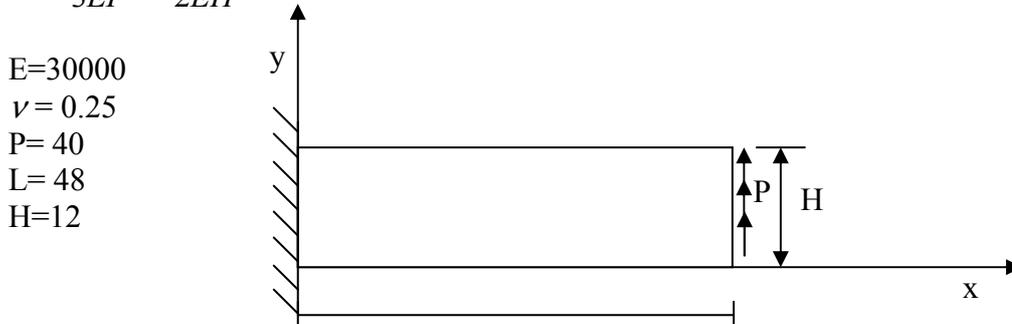


Figure (5.1) : Flexion d'une poutre courte sous charge verticale.

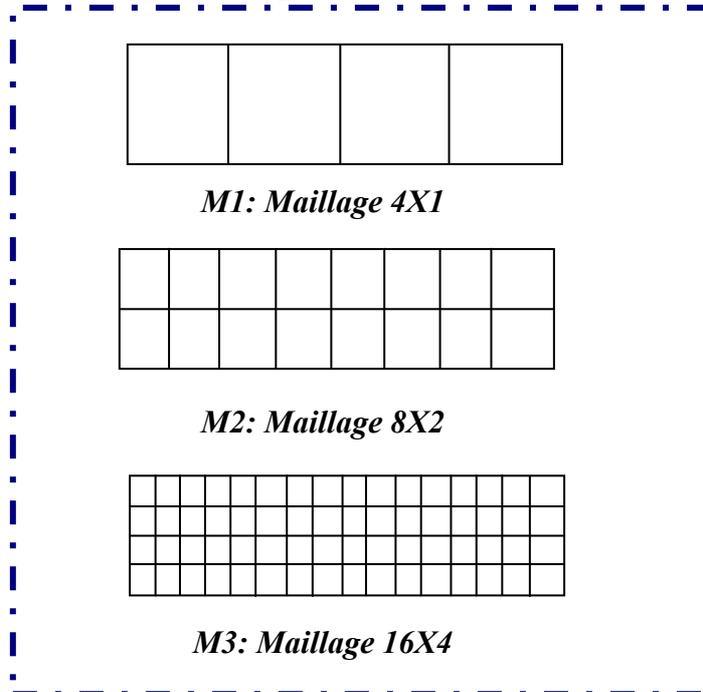


Figure 5.2 : Illustration des différents maillages réguliers d'une poutre courte

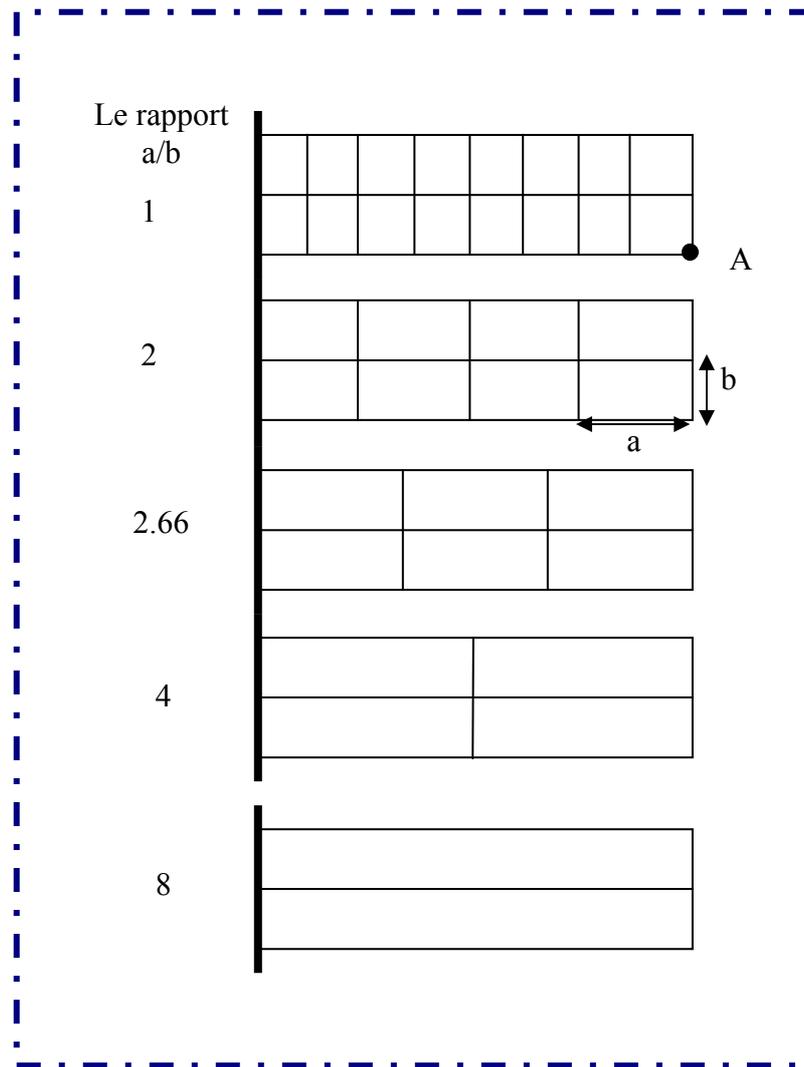


Figure 5.3: Illustration des différents maillages réguliers d'une poutre courte

Note:

Les résultats des déplacements verticaux à l'extrémité des deux configurations de maillage de la poutre courte sont représentés dans les tableaux récapitulatifs suivants:

SAP 2000* : élément membranaire a trois DDL par nœud du logiciel SAP2000.

SAP 2000-c : élément compatible a deux DDL par nœud du logiciel SAP2000.

SAP 2000-incc : élément incompatible a deux DDL par nœud du logiciel SAP2000.

Maillage Eléments	M1	M2	M3
SAP 2000*	3,43 E-01	3,50E-01	3,54E-01
SAP 2000-c	2,42 E-01	3,16E-01	3,45E-01
Q4	2,42 E-01	3,16E-01	3,45E-01
SBRIE*	3,28 E-01	3,46E-01	3,53E-01
SBQ4	3,28 E-01	3,45E-01	3,52E-01
SBTSAB*	3,30 E-01	3,94E-01	4,27E-01

Déplacement vertical exact = 3,558E-01

Tableau 5.1 : déplacement vertical d'une poutre courte pour les mailles M1, M2, M3

Pour étudier la convergence du déplacement clairement, on a présenté les résultats sur la figure (5.4).

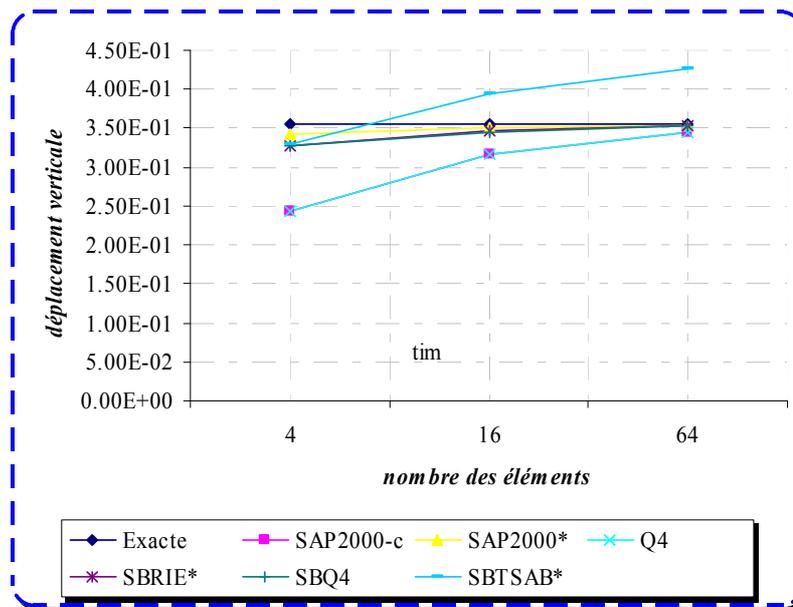


Figure 5.4 : Etude de la convergence du déplacement vertical d'une poutre courte.

D'après les résultats des déplacements illustrés dans le tableau (5.1) relatifs à la figure (5.2), on a constaté que les éléments (SAP2000*, SBTSAB*) donnent des déplacements très proches de la valeur exacte pour la maille M1, par ailleurs les éléments (SBRIE*, SBQ4,) donnent des déplacements moins proches de celle-ci, par contre les autres éléments restent toujours pauvres à la convergence vers la solution exacte, Les éléments membranaires rectangulaires pour l'élasticité plane dans ce test montrent une convergence plus précise que les éléments triangulaires, on aura besoin de moins d'éléments

rectangulaires pour atteindre des résultats de précision supérieure ou égale aux éléments triangulaires. L'élément Q4 est similaire au SAP2000-c en terme des déplacements.

Note : Les éléments SBRIE et SBQ4 montrent une stabilité de convergence à partir du maillage M2.*

Eléments \ a/b	1.0	2.0	2.66	4.0	8.0
Maillage	2X8	2X4	2X3	2X2	2X1
SAP 2000-inc	0.989	0.973	0.959	0.919	0.751
SAP 2000-c	0.889	0.699	0.573	0.378	0.134
Q4	0.888	0.699	0.573	0.578	0.134
SBRIE*	0.972	0.957	0.943	0.905	0.738
SBRIE1 [SAB 90]	0.972	0.957	0.957	0.957	0.957
R4BM [MAA 05]	0.988	0.972	0.958	0.919	0.738

Résultats analytique = 0.3558, Normalisée =1.000

Tableau 5.2 : Déplacements normalisés au point A.

(Voir la figure 5.3).

5.2.2 Test d'une poutre courte cantilever : (épaisse, semi épaisse, mince)

Dans ce cas Sabir a proposé un test qui représente une poutre courte de plusieurs modèles (voir la figure 5.5), le premier modèle est une poutre épaisse, et le deuxième est une poutre semi épaisse, par contre le dernier modèle est une poutre mince, les caractéristiques mécaniques et géométriques sont montrées sur la figure 5.5.

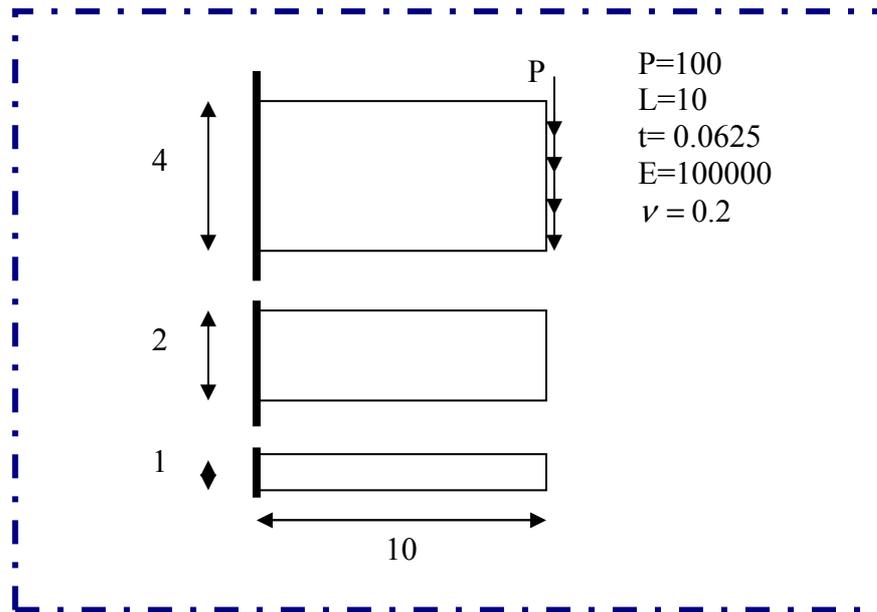


Figure 5.5: Poutre courte cantilever (épaisse, semi épaisse, mince)

Cantilever épais						
Maillage	2X2	2X4	6X6	8X8	12X12	10X16
SAP2000-inc	0.9252	0.9729	0.9945	0.9990	1.002	1.0036
SAP2000-c	0.5938	0.8420	0.9312	0.9630	0.9850	0.9928
Q4	0.5938	0.8420	0.9312	0.9630	0.9850	0.9928
SBRIE*	0.9170	0.9641	0.9935	0.9987	1.002	1.004
SBRIE1 [SAB 90]	0.922	0.932	0.989	0.992	0.996	0.995
R4BM [MAA 05]	0.913	0.929	0.988	0.992	0.995	0.995
Analytique	1.000 (1.105)					

Tableau 5.3-a: Déplacements verticaux normalisés pour Cantilever épais

Cantilever semi épais						
Maillage	2X2	2X4	6X6	8X8	12X12	10X16
SAP2000-inc	0.9257	0.9767	0.9895	0.9938	0.9972	0.9985
SAP2000-c	0.2750	0.5984	0.7720	0.8573	0.9310	0.9597
Q4	0.2750	0.5984	0.7720	0.8573	0.9310	0.9597
SBRIE*	0.9165	0.9669	0.9883	0.9932	0.9969	0.9979
SBRIE1 [SAB 90]	0.925	0.926	0.989	0.993	0.996	0.995
R4BM [MAA 05]	0.916	0.923	0.988	0.992	0.996	0.995
Analytique	1.000 (8.21)					

Tableau 5.3-b: Déplacements verticaux normalisés pour Cantilever semi épais

<i>Cantilever mince</i>						
Maillage	2X2	2X4	6X6	8X8	12X12	10X16
SAP2000-inc	0.9245	0.9763	0.9866	0.9909	0.9943	0.9957
SAP2000-c	0.0872	0.2755	0.4610	0.6029	0.7725	0.8569
Q4	0.0872	0.2755	0.4610	0.6029	0.7725	0.8569
SBRIE*	0.9151	0.9664	0.9854	0.9902	0.9940	0.9952
SBRIE1 [SAB 90]	0.924	0.922	0.986	0.990	0.994	0.993
R4BM [MAA 05]	0.915	0.920	0.985	0.990	0.994	0.992
<i>Analytique</i>	1.000 (64.52)					

Tableau 5.3-c: Déplacements verticaux normalisés pour Cantilever mince

5.2.3 Test d'une poutre console élancée Mac Neal :

On considère la poutre console élancée de Mac Neal qui est modélisée par six éléments membranaires prenant respectivement la forme rectangulaire, triangulaire (figure 5.6 A). On a effectué le test de la poutre élancée pour différents chargements (voir le tableau 5.4). Mac Neal a utilisé ce test pour des éléments finis membranaires à quatre noeuds et a constaté que la forme trapézoïdale des éléments conduit à un verrouillage même si ces éléments passent le *Patch – test*.

Les déplacements aux extrémités suivant les directions des charges sont comparées aux résultats obtenus par un calcul RDM manuel.

La géométrie, les propriétés et le chargement de base sont comme décrits dans Mac Neal et Harder [1985]. Une poutre console droite de 6 pouce parallèle à la direction X et 0.2 pouce à la direction Y, et parallèle à la largeur de la direction Z de 0.1 pouce.

Au 1^{er} lieu, trois modèles différents sont créés, chacun avec un maillage différent A, B et C, de 6X1, 9X1 et 12X1, respectivement.

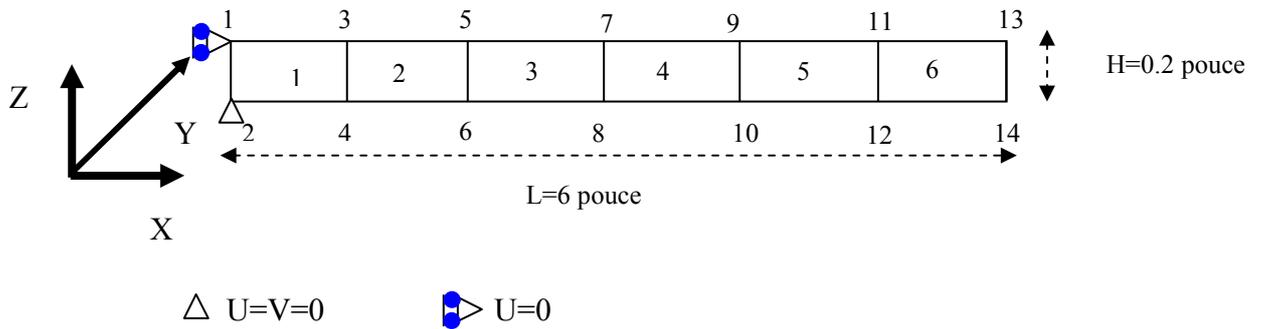
Trois cas de charge sont appliqués pour chaque modèle. Les trois cas de charge appliquent une force unitaire axiale, une force unitaire dans le plan (cisaillement) et un moment unitaire au bout, respectivement.

Le moment est appliqué comme une couple des forces dans la direction de X.

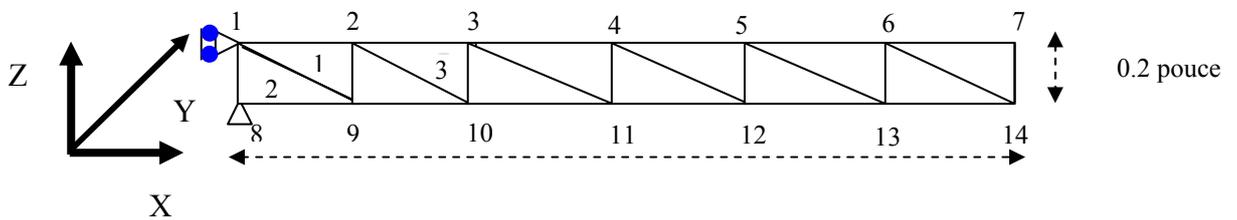
La solution indépendante est dérivée de la théorie des poutres élémentaires qui ne supporte aucun effet de coefficient de Poisson.

Note : les modèles B et C ne sont pas présentés dans Mac Neal et Harder, ce sont des modèles illustrés pour montrer la limite de la convergence h au cisaillement.

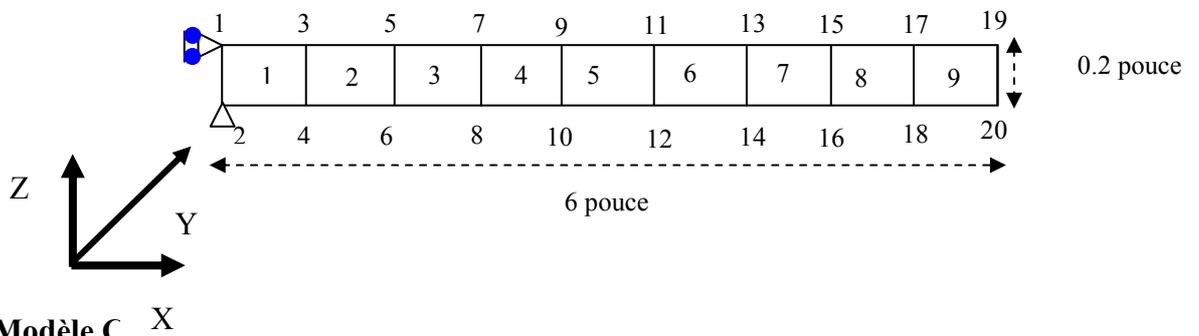
Modèle A: forme rectangulaire.



Modèle A: forme triangulaire.



Modèle B:



Modèle C

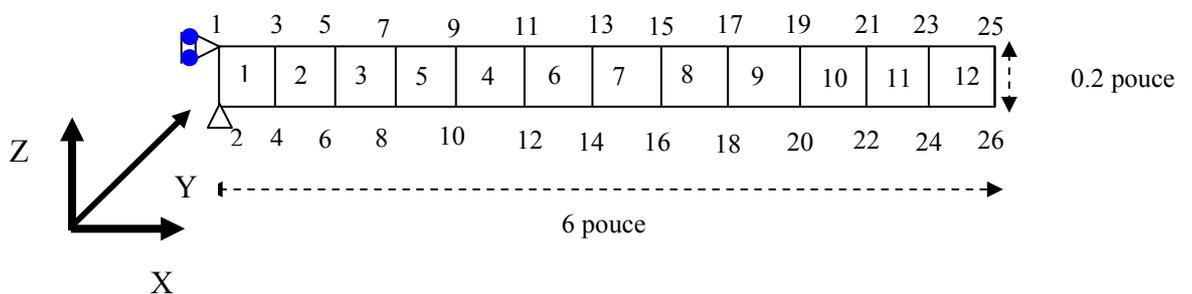


Figure 5.6 : Illustration des différents maillages de la poutre élancée.

Remarque:

La forme triangulaire est obtenue dans les modèles B et C comme illustrée sur le modèle à forme triangulaire et leur numérotation aussi.

Les propriétés :

$E= 10,000,000 \text{ lb/in}^2$

$\nu= 0,3$

$G= 3,846,154 \text{ lb/in}^2$

Les charges :

Cas de charge	Type de charge	La charge
I	Extension axiale	$F_x= +0.5$
II	Dans le plan de cisaillement et de flexion	$F_z= +0.5$ à l'extrémité
III	Moment dans le plan	$F_x= +0.5$ $F_x= -0.5$

Tableau 5.4 : Définitions des différentes charges appliquées à chaque modèle.

Note:

Les résultats SAP2000 sont présentés séparément pour l'élément plan (membrane) avec et sans option des modes incompatibles. Les résultats indépendants sont calculés manuellement en utilisant la méthode des charges unitaires décrite à la page 244 Cook et Young 1985.

Cas de charge I:

Modèle l'élément	A	B	C
	$U_x (10^{-5})$	$\bar{U}_x(10^{-5})$	$U_x(10^{-5})$
SAP2000*	3.000	3.000	3.000
SAP2000-c	3.000	3.000	3.000
SAP2000-inc	3.000	3.000	3.000
Q4	2.986	2.993	2.991
SBRIE*	2.990	2.993	2.991
SBQ4	2.985	2.992	2.990
SBTSAB* (17)	3.0489	3.3571	3.0747
SBTSAB* (35)	3.1011	3.1483	3.2217

$U_{x(\text{exacte})} = 3.0000E-05$

Tableau 5.5: Les déplacements axiaux à l'extrémité de la poutre sous charge de traction.

Cas de charge II:

Modèle l'élément	A $U_y(10^{-1})$	B $U_y(10^{-1})$	C $U_y(10^{-1})$
SAP2000*	1.0721	1.0741	1.0732
SAP2000-c	0.1009	0.2012	0.3086
SAP2000-inc	1.0730	1.0774	1.0789
Q4	0.1009	0.2012	0.3086
SBRIE*	0.9768	0.9805	0.9819
SBQ4	0.9766	0.9806	0.9819
SBTSAB* (17)	0.10816	0.9933	0.52045
SBTSAB* (35)	0.10816	0.9933	0.52044

$$U_{y(\text{exacte})} = 1.0810E-01$$

Tableau 5.6: Les déplacements verticaux à l'extrémité de la poutre sous charge de cisaillement.

Cas de charge III:(déplacements axiaux)

Modèle l'élément	A $U_x(10^{-4})$	B $U_x(10^{-4})$	C $U_x(10^{-4})$
SAP2000*	8.990	8.974	8.955
SAP2000-c	0.840	1.675	2.5690
SAP2000-inc	9.000	9.000	9.0000
Q4	0.840	1.675	2.5690
SBRIE*	8.190	8.190	8.1900
SBQ4	8.190	8.190	8.1900
SBTSAB* (17)	8.862	8.0097	5.9391
SBTSAB* (35)	8.9141	8.1567	5.7304

$$U_{x(\text{exacte})} = 9.00E-04$$

Tableau 5.7: Les déplacements axiaux à l'extrémité de la poutre sous charge de moment.

Cas de charge III: (déplacements verticaux)

Modèle l'élément	A $U_y(10^{-2})$	B $U_y(10^{-2})$	C $U_y(10^{-2})$
SAP2000*	2.697	2.692	2.686
SAP2000-c	0.252	0.503	0.770
SAP2000-inc	2.700	2.700	2.700
Q4	0.252	0.5026	0.7708
SBRIE*	2.457	2.457	2.457
SBQ4	2.457	2.457	2.457
R4BM ^{réf}	2.270	-	-
SBTSAB* (17)	2.7161	2.4401	1.3962
SBTSAB* (35)	2.7161	2.4401	1.3961

$$U_{y(\text{exacte})} = 2.70\text{E-}02$$

Tableau 5.8: Les déplacements verticaux à l'extrémité de la poutre sous charge de moment.

Note : le pourcentage d'erreur est calculé comme suit,

,

$$\text{erreur} = 100 \times \left[\frac{\text{résultats numérique}}{\text{résultats indépendants}} - 1 \right]$$

Commentaires :

D'après les tableaux (5.5; 5.6; 5.7; 5.8), on a constaté que l'utilisation des rectangles quadratiques sous une tension membranaire, c'est-à-dire un effet axial, ces éléments montrent des meilleures comportement soit disons exacte, sauf le SBQ4 pour le modèle A, nous donne une erreur de -1%, et nous remarquons que l'élément triangulaire SBTSAB* donne des résultats acceptables dans le modèle A et B, mais pour C inacceptables.

Pour le cas de charge II "cisaillement dans le plan" relatif au modèle A, le triangle SBTSAB* représente un déplacement exact, par contre SAP2000*, SAP2000-inc donnent des déplacements acceptables. Mais pour le modèle B et C, SAP2000-inc montre l'exactitude. SBRIE*, SBQ4 reste toujours avec une erreur de 9%, 10% quelle que soit la densité du maillage, et SBTSAB* diverge de façon négative jusqu'à -51%.

Pour le cas de charge III, les éléments représentent le même comportement que le cas II, (voir les tableaux 5.8).

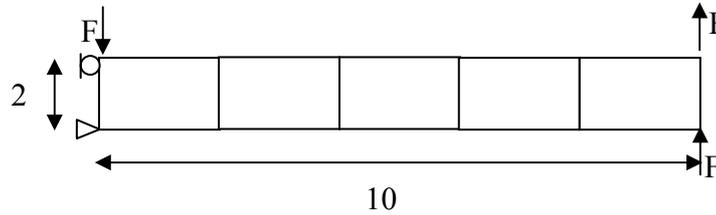
Donc il est clair au vu dans ce test, l'élément incompatible a montré une meilleure précision, par contre l'élément SBRIE* a montré une meilleure stabilité. C'est pourquoi nous ferons dans la suite de ce travail sur quelque cas d'élasticité plane.

Constatations:

1. La convergence vers la solution exacte des éléments à champ de déformation n'est pas toujours liée à la densité du maillage.
2. Les modes incompatibles représentent une meilleure résolution du problème au phénomène de *verrouillage* pour les éléments rectangulaires dans le cas de cisaillement ou de flexion.
3. Les éléments SBRIE* SBQ4 sont des éléments sensibles au cisaillement mais le déplacement reste proche de la solution exacte, et ont un comportement stable comparé aux autres éléments triangulaires.

5.2.4 Test d'incompressibilité pour une poutre cantilever :

On considère une poutre console droite, avec des éléments rectangulaires, soumise à une force de cisaillement à l'extrémité libre comme montre la figure (5.7).



▷ $U = V = 0$.
 ○ $U = 0$.
 ($F = 150$; $E = 10^7$; $\nu = 0.3 - 0.4999999$)

Figure 5.7: Test d'incompressibilité pour une poutre cantilever

Les éléments (SBRIE*, Incompatible et compatible mode), sont testés avec un coefficient de Poisson variant de 0.3 à 0.4999999. On confirme, d'après les résultats obtenus, que l'élément **incompatible** est libre du verrouillage dû à l'incompressibilité et cela même quand $\nu = 0.4999999$, ainsi que l'élément **SBRIE*** reste moins sensible au verrouillage quand $\nu = 0.49$, cependant, l'élément standard quadrilatère à quatre noeuds **Q4^a** se bloque numériquement quand le coefficient de Poisson est proche de la valeur 0.5. Le tableau 5.9 donne les résultats.

coefficient de poisson	SBRIE*	SAP2000-inc	SAP2000-c	Q4 ^a	RGH4 ^a
0.3	0.89851325	0.98513251	0.67226891	0.63	0.976
0.4	0.8316129	0.98516129	0.64645161	0.481	0.975
0.49	0.71898327	0.98455598	0.60746461	0.969	0.972
0.499	0.74646075	0.98455598	0.6029601	0.107	0.972
0.4999	0.74581725	0.98455598	0.6023166	0.045	0.972
0.49999	0.74581725	0.98455598	0.6023166	0.038	0.972
0.499999	0.74581725	0.98455598	0.6023166	0.038	0.972
0.4999999	0.74581725	0.98455598	0.6023166	-	-

^a Source : Cheung et Chen [CHE 92]

Tableau 5.9: Test d'incompressibilité pour une poutre cantilever (Flèches normalisées à l'extrémité libre de la poutre)

5.3 VALIDATION NUMERIQUE DANS LES PROBLEMES AXISYMETRIQUES

5.3.1 Aperçu :

Dans l'arrangement de la mécanique des milieux continus tridimensionnels, il existe une classe spéciale des problèmes qui ont la symétrie axiale en ce qui concerne la géométrie, matérielle, et les conditions aux limites.

Ces classes des problèmes sont généralement connues en tant que problèmes axisymétriques, et entourent une large gamme des applications pratiques, telles que les solides de révolution. En raison de la symétrie axiale, les équations tridimensionnelles résultantes peuvent être moulées dans un problème bidimensionnel avec deux variables inconnues du champ, se prêtant à l'épargne significative de calcul.

Au cours du passé plusieurs décennies où la recherche a été consacrée au développement du rendement élevé des formulations quadrilatérales des éléments à quatre noeuds pour les problèmes plans et axisymétriques, voir la référence [KAS 00, I].

Les auteurs ont précédemment présenté le travail original sur des formulations mixte (mixed-enhanced formulations) pour le solide bi et tridimensionnel avec la cinématique linéaire et finie, [KAS 00, I ; KAS 00, II].

Bien qu'une quantité considérable d'effort ait été faite dans les éléments hybrides et (mixed-enhanced strain formulation), pour cette raison nous avons présenté la contribution des éléments à champ de déformation et de déplacement avec et sans les modes incompatibles. Ces éléments fait l'objet d'étude dans le cas axisymétrique.

Une énumération de certaines des propriétés générales, qui sont désirées pour rendement " élevé " d'élément est présentée ci-dessous :

1. L'exactitude de maille dans le cas où la flexion est dominante.
2. La limite de blocage de la réponse libre dans le cas des matériaux presque incompressible, ainsi que le cas de flexion.
3. Performance des éléments à étudier.

5.3.2 Simulation numérique :

Dans cette section nous étudions quelques éléments à différentes formulations principalement l'élément à champ de déformation (SBRIE*) comparé avec le code SAP2000 v9.03 et l'élément standard Q4. Cette étude est validée avec des résultats théoriques.

- ✓ Les résultats des éléments (Q1, Q1/P0, Q1/E5, Q1/ME2) sont obtenue de la réf [Kas 00, I].
- ✓ Q4: élément à champ de déplacement standard.
- ✓ SAP2000-c : élément à quatre nœuds compatible.
- ✓ SAP2000-inc: élément à quatre nœuds avec les modes incompatible.
- ✓ SBRIE*: élément rectangulaire à quatre nœuds à champ de déformation.

Note :

La formulation des élément (Q1, Q1/P0, Q1/E5, Q1/ME2) connue sous le nom mixed-enhanced strain formulation.

5.3.3 Cylindre à paroi épaisse :

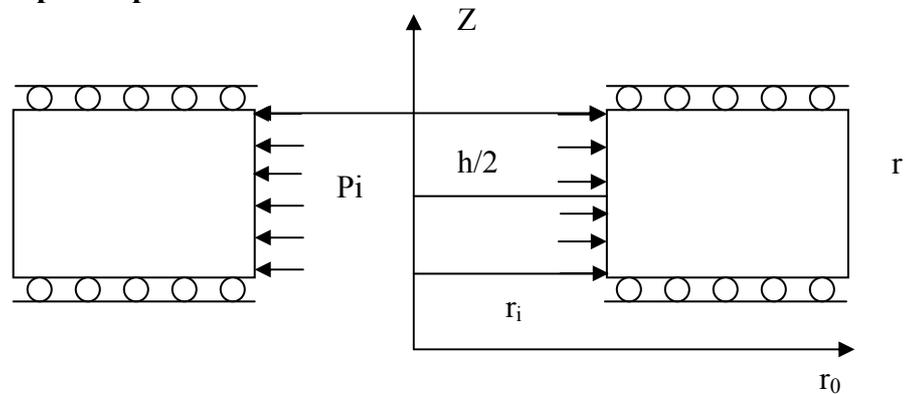


Figure 5.8: Cylindre à paroi épaisse de taille d'unité soumise à une pression interne P_i .

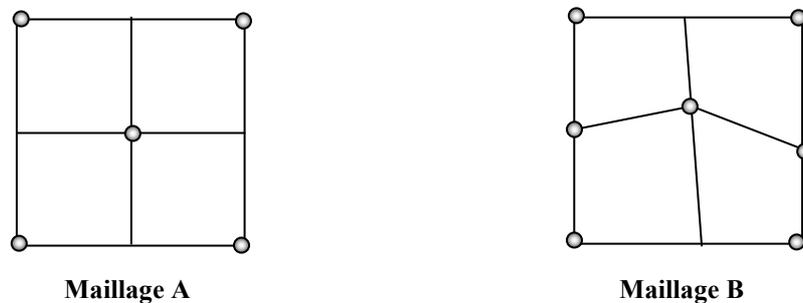


Figure 5.9: Discrétisations finies d'élément pour le cylindre à parois épaisses.

Note: pour le maillage B le noeud central est réglée près $[\Delta r, \Delta z] = [+ 0.12, +0.11]$

La solution exacte: [KAS 00, I]

$$U_r = \frac{1}{750}(5 + 3\nu - 2\nu^2) \quad \text{Eqn (5.1)}$$

Où ν est le coefficient de Poisson.

Deux discrétisations de maillage ont été choisies, maillage régulier et autre distordue (voir la figure 5.9)

Les tableaux (5.10) et (5.11) donnent le déplacement radial à $r = r_i$, normalisé en ce qui concerne la solution exacte ($u_{r \text{ mef}}/u_{r \text{ exact}}$) pour les deux configurations.

ν	Q1	Q1/P0	Q1/E5	Q1/ME2	SBRIE*	Q4	SAP2000-c	SAP2000-inc
0.00000	0.98159	0.98763	0.98306	0.98159	1.01320	1.00935	1.00900	1.01550
0.10000	0.97849	0.98711	0.98125	0.97875	1.01013	1.00658	1.00710	1.01326
0.20000	0.97352	0.98655	0.97899	0.97513	1.00457	1.00159	1.00181	1.00996
0.30000	0.96401	0.98594	0.97608	0.97040	0.99349	0.99122	0.99122	1.00437
0.40000	0.93714	0.98527	0.97222	0.96401	0.96237	0.96127	0.96216	0.95408
0.49000	0.62662	0.98461	0.96744	0.95605	0.63955	0.63959	0.62940	0.96581
0.49900	0.14535	0.98454	0.96687	0.95509	0.15516	0.15523	0.15646	0.96975
0.49990	0.01674	0.98453	0.96681	0.95499	0.02054	0.02056	0.02072	0.95960
0.49999	0.00170	0.98453	0.96680	0.95498	0.00223	0.00223	0.00224	0.95792

Tableau 5.10. Déplacement radial normalisé d'un cylindre à parois épaisses à $r = r_i$ (Maille A).

ν	Q1	Q1/P0	Q1/E5	Q1/ME2	SBRIE*	Q4	SAP2000-c	SAP2000-inc
0.00000	0.97487	0.98260	0.97944	0.97751	-	-	1.01000	1.01700
0.10000	0.97091	0.98196	0.97767	0.97306	-	-	1.00426	1.01420
0.20000	0.96458	0.98127	0.97547	0.96795	-	-	0.99864	1.01087
0.30000	0.95251	0.98054	0.97263	0.96184	-	-	1.00087	1.00656
0.40000	0.91893	0.97977	0.96873	0.95412	-	-	0.95493	1.00000
0.49000	0.56252	0.97905	0.96366	0.94489	-	-	0.59894	0.96998
0.49900	0.08748	0.97898	0.96303	0.94379	-	-	0.13783	0.97516
0.49990	0.00137	0.97897	0.96297	0.94368	-	-	0.03626	0.95252
0.49999	0.00016	0.97897	0.96296	0.94367	-	-	0.00307	0.94667

Tableau 5.11. Déplacement radial normalisé d'un cylindre à parois épaisses à $r = r_i$ (Maille B).

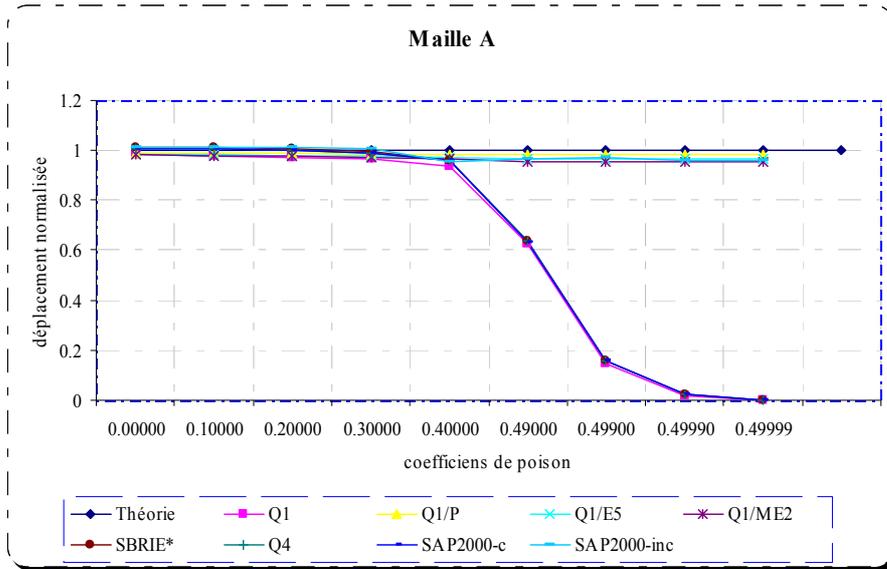


Figure 5.10: Étude de la réponse libre au blocage des éléments presque incompressible.

Maillage	Q4	SBRIE*	SAP2000-c	SAP2000-inc
2X2	1.55234E-01	1.55155E-01	1.56443E-01	9.69745E-01
4X2	3.99923E-01	3.99798E-01	4.02923E-01	1.01210E+00
6X2	5.96751E-01	5.97209E-01	6.14168E-01	1.02292E+00
8X2	7.26663E-01	7.26246E-01	7.26371E-01	1.02851E+00
10X2	8.07760E-01	8.08177E-01	8.10135E-01	1.11435E+00

Tableau 5.12 : La convergence des déplacements radiaux normalisés en fonction de nombre des éléments pour $\nu=0.499$.

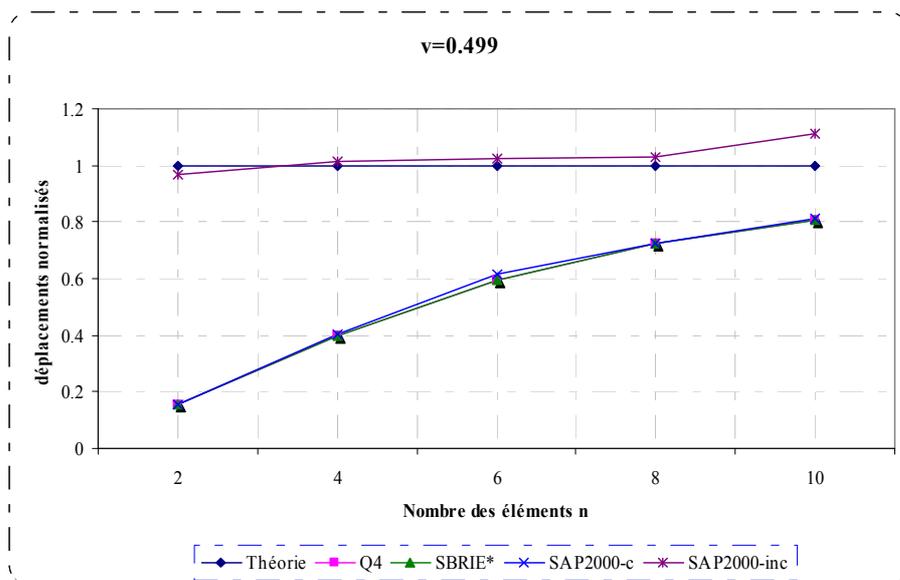


Figure 5.11 : La convergence des déplacements radiaux normalisés en fonction de nombre des éléments.

Les déplacements radiaux d'un cylindre à parois épaisses sont donnés dans les tableaux (5.10) et (5.11) pour un maillage régulier et distordu respectivement, et pour plusieurs valeurs de coefficient de poisson de 0, à 0,49999.

Le haut degré de précision des résultats obtenus pour toutes les valeurs de coefficients de poisson par les éléments (SAP2000-inc, **Q1/ME2**, **Q1/E5**, **Q1/E5**, **Q1/P0**), Les éléments (**Q1**, Q4, SBRIE*, SAP2000-c) donnent des résultats à haute précision dans le cas où $\nu = [0, -0,1 - 0,2 - 0,3 - 0,4]$.

Alors le blocage des éléments (**Q1**, Q4, SBRIE*, SAP2000-c) à la réponse est apparue à $\nu = 0.49$.

Le tableau (5.12) illustre les résultats des déplacements radiaux normalisés pour un nombre d'éléments variant de 2 à 10 suivant le rayon r, cette discrétisation montre le taux de convergence en fonction du nombre des éléments et la puissance des éléments à étudier.

D'après la figure (5.11), on a constaté que l'élément de SAP2000-inc est le plus puissant de tous les éléments étudiés, et donne une convergence rapide et puissante, par contre SAP2000-c, Q4 et SBRIE*, converge lentement par rapport au SAP2000-inc et de précision moindre.

Alors dans ce cas on peut dire que l'élément incompatible se comporte très bien pour tout maillage grossier, régulier ou distordu, et pour les matériaux presque incompressibles. L'élément SBRIE* donne de mauvais résultats pour les matériaux presque incompressibles et pour un maillage grossier.

5.3.4 Plaque circulaire uniformément chargée:

Dans cette section nous considérons la simulation d'une plaque circulaire d'épaisseur constant soumise à une charge uniformément répartie pour évaluer la performance de la formulation des éléments pour le recourbement ou la flexion, et pour un état presque incompressible.

Les paramètres du modèle incluent comme suit, rayon externe $a=10$, une pression normale uniforme $q=1$, et un module d'élasticité $E=10^7$. La discrétisation du modèle composée, $n= \{2; 4; 8\}$ où n le nombre des éléments suivant la direction radiale et $m=1$ où m le nombre des éléments suivant la direction transversale pour toutes les analyses.

Les configurations et les solutions exactes pour une plaque circulaire sous réserve des conditions aux limites sont données dans la figure (5.12) et l'équation (5.2), respectivement.

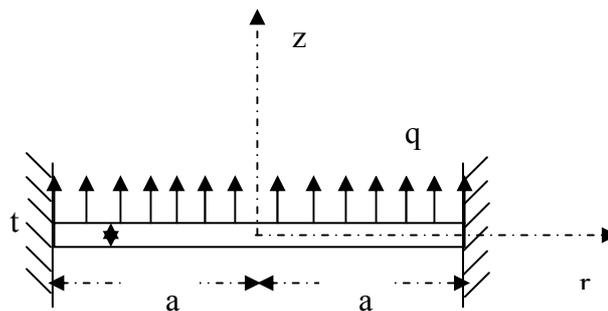


Figure 5.12. Représentation géométrique d'une plaque circulaire encastrée.

La solution exacte: [KAS 00, I]

La solution exacte, pour la plaque encastrée représentée sur la figure (5.12) est donnée comme suit :

$$w_{\text{encastrée}} = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D} \left[(a^2 - r^2) + \frac{4}{(1-\nu)} t^2 \right] \quad \text{Eqn (5.2)}$$

Où w représente le déplacement transversal, et $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ la rigidité flexionnelle.

5.3.4.1 l'analyse d'une plaque mince :

Concédérons dans ce problème une plaque mince circulaire d'épaisseur $t=0.1$, et un rapport de $(t/a = 1/100)$, en premier on a étudié la réponse de déplacement transversal avec $\nu=0.3$ et le second, a étudié la réponse de comportement en flexion dans le cas où $\nu = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.49 \ 0.499 \ 0.4999 \ 0.49999]$.

L'objectif de ce test est pour évaluer la robustesse et la performance des éléments présentés dans notre travail.

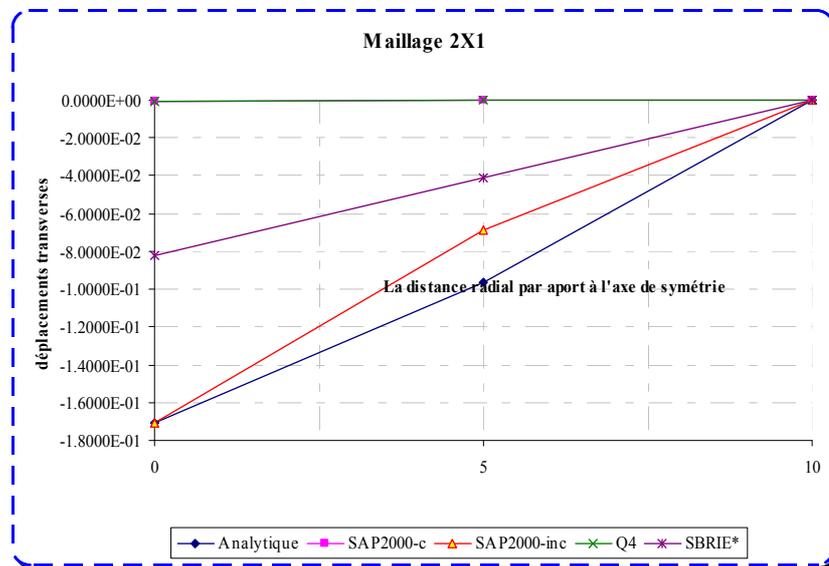


Figure 5.13 : Etude de comportement des éléments pour le déplacement transverse d'une plaque encastree $\nu = 0.3$,

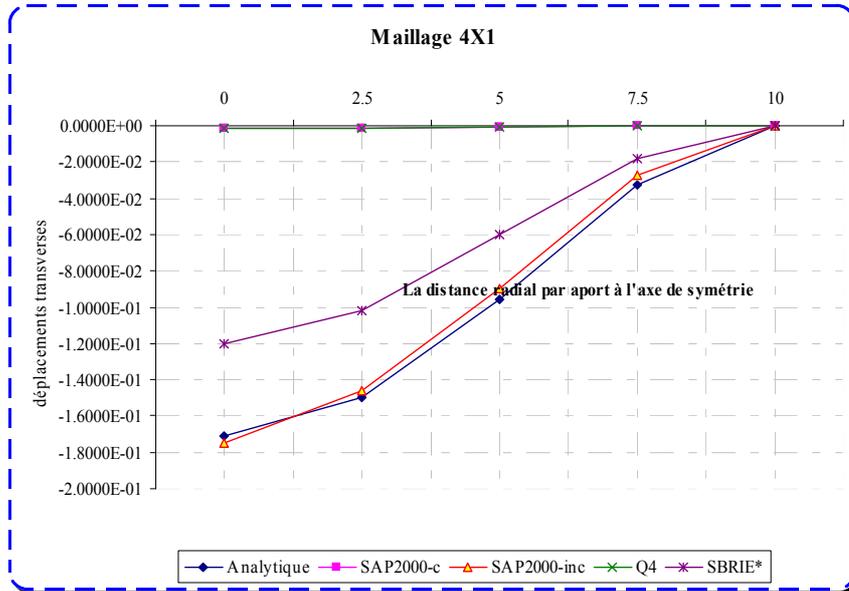


Figure 5.14 : Etude de comportement des éléments pour le déplacement transverse d'une plaque encastree $\nu = 0.3$

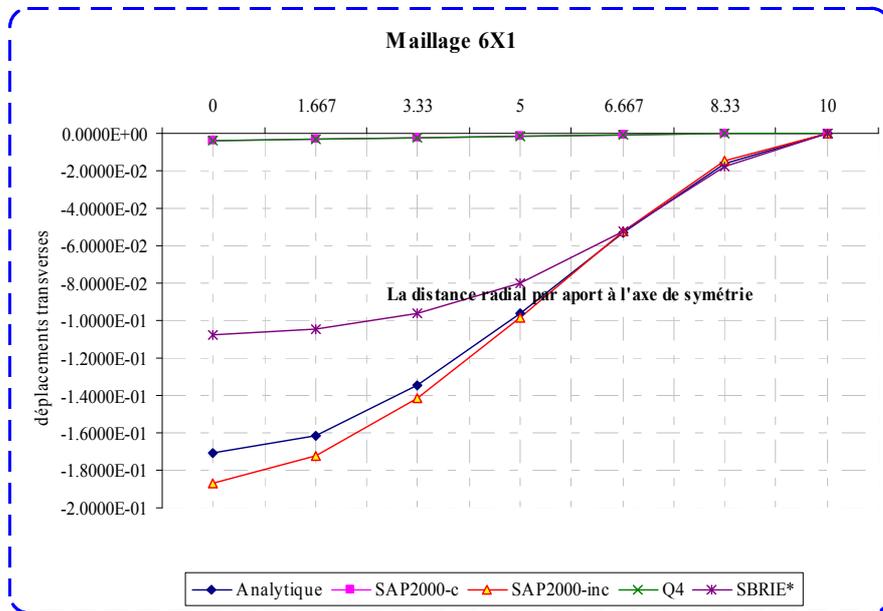


Figure 5.15: Etude de comportement des éléments pour le déplacement transverse d'une plaque encastree $\nu = 0.3$,

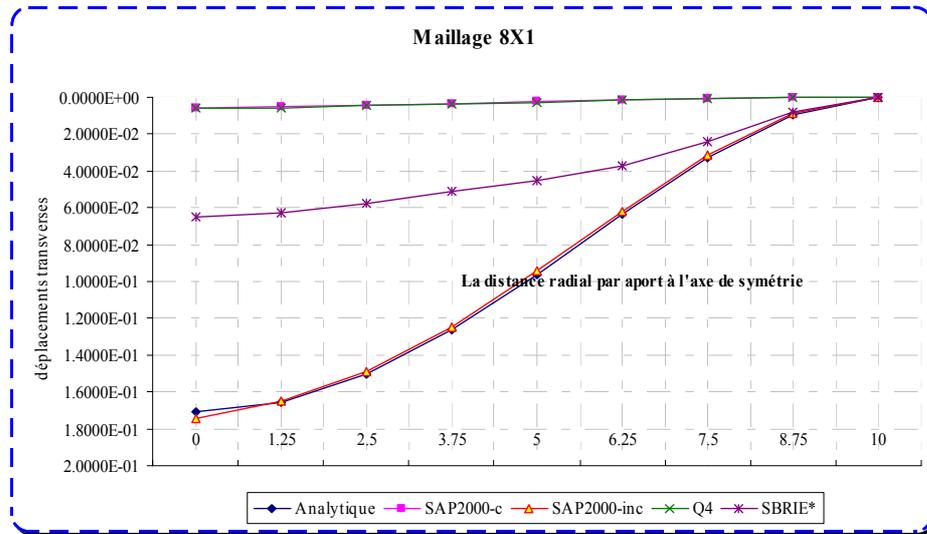


Figure 5.16 : Etude de comportement des éléments pour le déplacement transverse d'une plaque encastree $\nu = 0.3$,

a) Test de l'incompressibilité pour la plaque mince:

Dans ce test on va étudier la limite de blocage (verrouillage) des éléments aux différentes valeurs de $\nu = (0; 0.49999)$, dans le cas de flexion de la plaque mince, (voir la figure 5.12).

ν	$W_{théorique}$	SAP2000-c	SAP20000-inc	Q4	SBRIE*
0.00000	1.87575E-01	4.64000E-03	1.89540E-01	4.61400E-03	1.28700E-01
0.10000	1.85708E-01	5.09000E-03	1.87640E-01	5.32900E-03	-1.05500E-01
0.20000	1.80090E-01	5.52000E-03	1.81940E-01	5.36300E-03	-4.57500E-02
0.30000	1.70723E-01	5.91000E-03	1.72400E-01	6.11400E-03	6.48300E-02
0.40000	1.57605E-01	6.16000E-03	1.58910E-01	6.77500E-03	2.82000E-02
0.49000	1.42593E-01	4.20000E-03	1.39790E-01	2.94000E-03	1.80200E-02
0.49900	1.40925E-01	1.03000E-03	1.10620E-01	2.17600E-03	6.49200E-04
0.49990	1.40756E-01	1.87300E-04	3.98300E-02	-8.51500E-05	2.41600E-06
0.49999	0.140739374	8.71200E-05	5.56000E-03	4.42600E-06	2.41600E-06

Tableau 5.13: Les déplacements verticaux de la plaque circulaire au centre pour un maillage de 8X1.

b) Test de convergence h :

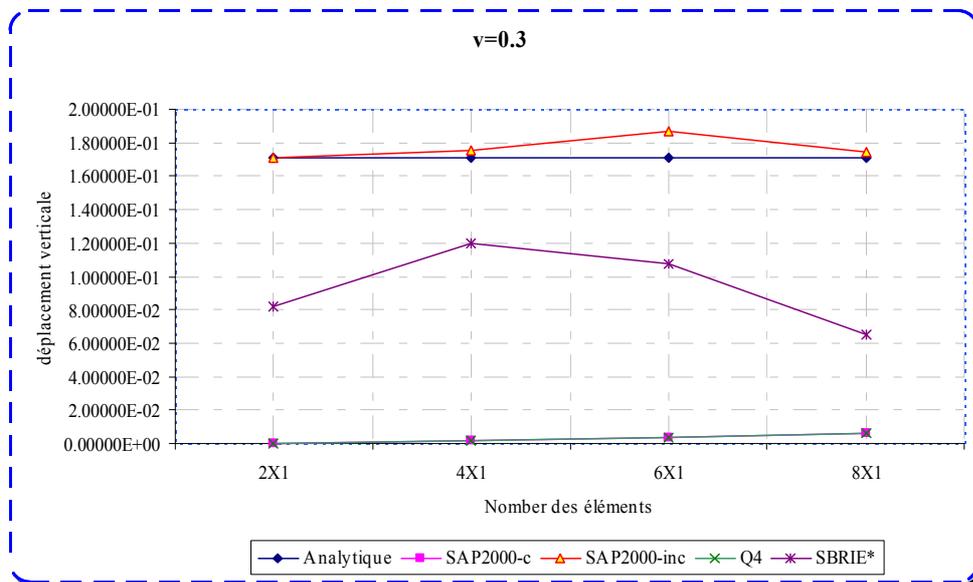


Figure 5.17 : Étude de la convergence de déplacement transverse des éléments d'une plaque mince encastrée

D'après les résultats obtenus on a constaté ce qui suit :

1. La géométrie ou bien la densité du maillage influe sur le comportement de la réponse flexionnelle des éléments membranaires, voir les figures (5.13 à 5.16). Cette étude montre que l'élément SAP2000-inc se comporte très bien dans les plaques minces encastrées à ses extrémités, par contre SBRIE* offre des mauvais résultats. Mais le SAP2000-c et Q4 montrent le verrouillage parfait.
2. La densité du maillage aussi influe sur la réponse flexionnelle des éléments SAP2000-inc, Q4 et SAP2000-c mais pour l'élément SBRIE* pas toujours.
3. Au niveau de test de l'incompressibilité on a constaté que, le verrouillage de SAP2000-inc est apparu à partir de $\nu=0.499$, et la perturbation de SBRIE* entre $\nu=0.1$ et 0.2 et le verrouillage parfait pour les autres valeurs (voir le tableau 5.13).

5.3.5 Coque cylindrique soumis à un moment de flexion uniforme:

Le dernier exemple est un cylindre circulaire mince soumis à un moment à l'extrémité, M_0 , conçu pour évaluer la performance de la formulation des éléments de notre travail. Les paramètres du modèle incluent un demi rayon $a=100$, une épaisseur de paroi $t=1$, et sa longueur, $L=51$, un moment uniformément distribué $M_0 = 1000$, et un module élastique $E = 11250$.

La solution exacte : est donnée comme suit : [KAS 00, I]

$$u_r = \frac{M_0}{2\beta^2 D} \quad \text{Eqn (5.3)}$$

$$\text{Où } \beta^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{a^2 t^2} \quad \text{Eqn (5.4)}$$

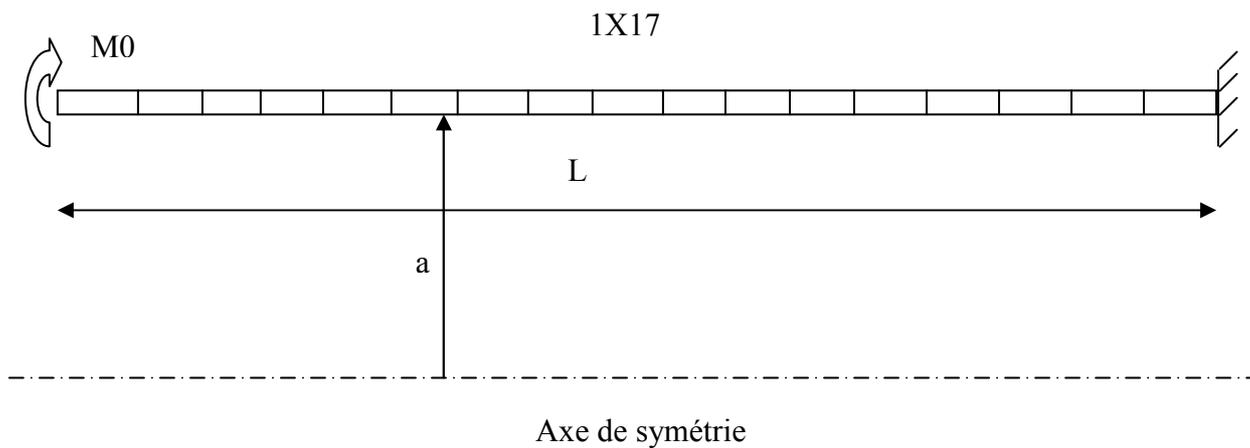


Figure 5.18 : Coque cylindrique soumise à un moment de flexion uniforme à l'extrémité

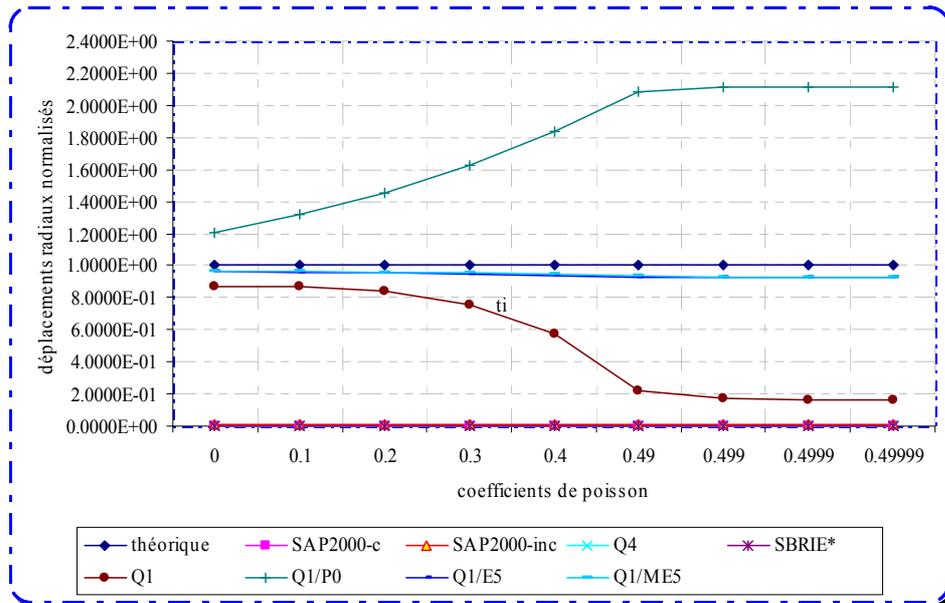


Figure 5.19 : Les déplacements radiaux pour un cylindre mince soumis à un moment distribué.

Dans ce test il est clair au vu que le verrouillage parfait à été apparu dans notre éléments étudiés dans ce travail, par contre l'élément Q1 bloqué à partir de la valeur de $\nu = 0.4$.

5.4 CONCLUSION :

D'après les tests effectués dans les problèmes d'élasticité plane, soit en contrainte plane ou en axisymétrie, la performance des éléments est acceptable dans les tests de contrainte plane, mais insuffisante pour dire que l'élément est toujours performant dans tous les cas d'applications. Alors il est important de faire un grand nombre de tests qui pourraient confirmer que l'élément soit performant ou limité. Par exemple l'élément SAP2000-inc passe avec succès dans les tests de contrainte plane, et dans le problème d'un cylindre à paroi épaisse en terme de déplacement, dans les deux cas 'matériau compressible ou incompressible'. Mais dans les plaques minces, on a remarqué que le verrouillage de SAP2000-inc est apparu à partir de $\nu = 0.499$.

L'élément SAP2000-inc donne des meilleurs résultats que l'élément SAP2000-c, ainsi que les éléments à champ de déformation montrent son intérêt dans les tests de contrainte plane et donnent une convergence plus importante que les éléments conformes.

Chapitre 6

APPLICATION DES ELEMENTS FINIS AUX PROBLEMES D'ELASTICITE PLANE

**APPLICATIONS DES ELEMENTS FINIS MEMBRANAIRES AUX PROBLEMES
D'ELASTICITE PLANE****6.1 INTRODUCTION : [ROC 79]**

Les problèmes d'élasticité plane font intervenir des structures continues chargées dans leur plan. Là où ces charges sont des forces normales dans ou hors de leur plan, se produisent des déplacements (i.e. cas de la déformation des membranes).

Les problèmes d'élasticité plane peuvent être séparés en deux classes distinctes, les problèmes des contraintes planes et des déformations planes. Dans le premier cas, la structure continue une petite épaisseur par rapport à ses autres dimensions et les contraintes normales au plan sont négligées. Les problèmes de cette catégorie comprennent par exemple les refends, les plaques minces dans les structures cellulaires, les plaques perforées en traction et l'âme des poutres épaisses.

Dans les problèmes de déformation plane, on suppose que la déformation normale à la plane de la charge est nulle. Ainsi les déformations et les déplacements dans un mur de retenue ou dans une galerie souterraine peuvent être étudiés en faisant une coupe transversales du mur et en supposant les déformations normales au plan de la coupe nulles.

Dans ce chapitre on va montrer l'intérêt de la formulation de l'élément membranaire soit en déplacement ou en déformation (conforme ou non-conforme) dans la modélisation des structures continues. La première tâche est de séparer la structure continue en éléments finis en faisant des découpes imaginaires, et nous considérons dans ce chapitre une des formes les plus simples et les plus efficaces.

6.2 Galerie souterraine :

Considérons dans cette application une galerie souterraine sous forme d'une boîte sous sol, ce problème est traité en déformation plane, au premier cas, la modélisation de la galerie se fait avec des éléments finis rectangulaires et la seconde par un élément poutre, donc il est possible de comparer les résultats des déplacements entre eux. Et la charge de sol est remplacée par des charges nodales équivalentes, la figure (6.1) montre la configuration de la galerie.

Par raison de la symétrie (géométrique, déformation), l'étude se limitera à un demi de la galerie. La figure (6.2) montre la géométrie et les conditions aux limites.

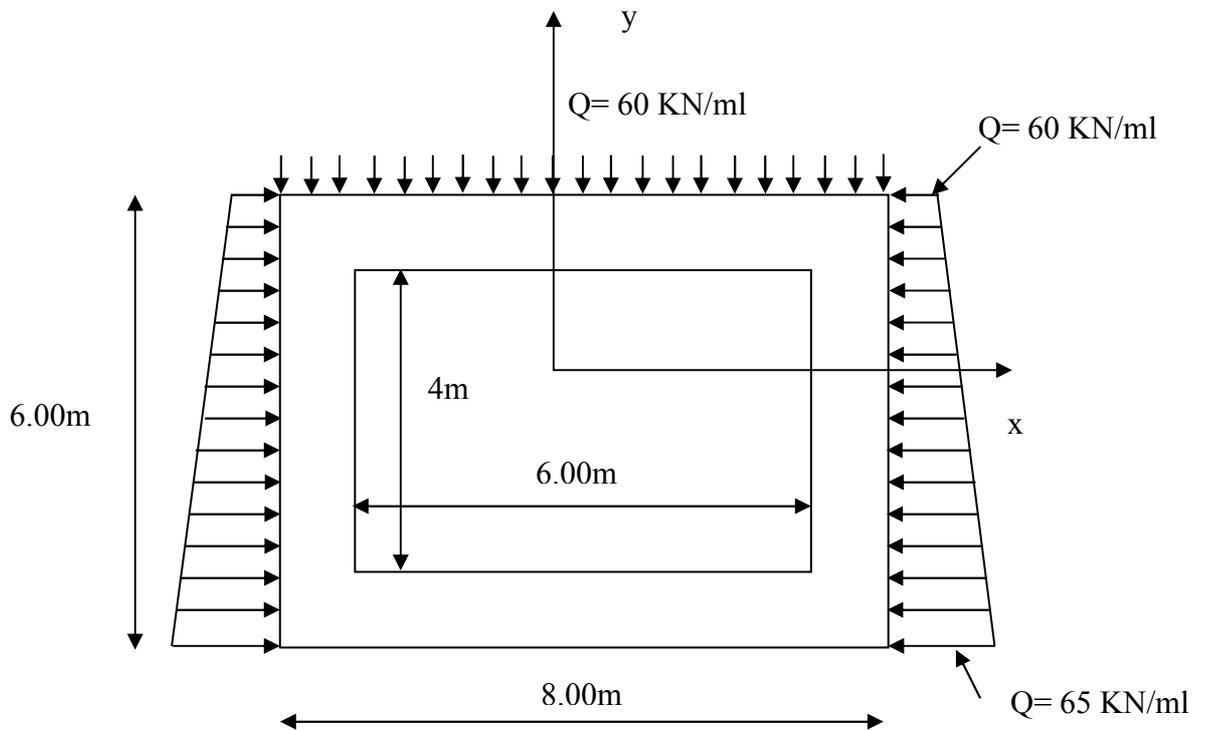


Figure 6.1 : Galerie souterraine

Les propriétés mécaniques :

$$E=1E+7$$

$$\nu = 0.3$$

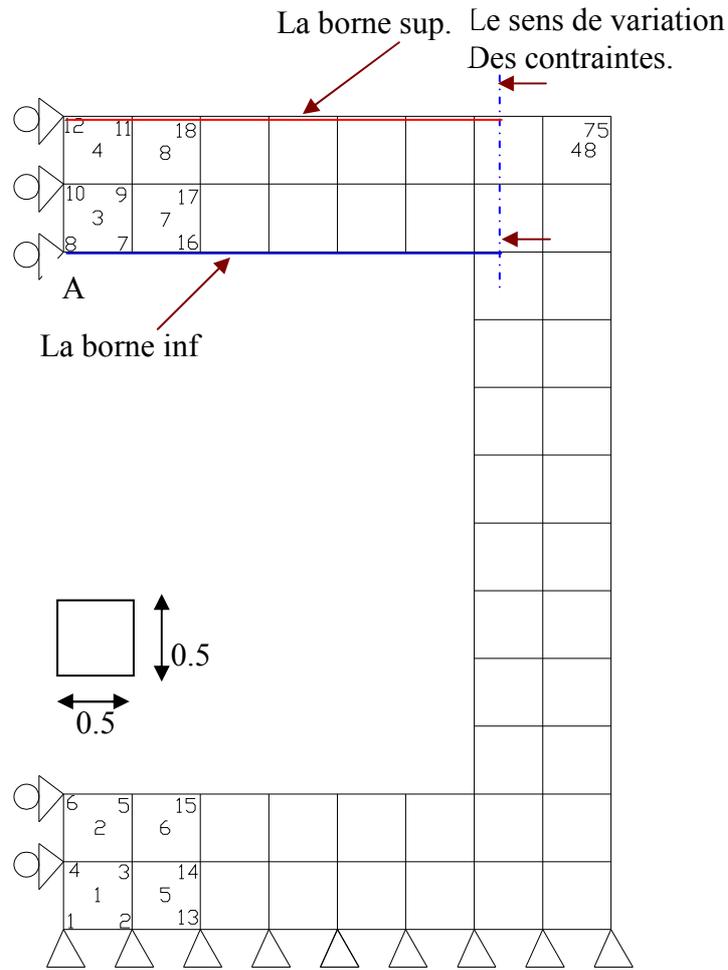


Figure (6.2) : Discrétisation de la galerie en éléments rectangulaires

6.2.1 Illustration des résultats :

a) En terme de déplacement :

Dans cette étude on a besoin de comparer les déplacements maximaux des éléments membranaires des différentes formulations avec l'élément poutre.

NELM \ ELM	SBRIE* 10 ⁻⁴	SAP20000-inc 10 ⁻⁴	SAP20000-c 10 ⁻⁴	Poutre 10 ⁻⁴
48	6.011	6.241	5.701	9.138
192	6.472	6.548	6.361	
768	6.661	6.686	6.24	

Tableau 6.1 : Les déplacements verticaux de la galerie au point A.

b) En terme de contrainte :

✓ **Concentration des contraintes :**

Dans ce cas nous avons étudié les zones les plus sollicitées en traction et en compression, et les variations des contraintes à la borne inférieure et supérieure de la poutre et les moments fléchissant au niveau des coupes A-A et B-B voir la figure (6.3).

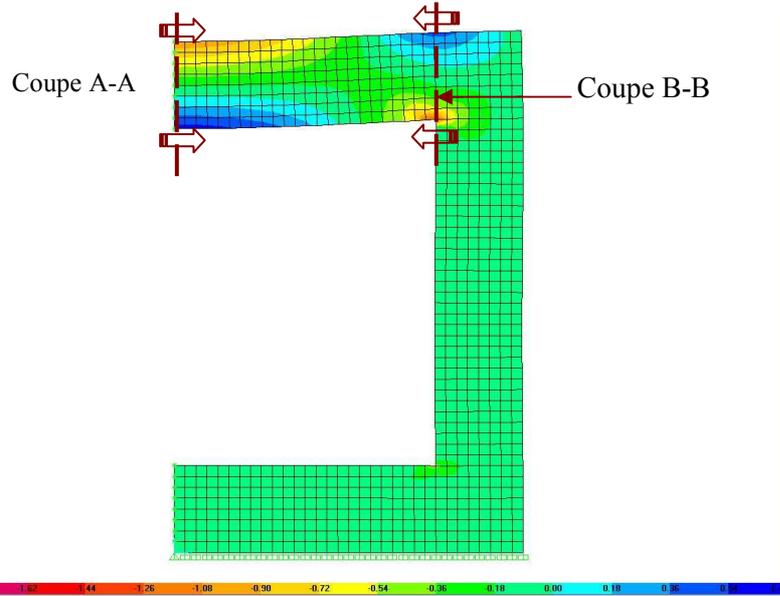


Figure (6.3) Représentation de la concentration des contraintes normales σ_{xx}

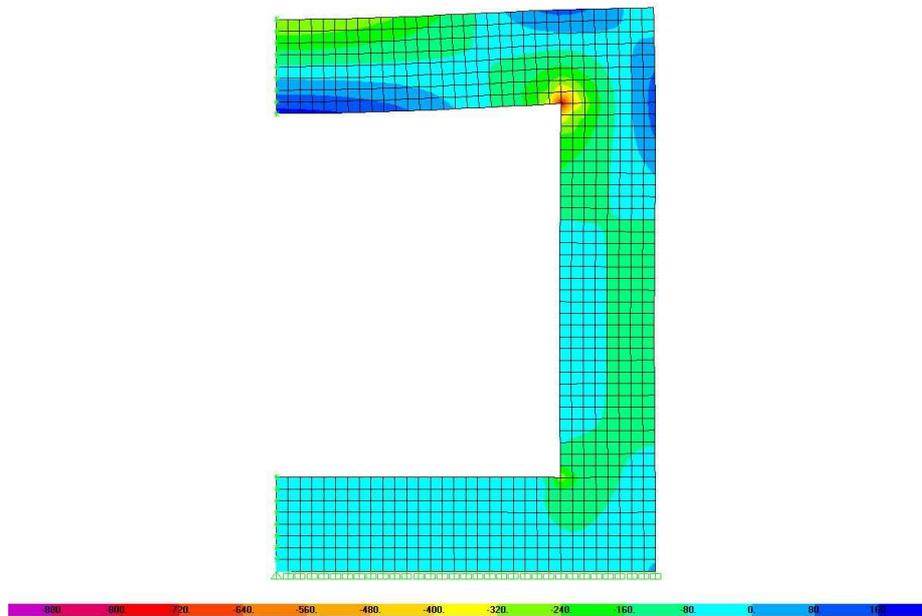


Figure (6.4) Représentation de la concentration des contraintes normales σ_{zz}

Note : La couleur rouge représente des zones comprimées et le bleu représente les zones tendues.

Les courbes des figures (6.5 – 6.8) montrent le chemin de la variation des contraintes le long des deux bornes indiquées sur la figure (6.2) pour l'analyse du comportement de l'élément membranaire.

Les résultats suivants sont obtenus pour un modèle à 127 DDL

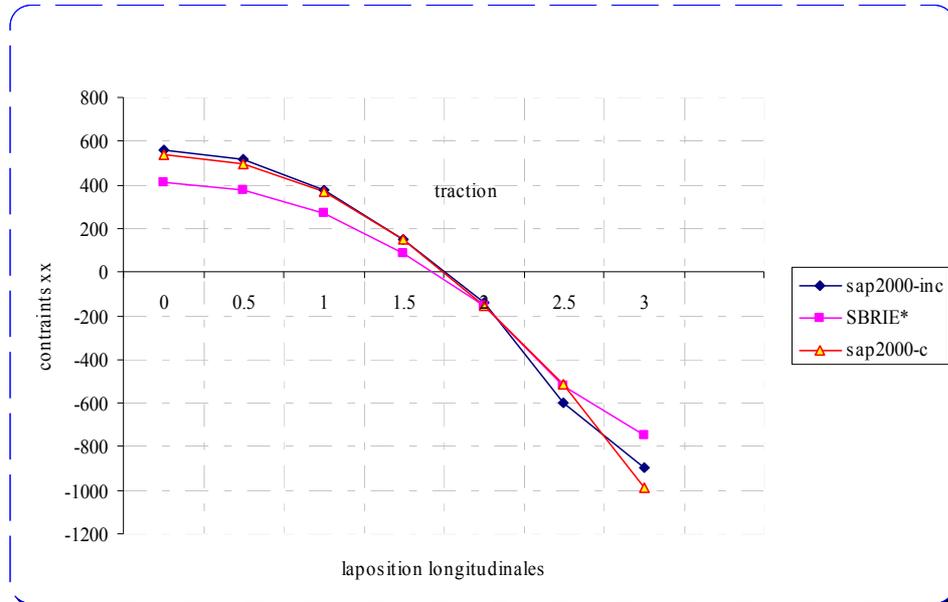


Figure 6.5a: La variations des contraintes σ_{xx} le long de la borne inférieure

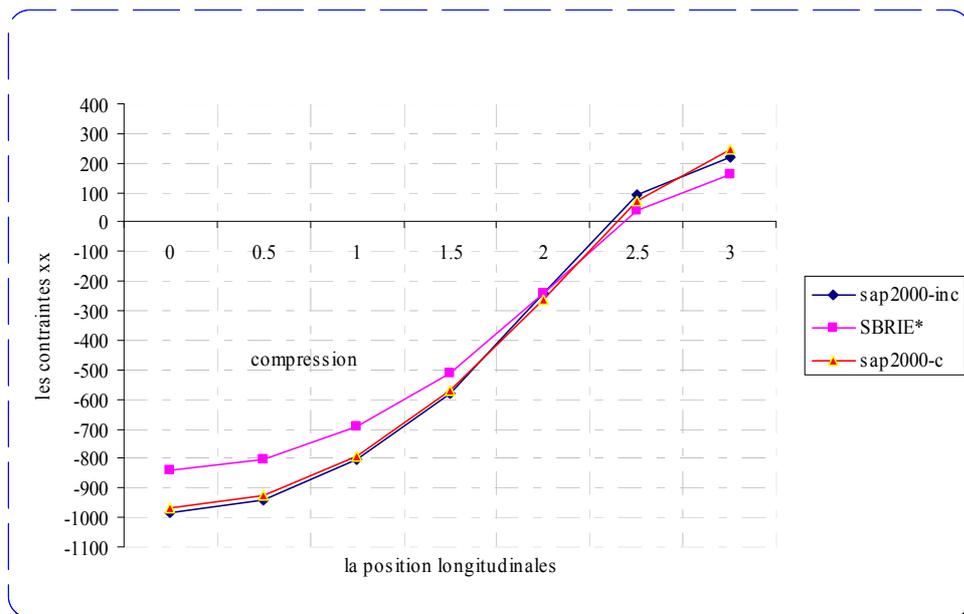


Figure 6.5b: La variations des contraintes σ_{xx} le long de la borne supérieure

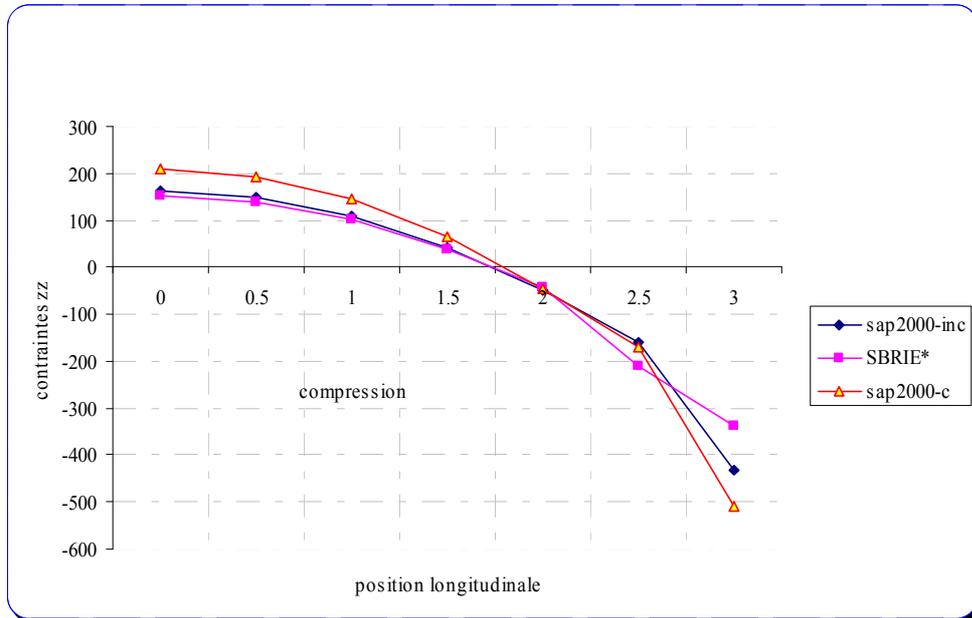


Figure 6.6a : La variations des contraintes σ_{zz} le long de la borne inférieure

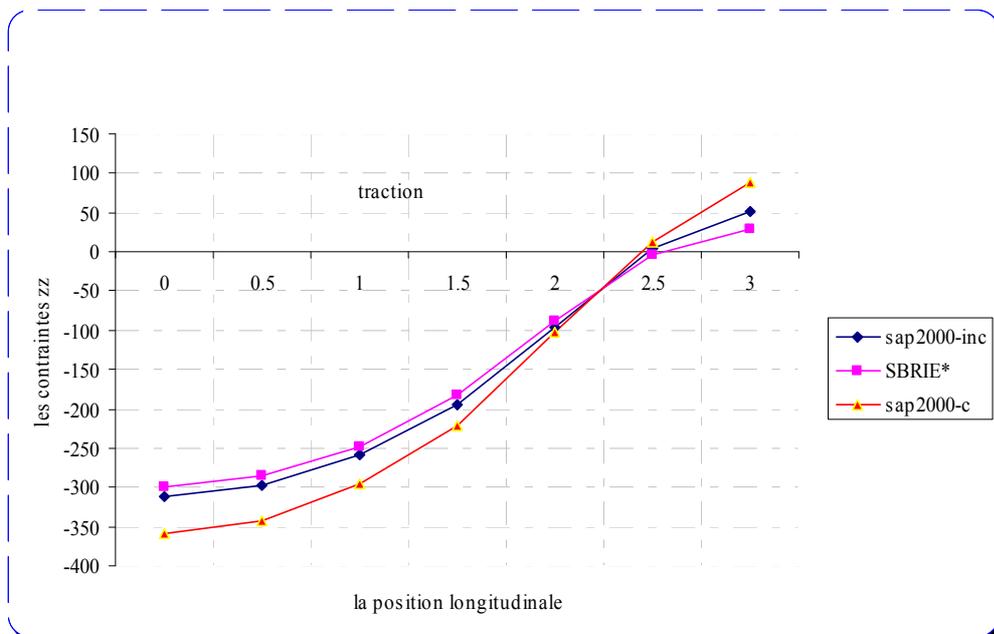


Figure 6.6b : La variations des contraintes σ_{zz} le long de la borne supérieure

Les résultats suivants sont obtenus pour un modèle à 447 DDL

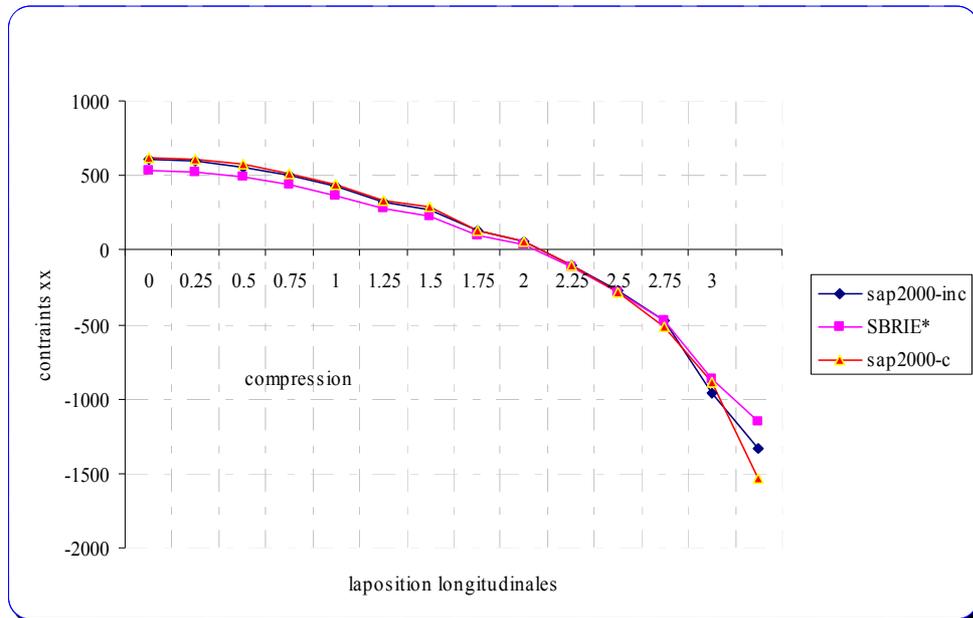


Figure 6.7a: La variations des contraintes σ_{xx} le long de la borne inférieure

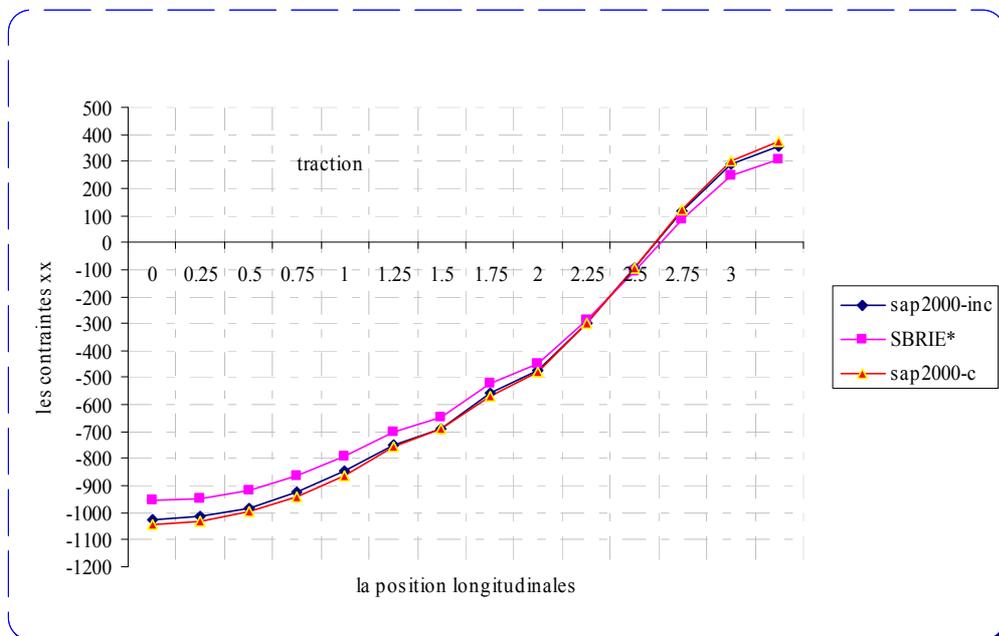


Figure 6.7b: La variations des contraintes σ_{xx} le long de la borne supérieure

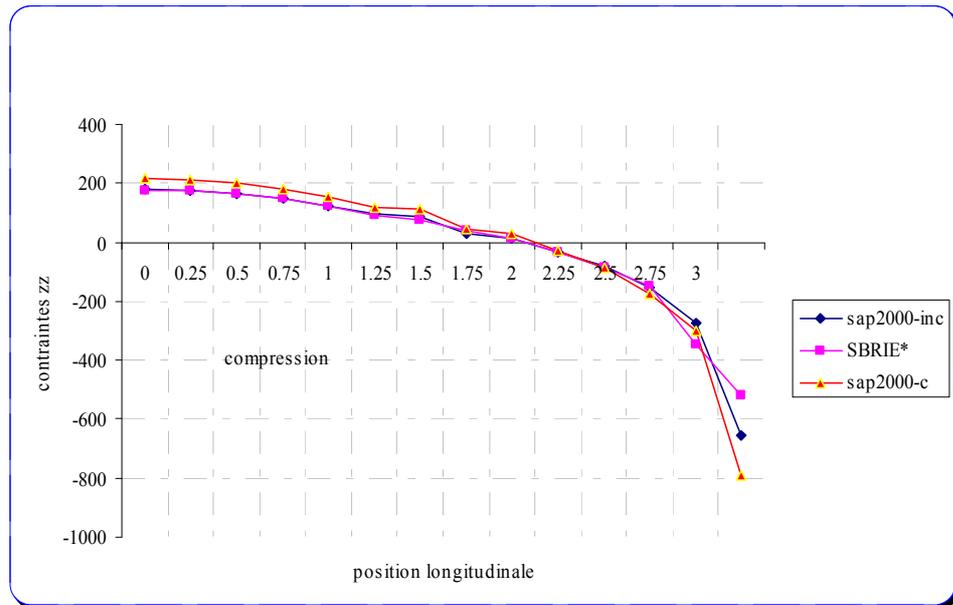


Figure 6.8a: La variations des contraintes σ_{zz} le long de la borne inférieure

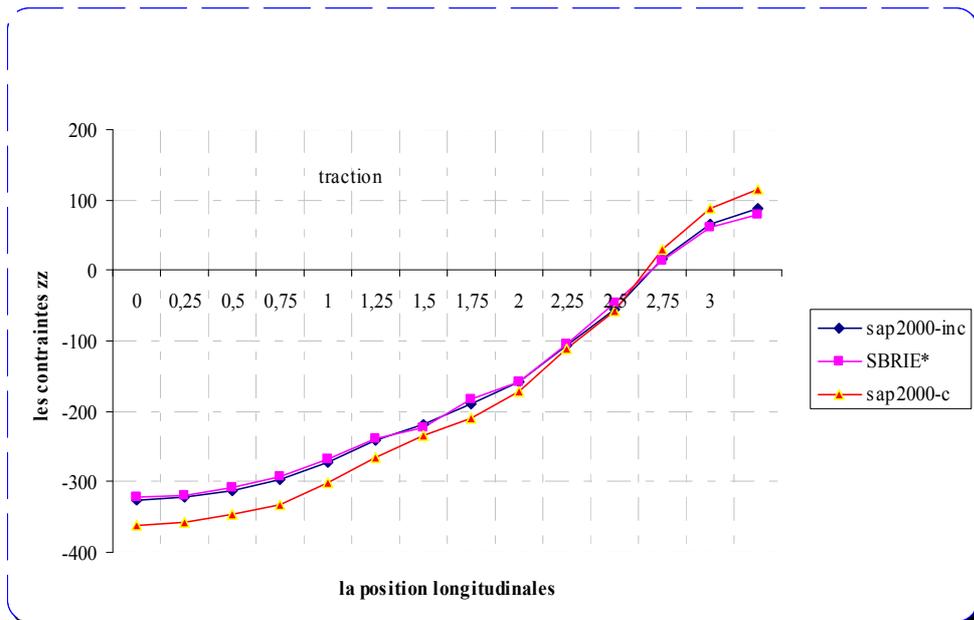


Figure 6.8b: La variations des contraintes σ_{zz} le long de la borne supérieure

Ces courbes nous permettent de conclure que les éléments membranaires (SAP2000-c, SAP2000-inc, SBRIE*), permettent un bon encadrement du mécanisme de déformation de la poutre.

Les résultats illustrés au niveau des coupes A-A et B-B relatif à la figure (6.3) représentent la variation des contraintes normales σ_{xx} dans les zones les plus sollicitées.

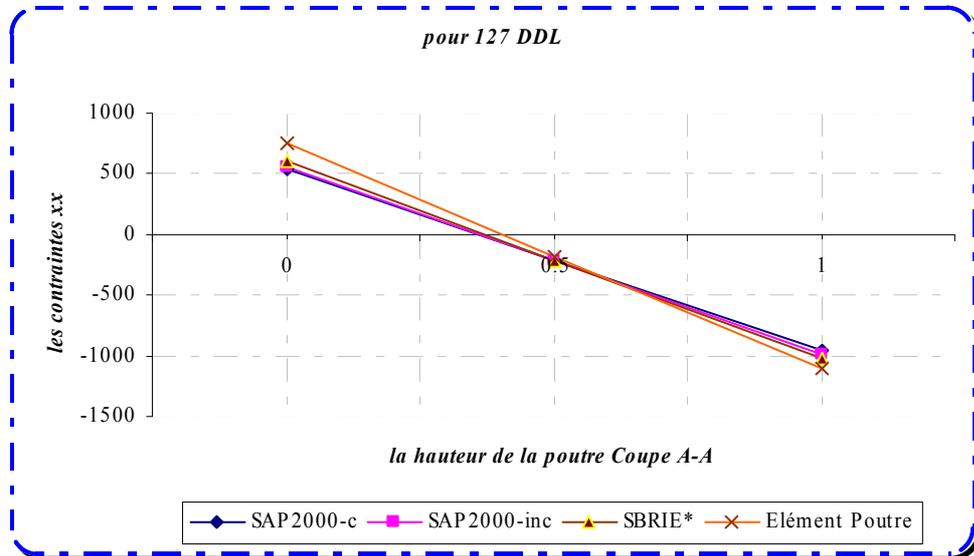


Figure 6.9-a: La variation des contraintes à travers la section

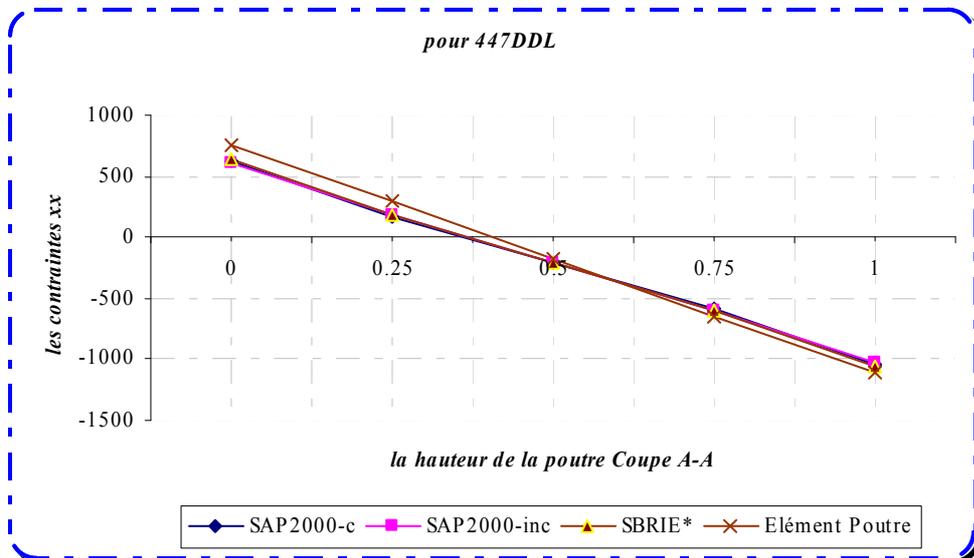


Figure 6.9-b: La variation des contraintes à travers la section

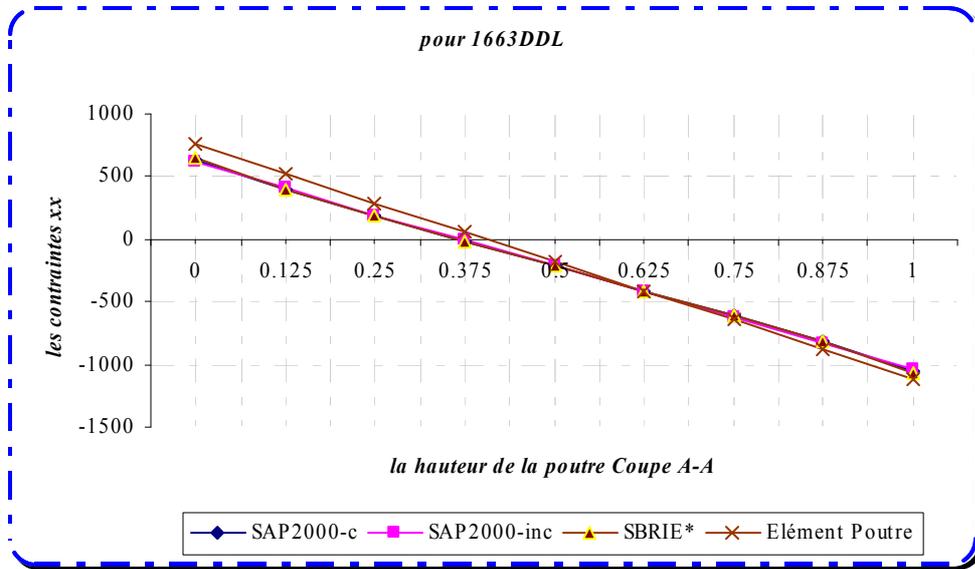


Figure 6.9-c: La variation des contraintes à travers la section

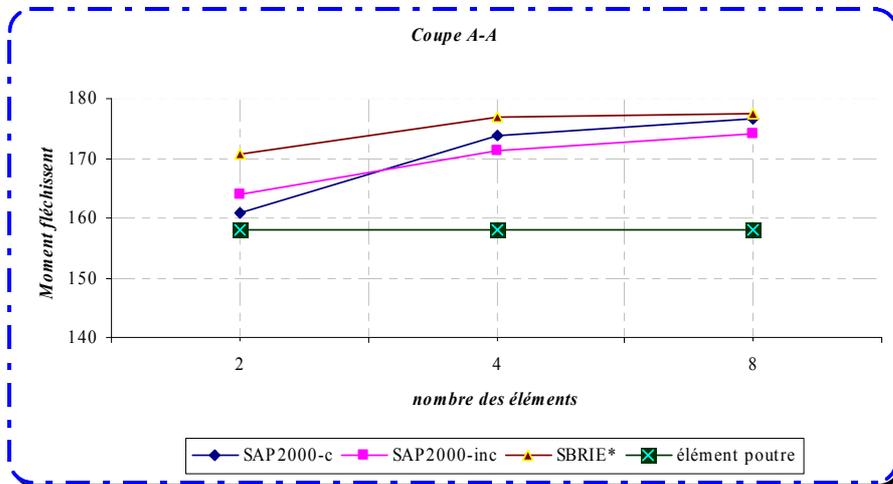


Figure 6.10: La variation de moment à travers fléchissent de la coupe A-A

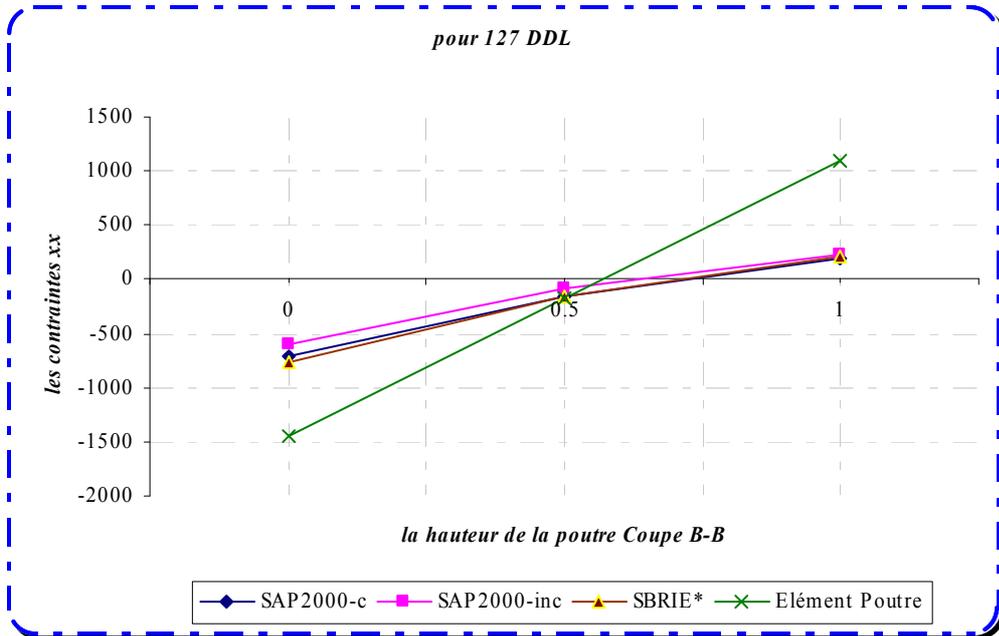


Figure 6.11-a: La variation des contraintes à travers la section

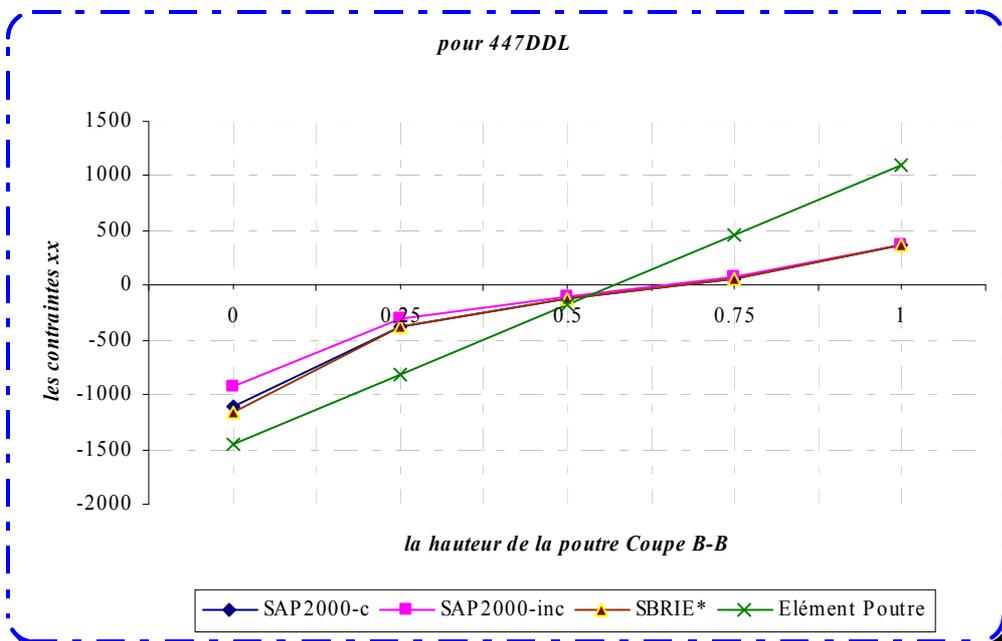


Figure 6.11-b: La variation des contraintes à travers la section

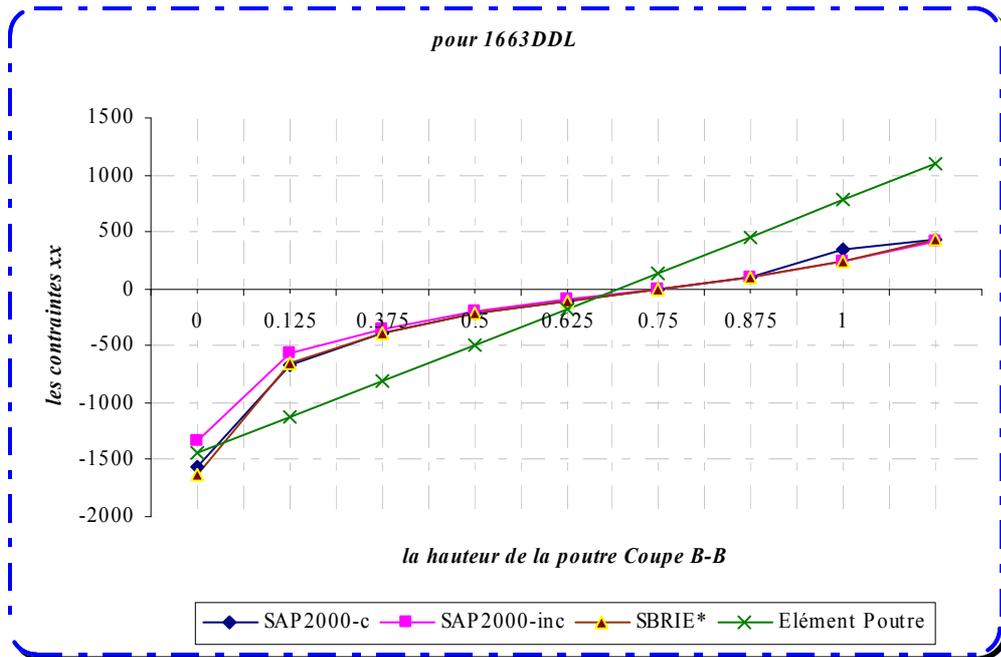


Figure 6.11-c: La variation des contraintes à travers la section

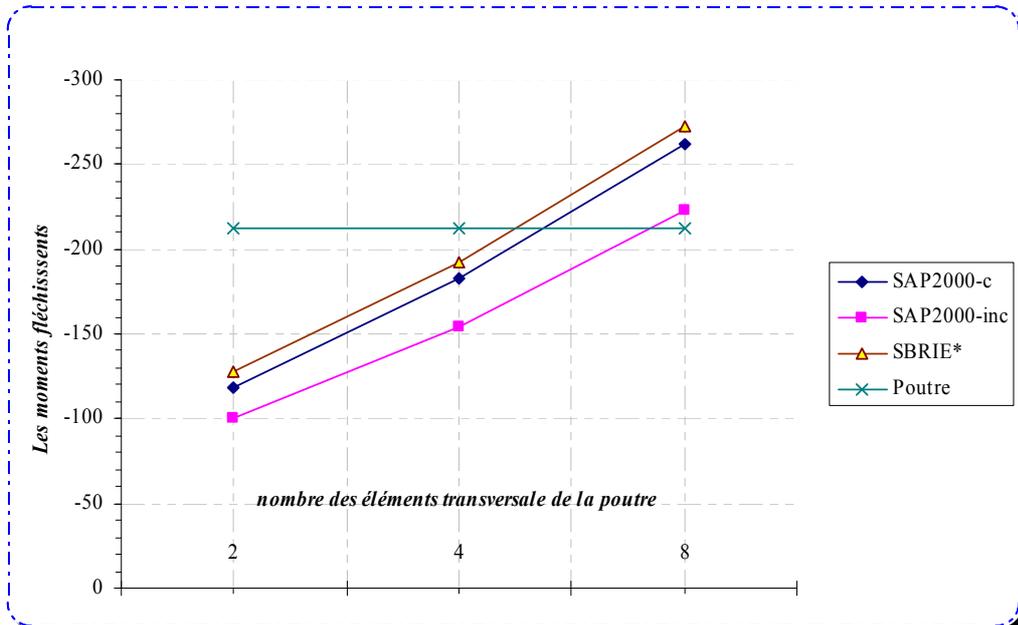


Figure 6.12: La variation de moment à travers fléchissent de la coupe B-B

D'après ces courbes on a constaté que la variation des contraintes normales σ_{xx} , le long de la section A-A est similaire pour les différents types d'éléments (membranaires, poutres), par contre, pour la section B-B, elle est un peu différente.

6.2.2 l'influence de la modélisation :

Cette étude est une modélisation d'une galerie avec le sol, pour démontrer quelle est la différence entre l'application des charges sur la galerie sous forme des charges nodales équivalentes ou bien avec la modélisation du sol, et le type d'élément utilisé.

✓ **Description des modèles :**

Les modèles utilisés sont montrés sur la figure (6.13).

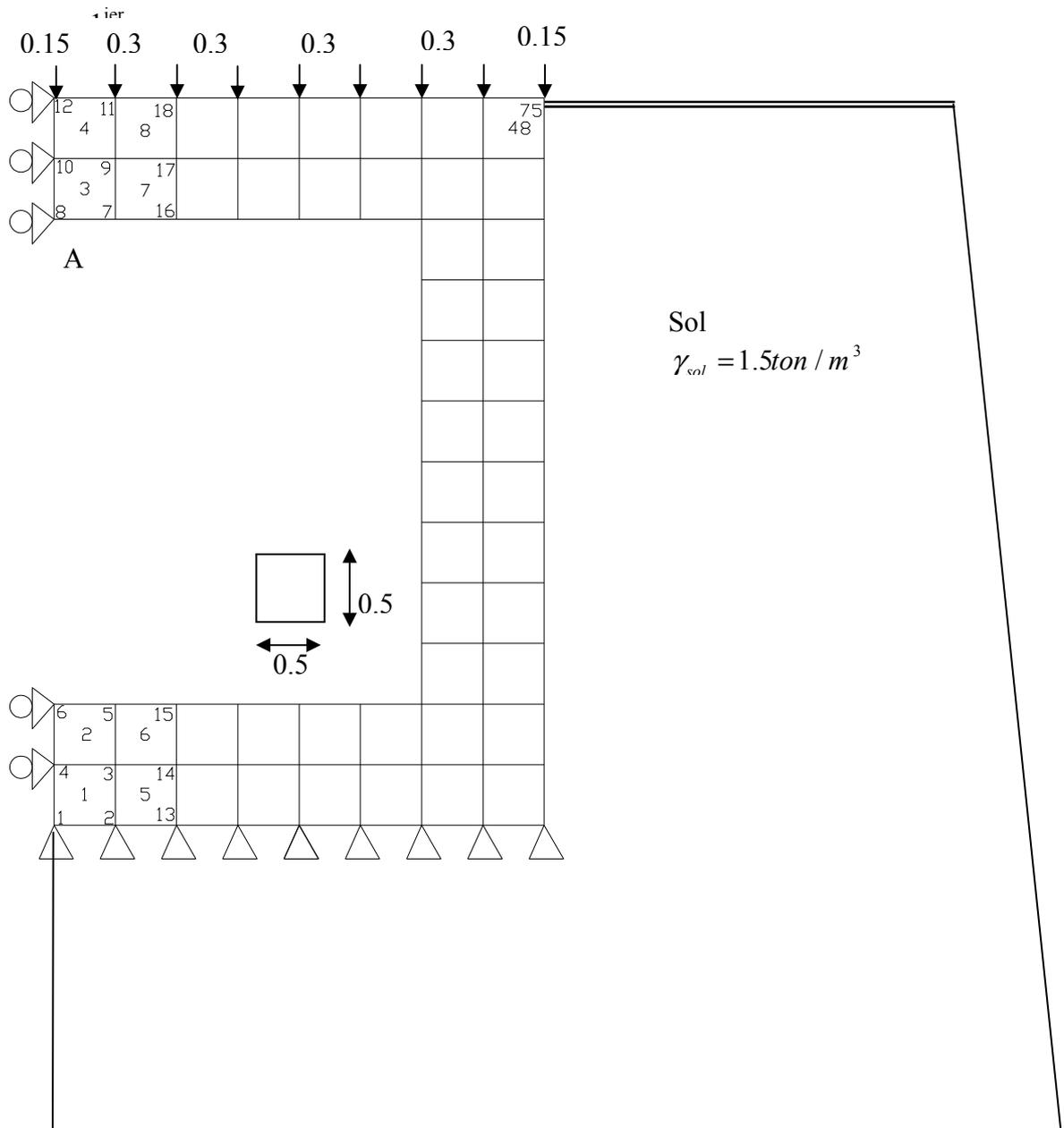


Figure 6.13a Modélisation d'une galerie souterraine sous les charges nodales équivalente

1^{er} cas :

Les charges latérales nodales de la galerie ont été remplacées par des éléments membranaires qui représentent le sol. (Voir la figure 6.13a).

Le poids propre de la galerie n'est pris en considération.

2^{ème} cas :

Les charges latérales nodales de la galerie ont été remplacées par des éléments membranaires qui représentent le sol. (Voir la figure 6.13a).

Le poids propre de la galerie est pris en considération.

3^{ème} cas :

La modélisation du sol se fait uniquement par des éléments membranaires. (Voir la figure 6.13b).

Le poids propre de la galerie est pris en considération.

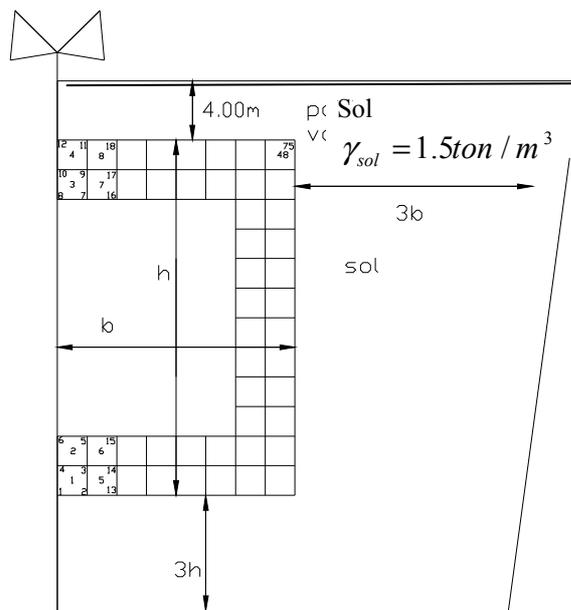


Figure 6.13b Modélisation d'une galerie souterraine

4^{ème} cas :

On remplace les éléments membranaires de la galerie par l'élément poutre. Au premier lieu la poutre est connectée avec la membrane par des éléments barres bi-articulés travaillant en compression et en traction, et la seconde la poutre est connectée directement avec le membrane qui représente le sol.

5^{ème} cas :

Sol bicouche, la couche au dessus de la galerie de hauteur 3h a un poids volumique de 2 ton/m³.

Le tableau 6.2a illustre les déplacements verticaux au point A (voir la figure 6.13).

N°	1 ^{er} cas	2 ^{ème} cas	3 ^{ème} cas	4 ^{ème} cas Avec connecteurs	4 ^{ème} cas sans connecteurs	5 ^{ème} cas
V _{max}	0.0019	0.00401	0.00438	0.00309	0.00327	0.419

Tableau 6.2a : Les déplacements maximaux verticaux au point A.

Il est très intéressant de comparer le déplacement trouvé dans le premier cas avec celui trouvé par l'élément de SBRIE* dans le tableau (6.1).

N°	1 ^{er} cas	SBRIE*
V _{max}	0.0019	0.0006011

Tableau 6.2b : Les déplacements maximaux verticaux au point A

6.2.3 L'influence des paramètres mécaniques :

✓ Description des modèles :

Dans cette étude on va faire plusieurs variantes pour montrer l'influence des paramètres du sol, le poids volumiques, le module de YOUNG, E, sur le confinement de la galerie et la concentration des contraintes normales dans les points les plus sollicités.

La galerie est en béton armé de densité $\gamma = 2.5 \frac{\text{ton}}{\text{M}^3}$, et E=20Mpa

⇒ La première variante : la couche supérieure prend $\gamma = 1.8 \frac{\text{ton}}{\text{M}^3}$, E=10Mpa, et la

couche inférieure $\gamma = 1.6 \frac{\text{ton}}{\text{M}^3}$ et E=100Mpa.

⇒ La deuxième variante : la couche supérieure prend $\gamma = 1.8 \frac{\text{ton}}{\text{M}^3}$, E=100Mpa, et la

couche inférieure $\gamma = 1.6 \frac{\text{ton}}{\text{M}^3}$ et E=10Mpa.

⇒ La troisième variante: la couche supérieure prend $\gamma = 1.6 \frac{\text{ton}}{\text{M}^3}$ et E=100Mpa, et la

couche inférieure $\gamma = 1.8 \frac{\text{ton}}{\text{M}^3}$, E=10Mpa.

$\nu = 0.3$ pour tous les matériaux.

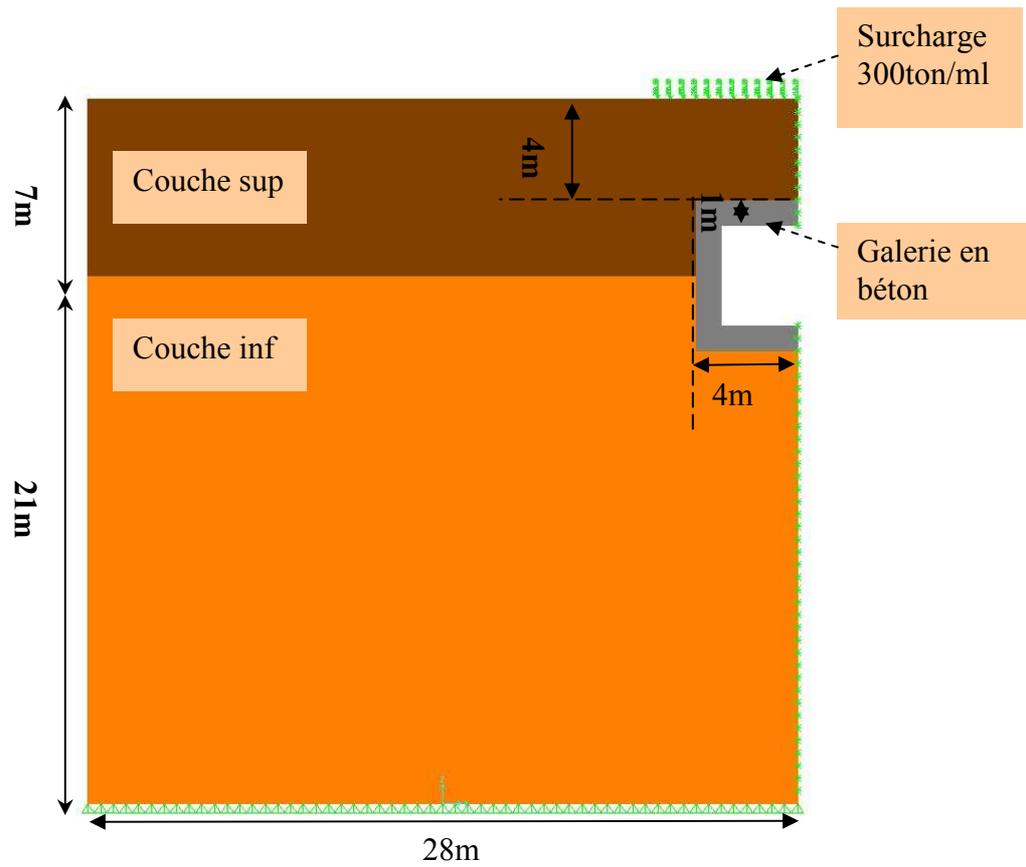


Figure 6.14 Modélisation d'une galerie souterraine sous sol bi-couches.

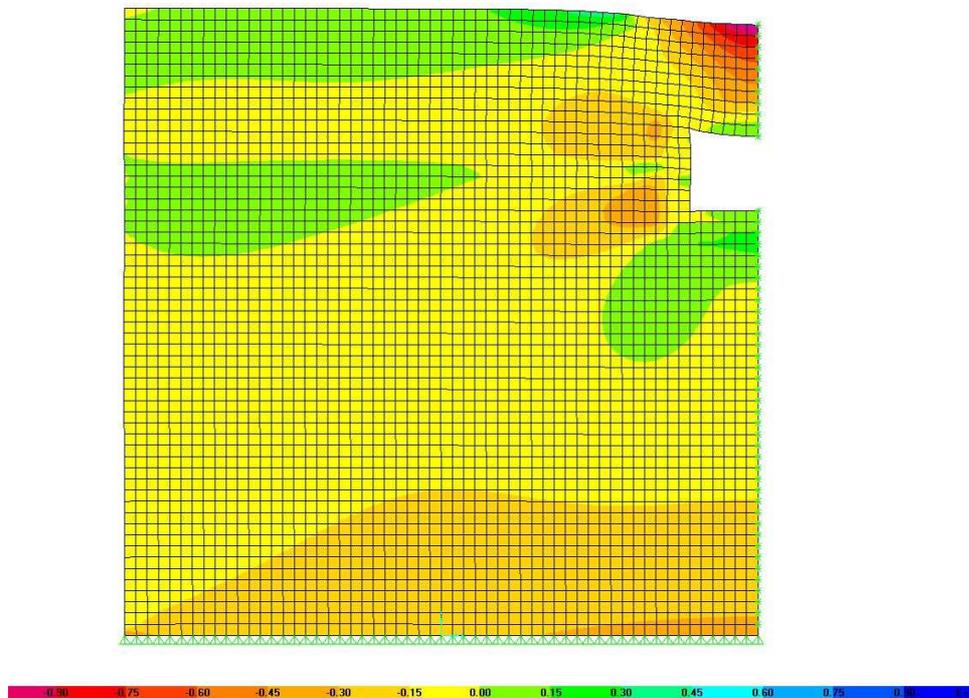


Figure (6.15-a) Représentation de la variation des contraintes normales σ_{xx} de la variante N°01

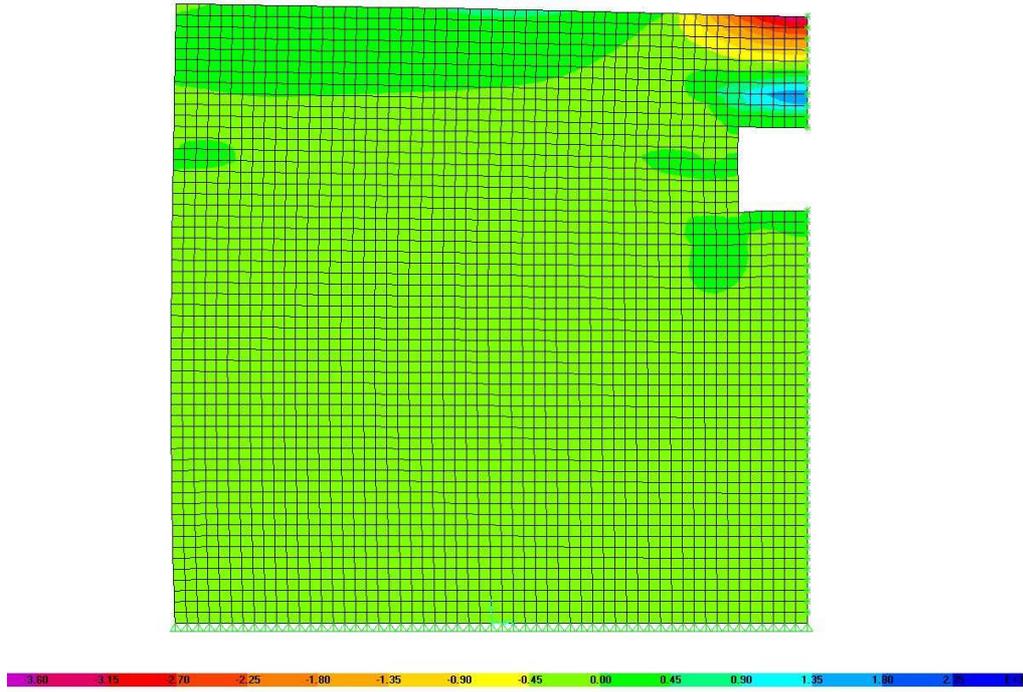


Figure (6.15-b) Représentation de la variation des contraintes normales σ_{xx} de la variante N°02

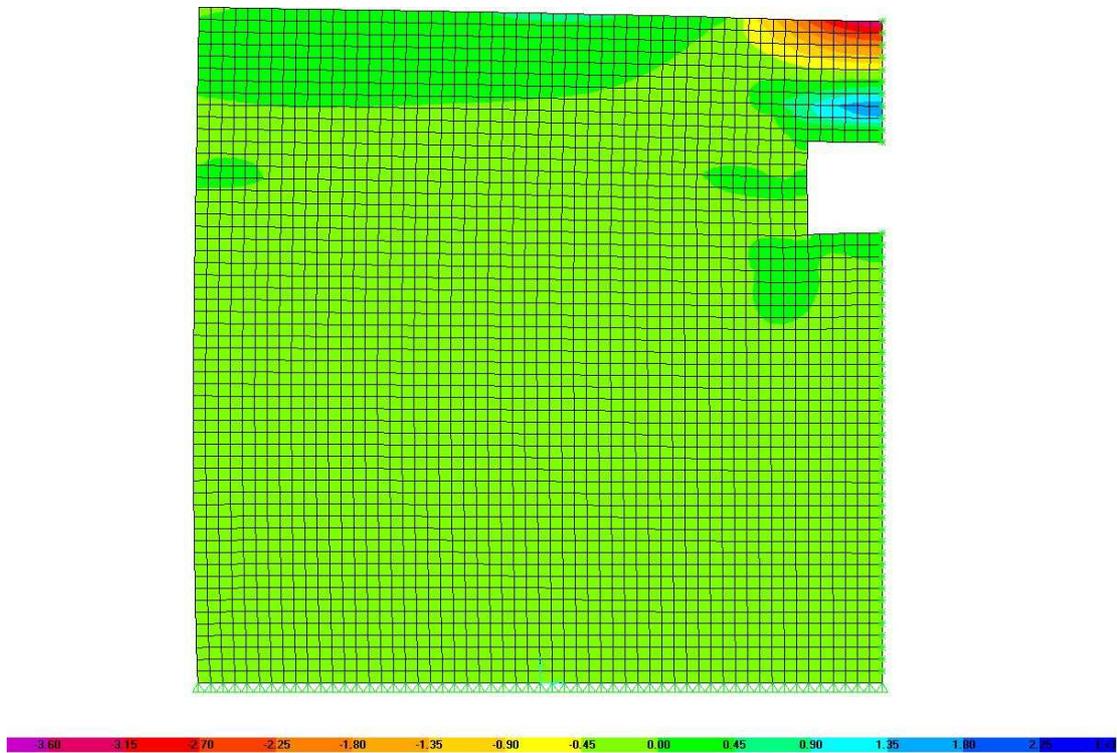


Figure (6.15-c) Représentation de la variation des contraintes normales σ_{xx} de la variante N°03

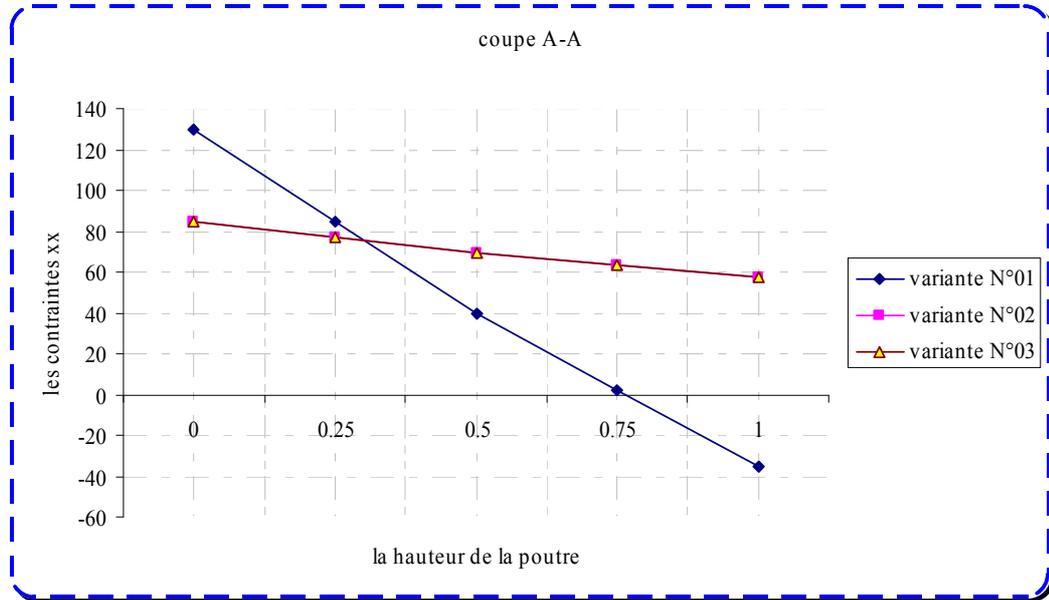


Figure (6.16-a) La variation des contraintes transversale σ_{xx} pour la coupe A-A

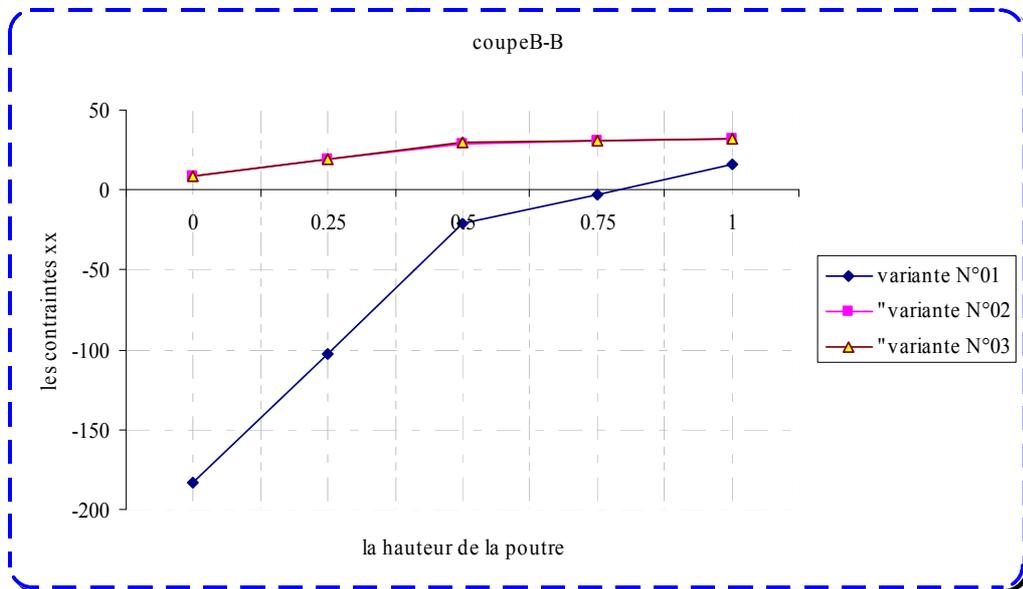


Figure (6.16-b) La variation des contraintes transversale σ_{xx} pour la coupe B-B

Les résultats de cette analyse sont donnés sous forme des graphes dans les figures (6.16).

Avec la même configuration du problème et le même maillage, notre but est de faire une comparaison entre plusieurs variantes pour les problèmes bidimensionnels d'élasticité plane.

D'après les résultats des figures 6.16, on constate que la différence entre **la variante N°01** et **N°02** la concentration des contraintes au milieu de la poutre supérieure de la galerie. Les contraintes de traction de la variante **N°01** sont **plus** élevées que la variante **N°02**. Mais entre la variante **N°02** et **N° 03** il n'y a aucune différence, donc l'influence du poids volumique est négligeable.

6.3 Application sur un refend encastrée à la base:

6.3.1 Exemple d'un refend plein:

Pour tester la performance et la convergence des éléments finis présentés dans ce chapitre, nous traitons l'exemple de la figure (6.17). Il s'agit d'évaluer la contrainte normale de la flexion au point (A) et la contrainte de cisaillement au point (B) au sein du refend, ainsi que le déplacement latérale au point (C).

Les données de la géométrie et les caractéristiques mécaniques et les chargements sont illustrés dans la figure (6.17).

Dans cet exemple on fait plusieurs types de maillage, en premier on divise le mur en quatre éléments 2X2, et le deuxième type par 4X6, et le dernier 6X8, pour cela notre exemple va étudier la convergence de la contrainte normale verticale au point (A) et la tangentielle en (B) et le déplacement du point (C), voir la figure (6.17).

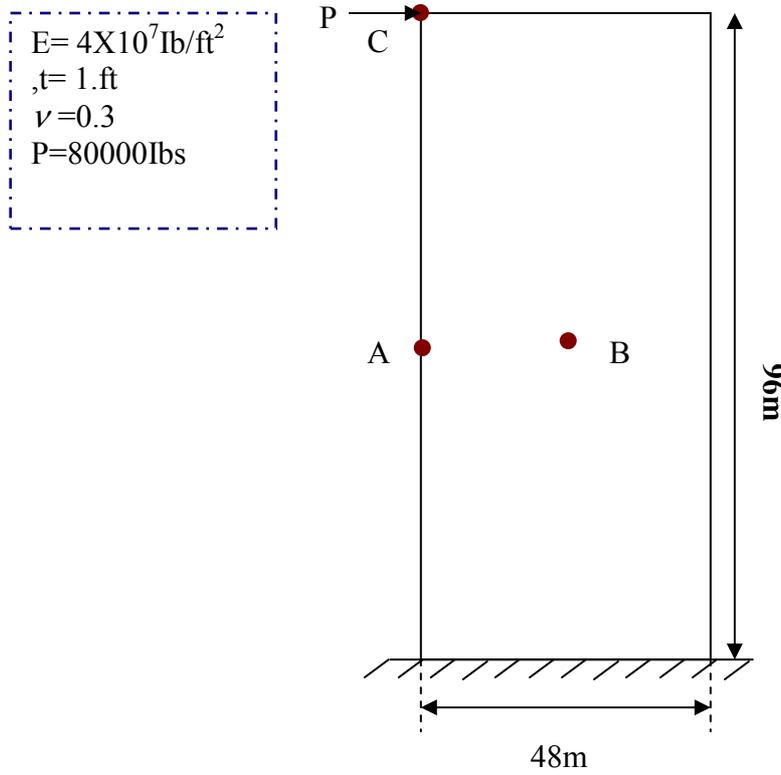


Figure 6.17: Représentation géométrique et mécanique d'un refend plein.

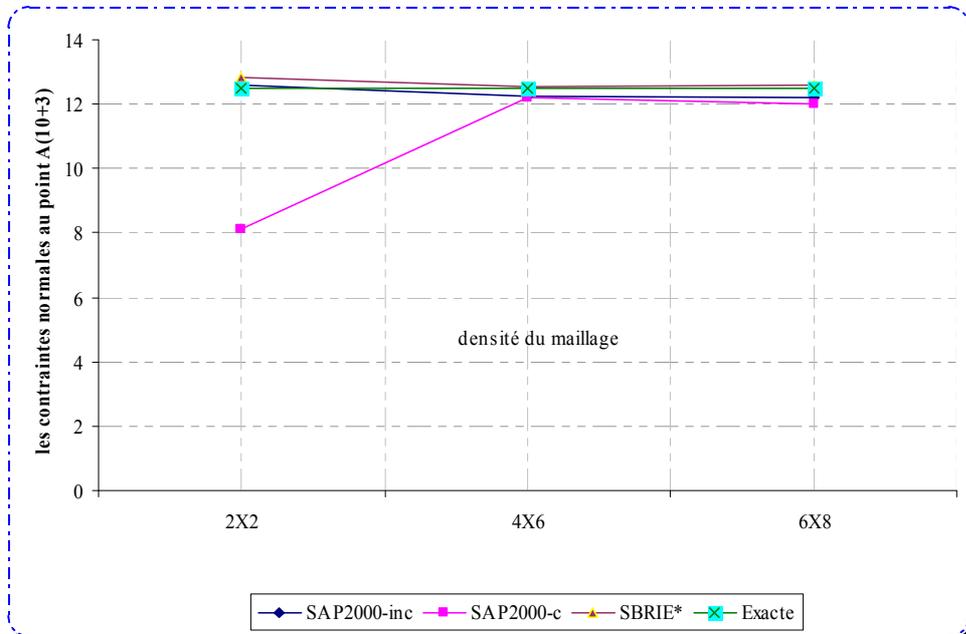


Figure 6.18: Etude de convergence de la contrainte normale σ_{yy} au point (A).

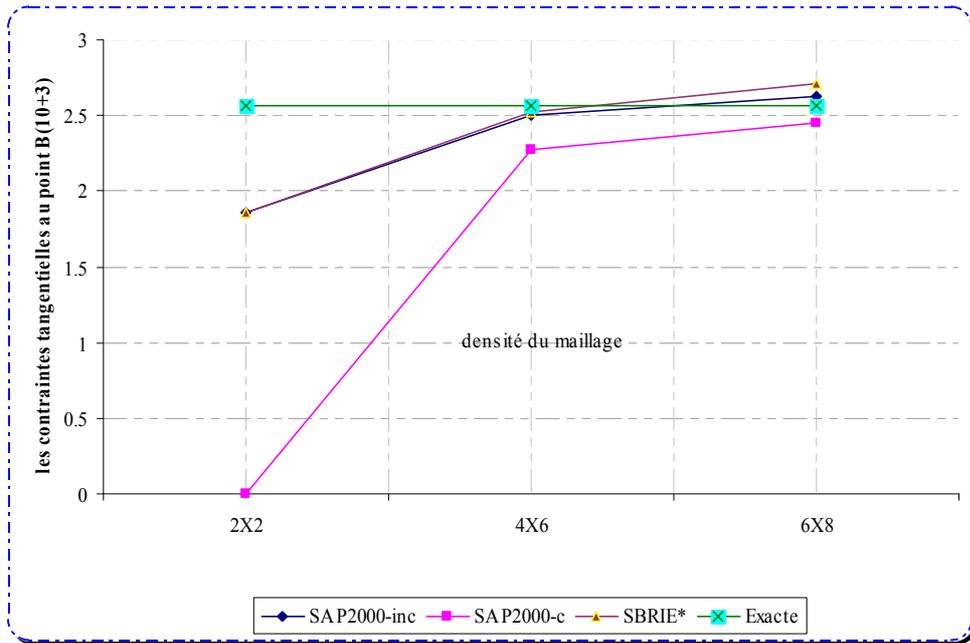


Figure 6.19: Etude de convergence de la contrainte tangentielle τ_{xy} au point (B).

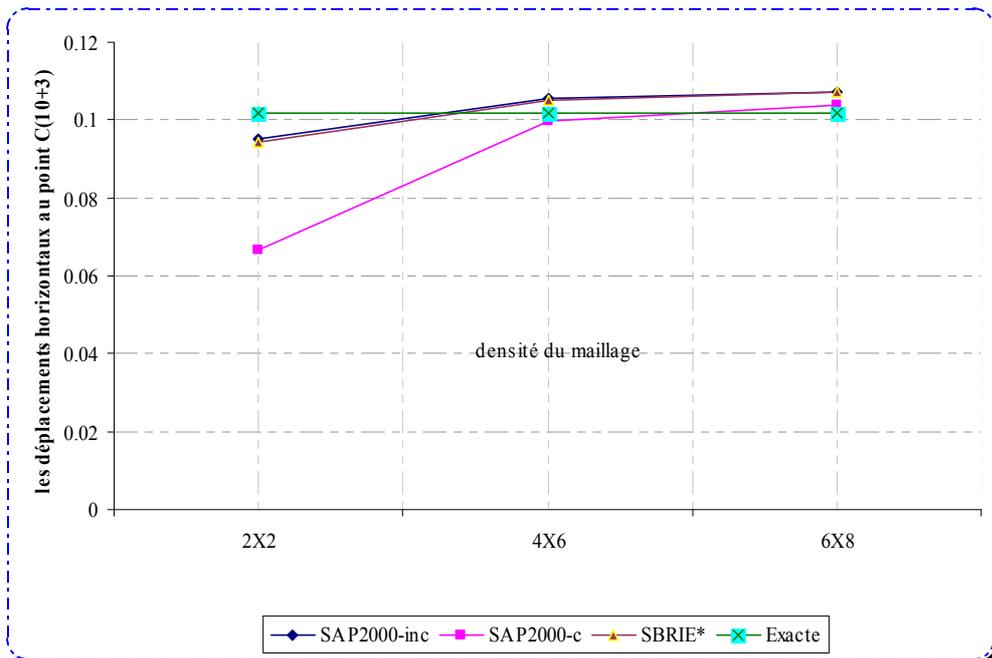


Figure 6.20: Etude de convergence de déplacement au point (C).

6.3.2 Exemple d'un refend avec ouvertures :

Les dimensions, les propriétés et le chargement sont les mêmes de celui du mur refend sans ouverture, la figure (6.21) montre le refend avec une file de huit ouvertures avec des linteaux de 2ft de hauteur. La configuration de maillage utilisée dans ce cas est illustrée sur la figure (6.21).

La figure (6.22) montre les résultats numériques pour les éléments (élément avec les modes incompatibles, et sans modes incompatibles et SBRIE*) de la contrainte normale σ_{yy} à la base du refend (coupe A-A) comparée avec une configuration couplée entre l'élément incompatible et l'élément poutre de BERNOULLI qui représente le linteau, et la solution théorique de ROSMAN.

La figure (6.23) montre la distribution des contraintes normales verticales au niveau du milieu de linteau le plus bas coupe B-B (voir la figure 6.21), les résultats de ce dernier sont montrés sur la figure (6.21)

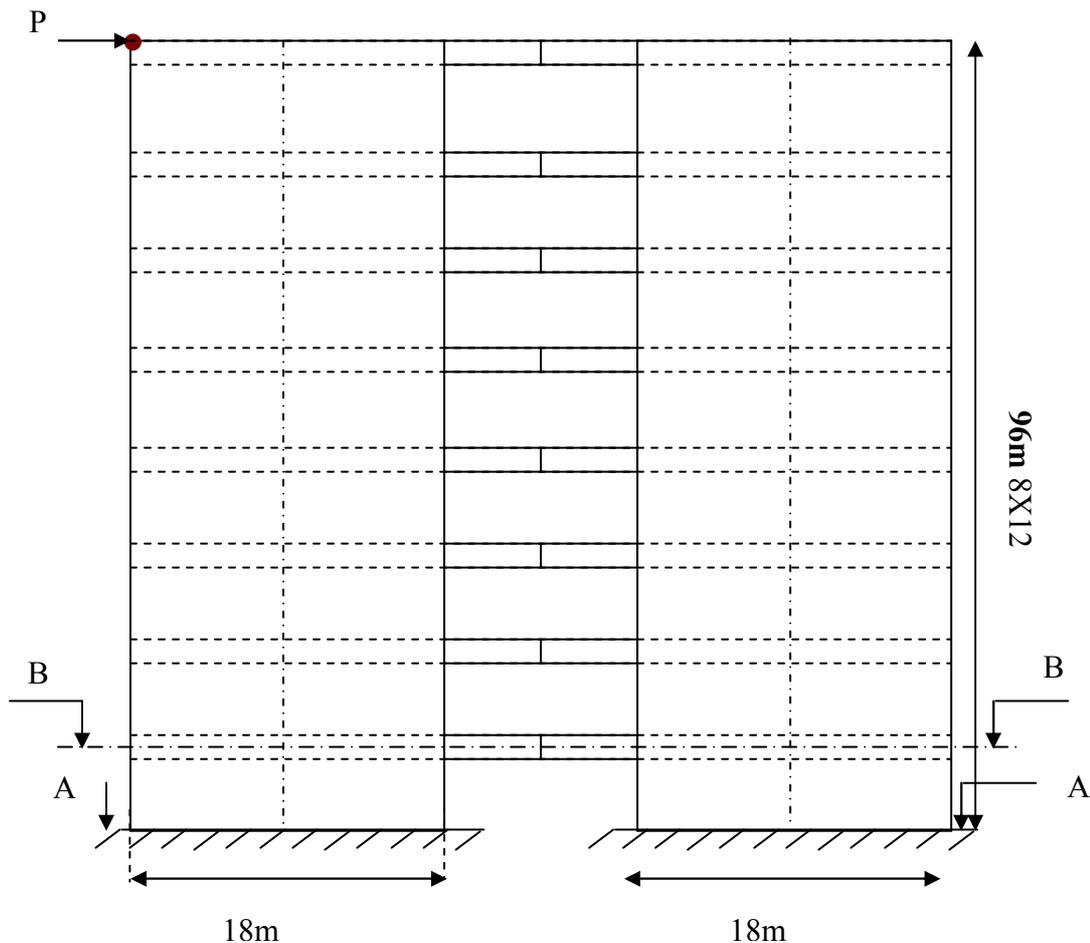


Figure 6.21 : Mur refend avec file des ouvertures.

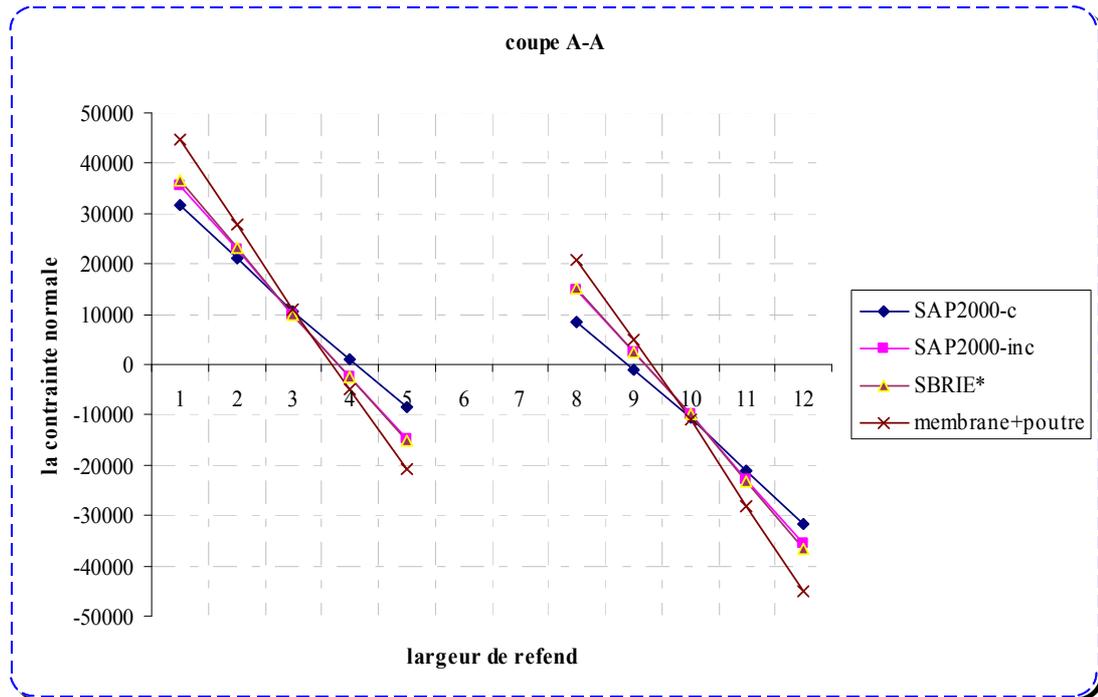


Figure 6.22: La variation de la contraintes normale à la base du refend

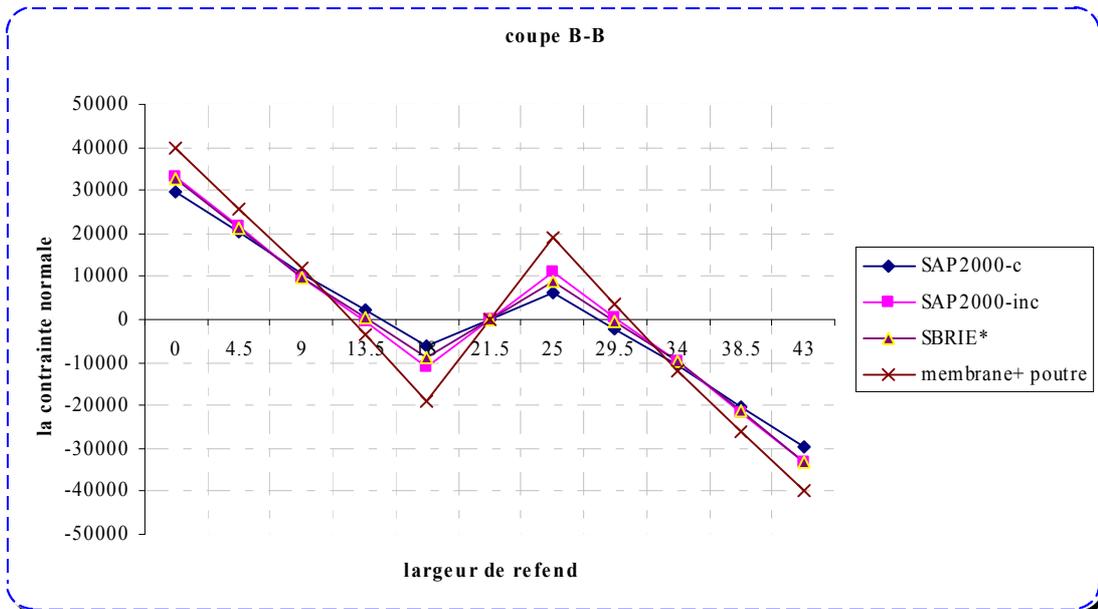


Figure 6.23: La variation de la contraintes normale au niveau de linteau le plus bas du refend.

Les figures 6.22 et 6.23 visualisent bien la légère différence des résultats de la contrainte entre l'élément SAP2000-inc et SBRIE*, par contre l'approche poutre - membrane offre des résultats plus élevés que l'approche membrane - membrane.

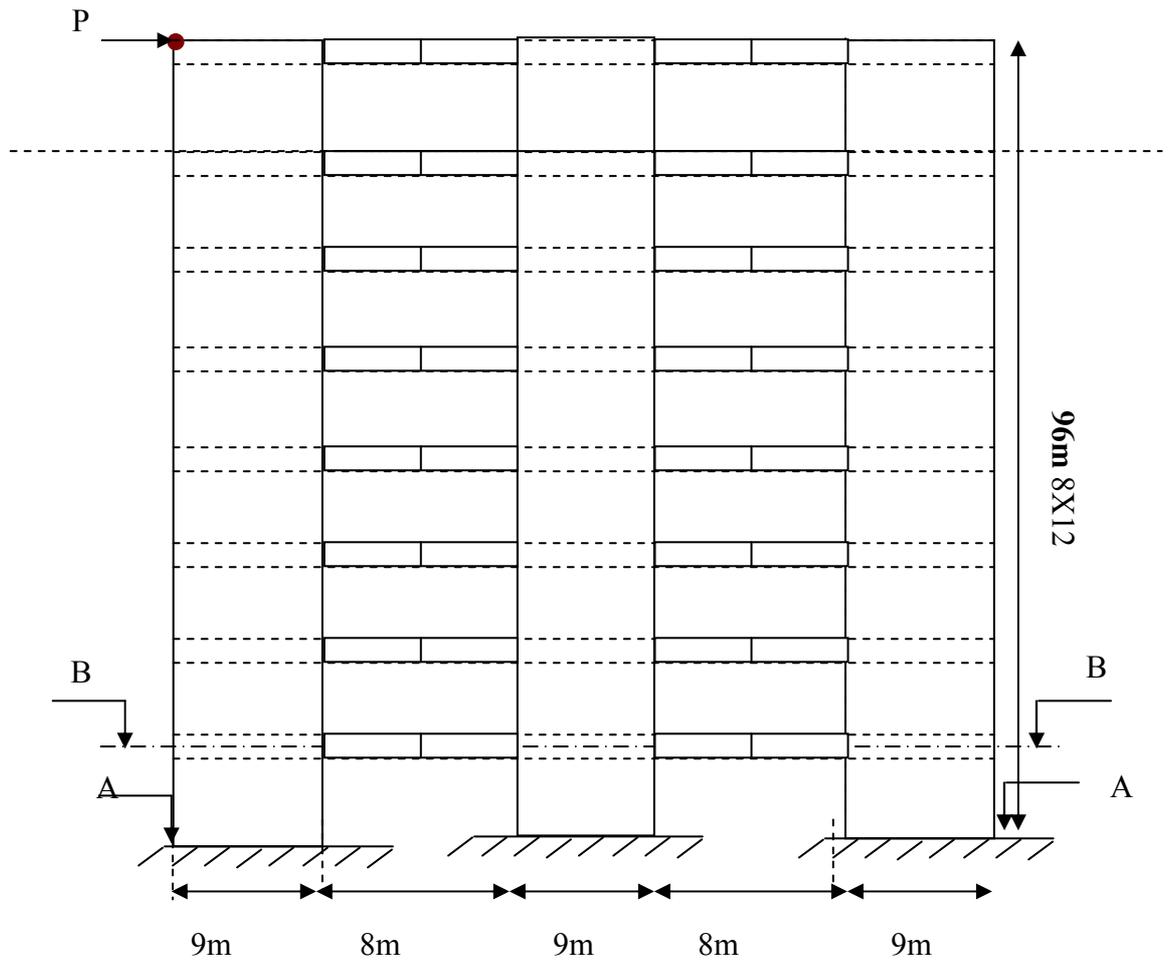


Figure 6.24 : Mur refend avec double ouvertures.

Les figures ci-dessous (6.25, 6.26) montrent la variation des contraintes au niveau de la base du refend à double ouverture et dans le plus bas linteau respectivement.

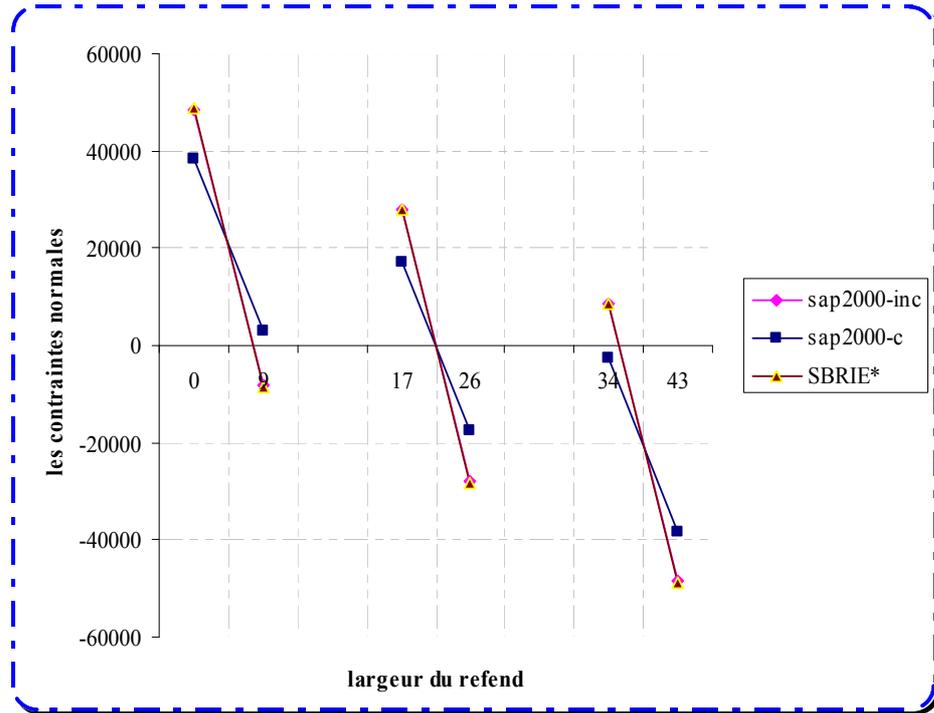


Figure 6.25: La variation de la contraintes normale à la base du refend à double ouverture

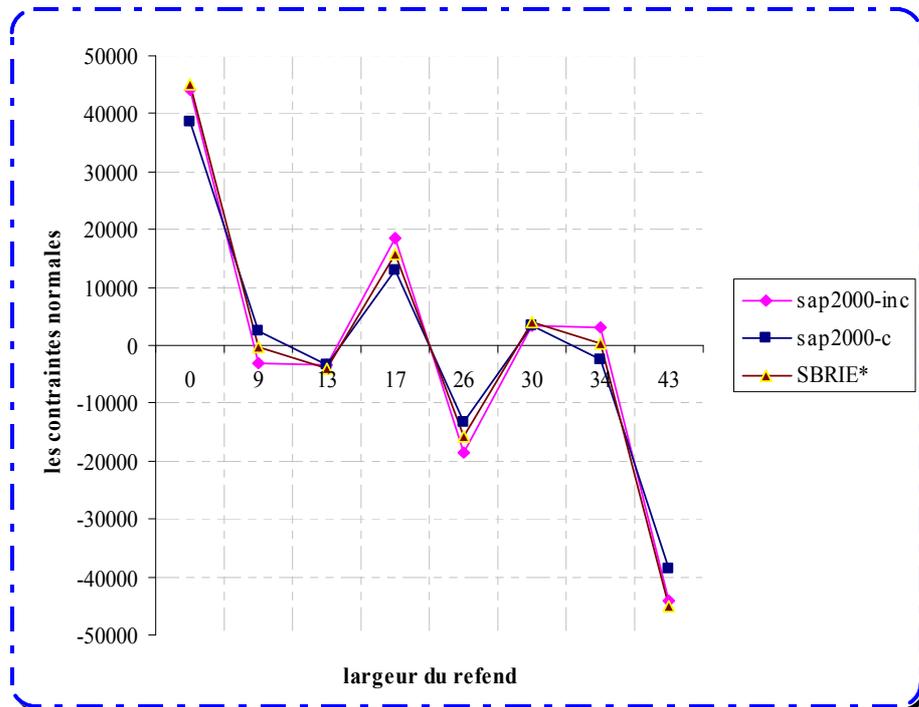


Figure 6.26: La variation de la contraintes normale au niveau de linteau le plus bas du refend à double ouverture.

6.3.3 Refend avec file d'ouvertures : hauteur du linteau variable

L'objectif de ce test est d'étudier l'influence de la hauteur des linteaux sur le comportement des refends. Les caractéristiques mécaniques et géométriques sont montrées sur la figure (6.27). La hauteur du linteau est estimée à 1 ou 3 ft. Deux approches ont été utilisées : approche membrane- membrane figure (6.27) et approche poutre- membrane figure (6.28).

Nous avons utilisé dans ce test deux types d'éléments, le premier SAP2000-inc, et le second SBQ4 à 3DDL par nœud.

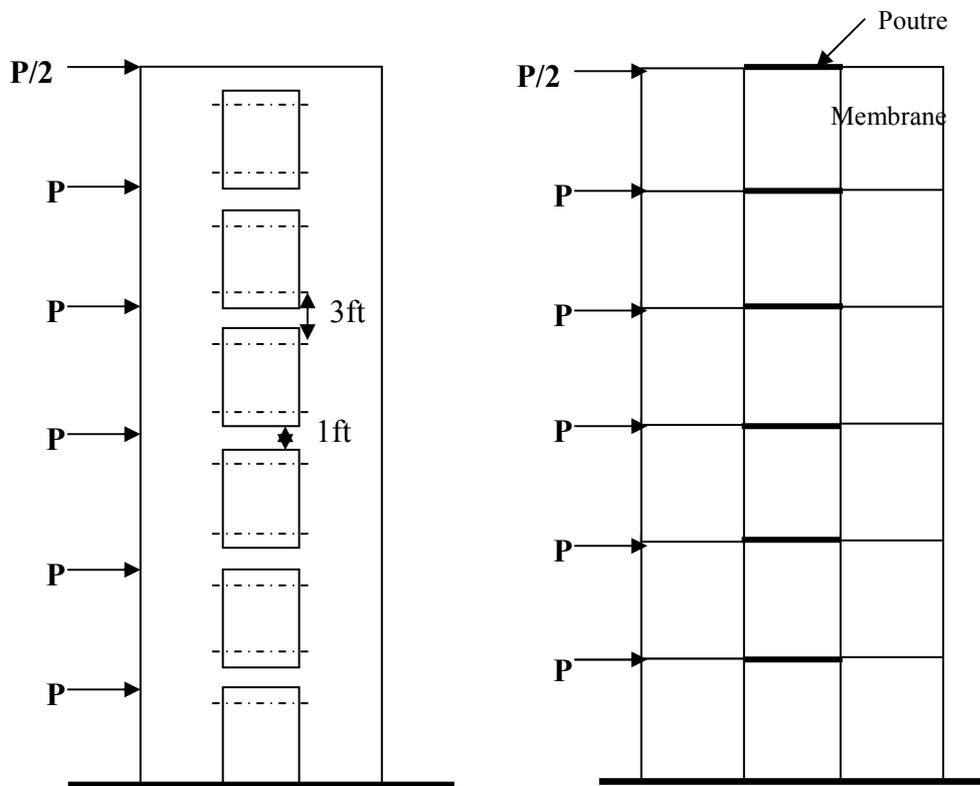


Figure 6.27 mur en refend avec 6 ouvertures (membrane- membrane)

Figure 6.28 mur en refend approche (poutre- membrane)

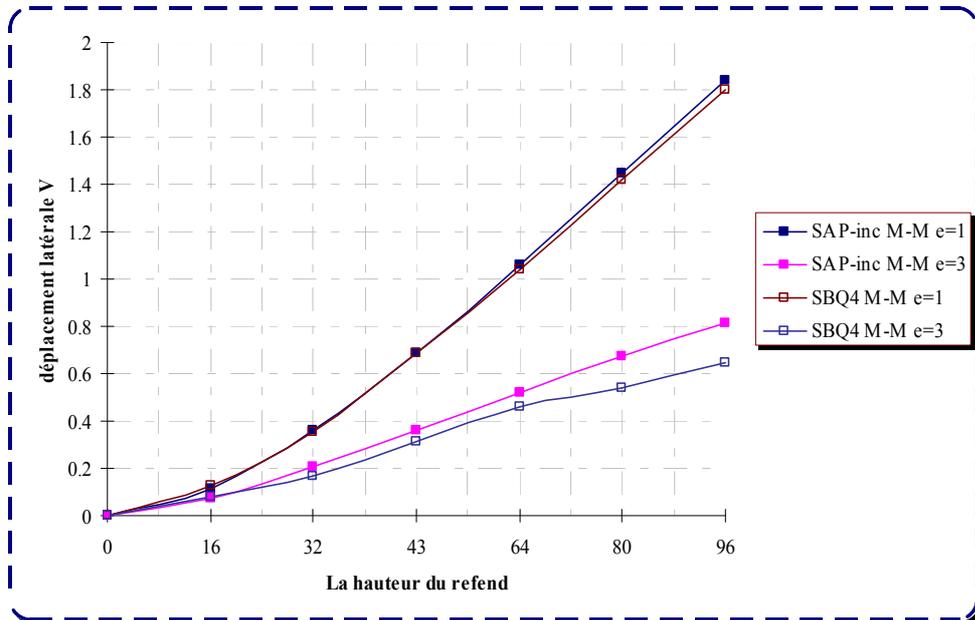


Figure 6.29 Variation des déplacements V (Membrane- Membrane)

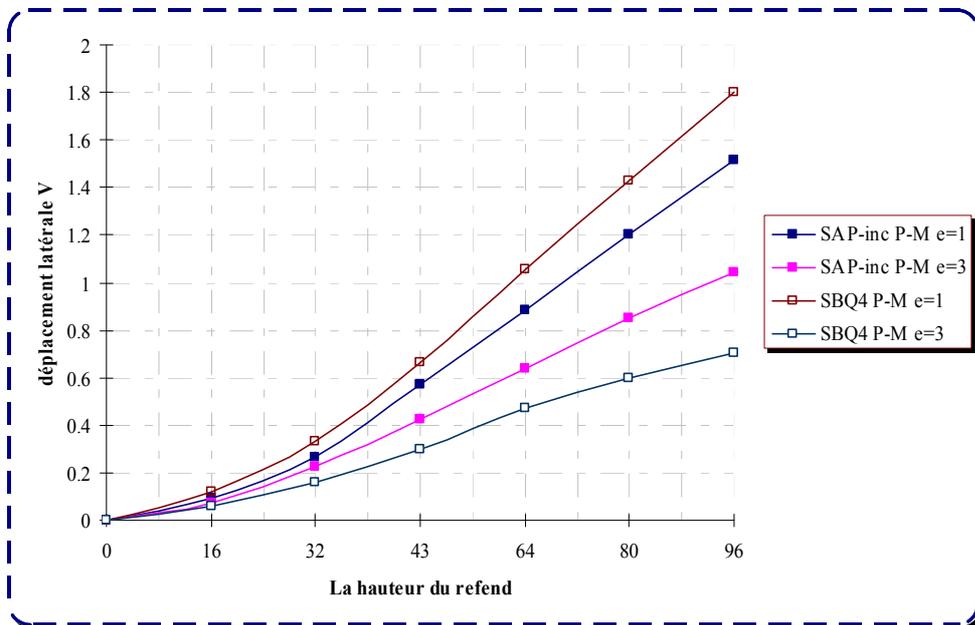


Figure 6.30 Variation des déplacements V (Poutre- Membrane)

Une différence très acceptable est constatée dans l'allure du déplacement de translation V (voir les figures 6.29, 6.30) pour les deux approches. Il reste de noter que l'approche poutre- membrane est beaucoup plus économique que l'approche membrane- membrane.

La modélisation du refend nécessite seulement (12 éléments membranaires et 6 éléments poutres) contrairement à la première approche qui a demandé 168 éléments.

Commentaires :

Les résultats numériques en accord avec ceux de la solution théorique de ROSMAN. Il est intéressant de noter que la contrainte normale verticale maximale est d'un rapport de 1.55 plus élevé que pour le mur refend sans ouverture.

On remarque que les éléments SBRIE* et l'élément incompatible donnent de bons résultats à la base du refend que l'élément compatible, et la configuration couplée. Par contre au niveau du linteau l'élément SBRIE* et l'élément incompatible donnent des contraintes légèrement élevées.

On remarque aussi que la concentration des contraintes au niveau des coupes A-A, et B-B (voir la figure 6.21) de la configuration où l'élément incompatible couplé avec l'élément poutre de BERNOULLI, est toujours élevée que les autres cas.

6.4 La pression interstitielle dans le sol :

Description du modèle :

Dans cet exemple, le niveau de surface phréatique est de 10 pieds au-dessous de la surface de sol. Le poids volumique du sol sec est 125 pcf, avec **pcf** (pounds par pied cube), et le sol humide est de 150 pcf. Le poids volumique de l'eau est 62.4 pcf (voir la figure 6.31). La contrainte verticale dans le sol à 20 pieds au-dessous de la surface de sol est comparée avec le résultat théorique (voir le tableau 6.3)

Note : La contrainte verticale a été estimée au point B.

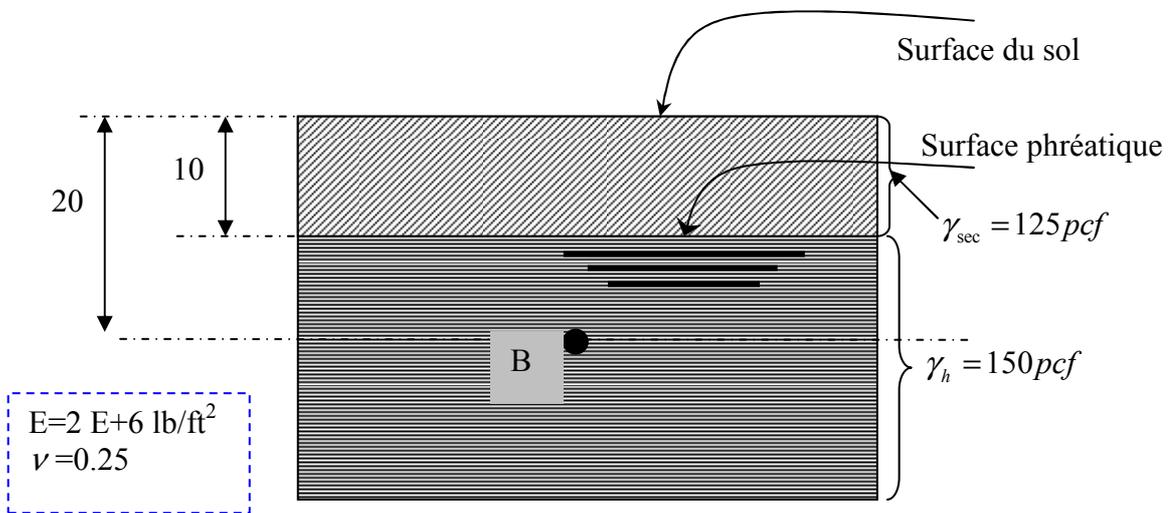


Figure 6.31 : sol saturé au-dessous de 10 pieds

Solution analytique :

$$\sigma_{vert} = -10 \times 125 - 10(150 - 62.4) = -2126 pcf$$

paramètre	SBRIE*	Q4	SAP2000-inc
σ_{vert} au point B	-2871	-2790	-2126

Tableau 6.3 : la contrainte verticale au point B

D'après le tableau (6.3), l'élément SAP2000-inc montre leur crédibilité au niveau d'estimation des contraintes verticales, par contre SBRIE* et Q4 offrent des résultats élevés que la solution exacte, donc on peut dire l'élément SAP2000-inc est le plus économique que ces derniers et le plus performant.

6.5 CONCLUSION :

Pour mettre en évidence les performances des éléments utilisés dans ce chapitre (élément incompatible, compatible et l'élément SBRIE*), nous avons conduit plusieurs tests d'application numérique. Ceux relatifs à la modélisation d'une galerie sous sol et d'un refend (plein et avec file d'ouverture) ont montré l'intérêt des éléments membranaires dans la modélisation des structures bi-dimensionnelles.

Nous avons en suite étudiée plusieurs types d'éléments pour faire une simulation numérique qui peut interpréter le phénomène ou bien le mécanisme réel.

On conclusion l'élément incompatible et SBRIE* montrent les meilleurs résultats à ce comportement.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Aujourd'hui, la méthode des éléments finis est une technique récente à caractère pluridisciplinaire, car elle met en oeuvre les connaissances de trois disciplines de base, la mécanique des structures, l'analyse numérique et l'informatique appliquée. Notre objet est représenté par des fonctions définies sur chaque élément, qui ont l'avantage d'être plus simples que celles que l'on pourrait éventuellement utiliser pour représenter la totalité de l'objet.

Dans notre travail c'est le modèle en déformation qui donne la possibilité de modéliser les structures planes, avec l'application des éléments membranaires.

Alors dans ce travail nous avons présenté les éléments finis membranaires à champ de déformation, d'une part et d'autre part les éléments compatibles et incompatibles. Tous ses possédant soit trois soit quatre nœuds avec des degrés de libertés différentes, et qui sont fondés sur la théorie linéaire de l'élasticité bidimensionnelle valable pour les petits déplacements.

Sept types d'éléments sont présentés dans ce travail, dans la plus part sont à champs de déformation sont indépendants. Ces éléments vérifient les équations de compatibilité et la représentation exacte du mouvement du corps rigide.

Les éléments présentés avec deux degré de liberté SBRIE*, Q4 formulés en axisymétrie pour la représentation du solide de révolution dans quelque tests et applications sont présentés dans le cinquième chapitre pour la validation de la crédibilité des éléments en axisymétrie. Ainsi l'utilisation des éléments intégrés dans le code SAP2000 (les éléments avec et sans les modes incompatibles), permet de faire la comparaison avec les éléments à champ de déformation ou bien avec la solution exacte si elle existe.

Pour mettre en évidence les performances des éléments finis présentés, nous avons conduit plusieurs tests et applications numériques. Ceux relatifs aux problèmes des contraintes planes, ont montré que l'élément incompatible présente une meilleure précision, et l'élément SBRIE* a montre une meilleure stabilité. Donc il est clair au vu de ce test que :

CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

1. la convergence vers la solution exacte pour les éléments à champ de déformation n'est pas toujours liée à la densité de maillage.
2. les modes incompatibles représentent une meilleure résolution du problème au phénomène de *verrouillage* pour les éléments rectangulaires dans le cas de cisaillement ou flexion.
3. les élément SBRIE* SBQ4 sont des éléments sensibles au cisaillement mais le déplacement reste proche de la solution exacte, et ont un comportement stable comparé au l'élément triangulaire.
4. l'élément incompatible reste libre dans les matériaux incompressibles, Mais SBRIE* montre une sensibilité relativement inacceptable.

Mais dans la suite de ce travail, les problèmes d'axisymétrie relatifs au cylindre à paroi épaisse, l'élément incompatible a toujours montré les meilleurs résultats dans tous les cas, par contre SBRIE*, et l'élément compatible restent sensibles dans les matériaux de ($\nu=0.49 - \approx 0.5$), d'autre part l'élément de SAP2000-inc (incompatible) est le plus puissant de tous les éléments étudiés, et donne une convergence rapide et puissante. Par contre SAP2000-c (compatible), Q4 et SBRIE*, converge lentement par rapport au SAP2000-inc et de précision moindre.

L'élément incompatible se dégrade quand il s'agit de plaque mince pour une valeur de $\nu = 0.499$, cela est dû essentiellement au phénomène de verrouillage en cisaillement transverse CT (Locking), par ailleurs dans les plaques encastré donne une meilleurs encadrement de repense à la flexion, mais l'élément SBRIE* donne un comportement inacceptable.

Dans le problème de coque cylindrique mince, les éléments présentés dans ce travail montrent le blocage parfait.

Nous avons, ensuite, évalué la performance des éléments finis représentés, dans le domaine linéaire à travers plusieurs applications en déformation plane et en contrainte plane, nos résultats ont été confrontés aux solutions obtenues par le code en éléments finis SAP2000, ainsi qu'aux solutions analytiques, ils en ressort que l'élément fini **SBRIE*** et **SAP2000-inc** sont très performants dans ce genre d'analyse, les valeurs obtenus sont en effet, presque identiques à celles données par la solution analytique (**exemple du refend**), par contre l'éléments compatible montre une précision moindre que SBRIE*, SAP2000-inc.

CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

En conclusion, cette étude montre que les éléments à champ de déformation ont des avantages par rapport à l'élément standard **Q4**, comme on a constaté que l'élément qui contient les modes incompatibles est plus puissant que les éléments présentés à champ de déformation dans plusieurs cas que ce soit en contrainte plane ou en axisymétrie.

D'après les tests d'applications effectués dans le domaine d'élasticité plane, nous montrons l'intérêt de l'élément membranaire dans le calcul des structures, alors on a besoin d'avoir un élément membranaire très riche dans le domaine axisymétrique, par contre dans les problèmes de contrainte plane il est intéressant de coupler l'élément incompatible avec un élément de plaque très riche pour obtenir un élément de coque intéressant.

Mais toujours notre travail reste modeste pour la validation des éléments finis dans les problèmes en déformation ou en contrainte plane. Alors il est nécessaire de faire une démonstration ou une validation numérique de ces éléments dans le calcul non linéaire, pour compléter la série des tests et les applications les plus récentes.

BIBLIOGRAPHIE

- [ASH 72] Ashwell D.G. et Sabir A.B., *A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain function*, *IJMS Vol. 14*, pp. 171-183, 1972.
- [AYA 95] AYAD Rezak, Alain RIGOLOTT et Sid-Ali KAOUA, *Un modèle hybride au sens de Pian, amélioré en membrane, pour les problèmes d'élasticité plane*, *17ème Congrès Français de Mécanique, troyes- septembre 2005*.
- [BAH 03] Bahi-Eddine LAHOUEL. *Grand élément fini B14 pour l'élasticité tridimensionnelle*. Mémoire de magister, Université de Biskra 2003
- [BAT 90] Batoz J.L., Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis*, Vols 1, 2,3, Hermès 1990
- [BEL 90] Belarbi M.T., *Développement d'algorithmes et éléments dans la méthode des éléments finis*, thèse de Magistère, Université de Annaba, Juillet 1990.
- [BEL 98-a] Belarbi M.T. et Charif A., *Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan*, *Revue Européenne de Eléments finis*, VOL. 7, N° 4, pp. 439-458, Juin 1998.
- [BEL 98-b] Belarbi M.T. et Charif A., *Nouveau Quadrilatère "SBQ4" avec Drilling rotation*, *Conférence Internationale sur les Mathématiques Appliquées et les Sciences de l'Ingénieur CIMASI 98*, 27-29 octobre 1998, Casablanca, Vol. 2, pp. 136-141.
- [BEL 98-c] Belarbi M.T. et Charif A., *Nouvel hexaèdre simple "SBH8" pour l'étude des plaques minces et épaisses*, *les annales Maghrébines de l'ingénieur*, Vol. 12, N° Hors série, extrait de l'acte du 6ème colloque Maghrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingénieur CMMNI6, Tunis 24-26 Nov. 1998, Vol. 2, pp. 632-627.
- [BEL 99] Belarbi M.T. et Charif A., *Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses*, *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 8, N°2, pp. 135-157, 1999.
- [BEL 00] Belarbi M.T., *Développement de nouveaux éléments finis à modèle en déformation, application linéaire et non linéaire*. Thèse de doctorat, Université de Constantine, Février 2000. 235 pages.
- [BEL 05] Belarbi M.T., Note de cours, département de Génie Civil, université de biskra 2005.
- [CAN 68] Cantin G. and Clough R.W., *A curved cylindrical shell Finite Element*, *AIAA Journal*, Vol. 6, N° 6, pp. 1057-1062, June 1968.

- [CHE 92b] Cheung YK, Chen W. Refined hybrid method for plane isoparametric element using an orthogonal approach. *Comput Struct* 1992; 42:683-94.
- [DAT 05] Dhatt, Gouri, philippe sergent, *Éléments finis et hydraulique numérique*
- [DJO 90] Djoudi M.S *strain based finite element for linear and geometrically nonlinear analysis of structures*, PhD Thesis University of walles college of Cardiff (G.B), June 1990
- [FRE 01] Frey F. et Jirousek J, *Analyse des structures et milieux continus, Méthode des éléments finis*, Vol. 6 Eds P.P.U.R., 1ère Edition, Lausanne, 2001.
- [KAS 00, I] Kasper E.P. Taylor, R L, *mixed enhanced formulation part I, for geometrically linear axisymrtic problems*. *Int J Numer. Meth. Engng* 2000; 53:2061-2086(DIO:10.1002/nme.373
- [KAS 00, II] Kasper E.P. Taylor, R L, *mixed enhanced formulation part II,for geometrically linear axisymrtic problems*. *Int J Numer. Meth. Engng* 2000; 53:2061-2086(DIO:10.1002/nme.373
- [MEZ 06] Meziani Nedjma, *Mémoire de magistère Contribution De L'approche En Déformation Dans La Modélisation Des Structures A Contour Circulaire .Université de M^{ed} Khider BISKRA 2006.*
- [ROB 89] Robert D. Cook, David S. Malkus and Micheal E. plesha , *Concepts and applications of finite element analyses*. University of Wisconsin-Madison, john wiley & sons 1988.
- [ROC 79] ROCKEY Lenneth, EVANS Roy, GRIFFITHS William, NETHERCOT David *Introduction à la lethde des elements finis*. Edition Eyrolles , Sain Germain 1979.
- [SAB 72] Sabir A.B. and Lock A.C., *A curved cylindrical shell finite element*, *IJMS*. Vol. 14, pp.25-135, 1972.
- [SAB 73] Sabir A.B. and Lock A.C., *Large deflection geometrically nonlinear finite element analysis of circular arches*, *IJMS*. Vol. 15, pp. 37-47, 1973.
- [SAB 75] Sabir A.B., *Stiffness matrices for the general deformation of curved beam members based on independent strain function*, *the Math. F. E. and Appli. II*ed J.R. Whiteman, Academic Press, 1975.
- [SAB 78] Sabir A.B. and Ashwell D.G., *Diffusion of concentrated loads into thin cylindrical shells*, *The Math. F. E. and Appli. III*ed J.R. Whiteman, Academic Press, 1978.
- [SAB 83] Sabir A.B., *A new class of boite Elements for plane elasticity problems*, *CAFEM 7th, Int. Cof. Struct. Mech. In Reactor Technology*, Chicago, 1983.

- [SAB 85-a] Sabir A.B., *A rectangular and Triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom*, Chapter 9 in proceeding of the second international conference on variational methods in engineering, Southampton University, Springer-verlag, Berlin, pp. 17-25, 1985.
- [SAB 85-b] Sabir A.B. and Ramdhani F., *A shallow shell finite element for general shell analysis*, variational methods in engineering proceeding of the 2nd international conference, Southampton University, England, 1985.
- [SAB 86] Sabir A.B. and Salhi H.Y., *A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates*, Res. Mechanica 19, pp. 1-16, 1986.
- [SED 02] Sedira LAKHDAR. *Contribution du modèle en déformation dans l'analyse des plaques stratifiées composites*. Thèse de magister Université de Batna 2002
- [TUR 56] Turner M.J, Clough R . W Martin H.C., Topp L.J. *Stiffness and deflection analysis complex structures*, J. Aero. Sc. 23, 805-823,1956
- [WIL 02] Wilson. Edward L. *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures a Physical Approach with Emphasis on Earthquake Engineering*, University of California at Berkeley, computer and structure. third edition January 2002
- [YAN 86] YANG.T.Y. *Finite element structural anlysis. Newmark and William J Hll, Editor Ferst edition 1986*
- [YVE 06] Yves Debard Universite du Maine Master Modelisation Numerique et Realite Virtuelle e-mail : yves.debard@univ-lemans.fr
<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>

ANNEXE

ANNEXE

Les matrices de $[K_0]$ pour les éléments étudiés

La matrice D

Pour les contraintes planes

$$D_3 = E / (1. - (\nu^2))$$

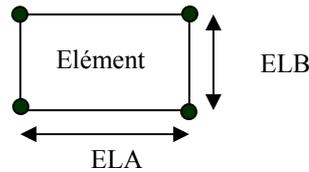
$$D_2 = (1. - \nu) / 2.$$

$$D_{11} = D_3$$

$$D_{12} = D_3 * \nu$$

$$D_{22} = D_{11}$$

$$D_{33} = D_2 * D_3$$



Pour les déformations planes

$$D_1 = E / ((1. + \nu) * (1. - 2. * \nu))$$

$$D_2 = 1. - \nu$$

$$D_3 = \nu$$

$$D_4 = (1. - 2. * \nu) / 2.$$

$$D_{11} = D_2 * D_1$$

$$D_{12} = D_3 * D_1$$

$$D_{22} = D_{11}$$

$$D_{33} = D_4 * D_1$$

Pour l'élément SBRIE*

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{44} & 0 & H_{46} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{64} & 0 & H_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{88} \end{bmatrix}$$

$$H_{44} = D_{11} * (ELA * ELB),$$

$$H_{55} = (D_{11} * (ELB^3) * ELA) / 12.,$$

$$H_{77} = (D_{22} * (ELA^3) * ELB) / 12.$$

$$H_{46} = H_{64} = D_{12} * (ELA * ELB)$$

$$H_{66} = D_{22} * ELB * ELA$$

$$H_{88} = D_{33} * (ELA * ELB)$$

Pour l'élément Q4

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{27} & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} & 0 & 0 & H_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{63} & 0 & 0 & H_{66} & 0 & 0 \\ 0 & H_{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{88} \end{bmatrix}$$

$$H_{22} = D_{11} * (ELA * ELB),$$

$$H_{27} = H_{72} = D_{12} * (ELA * ELB)$$

$$H_{33} = D_{33} * (ELA * ELB),$$

$$H_{36} = H_{63} = (ELA * ELB)$$

$$H_{44} = ((D_{11} * (ELB^3) * ELA) + (D_{33} * (ELA^3) * ELB)) / 12, \quad H_{66} = D_{33} * ELB * ELA$$

$$H_{88} = ((D_{33} * (ELB^3) * ELA) + (D_{22} * (ELA^3) * ELB)) / 12, \quad H_{77} = D_{22} * ELA * ELB$$

Pour l'élément SBQ4

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{44} & 0 & 0 & H_{47} & 0 & 0 & H_{410} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{55} & 0 & 0 & 0 & H_{59} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{612} \\ 0 & 0 & 0 & H_{74} & 0 & 0 & H_{77} & 0 & 0 & H_{710} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{88} & H_{89} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{95} & 0 & 0 & 0 & H_{99} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{410} & 0 & 0 & H_{107} & H_{98} & 0 & H_{1010} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{1111} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{126} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{1212} \end{bmatrix}$$

ANNEXE

$$H_{44} = ELA * ELB * D_{11}$$

$$H_{47} = ELA * ELB * D_{12}$$

$$H_{410} = \left[(ELA * ELB^3 * D_{11} / 12) - (ELA^3 * ELB * D_{12} / 12) \right]$$

$$H_{55} = 4 * ELA * ELB * D_{33}$$

$$H_{66} = (ELA^3 * ELB * D_{33} / 3) + (ELA * ELB^3 * D_{11} / 12)$$

$$H_{612} = ELA^3 * ELB * D_{33} / 3$$

$$H_{77} = ELA * ELB * D_{22}$$

$$H_{710} = \left[(ELA * ELB^3 * D_{12} / 12) - (ELA^3 * ELB * D_{22} / 12) \right]$$

$$H_{88} = \left[(ELA * ELB^3 * D_{33} / 12) + (ELA^3 * ELB * D_{22}) \right]$$

$$H_{89} = ELA * ELB^3 * D_{33}$$

$$H_{99} = H_{89}$$

$$H_{1010} = \left[(ELA * ELB^5 * D_{11} / 80) - (ELA^3 * ELB^3 * D_{33}) + (ELA^5 * ELB * D_{22}) \right]$$

$$H_{1111} = \left[(ELA^3 * ELB^7 * D_{11} / 1344) - (ELA^5 * ELB^5 * D_{22} / 800) \right]$$

$$H_{1212} = H_{612}$$

L'élément triangulaire

Pour accéder les termes de T (I), qui représentent l'intégrale de la surface du triangle, voire la subroutine CINT (TI, COORD) ci-dessous.

Pour SBTSAB*

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} & H_{46} & H_{47} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{54} & H_{55} & H_{56} & H_{57} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{64} & H_{65} & H_{66} & H_{67} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{74} & H_{75} & H_{76} & H_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{88} & H_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{98} & H_{99} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} H_{44} &= D_{11} * TI (1), & H_{57} &= D_{12} * TI (7) \\ H_{45} &= D_{11} * TI (6), & H_{66} &= D_{22} * TI (1) \\ H_{46} &= D_{12} * TI (1), & H_{67} &= D_{22} * TI (2) \\ H_{47} &= D_{12} * TI (2), & H_{77} &= D_{22} * TI (3) \\ H_{55} &= D_{11} * TI (10), & H_{88} &= D_{33} * TI (1) \\ H_{56} &= D_{12} * TI (6), & H_{89} &= D_{33} * (TI (2) + TI (6)) \\ H_{99} &= D_{33} * (TI (3) + TI (10) + 2 * TI (7)), \end{aligned}$$

La matrice de rigidité pour la poutre de BERNOULLI

La combinaison entre le comportement axial à celui flexionnel. La référence géométrique est l'axe de la poutre.

$$[\bar{K}_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

RESUME

La modélisation des structures dont le comportement est membranaire a fait l'objet de nombreuses études et travaux de recherches, surtout en ce qui concerne l'approche en déformation. L'objectif du présent sujet de recherche est l'évaluation des éléments à champ de déformation, ainsi que l'utilisation des éléments incompatibles dans la modélisation des structures et cela pour les problèmes d'élasticité plane.

L'efficacité des éléments membranaires à quatre et trois noeuds avec deux DDL, ainsi que les éléments ayant trois DDL par noeud a été démontrée. Les éléments testés sont l'élément rectangulaire SBRIE* à deux DDL par noeud, et l'élément triangulaire SBTSAB* et l'élément rectangulaire SBQ4 à trois DDL par noeud, ayant un comportement membranaire.

La confrontation des résultats des éléments de SBRIE*, et l'élément classique Q4, ainsi que l'élément SBQ4, avec les résultats analytiques, d'autre part l'exploitation des éléments membranaires compatible et incompatible intégrés dans le logiciel SAP2000, à été élaborée pour la validation numérique des problèmes traités en contrainte plane et en axisymétrie.

D'autres applications spéciales en contrainte plane et en déformation plane ont traité pour l'efficacité de l'élément SBRIE*, ainsi que les éléments incompatibles implantés dans le logiciel SAP2000.

Mots clés : l'approche en déformation, élasticité plane, axisymétrie, membrane , compatible, incompatible.

ABSTRACT

The modeling of the structures whose membrane behavior made the object of many studies and research works, especially with regard to the strain based approach. The objective of this subject of research is the evaluation of elements to strain based approach, and the use of the incompatible elements in the modeling of the structures and that for the problems of plane elasticity.

L'effectiveness of the membrane elements with four and three nodes with two DOF, and the elements having three DOF per node was shown. The elements tested are rectangular element SBRIE * with two DOF per node, and triangular element SBTSAB * and rectangular element SBQ4 to three DOF per node, having a membrane behavior.

The confrontation of the results of the elements of SBRIE *, and the traditional element Q4, and SBQ4 element, with the analytical results, in addition the exploitation of the membrane elements compatible and incompatible integrated in software SAP2000, at summer worked out for the numerical of validation with problems treated in plan stress and in an axisymmetry.

Other special applications in plane stress and plane strain, treated for the effectiveness of element SBRIE *, and the incompatible elements established in software SAP2000.

Key words: strain based approach, plan elasticity, axisymmetry, membrane, compatible, incompatible.

ملخص

دراسة ومحاكاة الهياكل ذات السلوك الغشائي كانت ومازالت موضوع العديد من الأبحاث خاصة مجال التقريب في التشوه. الهدف من هذا البحث تقييم عناصر مجال التقريب في التشوه والعناصر الغير متلائمة في محاكاة الهياكل و مسائل المرونة في المستوى.

نبرهن فعالية العناصر الغشائية ذات أربعة و ثلاثة عقد مع درجتي حرية أو ثلاثة لكل عقدة. العناصر المختبرة هي العنصر المستطيل SBRIE* ذو درجتي حرية في كل عقدة و العنصر المثلثي SBTSAB* والعنصر المستطيل SBQ4 ذو ثلاث درجات حرية في كل عقدة ، هذه العناصر ذات سلوك غشائي.

مقارنة نتائج عناصر SBRIE* والعنصر Q4 بالإضافة إلى العنصر SBQ4 مع النتائج النظرية، من ناحية أخرى سنستعمل العناصر المتلائمة وغير المتلائمة الموجودة في البرنامج SAP2000 وهذا من أجل القيام بتجارب رقمية للتحقق من المسائل التي تمت معالجتها في حالة الإجهاد المستوي و حالة التناظر المحوري.

بعض التطبيقات الخاصة في الإجهاد المستوي والتشوه المستوي، التي استعملت من أجل فعالية العنصر SBRIE*، والعنصر الغير ملائم الموجود في البرنامج SAP2000.

الكلمات المفتاحية : التقريب في التشوه، مرونة مستوية، تناظر محوري، غشاء، المتلائمة، وغير المتلائمة.